บทที่ 4



# การวิเคราะห์ทางทฤษฎี

## 4.1 การวิจัยและวิเคราะห์ที่เกี่ยวข้องซึ่งได้กระทำมาแล้ว

### 4.1.1 สำหรับแรงบิด

ปี 1930 Timoshenko(1) เสนอแนะสมการซึ่งปรับปรุงมาจากทฤษฎีของนายSaint Venant's ในการคำนวณหาความต้านทานแรงบิดและมุมบิดของวัสดุยืดหยุ่นให้ง่าย ดังสมการ

$$T = \tau \alpha b^{2} h$$

$$\theta = \frac{T}{\beta b^{3} h G}$$

โดยที่

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | = | แรงบิด |
| $\tau$ | = | หน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้น |
| $\theta$ | = | มุมบิด (เรเดียน/ความยาว) |
| $b, h$ | = | ความกว้าง ความลึก ของรูปตัด |
| $\beta, \alpha$ | = | ค่าสัมประสิทธิ์ซึ่งขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนของ $h/b$ |
| $G$ | = | Shear modulus |

ตารางแสดงค่าของ $\alpha$ , $\beta$

| h/b | 1.00 | 1.50 | 1.75 | 2.00 | 2.50 | 3.00 | 4.00 | 6.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0.208 | 0.231 | 0.239 | 0.246 | 0.258 | 0.267 | 0.282 | 0.299 |
| $\beta$ | 0.141 | 0.196 | 0.214 | 0.229 | 0.249 | 0.263 | 0.281 | 0.299 |

ปี 1931 Nadai[2] ได้ใช้ทฤษฎีพลาสติก "Sand heap analogy" คำนวณหาความต้านทานแรงบิดประลัยของวัสดุไม่ยืดหยุ่น ที่มีรูปตัดแบบสี่เหลี่ยม ดังสมการ

$$T_u = \frac{1}{2} b^2(h-b/3) \tau_{max}$$

เมื่อ $T_u$ = แรงบิดต้านทานประลัย

$\tau_{max}$ = หน่วยแรงเฉือนเนื่องจากแรงบิด ที่มากที่สุดของวัสดุ

b,h = ความกว้างและความลึกของรูปตัดตามลำดับ

ปี 1957 Ernst[3] ทำการทดสอบคานคอนกรีตเสริมเหล็ก จำนวน 18 ตัว ภายใต้แรงบิดเพื่อหาปริมาณของเหล็กลูกตั้ง ซึ่งทำให้เหล็กเสริมตามยาวที่มุมทั้งสี่ของคานคอนกรีต ถึงกำลังคลาก พบว่าถ้ากำหนดให้ปริมาณเหล็กลูกตั้งคงที่ แล้วเพิ่มปริมาณเหล็กเสริมตามยาว จะได้แรงบิดต้านทานประลัยเพิ่มขึ้นในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ปริมาณเหล็กเสริมตามยาวคงที่ แล้วเพิ่มปริมาณของเหล็กลูกตั้ง ก็จะได้แรงบิดต้านทานประลัยเพิ่มขึ้น แสดงว่าการที่เหล็กเสริมในทิศทางใดทิศทางหนึ่งจะถึงกำลังคลากนั้น ขึ้นอยู่กับปริมาณเหล็กเสริมในอีกทิศทางหนึ่งเสมอ นอกจากนี้ยังพบอีกว่า คานคอนกรีตล้วนและคานคอนกรีตเสริมเหล็กจะประพฤติเป็นวัสดุยืดหยุ่น จนถึงประมาณ 80 เปอร์เซ็นต์ของแรงบิดที่ทำให้คอนกรีตเกิดการแตกร้าว และในช่วงนี้ค่าสติฟเนส ความต้านทานแรงบิดส่วนใหญ่จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของรูปตัด และความต้านทานแรงอัดประลัยของคอนกรีต

ปี 1959 Lessig[4] เสนอทฤษฎี สคิว เบนดิง (Skew Bending Theory) ใช้หาความต้านทานประลัยของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก เมื่อมีแรงบิดกระทำร่วมกับแรงดัด โดยวิเคราะห์จากสมมติฐานดังนี้คือ



1) ให้เหล็กเสริมทั้งหมด บนระนาบที่คอนกรีตเกิดการชำรุดถึงกำลังคลาก

2) คอนกรีตไม่คำนวณออกแบบให้รับแรงดึง

3) ระยะเรียงของเหล็กลูกตั้ง เป็นไปอย่างสม่ำเสมอตลอดความยาวของคานคอนกรีต

4) อัตราส่วนของแรงบิดต่อแรงดัด มีค่าคงที่

5. การชำรุดเกิดได้ใน 3 ลักษณะ แล้วแต่อัตราส่วนของแรงบิดต่อแรงกัด กล่าวคือ ระนาบของคอนกรีตที่รับแรงอัดอาจเป็นด้านบน ด้านข้าง หรือด้านล่างของคาน คอนกรีต

อาศัยจากสมมติฐานข้างต้นและรูปที่ 4.1 Lessig วิเคราะห์หาความต้านทานแรงบิดประลัยของคานคอนกรีตเสริมเหล็กออกมาในรูป

$$T = \phi M = A_s f_y \left( \Delta_1 + \beta_1 c_1^2 \Delta_2 \right) / \left( \frac{1}{\phi} + \frac{c_1}{b} \right) bh$$

เมื่อ $\Delta_1 = d - \frac{x_1}{2}$ ; $\beta_1 = \frac{A_w f_{wy} h}{A_s f_y s}$

$$\Delta_2 = \theta_1 \left( h - a - \frac{x_1}{2} \right) + \frac{b}{4} (1 - \theta_1) \left( 1 - \theta_1 - 4\frac{a_2}{b} \right)$$

$$x_1 = \frac{A_s f_y \left( b + \beta_1 \theta_1 \frac{c_1^2}{h} \right)}{f''_c (b^2 + c_1^2)} \; ; \quad \theta_1 = \frac{b}{2h+b}$$

$$\frac{c_1}{b} = \left\{ \frac{1}{\phi} + \sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \frac{\Delta_1 h}{\beta_1 \Delta_2 \frac{h}{b}}} \right\} (2h+b)$$

$$f''_c = 0.85 f'_c$$

โดยที่

$A_s$ เนื้อที่ทั้งหมดของเหล็กตามยาว ด้านที่รับแรงดึง

$A_w$ เนื้อที่หน้าตัดของเหล็กลูกตั้ง 1 ขา

$f_y$ กำลังคลากของเหล็กตามยาว

$f_{wy}$ กำลังคลากของเหล็กลูกตั้ง

Thomas T.C.Hsu(5) ทำการทดลองศึกษาพฤติกรรม และแรงบิดต้านทานประลัยของคานคอนกรีตใน 3 ลักษณะ คือ

1) ทำการทดลองคานคอนกรีตล้วน พบว่าการชำรุดจะเกิดในทันทีทันใดที่ปรากฏรอยแตกร้าวและเกิดจากแรงดัดในระนาบที่ทำมุม 45° กับแกนของคานคอนกรีตทางด้านที่กว้างที่สุดของรูปตัด อาศัยจากลักษณะการชำรุดที่เกิดขึ้น รวมกับความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลัสแตกร้าว กับกำลังดึงประลัยของคอนกรีตจากการทดลอง Hsu ได้เสนอแนะสมการใช้คำนวณหาแรงบิดต้านทานประลัย และมุมบิดขณะคานคอนกรีตเกิดการชำรุดคือ

เมื่อ $b > 4"$ $\quad T_{up} = 6(b^2 + 10)h\sqrt[3]{f'_c}$

$b < 4"$ $\quad T_{up} = 1.43\sqrt[3]{b^5 h}\sqrt[3]{f'_c}$

และ $\quad \theta_{up} = \frac{0.025}{bd}\left(1+\frac{10}{b^2}\right)$

โดยที่ $\quad T_{up}$ = แรงบิดต้านทานประลัยของคานคอนกรีตล้วน

$\theta_{up}$ = มุมบิดขณะคานเกิดการชำรุด

จากสมการดังกล่าวข้างต้น Hsu แสดงให้เห็นจริงโดยนำผลการทดลองของคานคอนกรีตล้วนจำนวน 10 คาน ซึ่งมีขนาดรูปตัดต่าง ๆ มาเปรียบเทียบ ปรากฏว่าได้ใกล้เคียงกล่าวคือ ได้ค่าเฉลี่ยของ แรงบิดต้านทานประลัยจากผลการทดลองต่อผลการคำนวณเท่ากับ 1.01 และของมุมบิดจากผลการทดลองต่อผลการคำนวณเท่ากับ 1.19

