ระบบของสมการบางชนิดบนฟิลด์อันตะ

นางสาว เอื้อมชม เรืองกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. ๒๕๑๖

ON SOME SYSTEMS OF EQUATIONS OVER A FINITE FIELD

Miss Euamchom Reongkul

A Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1973

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfilment of the requirements for the Degree of Master of Science.

B. Tamthai

....

Dean of Graduate School.

Thesis Committee

Subha Sutchritpongsa .... Chairman.

Fuanglada Jung ....

Thavee Srisangthong ....

Thesis Supervisor Dr. Fuanglada R. Jung

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : ระบบของสมการบางชนิดบนฟิลด์อันตะ

ชื่อ : นางสาว เอื้อมชม เรืองกุล

แผนกวิชา : คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา : ๒๕๑๕

บทคัดย่อ

ให้ F เป็นฟิลด์อันตะของออร์เดอร์ q และคาแรคเตอริสติค p เมื่อ p เป็นไพร์มที่เป็นเลขคี่ (odd prime) ให้ $a_1, \ldots, a_t$ เป็นสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์ของ F และ a อยู่ใน F ให้ $\Psi(\theta)$ แทนสัญญลักษณ์ของเลอจองใน F นั่นคือ $\Psi(\theta)$ เท่ากับ +1, −1 หรือ 0 ตามแต่ว่า θ เป็นกำลังสอง ไม่เป็นกำลังสอง หรือศูนย์ใน F ในวิทยานิพนธ์นี้ เราศึกษาคุณสมบัติเบื้องต้นของฟิลด์อันตะและระบบของสมการบางชนิดบนฟิลด์อันตะ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เราหาจำนวนคำตอบของสมการ

$$a = a_1x_1^2 + \ldots + a_tx_t^2$$

เมื่อ $a, a_1, \ldots, a_t$ เป็นสมาชิกของ F และนำเอาผลที่ได้มาหาจำนวนคำตอบ $N_{s,t}(a,b)$ ของระบบของสมการ

$$(1)\qquad \begin{cases} a = a_1x_1^2 + \ldots + a_tx_t^2 & (a_1 \ldots a_t \neq 0) \\ b = b_1x_1 + \ldots + b_tx_t \end{cases}$$

เมื่อ a, b, a_i, b_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ เป็นสมาชิกของ F และ b_i ไม่เป็นศูนย์เสีย s ตัว โดยที่ $1 \leqslant s \leqslant t$ ให้ $A = a_1 \ldots a_t \neq 0$, $B = \frac{b_1^2}{a_1} + \ldots + \frac{b_t^2}{a_t}$ และ $D = b^2 - aB$ เราได้ว่าจำนวนคำตอบ $N_{s,t}(a,b)$ ของระบบของสมการ (1) เป็นดังนี้

(ก) ในกรณีที่ $B \neq 0,\ D = 0,$

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} + q^{k-1}(q-1)\Psi((-1)^k AB) & \text{ถ้า } t = 2k+1 \\ q^{t-2} & \text{ถ้า } t = 2k \end{cases}$$

(ข) ในกรณีที่ $B \neq 0,\ D \neq 0,$

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} - q^{k-1}\Psi((-1)^k AB) & \text{ถ้า } t = 2k+1 \\ q^{t-2} + q^{k-1}\Psi((-1)^k AD) & \text{ถ้า } t = 2k \end{cases}$$

(ค) ในกรณีที่ $B = 0,\ D = 0,\ a = 0,$

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} + q^{k-1}(q-1)\Psi((-1)^k A) & \text{ถ้า } t = 2k \\ q^{t-2} & \text{ถ้า } t = 2k+1 \end{cases}$$

(ง) ในกรณีที่ $B = 0,\ D = 0,\ a \neq 0,$

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} - q^{k-1}\Psi((-1)^k A) & \text{ถ้า } t = 2k \\ q^{t-2} + q^{k}\Psi((-1)^k aA) & \text{ถ้า } t = 2k+1 \end{cases}$$

(จ) ในกรณีที่ $B = 0,\ D \neq 0,\ N_{s,t}(a,b) = q^{t-2}$

ในที่สุดเราใช้ผลลัพธ์นี้ไปแก้ปัญหาบางอย่างในทางเรขาคณิต

Thesis Title : On Some Systems of Equations over a Finite Field.

Name : Miss Euamchom Reongkul

Department : Mathematics

Academic Year : 1972

ABSTRACT

Let F be a finite field of order q and characteristic p, where p is an odd prime. Let $a_1, \ldots, a_t$ be non-zero elements of F and let $a \in F$. Let $\Psi(\theta)$ denote the Legendre symbol in F, that is, $\Psi(\theta) = +1, -1$ or 0 according as θ is a square, a non-square or zero in F. In this thesis, we study basic properties of finite fields and some systems of equations over a finite field. Particularly, we find the number of solutions of the equation

$$a = a_1x_1^2 + \ldots + a_tx_t^2 ,$$

where $a, a_1, \ldots, a_t$ are elements of F, and use it in helping to determine the number $N_{s,t}(a,b)$ of solutions in F of the system of equations :

$$(1) \qquad \begin{cases} a = a_1x_1^2 + \ldots + a_tx_t^2 & (a_1 \ldots a_t \neq 0), \\ b = b_1x_1 + \ldots + b_tx_t , \end{cases}$$

where a, b, a_i, b_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ are elements of F and exactly s of the elements b_i are $\neq 0$ where $1 \leqslant s \leqslant t$. Let $A = a_1 \dots a_t \neq 0$, $B = \frac{b_1^2}{a_1} + \dots + \frac{b_t^2}{a_t}$ and $D = b^2 - aB$. We obtain the number $N_{s,t}(a,b)$ of solutions of the system of equations (1) as follows :

(i) In case $B \neq 0$, $D = 0$,

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} + q^{k-1}(q-1)\Psi((-1)^k AB) & \text{if } t = 2k+1, \\ q^{t-2} & \text{if } t = 2k \text{ ;} \end{cases}$$

(ii) in case $B \neq 0$, $D \neq 0$,

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} - q^{k-1}\Psi((-1)^k AB) & \text{if } t = 2k+1, \\ q^{t-2} + q^{k-1}\Psi((-1)^k AD) & \text{if } t = 2k \text{ ;} \end{cases}$$

(iii) in case $B = 0$, $D = 0$, $a = 0$,

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} + q^{k-1}(q-1)\Psi((-1)^k A) & \text{if } t = 2k, \\ q^{t-2} & \text{if } t = 2k+1 \text{ ;} \end{cases}$$

(iv) in case $B = 0$, $D = 0$, $a \neq 0$,

$$N_{s,t}(a,b) = \begin{cases} q^{t-2} - q^{k-1}\Psi((-1)^k A) & \text{if } t = 2k, \\ q^{t-2} + q^{k}\Psi((-1)^k aA) & \text{if } t = 2k+1 \text{ ;} \end{cases}$$

(v) in case $B = 0$, $D \neq 0$, $N_{s,t}(a,b) = q^{t-2}$.

We then use this result to solve some problems in geometry.

ACKNOWLEDGEMENT

The author feels extremely grateful to Dr. Fuanglada R. Jung, the author's supervisor, who has generously provided advice and assistance not only in mathematical ideas but also in English usage, which made this thesis possible.

In addition, the author wishes to express her gratitude to all lecturers of the Department of Mathematics at Chulalongkorn University for their previous lectures in the undergraduate and graduate courses.

TABLE OF CONTENTS