เซมิกรุปออธอดอกซ์และเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส

หอสมุดกลาง
จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

นางสาว สุวิมล ก่อเกิดวิบูลย์

006187

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๒๑

i 18101550

ORTHODOX SEMIGROUPS AND QUASI-INVERSE SEMIGROUPS

MISS SUWIMON GAWGIRDWIBOON

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1978

Thesis Title	Orthodox Semigroups and Quasi-inverse Semigroups
By	Miss Suwimon Gawgirdwiboon
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Assist. Prof. Dr. Yupaporn Tirasupa

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Visid Prachuabmoh ... Dean of Graduate School

(Professor Visid Prachuabmoh Ph.D.)

Thesis Committee

Thavee Srisangthong ... Chairman

(Assistant Professor Thavee Srisangthong M.A.)

Mark Tamthai ... Member

(Assistant Professor Mark Tamthai Ph.D.)

Yupaporn Tirasupa ... Member

(Assistant Professor Yupaporn Tirasupa Ph.D.)

Copyright of the Graduate School, Chulalongkorn University.

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เซมิกรุปออธอดอกซ์และเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส

ชื่อนิสิต นางสาวสุวิมล ก่อเกิดวิบูลย์

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ. ดร. ยุพาภรณ์ ถิระศุภะ

แผนกวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา ๒๕๒๐

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อ

เซมิกรุปออธอดอกซ์ และเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส ต่างก็เป็นเซมิกรุปเร็กกูลาร์ และทุก ๆ เซมิกรุปผกผัน เป็นทั้งเซมิกรุปออธอดอกซ์ และเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส แต่เซมิกรุปออธอดอกซ์ และเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์สไม่จำเป็นต้องเป็นเซมิกรุปผกผัน

เราแสดงให้เห็นว่าเซมิกรุปย่อยเร็กกูลาร์ใด ๆ ของเซมิกรุปออธอดอกซ์ เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์ แต่เซมิกรุปย่อยเร็กกูลาร์ของเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส ไม่จำเป็นต้องเป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส ให้ I เป็นไอเดียลใด ๆ ของเซมิกรุป S ฮอลล์ได้พิสูจน์ว่าเซมิกรุป S เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์เมื่อและต่อเมื่อไอเดียล I และเซมิกรุปรีส์คอเชียน S/I เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์ และเราได้แสดงว่า บทกลับของทฤษฎีนี้ไม่เป็นจริงในกรณีการเป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส แต่ถ้ากำหนดให้ว่าไอเดียล I เป็นไอเดียลคอมพลีตลีไพรมแล้ว เซมิกรุป S เป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส เมื่อและต่อเมื่อ ไอเดียล I และเซมิกรุปรีส์คอเชียน S/I เป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส นอกจากนั้น เรายังแสดงได้ว่า ทุก ๆ เซมิกรุป S ที่มีเคอร์นัล มีคอนกรูเอนซ์รีส์ออธอดอกซ์ที่เล็กที่สุด คอนกรูเอนซ์รีส์ไร้ท์-อินเวอร์สที่เล็กที่สุด และคอนกรูเอนซ์รีส์เยนเนอรัลไลซ์อินเวอร์สที่เล็กที่สุดเสมอ เราพิสูจน์ได้ด้วยว่าทุก เซมิกรุปออธอดอกซ์มีเซมิกรุปย่อยควอไซ-อินเวอร์สชนิดฟูลที่ไม่เล็กกว่าเซมิกรุปย่อยควอไซ-อินเวอร์สชนิดฟูลอื่น ๆ ของเซมิกรุปนี้เสมอ