2) คานคอนกรีตเสริมเหล็ก รูปตัดสี่เหลี่ยมตัน และรูปตัดกลวง ( hollow section) พบว่า ถ้าขนาดรูปตัด ปริมาณเหล็กเสริม และกำลังอัดประลัยของคอนกรีตเท่ากัน จะมีความต้านทานต่อแรงบิดประลัยเท่ากัน อาศัยจากข้อมูลต่าง ๆ ของการทดลอง คานคอนกรีตเสริมเหล็ก จำนวน 53 คาน Hsu(6) เสนอแนะสมการใช้คำนวณหาแรงบิดต้านทานประลัยของคานคอนกรีต เมื่อเสริมเหล็กในภาวะต่ำกว่าสมดุลย์ดังนี้

$$T_u = \frac{2.4}{\sqrt{b}}\, b^2 h\sqrt{f'_c} + (0.66m + 0.33y/x)\,\frac{xyA_w f_{wy}}{s}$$

เมื่อ $m = \frac{A_s \cdot s}{2A_w(x+y)}$ $\quad 0.70 < m < 1.50$

และเปอร์เซ็นต์เหล็กเสริมในภาวะสมดุลย์ หาได้จาก $P_{tb} = 2{,}400\frac{\sqrt{f'_c}}{f_{sy}}$

3) คานคอนกรีตอัดแรง พบว่าการชำรุดเกิดในลักษณะเดียวกับคานคอนกรีตล้วน ดังนั้น สมการที่ใช้ในการคำนวณหา แรงบิดต้านทานประลัย จะคล้ายกับของคานคอนกรีตล้วน คือ

$$T_u = 6(b^2+10)h\sqrt[3]{f'_c}\left(\sqrt{1+10\frac{\sigma}{f'_c}}\right)$$

โดยที่ $\sqrt{1+10\frac{\sigma}{f'_c}}$ เป็นผลเนื่องจากคอนกรีตถูกอัดแรง

และ $\sigma$ = หน่วยแรงอัด ซึ่งกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดรูปตัด

Thomas T.C. Hsu(7) ศึกษาความแข็งเกร็งทางด้านรับแรงบิด(torsional rigidity) ของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก พบว่า ก่อนคอนกรีตเกิดการแตกร้าว ค่าความแข็งเกร็งทางด้านรับแรงบิด ซึ่งหาได้จากทฤษฎีของ st.Venant's เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับผลจากการทดลอง ปรากฏว่ามีความถูกต้องดีพอ ส่วนความแข็งเกร็งภายหลังคอนกรีตเกิดการแตกร้าว Hsu อาศัยโครงถักสามมิติ วิเคราะห์กรณีต่าง ๆ ได้ดังนี้คือ

1) สำหรับรูปตัดวงกลมกลวง

$$G_{cr}\,C_{cr} = \frac{E_s d^2 A_c}{4\left(\frac{4nA_c}{p_w h} + \frac{1}{p_l} + \frac{1}{p_w}\right)}$$

2) สำหรับรูปตัดสี่เหลี่ยมกลวง

$$G_{cr}\,C_{cr} = \frac{E_s x^2 y^2 A_c}{(x + y)^2\left(\frac{2nA_c}{(x+y)h} + \frac{1}{p_l} + \frac{1}{p_w}\right)}$$

3) รูปตัดสี่เหลี่ยมตัน ในการวิเคราะห์ให้แปลงเป็นรูปตัดสี่เหลี่ยมกลวง โดยมีความหนาของผนัง $h = h_{ef} = 1.4\,(p_l + p_w)x$

และค่าของมุมบิดต้านทานของรูปตัดต่าง ๆ หาได้จาก

$$\theta = \frac{T - \eta T_o}{G_{cr}\,C_{cr}}$$

เมื่อ $p_l = \frac{A_l}{A_c}$ $\quad p_w = \frac{A_w P_w}{A_c s}$

$P_w = 2(x+y)$ หรือเท่ากับ $\pi d$ สำหรับรูปตัดวงกลม

$C_{cr} = \frac{4A^2 h}{P_w}$ ; $A_c$ = พื้นที่รูปตัดทั้งหมดของคานคอนกรีต

$\eta = 0.57+2.86\,h$ (สำหรับรูปตัดตันให้มีค่าเท่ากับ 2)

$T_o = \frac{2.4b^2h}{\sqrt{b}}\sqrt{f'_c}$ ; $A_l$ = เนื้อที่หน้าตัดของเหล็กเสริม 1 เส้น

จากสมการต่าง ๆ ดังกล่าวข้างต้น Hsu ได้นำไปวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลจากการทดลองของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก รูปตัดสี่เหลี่ยมทั้งตันและกลวง พบว่า ได้ใกล้เคียงคือได้ค่าเฉลี่ยของ $G_{cr}\,C_{cr}$ ทดลอง / $G_{cr}\,C_{cr}$ คำนวณเท่ากับ 1.04

Lampert[8] ใช้แบบโครงถักสามมิติ ( space truss model) วิเคราะห์หาพฤติกรรมภายหลังคอนกรีตแตกร้าว ของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก เมื่อมีแรงบิดกระทำร่วมกับแรงดัด การวิเคราะห์นี้ Lampert เสนอแนะให้แปลงคานคอนกรีตรูปตัดตันเป็นรูปตัดผนังบาง โดยมีความหนาของผนัง ($t_1$) เท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของ $b/6$ หรือ $b_o/6$ เมื่อ $b_o$ เป็นระยะทางระหว่างเหล็กเสริมตามยาวที่มุมและในที่สุดจะได้สมการใช้คำนวณมุมบิด มุมเปลี่ยนในกรณีต่าง ๆ คือ

1) เมื่อมีแรงบิดกระทำอย่างเดียว

มุมบิด $$\frac{d\theta}{dx} = \frac{TP_w^2}{4E_s(b_oh_o)^3}\left[\frac{1}{p_w} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_s} + \frac{1}{p_s'}\right) + \frac{4n\lambda b_oh_o}{P_wt}\right]$$

โดยที่ $$p_w = \frac{A_wP_w}{b_oh_os} \quad ; \quad p_s = \frac{2A_s}{b_oh_o}$$

$$p_s' = \frac{2A_s'}{b_oh_o} \quad ; \quad p_1 = \frac{1}{2}(p_s + p_s')$$

และจากผลการทดลอง พบว่า $\lambda = 3$ เหมาะสมที่สุด

2) เมื่อมีแรงบิดกระทำร่วมกับแรงดัด ซึ่งสามารถแบ่งย่อยออกเป็น

2.1) ผลของแรงบิดมากกว่าแรงดัดจะได้

มุมเปลี่ยน $$\frac{d\psi}{dx} = \frac{M}{E_sh_o^2}\left(\frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_s'}\right) + \frac{TP_w}{4b_oh_o^2E_s}\left(\frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_s'}\right)$$

และมุมบิดเมื่อไม่คิดถึงผลของ $\epsilon_c$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{TP_w}{4(b_oh_o)^2E_s}\left[\frac{s}{A_w} + \frac{P_w}{2}\left(\frac{1}{2A_s} + \frac{1}{2A_s'}\right)\right] + \frac{MP_w}{4b_oh_o^2E_s}\left(\frac{1}{A_s} + \frac{1}{A_s'}\right)$$

2.2) ผลของแรงดัดมากกว่าแรงบิด

$$\frac{d\psi}{dx} = \left[\frac{TP_w}{4b_oh_oA_sE_s} + \frac{M}{h_oA_sE_s}\right] / (h - c)$$

ส่วนค่าของมุมบิด ไม่สามารถวิเคราะห์หาได้ เนื่องจากคานคอนกรีตช่วงนี้ไม่ประพฤติตามสมมติฐานของทฤษฎีโครงถัก แต่อย่างไรก็ตาม เพื่อให้ง่าย Lampert เสนอให้หาค่าของมุมบิดได้จากสมการของ ข้อ 2.1 ข้างต้น

ปี 1975 Kevin D. Below, Vijaya Rangan, M.ASCE และนาย Stanley Hall[9] ร่วมกันเสนอทฤษฎีสกิว เบนดิง เพื่อใช้ทำนายพฤติกรรมของคาน

คอนกรีต ซึ่งเสริมด้วยเหล็กเสริมธรรมดาหรือเหล็กเสริมอัดแรง เมื่อมีแรงบิดกระทำร่วมกับแรงดัด ทฤษฎีนี้สามารถใช้คำนวณหาหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมตามยาวและของเหล็กลูกตั้ง ที่ระดับต่าง ๆ ของแรงกระทำ นอกจากนี้ยังสามารถหาปริมาณเหล็กเสริมในภาวะสมดุลย์ของเหล็กเสริมทั้งสองทิศทางอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งแสดงให้เห็นจริงโดยเปรียบเทียบกับผลการทดลองของเขา และของคนอื่น ๆ ที่ทำมาแล้ว

