บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

<u>ทฤษฎีการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น แบบมีการแบ่งประชากรออกเป็นชั้นภูมิ</u>[1] (Theory of Stratified Two-Stage Sampling)

ทฤษฎีการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้นแบบมีการแบ่งประชากรออกเป็นชั้นภูมิ เป็นหลักที่ว่าด้วยการเลือกตัวอย่างที่ทำเป็น 2 ขั้น โดยมีการแบ่งประชากรออกเป็นกลุ่ม ๆ เรียกว่า ชั้นภูมิ (Strata) แต่ในการวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษาการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น แบบมีการแบ่งประชากรออกเป็นชั้นภูมิ และในการเลือกตัวอย่างทั้ง 2 ขั้น ใช้ความน่าจะเป็นในการเลือกตัวอย่างเท่ากัน (Stratified Two-Stage Random Sampling)

ถ้าพิจารณาตามความหมายแล้ว การเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น แบบมีการแบ่งประชากรออกเป็นชั้นภูมิ และการเลือกตัวอย่างทั้ง 2 ขั้นนี้ ใช้ความน่าจะเป็นในการเลือกตัวอย่างเท่ากัน คือ การเลือกตัวอย่างโดยที่แบ่งประชากรทั้งหมดออกเป็นกลุ่ม ๆ เรียกว่าชั้นภูมิ ตามลักษณะบางอย่างที่ต้องการ ซึ่งแต่ละชั้นภูมิคงจะมีขนาดเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ แต่ในกรณีนี้จะกล่าวถึงขนาดของชั้นภูมิไม่เท่ากัน ซึ่งสามารถเปลี่ยนเป็นกรณีขนาดของชั้นภูมิเท่ากันได้โดยง่าย การเลือกตัวอย่างขั้นที่ 1 ไม่ว่าหน่วยในขั้นที่ 1 ในแต่ละชั้นภูมิ จะมีขนาดเท่ากันหรือไม่ก็ตาม จากแต่ละชั้นภูมิเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 (First stage sampling units) ขึ้นมาจำนวนหนึ่ง ด้วยความน่าจะเป็น

---

1 William G. Cochran, <u>Sampling Techniques</u>, Second Edition (New York: John Wiley & Sons Co, 1963), pp. 87-94, pp. 270-278 and pp.288.

ของการเลือกเท่ากัน (Equal probability) จัดเป็นการเลือกตัวอย่างแบบสุ่ม (Random sampling) ในลักษณะของการแบ่งขนาดของตัวอย่างออกไปตามสัดส่วนของขนาดของชั้นภูมิ (Proportion allocation) และการเลือกในชั้นนี้เป็นการเลือกตัวอย่างแบบไม่มีการแทนที่ (Sampling without replacement) สำหรับการเลือกตัวอย่างขั้นที่ 2 จากแต่ละหน่วยตัวอย่างในขั้นที่หนึ่ง ทำการเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 (Second stage sampling units) มาจำนวนหนึ่งด้วยความน่าจะเป็นของการเลือกเท่ากัน จัดเป็นการเลือกตัวอย่างแบบสุ่ม โดยที่การเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 เป็นการเลือกแบบไม่มีการแทนที่เช่นเดียวกับการเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1

วิธีการหาค่าพารามิเตอร์ ตัวสถิติ และความคลาดเคลื่อนของตัวสถิติ

โดยทั่วไปในการสำรวจทางสถิติ พารามิเตอร์เป็นสิ่งสำคัญที่เราสนใจศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าเป็นการสำรวจขนาดใหญ่ เราจะไม่ทราบค่าที่แท้จริงของพารามิเตอร์ นอกจากต้องอาศัยข้อมูลที่ได้จากการสำรวจมาคำนวณค่าของตัวสถิติ และนำค่าของตัวสถิติไปประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ ในการนี้ จะมีความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้เสมอ แต่ถ้าใช้การสุ่มตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็นเราสามารถจะวัดความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้ในรูปของความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่าง และสามารถกำหนดขอบเขตของความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างได้อย่างเหมาะสม โดยพิจารณาจากงบประมาณที่มีและขนาดของตัวอย่างที่ใช้ เพราะฉะนั้น ไม่ว่าจะเป็นการสำรวจทางสถิติเรื่องใด ถ้าใช้การสุ่มตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็น เราสามารถหาตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ (ตัวสถิติ) และความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวประมาณค่าของพารามิเตอร์ได้ โดยอาศัยวิธีการประมาณค่าในทฤษฎีการสุ่มตัวอย่างแบบนั้น ๆ แต่ในการวิจัยครั้งนี้เราจะศึกษาถึงการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น แบบมีการแบ่งประชากรออกเป็นชั้นภูมิและมีการเลือกตัวอย่างทั้ง 2 ขั้น โดยใช้ความน่าจะเป็นเท่ากัน เราสามารถกล่าวถึงการหาค่าพารามิเตอร์ ค่าของตัวสถิติ และความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติได้ โดยมีรายละเอียดดังนี้คือ