ไซน์ได้พิสูจน์ว่า เซมิกรุปทรานสฟอร เมชั่นชนิดฟูลบนเซ็ตใด ๆ เป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส และเราพิสูจน์ได้ว่า เซมิกรุปทรานสฟอร เมชั่นชนิดพาร์เชียลบนเซ็ตใด ๆ ก็เป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์สด้วย ยิ่งไปกว่านั้น ยังได้บอกถึงลักษณะของการเป็นเซมิกรุปออธอ-ดอกซ์ เซมิกรุปไร้ท์-อินเวอร์ส และเซมิกรุปเยนเนอรัลไลซ์-อินเวอร์สของเซมิกรุปทรานส-ฟอร เมชั่นบนเซ็ต X ในเทอมของคาร์ดินาลิตี้ของ X ดังต่อไปนี้คือ ให้ X เป็นเซ็ตใด ๆ T_X และ $\mathcal{T}_X$ เป็นเซมิกรุปทรานสฟอร เมชั่นชนิดพาร์เชียลบนเซ็ต X และเซมิกรุปทรานสฟอร-เมชั่นชนิดฟูล บนเซ็ต X ตามลำดับแล้ว เราได้ว่า

(๑) T_X เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์

(๒) คาร์ดินาลิตี้ของ X ไม่มากกว่า ๑

และ (๓) T_X เป็นเซมิกรุปไร้ท์-อินเวอร์ส

สมมูลย์กัน และ

(๑') $\mathcal{T}_X$ เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์

(๒') คาร์ดินาลิตี้ของ X ไม่มากกว่า ๒

และ (๓') $\mathcal{T}_X$ เป็นเซมิกรุปไร้ท์-อินเวอร์ส

สมมูลย์กัน

ฮอลล์ได้ให้สูตรของคอนกรูเอนซ์ผกผันที่เล็กที่สุดบนเซมิกรุปออธอดอกซ์ ในวิทยานิพนธ์นี้ เราให้สูตรของคอนกรูเอนซ์ไร้ท์-อินเวอร์สที่เล็กที่สุดบนเซมิกรุปเยนเนอรัลไลซ์อินเวอร์ส และเราได้พิสูจน์ว่า คอนกรูเอนซ์ผกผันที่เล็กที่สุดบนเซมิกรุปออธอดอกซ์ S เมื่อคิดแต่ส่วนบน E(S) ซึ่งเป็นเซ็ตของไอเดมโพเท้นต์ทั้งหมดของ S คือ คอนกรูเอนซ์เซมิแลตติสที่เล็กที่สุดบน E(S) นั่นเอง นอกจากนั้น คอนกรูเอนซ์ผกผันที่เล็กที่สุดบนเซมิกรุปย่อยเร็กกูลาร์ T ของเซมิกรุปออธอดอกซ์ S ก็คือ คอนกรูเอนซ์ผกผันที่เล็กที่สุดบนเซมิกรุป S เมื่อคิดแต่ส่วนบนเซมิ-กรุปย่อย T นั่นเอง

ให้ $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ เป็นเซมิแลตติส Y ของเซมิกรุป S_α เราทราบจาก [๖] ว่าเซมิกรุป S เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์ เมื่อและต่อเมื่อ S_α เป็นเซมิกรุปออธอดอกซ์ทุก ๆ α ใน Y และเราได้พิสูจน์สิ่งต่อไปนี้

๑. S เป็นเซมิกรุปไร้ท์-อินเวอร์ส เมื่อและต่อเมื่อ S_α เป็นเซมิกรุปไร้ท์-อินเวอร์ส ทุก ๆ α ใน Y

๒. S เป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส เมื่อและต่อเมื่อ S_α เป็นเซมิกรุปควอไซ-อินเวอร์ส ทุก ๆ α ใน Y

๓. ถ้า S เป็นเซมิกรุปเยนเนอรัลไลซ์ อินเวอร์สแล้ว S_α เป็นเซมิกรุปเยนเนอรัลไลซ์ อินเวอร์ส ทุก ๆ α ใน Y

บทกลับของ ๓. ไม่เป็นจริงโดยทั่วไป

Thesis Title Orthodox Semigroups and Quasi-inverse Semigroups

Name Miss Suwimon Gawgirdwiboon

Thesis Advisor Assist. Prof. Dr. Yupaporn Tirasupa

Department Mathematics

Academic Year 1977

ABSTRACT

Orthodox semigroups and quasi-inverse semigroups are regular semigroups, and they are at the same time generalizations of inverse semigroups.