ทฤษฎีสกิว เบนดิง นี้วิเคราะห์มาจากสมมติฐานดังนี้ คือ

1) หน่วยแรง และหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมให้สัมพันธ์กันในลักษณะเส้นตรงจนถึงกำลังคลาก และต่อจากนี้ให้หน่วยแรงคงที่คือมีค่าเท่ากับกำลังคลาก

2) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและหน่วยการหดตัวของคอนกรีตให้เป็นดังสมการ $\sigma = \frac{EC}{1+(\epsilon/\epsilon_o)^2}$ โดยที่ $E = 2\,\sigma\, max/C_o$, $\epsilon_o = 0.002$

3) ให้ความเครียดของคอนกรีตเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะทางจากแกนสะเทิน

4) การชำรุดของคานคอนกรีตเกิดขึ้นเมื่อหน่วยการหดตัวที่ผิวของคอนกรีต ($\epsilon_{cu}$) มีค่าเท่ากับ 0.002

5) ลักษณะการชำรุดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กให้เหมือนกันทั้งก่อนและหลังการชำรุด

4.1.2 สำหรับแรงดัด

ปี 1940 Whitney (10) เสนอทฤษฎีพลาสติกใช้คำนวณออกแบบคานคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงดัด ทฤษฎีนี้ไม่ขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนทางพิกัด (n) เหมือนทฤษฎีอีลาสติก แต่จะขึ้นอยู่กับกำลังอัดประลัยของคอนกรีตกำลังคลากของเหล็กเสริม และเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ Whitney สมมติให้การกระจายของหน่วยแรงอัดของคอนกรีต ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปพาราโบรา ดังการทดลองของ O.G. Kienal และ J.A. Maldari ในปี 1938 แทนด้วยสี่เหลี่ยมแทนหน่วยแรงซึ่งมีขนาดเท่ากับ 0.85 $f'_c$ กระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดความลึก a อาศัยจากสี่เหลี่ยมแทนหน่วยแรงดังกล่าวWhitney วิเคราะห์หา

สมการใช้คำนวณหาแรงต้านทานประลัยของคานคอนกรีต รูปตัดสี่เหลี่ยม เสริมเหล็กกรณีต่าง ๆ คือ

1) เมื่อการชำรุดแบบแรงดึงเป็นหลัก

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{A_s m}{2b}\right)$$

2) เมื่อการชำรุดแบบแรงอัดเป็นหลัก Whitney วิเคราะห์จากผลการทดลองของ Slater และ Lyse พบว่าในช่วงกำลังอัดประลัยของคอนกรีตตั้งแต่ 3,000 - 6,000 ปอนด์/นิ้ว$^2$ ได้ค่าเฉลี่ยของ a/d เท่ากับ 0.537 และ c/d เท่ากับ 0.732 ดังนั้นจะได้สมการใช้คำนวณหาแรงต้านทานประลัย ดังรูป

$$\frac{M_u}{bd^2} = 0.85 f'_c \frac{a}{d}\left(1 - \frac{a}{2d}\right) = \frac{f'_c}{3}$$

3) เปอร์เซ็นต์เหล็กเสริมในภาวะสมดุลหาได้จาก $p_b = 0.456 \frac{f'_c}{f_y}$

4) เมื่อมีเหล็กเสริมรับแรงอัด ดังรูปที่ 4.2 ซึ่งแบ่งออกได้เป็น

4.1) เกิดการชำรุดแบบแรงอัดเป็นหลัก

$$M_u = \frac{1}{3} bd^2 f'_c + d' A'_s f'_y$$

4.2) เกิดการชำรุดแบบแรงดึงเป็นหลัก

$$M_u = d' A'_s f'_y + (A_s - A'_s)\left[d - \frac{(A_s - A'_s)m}{2b}\right] f_y$$

โดยที่ $m = \frac{f_y}{0.85 f'_c}$

ปี 1943 V.P. Jensen(11) วิเคราะห์หาแรงต้านทานประลัยของคานคอนกรีตรูปตัดสี่เหลี่ยม ซึ่งเสริมเฉพาะเหล็กเสริมรับแรงดึง โดยสมมติให้การกระจายของหน่วยแรงในคอนกรีตเป็นลักษณะสี่เหลี่ยมคางหมู ที่มีหน่วยแรงอัดสูงสุดเท่ากับ $f'_c$ และจากการวิเคราะห์ Jensen หาคุณสมบัติต่าง ๆ ของคอนกรีตออกมาในรูปที่สัมพันธ์กับกำลังอัดประลัยของคอนกรีตคือ

$$\epsilon_o = \frac{f'_c}{E_c} = \epsilon_u(1-\beta)$$

$$E_c = \frac{30{,}000{,}000}{5 + \frac{10{,}000}{f'_c}}$$

โดยที่ $\beta$ มีค่าเท่ากับ $\dfrac{1}{1+\left[\dfrac{f'_c}{4,000}\right]^2}$

ในที่สุดจะได้สมการใช้คำนวณหาแรงดัดต้านทานประลัยของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก เมื่อการชำรุดเป็นแบบแรงดึงเป็นหลัก คือ $\dfrac{M_u}{bd^2} = pf_y(1-\dfrac{pf_y}{Nf'_c})$ โดยที่ N เป็นฟังชั่นของ $\beta$ และเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณอาจให้ค่าของ N เท่ากับ 2

ส่วนการชำรุดแบบแรงอัดเป็นหลัก Jensen วิเคราะห์หาแรงดัดต้านทานประลัย โดยอาศัย Compatibility ของคอนกรีต และสมมติให้หน่วยแรง หน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมสัมพันธ์กันในลักษณะเส้นตรงจนถึงจุดกำลังคลากของเหล็กเสริม

ปี 1959 Ladislav B. Kriz(12) เสนอวิธีการวิเคราะห์หาแรงดัดต้านทานประลัยของคานคอนกรีต ทั้งเสริมและไม่เสริมเหล็ก ในการวิเคราะห์นี้เป็นการหาฟังชั่นของแรงออกมาในรูปของแรงต้านทานภายในของวัตถุ โดยไม่จำเป็นต้องเขียนสมการทางคณิตศาสตร์แสดงความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและหน่วยการหดตัวของคอนกรีต และวิธีการดังกล่าวจะสะดวกมากสำหรับคานคอนกรีตรูปตัดสี่เหลี่ยม ผลจากการวิเคราะห์นี้ทำให้เห็นว่าการหาขนาดของแรงอัดที่คอนกรีตรับ และแรงดัดต้านทานประลัย จากทฤษฎีสี่เหลี่ยมแทนหน่วยแรงมีความถูกต้องตามสภาพที่เกิดขึ้นจริง กล่าวคือ

1) คานคอนกรีตล้วน

$$M_u = bc^2 f_u$$

โดยที่ $f_{ave} = \dfrac{1}{\epsilon_u}\displaystyle\int_0^{\epsilon_u} F(\epsilon)\, d\epsilon = \dfrac{f_u}{2(1-k_2)}$

และ $f_u$ = หน่วยแรงที่ผิวนอกของคอนกรีต ณ จุดกำลังประลัย

2) คานคอนกรีตเสริมเหล็กทั้งเหล็กรับแรงดึงและแรงอัด และเหล็กเสริมทั้งสองถึงกำลังคลาก

$$M_u = (A_s f_y - A'_s f'_y)\left[d - \frac{A_s f_y - A'_s f'_y}{2bf_u}\right] + A'_s f'_y (d-d')$$

จากการทดลองของ Hognestad, Hanson และ McHenry ค่า $f_u$ มีค่าประมาณ $5f_c'^{0.8}$ หรือประมาณเท่ากับ $0.85\ f_c'$ ดังนั้นเมื่อแทนค่า $f_u = 0.85f_c'$ ลงในสมการข้างต้น จะได้สมการใช้คำนวณหาแรงดัดต้านทานประลัยของคานคอนกรีต ซึ่งเหมือนกับสมการของ ACI 1956

ปี 1961 Alan H. Mattock, Ladislav B.Kriz และ Eivind Hognestad[13] ศึกษาทฤษฎีการกระจายของหน่วยแรงในลักษณะสี่เหลี่ยมผืนผ้า ผลจากการศึกษานี้เขาเสนอแนะสมการใช้คำนวณหาความต้านทานประลัย ของโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงดัดและแรงดัดกระทำร่วมกับแรงอัดของทั้งรูปตัดสี่เหลี่ยมและรูปตัดอื่น ๆ ซึ่งเมื่อนำไปเปรียบเทียบผลกับผลจากการทดลอง ปรากฏว่าได้ผลใกล้เคียงมาก และในการวิเคราะห์นี้เขาอาศัยสมมติฐานดังนี้