สมมุติว่า มีการแบ่งประชากรออกเป็น L ชั้นภูมิ ในแต่ละชั้นภูมิประกอบด้วยหน่วยขั้นที่ 1 จำนวน N_h หน่วย ($h = 1,2,\ldots,L$) รวมเป็นหน่วยขั้นที่ 1 ในประชากรทั้งหมด N หน่วย ($\sum_{h=1}^{L} N_h = N$) และภายในหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i ประกอบด้วยหน่วยขั้นที่ 2 ซึ่งสมมุติว่ามี M_{hi} หน่วย ($i = 1,2,\ldots,N_h$)

ให้ X_{hiju} เป็นค่าของลักษณะที่ต้องการศึกษา (characteristic under study) หรือตัวแปรของพวก (category) ที่ $u(u = 1,2,...,d)$ ที่วัดจากหน่วยขั้นที่ 2 หน่วยที่ j $(j = 1,2,...,M_{hi})$ ในหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i $(i = 1,2,...,N_h)$ ในชั้นภูมิที่ h $(h = 1,2,...,L)$ ในประชากร มีพารามิเตอร์ที่สนใจประมาณค่า ดังต่อไปนี้คือ

1. <u>ยอดรวม</u> (Total) เราพิจารณาได้ตามลำดับขั้นของการเลือกตัวอย่าง ดังนี้

ในการเลือกตัวอย่างขั้นที่ 2 ยอดรวมของลักษณะที่ต้องการศึกษาของพวกที่ u ในหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i ในชั้นภูมิที่ h เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์คือ $X_{hiu} = \sum_{j=1}^{M_{hi}} X_{hiju}$

ในการเลือกตัวอย่างขั้นที่ 1 ยอดรวมของลักษณะที่ต้องการศึกษาของพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ คือ $X_{hu} = \sum_{i=1}^{N_h} X_{hiu}$

เมื่อรวมทุกเขตเข้าด้วยกัน ยอดรวมของลักษณะที่ต้องการศึกษาของพวกที่ u เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ คือ $X_u = \sum_{h=1}^{L} X_{hu}$

และเมื่อพิจารณาทุกพวกเข้าด้วยกัน ยอดรวมของลักษณะที่ต้องการศึกษาทั้งหมด เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ คือ $X = \sum_{u=1}^{d} X_u$

ในการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น แบบมีการแบ่งชั้นภูมิและมีการเลือกตัวอย่างทั้ง 2 ขั้น แบบที่ใช้ความน่าจะเป็นเท่ากัน โดยในขั้นแรกในแต่ละชั้นภูมิเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 ขึ้นมา n_h หน่วย โดยให้มีความน่าจะเป็นของการเลือกเท่า ๆ กัน รวมเป็นหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 ที่เลือกได้ทั้งหมด n หน่วย ($\sum_{h=1}^{L} n_h = n$) และในขั้นที่ 2 ภายในแต่ละหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 เลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 ขึ้นมา m_{hi} หน่วย จากหน่วยทั้งหมดที่มีอยู่ M_{hi} หน่วย สำหรับหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i ในชั้นภูมิที่ h โดยให้มีความน่าจะเป็นของการเลือกเท่า ๆ กัน

ให้ x_{hiju} เป็นค่าของลักษณะที่ต้องการศึกษาหรือตัวแปรของพวกที่ u ที่วัดจากหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 หน่วยที่ j $(j = 1,2,\ldots,m_{hi})$ ในหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 หน่วยที่ i $(i = 1,2,\ldots,n_h)$ ในชั้นภูมิที่ h $(h = 1,2,\ldots,L)$ ของตัวอย่าง