A regular subsemigroup of an orthodox semigroup is orthodox, but a regular subsemigroup of a quasi-inverse semigroup is not necessarily quasi-inverse. Let I be an ideal of a semigroup S. It has been proved by Hall that S is orthodox if and only if I and the Rees quotient semigroup S/I are orthodox. The converse is not true for being quasi-inverse. If I is completely prime, then S is quasi-inverse if and only if I and S/I are quasi-inverse. In any semigroup S with kernel, the intersection of all orthodox Rees congruences on S, the intersection of all right-inverse Rees congruences on S and the intersection of all generalized inverse Rees congruences on S are the minimum orthodox Rees congruence, the minimum right-inverse Rees congruence and the minimum generalized inverse Rees congruence

on S; respectively. A maximal full quasi-inverse subsemigroup of an orthodox semigroup always exists.

The full transformation semigroup on any set is quasi-inverse, and a proof is given by Schein. It is shown that the partial transformation on any set is also quasi-inverse. The characterizations of an orthodox transformation semigroup, of a right-inverse transformation semigroup and of a generalized inverse transformation semigroup on a set X are given in term of the cardinality of X as follow : Let X be a set, T_X and $\mathcal{T}_X$ be the partial transformation semigroup on X and the full transformation semigroup on X; respectively. Then

(1) T_X is orthodox,

(2) the cardinality of X, $|X| \leq 1$,

and (3) T_X is right-inverse

are equivalent; and

(1') $\mathcal{T}_X$ is orthodox,

(2') $|X| \leq 2$,

and (3') $\mathcal{T}_X$ is right-inverse

are equivalent.

An explicit form of the minimum inverse congruence on an orthodox semigroup has been given by Hall. In this thesis, an explicit form of the minimum right-inverse congruence on a generalized inverse semigroup is given. It is observed that the restriction of the minimum inverse congruence on an orthodox semigroup S to the set of all idempotents of S, E(S), is the minimum semilattice congruence on E(S). Moreover, the minimum inverse congruence on a regular subsemigroup T of an orthodox semigroup S is the restriction of the minimum inverse congruence on S to T.

Let $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ be a semilattice Y of semigroups S_α. It has been proved in [6] that S is orthodox if and only if S_α is orthodox for each $\alpha \in Y$. From our observation, the following are also true :

1. S is right-inverse if and only if S_α is right-inverse for all $\alpha \in Y$.

2. S is quasi-inverse if and only if S_α is quasi-inverse for all $\alpha \in Y$.

3. If S is generalized inverse, then S_α is generalized inverse for all $\alpha \in Y$.

The converse of 3. is not true in general.

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Yupaporn Tirasupa, my thesis supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also, I feel very thankful to all of my lecturers for their valuable knowledge while studying.

In particular, I am very grateful to my parents for their encouragement throughout my graduate study.

หอสมุดกลาง
จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

CONTENTS

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

INTRODUCTION

For a semigroup S, E(S) will denote the set of all idempotents of S, that is ;

$$E(S) \quad = \quad \{a \in S \mid a^2 = a\}.$$

A semigroup S is a <u>band</u> if E(S) = S, and a semigroup S is a <u>semilattice</u> if it is a commutative band.

A semigroup S is called a <u>left</u> [right] <u>zero</u> <u>semigroup</u> if ab = a [ab = b] for all a, b $\in$ S. A semigroup S with zero 0 is called a <u>zero</u> <u>semigroup</u> if ab = 0 for all a, b $\in$ S.

Let S be a semigroup, and let 1 be a symbol not representing any element of S. The notation $S \cup 1$ denotes the semigroup obtained by extending the binary operation on S to one by defining 11 = 1 and 1a = a1 = a for all a $\in$ S. For a semigroup S, the notation S^1 denotes the following semigroup :

$$S^1 \quad = \quad \begin{cases} S & \text{if S has an identity,} \\ S \cup 1 & \text{if S has no identity.} \end{cases}$$

An element a of a semigroup S is <u>regular</u> if a = axa for some x $\in$ S, and S is <u>regular</u> if every element of S is regular.

In any semigroup S, if a, x $\in$ S such that a = axa, then ax and xa are idempotents of S. Hence, if S is a regular semigroup then $E(S) \neq \phi$.

Let a and x be elements of a semigroup S such that a = axa. Then

(i) $aS = aS^1$ and $S^1a = Sa$, and

(ii) $aS = axS$ and $Sxa = Sa$.