1) ณ จุดกำลังประลัยให้หน่วยแรงอัดของคอนกรีต มีค่าเท่ากับ $0.85\ f_c'$ กระจายอย่างสม่ำเสมอ ตลอดรูปตัดจนถึงระยะ $k_1c$ จากผิวบน ซึ่งเกิดหน่วยการหดตัวสูงสุด โดยที่ $c$ เป็นความลึกของแกนสะเทิน จากผิวบนที่เกิดหน่วยการหดตัวสูงสุด และให้ $k_1$ มีค่าเท่ากับ 0.85 สำหรับคอนกรีตที่มีกำลังอัดประลัยน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4,000 ปอนด์/นิ้ว$^2$ และลดค่าลง 0.05 ทุก 1,000 ปอนด์/นิ้ว$^2$ ที่เพิ่มจาก 4,000 ปอนด์/นิ้ว$^2$

2) คอนกรีตไม่คำนวณออกแบบให้รับแรงดึง

3) ความเครียดของคอนกรีตให้เป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากแกนสะเทิน

4) หน่วยการหดตัวสูงสุดของคอนกรีต ที่ผิวบนสุดมีค่าเท่ากับ 0.003

5) หน่วยแรงในเหล็กเสริม ที่มีค่าต่ำกว่ากำลังคลากให้มีค่าเท่ากับหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมคูณด้วย $30 \times 10^6$ ปอนด์/นิ้ว$^2$ ส่วนที่เกินกำลังคลากให้มีค่าเท่ากับกำลังคลาก

จากสมมติฐานต่าง ๆ ข้างต้น Mattock วิเคราะห์หาความต้านทานประลัยของคานคอนกรีตเสริมเหล็กในลักษณะต่าง ๆ คือ

1) คานคอนกรีตเสริมเหล็กเฉพาะเหล็กเสริมรับแรงดึง ซึ่งสามารถแบ่งย่อยออกตามลักษณะที่เกิดการชำรุดคือ

1.1) เหล็กเสริมถึงกำลังคลากก่อน คอนกรีตจะชำรุด

$$M_u = A_s f_y d\left(1-\frac{k_2 q}{.85k_1}\right)$$

$$\text{หรือ} = bd^2 f'_c\, q\left(1-\frac{k_2 q}{.85k_1}\right)$$

โดยที่ $k_2 = \frac{1}{2}k_1$

1.2) คอนกรีตชำรุดก่อนเหล็กเสริมถึงกำลังคลาก

$$M_u = (0.85k_1 f'_c) bd^2 k_u (1-k_2 k_u)$$

เมื่อ $k_u = \sqrt{pm+\left[\frac{pm}{2}\right]^2} - \frac{pm}{2}\ ;\ m = \frac{E_s \epsilon_u}{0.85k_1 f'_c}$

1.3) เหล็กเสริมถึงกำลังคลากพร้อมกับการชำรุดของคอนกรีต

$$M_u = (0.85k_1 f'_c) bd^2 \left(\frac{\epsilon_u}{\epsilon_u+\epsilon_y}\right)\left[1-k_2\left(\frac{\epsilon_u}{\epsilon_u+\epsilon_y}\right)\right]$$

2) คานคอนกรีตเสริมเหล็กทั้งเหล็กเสริมรับแรงดึงและแรงอัด

2.1) เหล็กเสริมรับแรงดึงและรับแรงอัดถึงกำลังคลากก่อนคอนกรีตชำรุด

$$M_u = (A_s f_y - A'_s f'_y) d\left[1-0.59(q-q')\right] + A'_s f'_y (d-d')$$

โดยที่ $\epsilon'_s = \epsilon_u \frac{(c-d')}{c} \geq \epsilon_y ; \frac{c}{d} = \frac{q-q'}{0.85k_1}$

$$p = \frac{A_s}{bd}\frac{f_y}{f'_c}\ ;\ q' = p'\frac{f'_y}{f'_c}$$

2.2) เหล็กเสริมรับแรงดึงถึงกำลังคลาก แต่เหล็กเสริมรับแรงอัดยังไม่ถึงกำลังคลากขณะเกิดการชำรุด

$$M_u = 0.85k_1 f'_c\, bc(d-k_2 c) + A'_s f'_y (d-d')$$

เมื่อ $\frac{c}{d} = \sqrt{\left[\frac{m}{2}\left(p' - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_u}p\right)\right]^2 + p'\frac{md'}{d}} - \frac{m}{2}\left(p' - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_u}p\right)$

$$f'_s = \epsilon_u E_s \frac{(c-d')}{c}$$

2.3) คอนกรีตชำรุดก่อนเหล็กเสริมรับแรงดึงถึงกำลังคลาก และ

1. เหล็กเสริมรับแรงอัดถึงกำลังคลาก

$$M_u = 0.85k_1 f'_c bc(d-k_2c) + A'_s f'_y (d-d')$$

$$\text{เมื่อ } k_u = \frac{c}{d} = \sqrt{\left[\frac{m}{2}\left(p+\frac{\epsilon'_y p'}{\epsilon_u}\right)\right]^2 + pm} - \left(p-\frac{\epsilon'_y p'}{\epsilon_u}\right)\frac{m}{2}$$

2. เหล็กเสริมรับแรงอัดไม่ถึงกำลังคลาก

$$M_u = 0.85k_1 f'_c bc(d-k_2c) + A'_s f'_s (d-d')$$

$$\text{โดยที่ } K_u = \frac{c}{d} = \sqrt{\left[\frac{m}{2}(p+p')\right]^2 + m\left(p'\frac{d'}{d}+p\right)} - \frac{m}{2}(p+p')$$

$$f'_s = \epsilon_u E_s\left(\frac{c-d'}{c}\right)$$

2.4) คอนกรีตชำรุดพร้อมกับเหล็กเสริมรับแรงดึงถึงกำลังคลาก ในกรณีนี้ เหล็กเสริมรับแรงอัดอาจถึงกำลังคลากหรือไม่ก็ได้

$$M_u \quad 0.85k_1 f'_c bd^2\left(\frac{\epsilon_u}{\epsilon_u+\epsilon_y}\right)\left[1 - k_2\left(\frac{\epsilon_u}{\epsilon_u+\epsilon_y}\right)\right] + A'_s f'_s (d-d')$$

$$\text{โดยที่ } f'_s = f'_y \text{ เมื่อ } \frac{d'}{d} \leq \left(\frac{\epsilon_u - \epsilon'_y}{\epsilon_u + \epsilon_y}\right)$$

$$\text{และ } f'_s = E_s\left[\epsilon_u - \frac{d'}{d}(\epsilon_u+\epsilon_y)\right] \text{ เมื่อ } \frac{d'}{d} > \left(\frac{\epsilon_u - \epsilon'_y}{\epsilon_u + \epsilon_y}\right)$$

ปี 1962 IB Falk Jorgensen (14) ศึกษาพฤติกรรมของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก ซึ่งเสริมเฉพาะเหล็กเสริมรับแรงดึง ณ จุดกำลังประลัย เพื่อหาค่าหน่วยแรงหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมที่มีความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและหน่วยการยืดตัวในลักษณะต่าง ๆ จากการศึกษานี้ Jorgensen ชี้ให้เห็นว่าหน่วยแรงของเหล็กเสริม ณ จุดกำลังประลัยจะมีความสัมพันธ์กับกำลังอัดประลัยของคอนกรีต ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมและกับอัตราส่วนของการเสริมเหล็ก ดังสมการ

$$f_s = \frac{f'_c \times 0.70 \times 0.003}{p(0.003+\epsilon_s)}$$

Jorgensen เสนอแนะให้นำสมการข้างต้นมาเขียนกราฟระหว่างหน่วยแรง และหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมที่อัตราส่วนต่าง ๆ ของ $\frac{f'_c}{p}$ ดังนั้น เมื่อต้องการหาหน่วยแรงหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมที่เกิดขึ้นจริง ณ จุดกำลังประลัย ก็ให้เขียนกราฟลักษณะของหน่วยแรง และหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมนั้น ๆ ทับลงไป จุดตัดของกราฟทั้งสองจะให้ค่าตามต้องการ

ปี 1962 Ping Chun Wang(15) ให้เหตุผลว่าการที่การคำนวณออกแบบโดยอาศัยทฤษฎีกำลังประลัยไม่ค่อยจะเป็นที่ยอมรับในหมู่วิศวกร เนื่องจากขาดตารางหรือกราฟช่วยในการออกแบบดังเช่นทฤษฎีอีลาสติก ดังนั้น Wang จึงเสนอวิธีการคำนวณออกแบบอย่างง่าย ๆ โดยจัดออกมาในรูปตารางสำหรับกำลังอัดประลัยของคอนกรีตเท่ากับ 3,000 ปอนด์/นิ้ว$^2$ และกำลังคลากของเหล็กเสริมเท่ากับ 40,000 ปอนด์/นิ้ว$^2$