สูตรสำหรับการประมาณค่า (ที่ไม่มีความเอียงเฉ) ของ X_{hiu} คือ

$$x_{hiu} = \frac{M_{hi}}{m_{hi}} \sum_{j=1}^{m_{hi}} x_{hiju}$$

ให้ $x^*_{hiu} = N_h\, x_{hiu}$ และ $x^*_{hou} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x^*_{hiu}$ เราสามารถแสดงได้ว่า x^*_{hiu} และ x^*_{hou} ต่างก็เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ X_{hu} แต่ x^*_{hiu} นี้เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ X_{hu} ที่อาศัยเฉพาะค่าของลักษณะที่ต้องการศึกษาพวกที่ u และจากหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 ที่อยู่ในหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i

ตัวสถิติที่จะใช้ประมาณค่ายอดรวม X_u คือ

$$x_u = \sum_{h=1}^{L} x^*_{hou}$$

x_u เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ X_u และ $x = \sum_{u=1}^{d} x_u$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ X

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติ x^*_{hou} (ความแปรปรวนของ x^*_{hou}) อยู่ในรูป

$$V(x^*_{hou}) = N^2\bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}$$

โดยที่ $S^2_{hb} = \frac{1}{N_h-1}\sum_{i=1}^{N_h}\left(\frac{M_{hi}}{\bar{M}_h}\bar{X}_{hiu} - \bar{\bar{X}}_{hu}\right)^2$ คือ ความแปรปรวนระหว่างหน่วยขั้นที่ 1 ภายในชั้นภูมิที่ h และ $\bar{M}_h = \frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}$ เป็นค่าเฉลี่ยของหน่วยขั้นที่ 2 ต่อหน่วยขั้นที่ 1 ในชั้นภูมิที่ h

และ $S^2_{hwi} = \frac{1}{M_{hi}-1} \sum_{j=1}^{M_{hi}} (X_{hiju} - \bar{X}_{hiu})^2$ คือ ความแปรปรวนระหว่างหน่วยขั้นที่ 2 ภายในหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i

ความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ x^*_{hou} ได้แก่

$$SD.(x^*_{hou}) = \sqrt{N_h^2\bar{M}_h^2 (1-\frac{n_h}{N_h}) \frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}) \frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}}$$

$$CV.(x^*_{hou}) = \frac{\sqrt{N_h^2\bar{M}_h^2 (1-\frac{n_h}{N_h}) \frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi} (1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}) \frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}}}{x^*_{hou}}$$

ในทางปฏิบัติจะไม่สามารถทราบค่าที่แท้จริงของ $V(x^*_{hou})$ ได้ เนื่องจากในแต่ละส่วนของ $V(x^*_{hou})$ มีพารามิเตอร์ที่ไม่สามารถทราบค่าที่แท้จริงอยู่ 2 ตัวคือ S^2_{hb} และ S_{hwi} เมื่อทำการสำรวจและเก็บรวบรวมข้อมูลจากตัวอย่าง (sample data) มาได้แล้ว จะอาศัยข้อมูลดังกล่าวหาตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $V(x^*_{hou})$ ได้ดังสูตร

$$v(x^*_{hou}) = N_h^2\bar{M}_h^2 (1-\frac{n_h}{N_h}) \frac{s^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M^2_{hi} (1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}) \frac{s^2_{hwi}}{m_{hi}}$$

โดยที่ $s^2_{hb} = \frac{1}{n_h-1} \sum_{i=1}^{n_h} (\frac{M_{hi}}{\bar{M}_h} \bar{x}_{hiu} - \bar{\bar{x}}_{hu})^2$ เป็นตัวประมาณค่าที่มีความเอียงเฉของ S^2_{hb} ดังสูตรที่ได้จากการหาค่าความคาดหมาย

$$E(s_{hb}^2) = S_{hb}^2 + \frac{1}{\bar{M}_h^2 N_h} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 \left(\frac{M_{hi} - m_{hi}}{M_{hi}} \right) \frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}$$

$$s_{hwi}^2 = = \frac{1}{m_{hi}-1} \sum_{j=1}^{m_{hi}} (x_{hiju} - \bar{x}_{hiu})^2$$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มี

ความเอียงเฉของ S_{hwi}^2

$$\bar{\bar{x}}_{hu} = \frac{x_{hou}^*}{N_h \bar{M}_h}$$ เป็นค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u