Let a be an element of a semigroup S. An element x of S is called an <u>inverse</u> of a if $a = axa$ and $x = xax$. If a is a regular element of a semigroup S, then $a = axa$ for some $x \in S$, and hence xax is an inverse of a. Therefore a semigroup S is regular if and only if every element of S has an inverse. A semigroup S is called an <u>inverse semigroup</u> if every element of S has a unique inverse, and the unique inverse of the element a of S is denoted by a^{-1}. A semigroup S is an inverse semigroup if and only if S is regular and any two idempotents of S commute [1, Theorem 1.17]. Hence, if S is an inverse semigroup, then E(S) is a semilattice. For any elements a, b of an inverse semigroup S and $e \in E(S)$, the following hold :

$$e^{-1} = e, \quad (a^{-1})^{-1} = a \quad \text{and} \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

[1, Lemma 1.18].

The relation $\leq$ defined on an inverse semigroup S by

$$a \leq b \quad \text{if and only if} \quad aa^{-1} = ab^{-1}$$

is a partial order on S [2, Lemma 7.2], and this partial order is called the <u>natural partial order</u> on the inverse semigroup S. We note that the restriction of the natural partial order $\leq$ on an inverse semigroup S to E(S) is as follows : For $e, f \in E(S)$,

$$e \leq f \quad \text{if and only if} \quad e = ef \ (= fe).$$

Then, if S is a semilattice, $a \leq b$ in S if and only if $a = ab$ (=ba).

Let X be a set. Let $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ and $\alpha : A \to B$ be an onto map. Then α is a <u>partial transformation</u> of X, and we denote A and B by $\Delta\alpha$ and $\nabla\alpha$; respectively. If $\Delta\alpha = \nabla\alpha = \phi$, then α is called the empty transformation of X and denoted by 0. Let T_X be the set of all partial transformations of X (including 0). For $\alpha, \beta \in T_X$, define the product $\alpha\beta$ as follows : If $\nabla\alpha \cap \Delta\beta = \phi$, we define $\alpha\beta = 0$. If $\nabla\alpha \cap \Delta\beta \neq \phi$, let $\alpha\beta : (\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\alpha^{-1} \to (\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\beta$ be the composition map. Obviously, $\nabla(\alpha\beta) = (\nabla\alpha \cap \Delta\beta)\beta$. Then T_X is a semigroup with zero 0 and it is called the partial transformation semigroup on the set X. Note that for any set X, T_X is a regular semigroup.

An element $\alpha \in T_X$ is a full transformation of X if $\Delta\alpha = X$. Let $\mathcal{T}_X$ be the set of all full transformations of X. Then under the composition of maps, $\mathcal{T}_X$ is a subsemigroup of T_X and it is called the full transformation semigroup on X. For any set X, $\mathcal{T}_X$ is also a regular semigroup.

Let S and T be semigroups and $\psi : S \to T$ be a map. The map ψ is a homomorphism from S into T if

$$(ab)\psi = (a\psi)(b\psi)$$

for all $a, b \in S$, and ψ is called an isomorphism if ψ is a homomorphism and one-to-one. The semigroups S and T are isomorphic if there is an isomorphism from S onto T and we write $S \cong T$.

A semigroup T is a homomorphic image of a semigroup S if there exists a homomorphism from S onto T.

Let a semigroup T be a homomorphic image of a semigroup S by a homomorphism ψ. If S is an inverse semigroup, then $T = S\psi$ is an inverse semigroup, for any $a \in S$, $(a\psi)^{-1} = a^{-1}\psi$ [2 , Theorem 7.36], and moreover, for each $f \in E(T)$, there is $e \in E(S)$ such that $e\psi = f$

[2 , Lemma 7.34], and hence

$$E(T) = \{e\psi \mid e \in E(S)\}.$$

Let S be a semigroup. A relation ρ on S is called *left compatible* if for a, b, c $\in$ S, $a\rho b$ implies $ca\rho cb$. *Right compatible* is defined dually. An equivalence relation ρ on S is called a *congruence* on S if it is both left compatible and right compatible.

If ρ is a congruence on a semigroup S, then the set

$$S/\rho = \{a\rho \mid a \in S\}$$

with operation defined by

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho \qquad (a, b \in S)$$

is a semigroup, and is called the *quotient semigroup relative to the congruence* ρ.