ปี 1965 Alfred Zweig(16) เสนอแนะวิธี Iteration ออกแบบคานคอนกรีตเสริมเหล็กเพื่อต้านทานแรงดัดประลัย สำหรับการชำรุดในลักษณะที่เหล็กเสริมรับแรงดึงถึงกำลังคลากก่อนที่คอนกรีตจะชำรุด ทั้งนี้ ก็เพื่อให้การคำนวณออกแบบมีความสะดวกพอ ๆ กับการออกแบบโดยอาศัยทฤษฎีอีลาสติก และสามารถครอบคลุมทุกค่าของกำลังอัดประลัยของคอนกรีต และทุกกำลังคลากของเหล็กเสริม กล่าวคือ มาตรฐาน ACI กำหนดให้คำนวณหาแรงดัดต้านทานประลัยของคานคอนกรีตจากสมการ

$$M_u = 0.9\left[bd^2 f'_c q(1-0.59q)\right]$$

สมการข้างต้น Zweig ให้คำนวณหาเหล็กเสริมจาก

$$A_s = \bar{A}_s\left[1+\bar{p}c + 2(\bar{p}c)^2\right]$$

เมื่อ $\bar{A}_s = \frac{M_u}{ad}$

$$a = 0.9f_y$$

$$\bar{p} = \frac{\bar{A}_s}{bd}$$

และ $c = 0.59m = 0.59\frac{f_y}{f'_c}$

4.2 ทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์เพื่อเปรียบเทียบกับผลจากการทดลอง

ในการวิเคราะห์หาพฤติกรรมของคานคอนกรีต ทั้งเสริมและไม่เสริมเหล็กภายใต้แรงบิดและของคานคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงดัดใช้สมมติฐานดังต่อไปนี้

1) พื้นที่รูปตัดซึ่งเป็นระนาบก่อนรับแรงดัด ยังคงเป็นระนาบหลังรับแรงดัด

2) ความต้านทานแรงดึงของคอนกรีต จะไม่นำมาพิจารณาคำนวณออกแบบ ยกเว้นการวิเคราะห์โดยอาศัยทฤษฎี สคิว เบนดิง ของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก ซึ่งเสริมด้วยเหล็กเสริมต่ำกว่าเหล็กเสริมในภาวะสมดุลย์มากๆ

3) การยึดเหนี่ยวระหว่างเหล็กเสริมกับคอนกรีต บริเวณโดยรอบเป็นไปอย่างสมบูรณ์

4) ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง หน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมให้เป็นเส้นตรงจนถึงจุดกำลังคลาก และในการวิเคราะห์จะให้หน่วยแรงมากที่สุดของเหล็กเสริม มีค่าเท่ากับกำลังคลาก แม้ว่าโดยความเป็นจริงแล้วจะมีค่ามากกว่านี้ เพราะในช่วงหลังนี้การเปลี่ยนรูปของคอนกรีตเกิดขึ้นสูงมาก รูปที่ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ดังกล่าว

5) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง หน่วยการหดตัวของคอนกรีต เป็นไปตามสมการ $f_c = f'_c \left[ \frac{2\epsilon}{\epsilon_o} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_o} \right)^2 \right]$ ดังรูปที่ 4.4

6) ณ จุดกำลังประลัยให้หน่วยแรงของคอนกรีต แทนด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้าแทนหน่วยแรง มีขนาดเท่ากับ 0.85 เท่าของกำลังอัดประลัยของคอนกรีต กระทำตลอดความลึก $k_1c$ โดยที่ $k_1$ มีค่าเท่ากับ 0.85 สำหรับกำลังอัดประลัยของคอนกรีตที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 280 กก/ซม$^2$ และลดค่าลง 0.05 ทุก 70 กก/ซม$^2$ ของกำลังอัดประลัยของคอนกรีต ที่เพิ่มจาก 280 กก/ซม$^2$โดยที่ c เป็นระยะจากผิวด้านที่มีหน่วยการหดตัวสูงสุดถึงแกนสะเทิน

7) ให้ความเครียดของคอนกรีตเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากแกนสะเทิน

4.2.1 ทฤษฎีสคิว เบนดิ้ง (Skew Bending Theory)

1. คานคอนกรีตล้วน

Thomas T.C. Hsu[17] ทำการทดสอบคานคอนกรีตล้วนรูปตัดสี่เหลี่ยมภายใต้แรงบิดจำนวน 10 คาน และจากการสังเกตลักษณะการชำรุดที่เกิดขึ้น Hsu ได้เสนอแนะสมการใช้คำนวณหาแรงบิดต้านทานประลัยของคานคอนกรีตล้วน โดยวิเคราะห์จากพื้นฐานที่ว่า ภายใต้แรงบิด การชำรุดของคานคอนกรีต เกิดจากแรงดัดรอบแกน ซึ่งขนานกับด้านกว้างของรูปตัด และทำมุม 45° กับแกนของคานคอนกรีต

การวิเคราะห์ พิจารณาคอนกรีตล้วน รูปตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาดความกว้าง b ลึก h และมีแรงบิด $T_u$ กระทำดังรูปที่ 4.5

ก. แรงบิดต้านทานประลัย

รูปที่ 4.5 (ก) ได้ว่า

$$T_b = T_u \cos\phi = \frac{b^2 h \csc\phi f_r}{6} \qquad \text{.... A.1}$$

โดยที่ $T_b$ = แรงดัดซึ่งเป็นส่วนประกอบของ $T_u$

$T_u$ = แรงบิดประลัย

$\phi$ = มุมที่ระนาบของการชำรุดกระทำกับแกนของคานคอนกรีต

$f_r$ = โมดูลัสแตกร้าว

เนื่องจากการชำรุดเกิดขึ้นเมื่อ $\frac{\partial T_b}{\partial \phi} = 0$ ซึ่งจะได้ $\phi = 45°$

แทนค่า $\phi = 45°$ ลงในสมการ A.1

$$\therefore T_u = \frac{b^2 h f_r}{3} \qquad \text{.... A.2}$$

พิจารณาชิ้นส่วน A (รูปที่ 4.5ค) พบว่ามีหน่วยแรงดึงที่เกิดจากแรงดัด และหน่วยแรงอัด ซึ่งเกิดจากแรงบิด ($T_t$ ) กระทำในลักษณะที่ตั้งได้ฉากซึ่งกันและกัน และมีขนาดเท่ากัน

อาศัย Straight-lineSimplification of Mohr's Theory หน่วยแรงดึงของคอนกรีตในภาวะเช่นนี้มีค่าเท่ากับ $f_{tc} = \frac{(f'_c) f_t}{f'_c + f_t}$

โดยที่ $f'_c$ = กำลังอัดประลัยของคอนกรีตเมื่อมีแรงกดในแนวแกน

$f_t$ = หน่วยแรงดึงประลัยของคอนกรีตเมื่อมีแรงดึงในแนวแกน

$f_{tc}$ = หน่วยแรงดึงของคอนกรีตในภาวะที่มีหน่วยแรงอัดกระทำในแนวที่ตั้งได้ฉากและมีขนาดเท่ากัน

จากการทดลองของ McHenry และ Karni(18) พบว่า $\frac{f'_c}{(f'_c + f_t)}$ มีค่าเท่ากับ 0.85 และเนื่องจากการชำรุดของคอนกรีตภายใต้แรงบิด เป็นผลมาจากแรงดึง ดังนั้นค่าโมดูลัสแตกร้าวย่อมลดค่าลงในอัตราส่วนที่เท่ากันด้วย

$$\therefore \quad T_u = \frac{0.85}{3} b^2 h f_r \qquad \text{.....ก.3}$$

และเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ Hsu เสนอแนะให้หาค่า $f_r$ อยู่ในรูป $f_t$ กล่าวคือ

$$f_r = c_1(f_t) \cdot c_2(b) f_t$$

เมื่อ $c_1(f_t)$ = ผลเนื่องจากแรงดึงของคอนกรีต

$c_2(b)$ = ผลเนื่องจากความกว้างของรูปตัดคาน

ผลจากการทดลองของ Hsu Gonerman-Shuman และ Wright ชี้ให้เห็นว่า

$$c_1(f_t) = 2.96/\sqrt[3]{f_t}$$

$$c_2(b) = \left(1 + \frac{65}{b^2}\right)$$

แทนค่า $c_1(f_t)$ $c_2(b)$ ลงในสมการที่ 3 ได้

$$T_u = 0.84(b^2+65)\sqrt[3]{f_t^2}\,h$$

ให้ $f_t = 1.33\sqrt{f'_c}$

$$\therefore \quad T_u = (b^2+65)h\sqrt[3]{f'_c} \qquad \text{กก-ซม.}$$

ข. มุมบิดประลัย

Hsu เสนอแนะให้หาค่ามุมบิดขณะคานคอนกรีตชำรุดจาก

$$\theta_u = k_1\theta_{u,e}$$

เมื่อ $\theta_u$ = มุมบิดขณะคานคอนกรีตชำรุด

$k_1$ = ค่าคงที่

$\theta_{u,e}$ = ค่ามุมบิดซึ่งหาได้จากทฤษฎีอีลาสติกและมีค่าเท่ากับ

$$\frac{T_u}{\left(\frac{dT}{d\theta}\right)_o} = \frac{T_u}{G_o\beta b^3 h}$$ โดยที่ $\beta$ (1) ขึ้นอยู่กับค่า $\frac{b}{h}$