ในชั้นภูมิที่ h

และ $\bar{x}_{hiu} = \frac{x_{hiu}}{m_{hi}}$ เป็นค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 สำหรับ

พวกที่ u ในหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 หน่วยที่ i และในชั้นภูมิที่ h

เมื่อพิจารณาจากสูตรที่ใช้คำนวณค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน[1] และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ (Relative standard error)[2] ของ x_{hou}^* เราไม่สามารถหาค่าที่แท้จริงได้ จึงต้องอาศัยหาตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ SD.(x_{hou}^*) และ CV.(x_{hou}^*) ดังนี้คือ

$$sd.(x_{hou}^*) = \sqrt{N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1- \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1- \frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}}$$

---

1 ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวประมาณค่า คือ ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของตัวประมาณค่า

2 ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของตัวประมาณค่า คือ สัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนของตัวประมาณค่า

$$\text{และ}\ \ cv.(x^*_{hou}) = \frac{\sqrt{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} M^2_{hi}\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s^2_{hwi}}{m_{hi}}}}{x^*_{hou}}$$

ความคลาดเคลื่อน x_u ได้แก่

$$V(x_u) = \sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\,\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{h=1}^{L} M^2_{hi}\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)$$

เนื่องจากไม่ทราบค่าของพารามิเตอร์ S^2_{hb} และ S^2_{hwi} จึงไม่สามารถหาค่าของ $V(x_u)$ ได้ อย่างไรก็ตาม เราสามารถหาค่าประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉของความแปรปรวนของ x_u ได้ อยู่ในรูป

$$v(x_u) = \sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\,\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} M^2_{hi}\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)$$

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ x_u ในรูปความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ มีสูตรดังนี้คือ

$$SD.(x_u) = \sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)}$$

$$\text{และ}\ \ CV.(x_u) = \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)}}{x_u}$$

ในทำนองเดียวกับความแปรปรวนของ x_u เราไม่สามารถหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ x_u ได้ จึงต้องประมาณค่าดังกล่าวให้อยู่ในรูปค่าประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉของ $SD.(x_u)$ และ $CV.(x_u)$ ดังสูตร

$$sd.(x_u) = \sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left\{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right\}}$$

$$\text{และ}\quad cv.(x_u) = \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left\{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right\}}}{x_u}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างตัวสุดท้ายที่จะกล่าวถึงในหัวข้อแรกนี้ คือ ความคลาดเคลื่อนของยอดรวมโดยประมาณของลักษณะที่ต้องการศึกษา (x) ดังสูตร

$$V(x) = \sum_{n=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left\{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right\}$$

เนื่องจากไม่สามารถหาค่า S_{hb}^2 และ S_{hwi}^2 ได้ จึงต้องหาค่าประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉของ V(x) ในรูป

$$v(x) = \sum_{n=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left\{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right\}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ x ในรูปความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ มีสูตรดังนี้คือ

$$SD.(x) = \sqrt{\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left\{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right\}}$$

$$\text{และ}\quad CV.(x) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left\{N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right\}}}{x}$$

และหาค่าประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉของ SD.(x) และ CV.(x) ได้ในรูป

$$sd.(x) = \sqrt{\sum_{u=1}^{d} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 (1 - \frac{n_h}{N_h}) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 (1 - \frac{m_{hi}}{M_{hi}}) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}$$

และ $$cv.(x) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 (1 - \frac{n_h}{N_h}) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 (1 - \frac{m_{hi}}{M_{hi}}) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}}{x}$$

2. <u>ค่าเฉลี่ย</u> (Mean or average) พิจารณาได้ตามลำดับขั้นของการเลือกตัวอย่างเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว ดังนี้

ในการเลือกตัวอย่างขั้นที่ 2 ค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u ในหน่วยขั้นที่ 1 หน่วยที่ i ในชั้นภูมิที่ h ในประชากร เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ คือ

$$\bar{X}_{hiu} = \frac{X_{hiu}}{M_{hi}}$$

ในการเลือกตัวอย่างขั้นที่ 1 ค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยขั้นที่ 1 สำหรับพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h ในประชากร เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ คือ

$$\bar{X}_{hu} = \frac{X_{hu}}{N_h}$$

และค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h ในประชากร เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ คือ

$$\bar{\bar{X}}_{hu} = \frac{X_{hu}}{\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}}$$