Let ρ be a congruence on a semigroup S. Then the mapping $\psi : S \to S/\rho$ defined by

$$a\psi = a\rho \qquad (a \in S)$$

is an onto homomorphism and ψ will be denoted by $\rho^{\natural}$, and call it the *natural homomorphism* of S onto S/ρ.

Conversely, if $\psi : S \to T$ is a homomorphism from a semigroup S into a semigroup T, then the relation ρ on S defined by

$$a\rho b \text{ if and only if } a\psi = b\psi \qquad (a, b \in S)$$

is a congruence on S and $S/\rho \cong S\psi$, and ρ is called the *congruence on S induced by* ψ.

Let ρ_1 and ρ_2 be congruences on a semigroup S such that $\rho_1 \subseteq \rho_2$. Then S/ρ_2 is a homomorphic image of S/ρ_1 by a homomorphism $\psi : S/\rho_1 \to S/\rho_2$ defined by

$$(a\rho_1)\psi = a\rho_2 \qquad (a \in S).$$

Let ρ be a congruence on an inverse semigroup S. Then S/ρ is an inverse semigroup and hence for $a \in S$, $(a\rho)^{-1} = a^{-1}\rho$ and

$$E(S/\rho) = \{e\rho \mid e \in E(S)\}.$$

Arbitrary intersection of congruences on a semigroup S is a congruence on S.

Let ρ be a nonempty relation on a semigroup S. The <u>congruence on</u> S <u>generated by</u> ρ is the intersection of all congruence on S containing ρ. Then the congruence on S generated by ρ is the smallest congruence on S containing ρ.

A nonempty subset A of a semigroup S is called a <u>left ideal</u> of S if $SA \subseteq A$. A <u>right ideal</u> of a semigroup S is defined dually. An <u>ideal</u> of a semigroup S is both a left ideal and a right ideal of S.

Let S be a semigroup. Arbitrary intersection of left ideals [right ideals] if nonempty is a left ideal [right ideal] of S. Arbitrary intersection of ideals of S if nonempty is an ideal of S.

Let A be a nonempty subset of a semigroup S. The <u>left ideal of</u> S <u>generated by</u> A is the intersection of all left ideals of S containing A. The <u>right ideal of</u> S <u>generated by</u> A is defined dually. The <u>ideal of</u> S <u>generated by</u> A is the intersection of all ideals of S containing A. A <u>principal left ideal</u> of S is a left ideal of S generated by a set of one element of S. A <u>principal right ideal</u> and a <u>principal ideal</u> of S are defined similarly.

Let S be a semigroup. Then a left ideal [right ideal, ideal]

A of S is principal if and only if $A = S^1a$ [$A = aS^1$, $A = S^1aS^1$] for some $a \in S$, and we call A the <u>principal left ideal</u> [principal right ideal, principal ideal] <u>of</u> S <u>generated by</u> a. If a is a regular element of S, then $S^1a = Sa$, $aS^1 = aS$ and $S^1aS^1 = SaS$.

Let S be a semigroup and a, x be the elements of S such that $a = axa$. Then $Sa = Sxa$, $aS = axS$ and $SaS = SaxS = SxaS$. Hence, every principal left [right] ideal and every principal ideal of a regular semigroup have idempotent generators.

The intersection of all ideals of a semigroup S if nonempty is called the <u>kernel</u> of S. Then, if a semigroup S has the kernel K, then K is the smallest ideal of S.

Let S be a semigroup and A be an ideal of S. Then the relation ρ defined by

$$a\rho b \text{ if and only if } a, b \in A \text{ or } a = b \quad (a, b \in S)$$

is a congruence on S and it is called the <u>Rees congruence</u> on S <u>induced by</u> A and S/ρ is the <u>Rees quotient semigroup induced by</u> A and it is denoted by S/A. Hence

$$a\rho = \begin{cases} \{a\} & \text{if } a \notin A \\ A & \text{if } a \in A, \end{cases}$$

and S/ρ is the semigroup with zero, and for any $a \in S$, $a\rho$ is the zero of S/ρ if and only if $a \in A$.

Let C be a class of semigroups and ρ be a congruence on a semigroup S. Then ρ is called a <u>C congruence</u> if $S/\rho \in C$.