$G_o$ = โมดูลัสของความแข็งเกร็งที่มุมบิดมีค่าเท่ากับศูนย์

ดังนั้น $\theta_u$ เขียนใหม่เป็น

$$\theta_u = \frac{k_1(b^2+65)h\sqrt[3]{f'_c}}{G_o\beta b^3 h} = \frac{k_1\sqrt[3]{f'_c}}{G_o}\frac{(b^2+65)}{\beta b^3} \quad \ldots \text{A.4}$$

$$\therefore \quad G_o = \frac{E_o}{2(1+u_o)}$$

ให้ $E_o = k_2E_c, u_o$ = 0.20

โดยที่ $E_o$ = โมดูลัสยืดหยุ่นที่หน่วยแรงเท่ากับศูนย์

$E_c$ = Static modulus

$u_o$ = Poisson's ratio

$k_2$ = ค่าคงที่

จากงานวิจัยของ Pauw(19) พบว่า $E_c = 44,906 \times f'^{\,0.30}_c$ กก/ซม²

$$G_o = \frac{k_2\,44,906f'^{\,0.30}_c}{2(1+0.20)} = k_2 18,711f'^{\,0.30}_c$$

$$\frac{\sqrt[3]{f'_c}}{G_o} = \frac{f'^{\,0.333}_c}{k_2 18,711f'^{\,0.30}_c} = \frac{f'^{\,0.033}_c}{k_2 18,711}$$

และโดยทั่วไป $f'_c \leq 280$ กก/ซม² $\therefore f'^{\,0.033}_c \approx 1.20$

แทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการA.4จะได้

$$\theta_u = \frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{(b^2+65)}{\beta b^3}\frac{(1.20)}{18.711} = \frac{k_2}{k_1}\frac{6.4\times10^{-5}(b^2+65)}{\beta b^3}$$

จากผลการทดลองของ Hsu พบว่า $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\Theta_u \text{ ทดลอง}}{6.4\times10^{-5}\frac{(b^2+65)}{\beta b^3}} = 1$

เพราะฉะนั้นมุมบิด $(\Theta_u) = 6.4\times10^{-5}\frac{(b^2+65)}{\beta b^3}$ เรเดียน/ซม.

2) คานคอนกรีตเสริมเหล็ก

ปี 1976 B.V.Rangan, R.F.Staley และ A.S.Hall (20) ได้ดัดแปลงทฤษฎีของ kevin D Below (ปี 1975) โดยเพิ่มผลของความเครียด เนื่องจากแรงเฉือนบนระนาบของคอนกรีต ด้านที่รับแรงอัด พบว่าทฤษฎีที่ดัดแปลงมานี้สามารถใช้คาดการณ์พฤติกรรมของคานคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงบิดกระทำร่วมกับแรงดัด หรือภายใต้แรงบิดอย่างเดียว ของทั้งที่เสริมด้วยเหล็กเสริมธรรมดา และเหล็กเสริมอัดแรง ซึ่งเกิดการชำรุดในลักษณะต่าง ๆ คือ

1) เหล็กลูกตั้ง เหล็กเสริมตามยาวถึงกำลังคลาก ก่อนคอนกรีตชำรุด
2) เหล็กลูกตั้ง หรือเหล็กเสริมตามยาวอย่างใดอย่างหนึ่งถึงกำลังคลาก ก่อนคอนกรีตชำรุด
3) เหล็กเสริมทั้งสองทิศทาง ถึงกำลังคลากพร้อมกับคอนกรีตชำรุด

การวิเคราะห์พิจารณาคอนกรีตรูปตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ขนาดความกว้าง b ลึก h เสริมเหล็กทั้งเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กลูกตั้ง และมีแรงบิดกระทำร่วมกับแรงดัด ซึ่งเป็นกรณีทั่ว ๆ ไป

สมการ การสมดุลย์ของแรง (รูปที่ 4.6 ก)

1) แรงในระนาบที่ตั้งได้ฉากกับระนาบซึ่งเกิดการชำรุด (ระนาบ Θ)

$$C = k_1 f'_c kdb\sec\Theta = F_s\cos\Theta + F_{wh}\sin\Theta \quad \ldots\ldots\text{B.1}$$

2) แรงดัดรอบแกน A-A และไม่คิดผลของ $F_{wv}$

$$M\cos\Theta + T\sin\Theta = (F_s\cos\Theta + F_{wh}\sin\Theta)(1-k_2k)d \quad \ldots\text{B.2}$$

โดยที่ $C$ = แรงอัดลัพธ์

$k_1$ = สัมประสิทธิ์ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรง

| | | |
|---|---|---|
| $k$ | = | อัตราส่วนของความลึกของแกนสะเทินต่อความลึกประสิทธิผล (d) |
| $F_s$ | = | แรงดึงในเหล็กเสริมตามยาวด้านที่รับแรงดึงทั้งหมด |
| $F_{wh}$ | = | แรงดึงในเหล็กลูกตั้งในแนวนอน |
| $\Theta$ | = | มุมระหว่างระนาบของคอนกรีตด้านที่รับแรงอัดกับภาคตัดขวาง |

ให้แรงที่เกิดในเหล็กเสริมตามยาว $F_s = A_s f_s$ และในเหล็กลูกตั้ง $F_{wh} = A_w f_w \frac{(0.9x\tan\beta)}{s}$ โดยที่ค่า 0.9 เพิ่มเข้าไป เนื่องจากผลของรัศมีของเหล็กลูกตั้งตรงมุม (21)

พิจารณาระนาบของการชำรุดจากด้านแปลนรูปที่ 4.7 จะได้

$$b\tan\Theta = 2(h-kd)\tan\beta + b\tan\beta$$

$$\because \; kd \ll h \quad \therefore \; h-kd \approx h$$

$$\therefore \; b\tan\Theta = 2h\tan\beta + b\tan\beta$$

หรือ $\tan\beta = \dfrac{\tan\Theta}{(1+2h/b)}$

ถ้าให้ $\alpha = h/b$ $= \dfrac{\tan\Theta}{(1+2\alpha)}$

แทนค่า $F_s, F_{wh}, \tan\beta$ และให้ $r = p_w f_w / p_s f_s$ ลงในสมการ B.1 & B.2

สมการ B.1 $$k = \frac{p_s f_s \left[1 + \dfrac{r}{(1+2\alpha)} \tan^2\Theta\right]}{f'_c k_1 \sec^2\Theta} \qquad \text{......B.3}$$

สมการ B.2 $$T = \frac{p_s f_s \left[1 + \dfrac{r}{(1+2\alpha)} \tan^2\Theta\right](1-k_2 k)bd^2}{\left(\dfrac{1}{\psi} + \tan\Theta\right)} \qquad \text{......B.4}$$

เมื่อ $A_s$, $A_w$ = เนื้อที่หน้าตัดของเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กลูกตั้งตามลำดับ

$f_s$, $f_w$ = หน่วยแรงดึงของเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กลูกตั้งตามลำดับ

$x$ = ความกว้างของเหล็กลูกตั้ง

$\beta$ = มุมระหว่างระนาบของคอนกรีตด้านที่รับแรงดึงกับภาคตัดขวาง

$$p_s = \frac{A_s}{bd}$$

$$p_w = \left[\frac{0.9A_w}{bd}\right]\left(\frac{x}{s}\right)$$

$s$ = ระยะเรียงของเหล็กลูกตั้ง

$$\psi = \frac{T}{M}$$

เนื่องจากการชำรุดเกิดขึ้นเมื่อ $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

$$\therefore \tan\theta = \sqrt{\frac{1}{\psi^2} + \frac{1 + 2\alpha}{r}} - \frac{1}{\psi} \qquad \text{......B.5}$$

แทนค่า $\tan\theta$ ลงในสมการ B.4 ได้ว่า

$$T = 2A_s f_s d(1-k_2k)\left(\frac{r}{1+2\alpha}\right)\sqrt{\frac{1}{\psi^2} + \frac{1 + 2\alpha}{r}} - \frac{1}{\psi} \qquad \text{......B.6}$$