พิจารณาตามการแบ่งชั้นภูมิ ค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยขั้นที่ 1 สำหรับพวกที่ u ในประชากร เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ คือ

$$\bar{X}_u = \frac{X_u}{N}$$

และค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u ในประชากร เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์คือ

$$\bar{\bar{X}}_u = \frac{X_u}{\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}}$$

เช่นเดียวกับในหัวข้อของยอดรวม ให้ x_{hiju} เป็นค่าของลักษณะที่ต้องการศึกษาสำหรับพวกที่ u จากหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 หน่วยที่ j ในหน่วยตัวอย่างขั้นที่หนึ่งหน่วยที่ i ในชั้นภูมิที่ h ซึ่งได้จากการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยวิธีใดก็ตาม

สูตรในการหาค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u ในหน่วยตัวอย่างขั้นที่หนึ่ง หน่วยที่ i ในชั้นภูมิที่ h ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $\bar{X}_{hiu}$ คือ

$$\bar{x}_{hiu} = \frac{\sum_{j=1}^{m_{hi}} x_{hiju}}{m_{hi}}$$

ตัวสถิติในรูปของค่าเฉลี่ยตัวต่อไปที่สนใจ คือ ค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 สำหรับพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h ซึ่งใช้เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $\bar{X}_{hu}$ โดยมีสูตร

$$\bar{x}_{hu} = \frac{x^{*}_{hou}}{N_h}$$

ส่วนตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h มีสูตรดังนี้ คือ

$$\bar{\bar{x}}_{hu} = \frac{x^{*}_{hou}}{N_h \bar{M}_h}$$

ตัวสถิติ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ที่เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $\bar{\bar{X}}_{hu}$ นั้น สามารถพิจารณาให้อยู่ในรูปของตัวประมาณค่าแบบอัตราส่วน (Ratio estimator) ได้ คือ

$$\bar{\bar{x}}_{h1u} = \frac{\frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \frac{M_{hi}}{m_{hi}} \sum_{j=1}^{m_{hi}} x_{hiju}}{\frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi} \bar{x}_{hiu}}{\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}}$$

และ $\bar{\bar{x}}_{h1u}$ จะเป็นตัวประมาณค่าที่มีความเอียงเฉ แต่ความเอียงเฉนี้จะมีค่าน้อยลงเมื่อใช้หน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 มากขึ้น

นอกจากนั้น ยังอาจจะพิจารณาตัวสถิติ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ให้เป็นตัวประมาณค่าที่อยู่ในรูปของสูตรของค่าเฉลี่ยไร้น้ำหนัก (Unweighted average formula) เพราะ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ประมาณได้จากการหาค่าเฉลี่ยโดยไม่มีการถ่วงน้ำหนักของ $\bar{x}_{h1u}$ ดังนี้

$$\bar{\bar{x}}_{h2u} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{m_{hi}} \sum_{j=1}^{m_{hi}} x_{hiju}$$

$$= \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \bar{x}_{hiu}$$

จากสูตรนี้จะได้ว่า $\bar{\bar{x}}_{h2u}$ เป็นตัวประมาณค่าที่มีความเอียงเฉ และความเอียงเฉจะมีค่าน้อยลงถ้าจำนวนหน่วนขั้นที่ 2 ที่มีอยู่ในหน่วยขั้นที่หนึ่ง หน่วยที่ i (M_{hi}) มีจำนวนเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน

ค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 สำหรับพวกที่ u เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $\bar{X}_u$ ได้แก่

$$\bar{\bar{x}}_u = \frac{x_u}{N}$$

และค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u จะเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $\bar{\bar{X}}_u$ โดยมีสูตรดังนี้คือ

$$\bar{\bar{x}}_u = \frac{x_u}{\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}}$$

ส่วนตัวสถิติที่เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $\bar{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 ที่มีสูตรดังนี้คือ

$$\bar{x} = \sum_{u=1}^{d} \bar{x}_u$$

และตัวสถิติตัวสุดท้ายที่ใช้ประมาณค่าเฉลี่ยต่อหน่วยขั้นที่ 2 ในประชากร ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉ คือ

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{u=1}^{d} \bar{\bar{x}}_u$$

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติที่อยู่ในรูปค่าเฉลี่ย ที่จะกล่าวถึงเป็นตัวแรก คือ ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 สำหรับพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h มีสูตรดังนี้

$$V(\bar{x}_{hu}) = \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right) \frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 \left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}$$