If ρ is a semilattice congruence on S then each ρ-class is clearly a subsemigroup of S.

Let Y be a semilattice and a semigroup $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ be a disjoint union of subsemigroups S_α of S. S is called a <u>semilattice</u> Y <u>of semigroups</u> S_α if $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ for all $\alpha, \beta \in Y$; or equivalently, for all $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ imply $ab \in S_{\alpha\beta}$.

If $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ is a semilattice Y of semigroups S_α, then the relation ρ defined by

$a\rho b$ if and only if $a, b \in S_\alpha$ for some $\alpha \in Y$ $(a, b \in S)$

is a semilattice congruence on S, for each $\alpha \in Y$, S_α is a ρ-class, and $S/\rho \cong Y$.

Let ρ be a semilattice congruence on a semigroup S. Then S is a semilattice Y of semigroups S_α where $Y = S/\rho$ and for each $\alpha \in Y$, S_α is a ρ-class.

A regular semigroup S is <u>orthodox</u> if E(S) forms a subsemigroup of S. A regular semigroup S is a <u>right-inverse semigroup</u> if every principal left ideal of S has a unique idempotent generator.

A regular semigroup S is right-inverse if and only if $efe = fe$ for all $e, f \in E(S)$ [3].

A regular semigroup S is <u>generalized inverse</u> if for each $e, f, g, h \in E(S)$, $efgh = egfh$.

Note that every right-inverse semigroup and every generalized inverse semigroup are orthodox.

A semigroup S is called a <u>quasi-inverse semigroup</u> if for any $a \in S$, there is an inverse subsemigroup of S containing a.

Orthodox semigroups and quasi-inverse semigroups are regular semigroups, and they are both generalizations of inverse semigroups.

In the first chapter, various general properties of orthodox semigroups and of quasi-inverse semigroups are introduced. It is shown that a regular subsemigroup of an orthodox semigroup is orthodox but a regular subsemigroup of a quasi-inverse semigroup is not necessarily quasi-inverse. Let I be an ideal of a semigroup S. It has been proved in [4] that S is orthodox if and only if I and S/I are orthodox. We show in this chapter that this is also true for being right-inverse, but the converse is not true for being generalized inverse. If S is quasi-inverse, then I and S/I are quasi-inverse, and a counter example is given to show this converse need not be true. Howie and Lallement has shown the existence of the minimum orthodox congruence on a regular semigroup in [5]. Including in this chapter, it is shown that the minimum orthodox Rees congruence, the minimum right-inverse Rees congruence and the minimum generalized inverse Rees congruence on a semigroup S with kernel always exist, and they are the intersection of all orthodox Rees congruences on S, the intersection of all right-inverse Rees congruences on S and the intersection of all generalized inverse Rees congruences on S; respectively.

The full transformation semigroup on any set is quasi-inverse. A proof is given by Schein in [8]. The partial transformation semigroup and the full transformation semigroup on any set are studied in the second chapter. It is shown that the partial transformation semigroup on any set is also quasi-inverse. The characterizations of an orthodox transformation semigroup, of a right-inverse transformation semigroup and of a generalized inverse transformation semigroup on a set X are given in term of the cardinality of X.

An explicit form of the minimum inverse congruence on an orthodox semigroup is given by Hall in [4]. In the third chapter, we show that the restriction of the minimum inverse congruence on orthodox semigroup S to E(S) is the minimum semilattice congruence on E(S). An explicit form of the minimum right-inverse congruence on a generalized inverse semigroup is given. It is also shown that the restriction of the minimum inverse congruence on an orthodox semigroup S to any regular subsemigroup T of S is the minimum inverse congruence on T.

Let $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ be a semilattice Y of semigroups S_α. It has been proved in [6] that S is orthodox if and only if S_α is orthodox for each $\alpha \in Y$. It is shown in the last chapter that S is quasi-inverse if and only if S_α is quasi-inverse for each $\alpha \in Y$, and S is right-inverse if and only if S_α is right-inverse for each $\alpha \in Y$. It is also shown that if S is generalized inverse, then S_α is generalized inverse for all $\alpha \in Y$. An example to indicate that a semilattice of generalized inverse semigroups need not be generalized inverse is provided.