เงื่อนไขการเปลี่ยนรูปร่าง (Deformation Conditions)

Below[9] อาศัย Mohr's Circle แสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กลูกตั้งอยู่ในลักษณะ

$$\epsilon_w = \epsilon_s \tan^2\beta$$

$$\text{หรือ} \quad = \epsilon_s \frac{\tan^2\theta}{(1+2\alpha)^2} \qquad \text{......B.7}$$

พิจารณารอยแตกร้าวที่ระยะ d รูปที่ 4.8

จาก Mohr's Circle รูป (ข) $\epsilon_c' = \epsilon_s \cos^2\theta \left[1+\frac{\tan^2\theta}{1+2\alpha}\right]^2$ .......B.8

และจากรูป 4.6 (ข)

$$k = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_c'} \qquad \text{......B.9}$$

โดยที่ $\epsilon_s, \epsilon_w$ = หน่วยการยืดตัวของเหล็กตามยาว และเหล็กลูกตั้ง ตามลำดับ

$\epsilon_c', \epsilon_c$ = หน่วยการยืดตัวและหน่วยการหดตัวของคอนกรีต ตามลำดับ

รวมสมการ B.8 & B.9 $\epsilon_c = \left(\frac{k}{1-k}\right)\epsilon_s \cos^2\theta \left[\frac{1+\tan^2\theta}{1+2\alpha}\right]^2$ ......B.10

สำหรับค่า $k_1$, $k_2$ หาได้จากสมการ $f_c = f_c'\left[\frac{2\epsilon_c}{\epsilon_o} + \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_o}\right)^2\right]$ ซึ่งจะได้

$$k_1 = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_o}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\epsilon_c}{\epsilon_o}\right) \qquad \text{......B.11}$$

$$k_2 = \frac{4 - \epsilon_c/\epsilon_o}{12-4(\epsilon_c/\epsilon_o)} \qquad \text{......B.12}$$

หน่วยการหดตัวที่ผิวของคอนกรีตขณะเกิดการชำรุด

ให้ $\epsilon_1$ $\epsilon_2$ เป็นหน่วยการหดตัว และหน่วยการยืดตัวหลัก (principal strain) ซึ่งสัมพันธ์กับหน่วยการหดตัวของคอนกรีต $\epsilon_c$ ในแนวตั้งได้ฉากกับระนาบของการชำรุดทางด้านบนของคานคอนกรีต

$$\therefore \epsilon_2 = \epsilon_1 - \epsilon_c \qquad \text{......B.13}$$

จาก Mohr's Circle $\epsilon_c = \epsilon_1\cos^2\phi - \epsilon_2\sin^2\phi$ ......B.14

โดยที่ $\phi$ เป็นมุมระหว่างระนาบของการชำรุดกับระนาบที่ $\epsilon_1$ กระทำ

สมการ B.13 & B.14 $\epsilon_c = \epsilon_1(1-\tan^2\phi)$ ......B.15

การทดลองของ Kupfer et al[22] พบว่าการชำรุดของคอนกรีตภายใต้แรงอัดและแรงดึง ความเครียดขณะเกิดการชำรุดจะสัมพันธ์กันในลักษณะ

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_{cu}} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_{tu}} = 1 \qquad \text{......B.16}$$

และเนื่องจากค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีตทางด้านรับแรงดึงและแรงอัดมีค่าใกล้เคียงกัน

$$\therefore\ \epsilon_{cu}/\epsilon_{ct} \;=\; f'_c/f_t \;=\; 12$$ แทนค่าลงในสมการ B.16

จะได้

$$(\epsilon_c)_{ult} = \epsilon_{cu}\frac{(1-\tan^2\phi)}{1+12\tan^2\phi} \qquad \text{......B.17}$$

สมมุติว่าระนาบหลัก (principal plane) ทำมุมกับแกนของคาน คอนกรีตมีค่าเท่ากันตลอดทั้งด้านบนและที่ความลึก d

$$\therefore\ \phi = \theta - \beta$$

หรือ $\tan\phi = \tan(\theta-\beta)$

$$= \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta} \qquad \text{......B.18}$$

แทนค่า $\tan\beta = \frac{\tan\theta}{(1+2\alpha)^2}$ ลงในสมการ B.18

$$\therefore\ \tan\phi = \frac{2\alpha\tan\theta}{2\alpha+\sec^2\theta} \qquad \text{......B.19}$$

การวิเคราะห์หาเหล็กเสริมในภาวะสมดุลย์

1) ให้ $\epsilon_w = \epsilon_{wy};\ \epsilon_s = \epsilon_{sy}$
2) หาค่า $\tan\theta$ จากสมการ B.7 แล้วนำไปแทนค่าลงในสมการ B.5 จะได้

$$r_b = \frac{1+2\alpha}{\tan\theta(\frac{2}{\psi}+\tan\theta)}$$

3) หาค่า $(\epsilon_c)_{ult}$ จากสมการ B.17 จากนั้นหาค่า $k_1, k_2$ จากสมการ B.11 และ B.12 โดยแทนค่า

$$\epsilon_c = (\epsilon_c)_{ult}\ ;\ \epsilon_o = 0.002$$

4) หาปริมาณเหล็กเสริมตามยาวในภาวะสมดุลย์จากสมการ B.3

$$p_{sb} = \frac{f'_c k_1 k \sec^2\theta(\frac{2}{\psi}+\tan\theta)}{f_{sy}\,2(\frac{1}{\psi}+\tan\theta)}$$

5) หาปริมาณเหล็กลูกตั้งในภาวะสมดุลย์จาก

$$p_{wb} = r_b p_{sb}\frac{(f_{sy})}{f_{wy}}$$

4.2.2 ทฤษฎีไดอะโกนอล คอมเพรสชั่น ฟีล

ปี 1974 Denis Mitchel และ Michael P.Collins(23) ร่วมกันเสนอทฤษฎี ไดอะโกนอล คอมเพรสชั่น ฟีล โดยวิเคราะห์มาจากพื้นฐานที่ว่า คานคอนกรีตเสริมเหล็ก ภายใต้แรงบิด หลังรอยแตกร้าวปรากฏ คอนกรีตในแนวทะแยง ซึ่งทำมุม $\alpha$ กับแกนของคานคอนกรีต จะเป็นตัวรับแรงบิด และมุม $\alpha$ นี้ไม่จำเป็นต้องมีค่าเท่ากับมุมของการแตกร้าว

ทฤษฎีดังกล่าวนี้ สามารถใช้ทำนายพฤติกรรมของคานคอนกรีตภายใต้แรงบิด ของทั้งที่เสริมด้วยเหล็กเสริมธรรมดาและเหล็กเสริมอัดแรง ในช่วงหลังรอยแตกร้าวปรากฏจนกระทั่งคานเกิดการชำรุด นอกจากนี้ยังสามารถจำแนกลักษณะการชำรุดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กภายใต้แรงบิด ออกได้ในลักษณะต่าง ๆ คือ

1) เหล็กลูกตั้งและเหล็กเสริมตามยาวถึงกำลังคลาก ก่อนคอนกรีตชำรุด
2) เหล็กลูกตั้งหรือเหล็กเสริมตามยาวอย่างหนึ่งอย่างใดถึงกำลังคลากก่อนคอนกรีตชำรุด
3) เหล็กลูกตั้งและเหล็กเสริมตามยาวถึงกำลังคลาก ขณะคอนกรีตชำรุด (ภาวะสมดุลย์)

การวิเคราะห์

พิจารณาคานคอนกรีตรูปตัดสี่เหลี่ยมกลวง ขนาดความกว้าง b ลึก h ความหนาของผนังเท่ากับ $t_d$ เสริมด้วยเหล็กเสริมตามยาวซึ่งมีเนื้อที่หน้าตัดทั้งหมด $A_{st}$ และเหล็กลูกตั้งเนื้อที่หน้าตัด $A_w$ ที่ระยะเรียง s ตลอดความยาวคาน

สมการสมดุลย์ของแรง

พิจารณาสมการ การสมดุลย์ของแรงในรูปที่ 4.9 (ก-ข-ค) จะได้

$$q = f_d t_d \sin\alpha \cos\alpha \qquad .....C.1$$

$$A_{st} f_s = f_d t_d \cos^2\alpha \, Po \qquad .....C.2$$

$$A_w f_w = f_d t_d \sin^2\alpha \, .s \qquad .....C.3$$

เมื่อ $f_d$ = หน่วยแรงอัดในแนวทะแยง

$\alpha$ = มุมที่แรงอัดทะแยงทำกับแกนของคานคอนกรีต

$q$ = แรงเฉือนไหล

$P_o$ = เส้นรอบรูปซึ่งเกิดจากแรงเฉือนไหล

สมการการบิดเบี้ยวของรูปร่าง

Collins[24] อาศัยสมการ การคงที่ของพลังงานวิเคราะห์หามุมบิดของคานคอนกรีตดังนี้

$$1^{*}\psi L = f_s^{*}\epsilon_s A_{st} L + f_w^{*}\epsilon_w A_w \frac{P_w}{s} L + f_d^{*}\epsilon_d t_d P_o L$$

โดยที่ $\psi$ = มุมบิด

$L$ = ความยาวคานคอนกรีต

$\epsilon_s$, $\epsilon_w$ = หน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กลูกตั้งตามลำดับ

$f_s^{*}$, $f_w^{*}$, $f_d^{*}$ = หน่วยแรงซึ่งเกิดจากแรงบิด 1 หน่วยในเหล็กเสริมตามยาว เหล็กลูกตั้ง และของคอนกรีตในแนวทะแยงตามลำดับ

จากสมการ C.1,C.2,C.3 หาค่า $f_s^{*} f_w^{*} f_d^{*}$ อยู่ในรูปของ $q^{*}$ (ซึ่งเท่ากับ $\frac{1}{2A_o}$ ) นำไปแทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\psi = \frac{P_o}{2A_o}\left[\frac{\epsilon_s}{\tan\alpha} + \epsilon_w \tan\alpha \frac{P_w}{P_o} + \frac{2\epsilon_d}{\sin 2\alpha}\right] \qquad \text{......C.4}$$

พิจารณาสมการ C.4 จะเห็นได้ว่าค่ามุมบิด $\psi$ ขึ้นอยู่กับค่า $\alpha$ ดังนั้น $\alpha$ ต้องปรับตัวเองจนกระทั่งพลังงานภายในน้อยที่สุด นั่นคือ $\frac{d\psi}{d\alpha} = 0$

$$\therefore \tan^2\alpha = \frac{\epsilon_d + \epsilon_s}{\epsilon_d + \epsilon_w\left[\frac{P_w}{P_o}\right]} \qquad \text{......C.5}$$

มุมเปลี่ยน (Curvature)

เมื่อมีแรงบิดกระทำผนังของคานคอนกรีตจะเกิดการโก่งดังรูปที่ 4.10 (ก-ข) อาศัย Mohr's Circle รูป 4.10 ค จะได้มุมเปลี่ยน $\phi$ สัมพันธ์กับมุมบิด $\psi$ และมุม $\alpha$ กล่าวคือ

$$\phi = \psi \sin 2\alpha = \epsilon_{ds}/t_d \qquad \text{......C.6}$$

โดยที่ $\epsilon_{ds}$ = หน่วยการหดตัวที่ผิวของคอนกรีต

เส้นทางของแรงเฉือนไหล

พิจารณารูปที่ 4.11 ข ให้การกระจายของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจริง แทนด้วยสี่เหลี่ยมแทนหน่วยแรงรูป 4.11 ค มีขนาดเท่ากับ $k_3 f'_c$ ลึก $a = k_1 t_d \therefore f_d t_d = k_3 f'_c a$ แทนค่า $f_d t_d$ ลงในสมการ C.2 และ C.3 แล้วนำมารวมกันจะได้

$$a = \frac{A_{st} f_s}{k_3 f'_c s} + \frac{A_w f_w}{k_3 f'_c s} \qquad \text{......C.7}$$

โดยที่ $k_3$ = อัตราส่วนของหน่วยแรงที่มากที่สุดต่อกำลังอัดประลัยของคอนกรีต

หน่วยการยืดตัวของเหล็กเสริมตามยาว หาได้จากสมการ C.2,C.4,C.5,C.6 และ $\epsilon_d = (1-k_1/2)\epsilon_{ds}$ ซึ่งจะได้

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_{ds}}{2} \frac{k_1 k_3 f'_c A_o}{A_{st} f_s} - (1-k_1/2)\,\epsilon_{ds} \qquad \text{......C.8}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\epsilon_w = \frac{\epsilon_{ds}}{2} \frac{k_1 k_3 f'_c A_o s}{A_w f_w P_w} - \epsilon_{ds} (1-k_1/2) \frac{P_o}{P_w} \qquad \text{......C.9}$$

ค่าแรงเฉือนไหลหาได้จากสมการ C.1,C.2,C.3

$$q = \sqrt{\left[\frac{A_{st} f_s}{P_o}\right]\left[\frac{A_w f_w}{s}\right]} \qquad \text{......C.10}$$

ส่วนค่ามุมบิดหาได้จากสมการ C.1 และ C.6

$$\psi = \frac{\epsilon_{ds}}{2} k_1 k_3 \frac{f'_c}{q} \qquad \text{......C.11}$$

และแรงบิดต้านทาน $T = 2A_o q$ ......C.12

เหล็กเสริมในภาวะสมดุลย์

ให้การชำรุดของคานคอนกรีตเกิดขึ้นเมื่อ $\epsilon_{ds} = 0.003, k_3 = 0.85$ โดยที่ $k_1 = 0.85$ สำหรับกำลังอัดประลัยของคอนกรีตที่มีค่าเท่ากับหรือน้อยกว่า 280 กก/ซม$^2$ และลดลง 0.05 ทุก 70 กก/ซม$^2$ ของกำลังอัดประลัยของคอนกรีตที่เพิ่มจาก 280 กก/ซม$^2$

ให้ $P_{st} = \frac{A_{st}}{A_o}, P_w = \frac{A_w P_w}{A_o s}$ แทนค่า $\epsilon_{ds} = 0.003, f_s = f_{sy}, f_w = f_{wy}$ และ $E_s = 2.11 \times 10^6$ กก/ซม$^2$ ลงในสมการ C.8 และ C.9 จะได้

$$P_{stb} = \frac{0.85\, f'_c\, k_1/2}{f_{sy}} \; \frac{6,330}{f_{sy} + 6,330\,(1-k_1/2)} \qquad \text{......C.13}$$

$$P_{wb} = \frac{0.85\, f'_c k_1/2}{f_{wy}} \; \frac{6,330}{f_{wy} + 6,330\,(1-k_1/2)\,\frac{P_o}{P_w}} \qquad \text{......C.14}$$

4.2.3 ทฤษฎีกำลังประลัย

1) คานคอนกรีตรูปตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งเสริมเฉพาะเหล็กเสริมรับแรงดึง

พิจารณาคานคอนกรีตรูปตัดสี่เหลี่ยมขนาดความกว้าง b ลึก h เสริมเฉพาะเหล็กเสริมรับแรงดึงที่ ความลึกประสิทธิผล d ดังรูปที่ 4.12

การวิเคราะห์

ก) การชำรุดแบบแรงดึงเป็นหลัก

สมการการสมดุลย์ของแรง

$$A_s f_y = 0.85 f'_c k_1 bc \qquad \text{......D.1}$$

สมการ การสมดุลย์ของแรงดัด

$$M_u = A_s f_y (d - k_2 c) \qquad \text{......D.2}$$

แทนค่า D.1 ใน D.2 และให้ $q = \frac{pf_y}{f'_c}$, $p = \frac{A_s}{bd}$ และ $k_1 = 2k_2$ จะได้

$$M_u = A_s f_y d\ (1-0.59q)$$

หรือ $$M_u = bd^2 f'_c q(1-0.59q)$$

เหล็กเสริมในภาวะสมดุลย์

พิจารณารูปที่ 4.12 ข $\frac{c}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s}$

แทนค่า $\epsilon_c = \epsilon_u$; $C_s = \epsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$

$$\therefore \frac{c}{d} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \frac{f_y}{E_s}} \qquad \text{......D.3}$$

จากสมการ D.1 และ D.3 $p_b = 0.85k_1 \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \frac{f_y}{E_s}}$

และแรงดัดประลัย $M_u = (0.85k_1\ f'_c bd^2)\left[\frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \frac{f_y}{E_s}}\right]\left[1-k_2 \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \frac{f_y}{E_s}}\right]$

ข) การชำรุดแบบแรงอัดเป็นหลัก

สมการ การสมดุลย์ของแรง

$$0.85k_1\ f'_c bc = A_s f_s \qquad \text{......D.4}$$

สมการการสมดุลย์ของแรงดัด

$$M_u = A_s f_s\ (d - k_2 c) \qquad \text{......D.5}$$

จากสมมติฐานการกระจายของความเครียด

$$k_u = \frac{c}{d} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_s} \qquad \text{......D.6}$$

สมการ D.4,D.5,D.6 จะได้

$$k_u = \sqrt{pm + \left[\frac{pm}{2}\right]^2} - \frac{pm}{2}$$

โดยที่ $m = E_s \epsilon_u / 0.85 k_1 f'_c$

$$\therefore M_u = (0.85 k_1 f'_c)\, bd^2 k_u (1 - k_2 k_u)$$