นอกจากจะพิจารณาความคลาดเคลื่อนของตัวสถิติ $\bar{x}_{hu}$ ในรูปความแปรปรวนแล้ว ยังสามารถพิจารณาได้ในรูปของความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{x}_{hu}$ โดยมีสูตรดังนี้คือ

$$SD.(\bar{x}_{hu}) = \sqrt{\bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}}$$

$$CV.(\bar{x}_{hu}) = \frac{\sqrt{\bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}}}{\bar{x}_{hu}}$$

เนื่องจากเราไม่ทราบค่าที่แท้จริงของ S_{hb}^2 และ S_{hwi}^2 จึงต้องอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างที่เก็บรวบรวมมาจากการสำรวจที่จัดทำขึ้น เพื่อใช้เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $V(\bar{x}_{hu})$ คือ

$$v(\bar{x}_{hu}) = \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h}\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}$$

ในทำนองเดียวกับความแปรปรวนของ $\bar{x}_{hu}$ เราไม่สามารถหาค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{x}_{hu}$ ได้ **จึงต้องพิจารณาหาค่า**ประมาณของความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{x}_{hu}$ ในรูป

$$sd.(\bar{x}_{hu}) = \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h}\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}$$

$$cv.(\bar{x}_{hu}) = \frac{\bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h}\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}}{\bar{x}_{hu}}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า $sd.(\bar{x}_{hu})$ และ $cv.(\bar{x}_{hu})$ เป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $SD.(\bar{x}_{hu})$ และ $CV.(\bar{x}_{hu})$ ตามลำดับ

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติที่จะพิจารณาต่อไป คือ ความแปร–ปรวนของค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 สำหรับพวกที่ u ในชั้นภูมิที่ h มีสูตรในการหาค่าดังนี้คือ

$$V(\bar{\bar{x}}_{hu}) = (1-\frac{n_h}{N_h})\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{1\;1}{n_h N_h \bar{M}_h^2} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 (1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}$$

นอกจากจะสามารถหาความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ให้อยู่ในรูปความแปรปรวนแล้ว เรายังสามารถหาความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ให้อยู่ในรูปความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ได้ตามลำดับ คือ

$$SD.(\bar{\bar{x}}_{hu}) = \sqrt{(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h \bar{M}_h^2} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 (1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}}$$

$$\text{และ } CV.(\bar{\bar{x}}_{hu}) = \frac{\sqrt{(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h \bar{M}_h^2} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 (1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}}}{\bar{\bar{x}}_{hu}}$$

เนื่องจากไม่สามารถหาค่า S^2_{hb} และ S^2_{hwi} ได้ จึงต้องอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างที่ได้จากการสำรวจ ทำการประมาณค่าความแปรปรวนของ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ จะได้ตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $V(\bar{\bar{x}}_{hu})$ อยู่ในรูป

$$v(\bar{\bar{x}}_{hu}) = (1-\frac{n_h}{N_h})\frac{s^2_{hb}}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h \bar{M}_h^2} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 (1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{s^2_{hwi}}{m_{hi}}$$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจากไม่สามารถหาค่าของความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธของ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ได้ จึงประมาณค่าดังกล่าวในรูปค่าประมาณของ

ความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{\bar{x}}_{hu}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ SD.($\bar{\bar{x}}_{hu}$) และ CV.($\bar{\bar{x}}_{hu}$) ตามลำดับ ดังนี้คือ

$$sd.(\bar{\bar{x}}_{hu}) = \sqrt{(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{s^2_{hb}}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h \bar{M}^2_h}\sum_{i=1}^{n_h} M^2_{hi}(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{s^2_{hwi}}{m_{hi}}}$$

$$\text{และ}\quad cv.(\bar{\bar{x}}_{hu}) = \frac{\sqrt{(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{s^2_{hb}}{n_h} + \frac{1}{n_h N_h \bar{M}^2_h}\sum_{i=1}^{n_h} M^2_{hi}(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{s^2_{hwi}}{m_{hi}}}}{\bar{\bar{x}}_{hu}}$$

เนื่องจาก $\bar{x}_u$ เป็นค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่หนึ่ง สำหรับพวกที่ u สามารถหาความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ $\bar{x}_u$ ให้อยู่ในรูปความแปรปรวนได้ ดังสูตร

$$V(\bar{x}_u) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\left(N^2_h\bar{M}^2_h(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)$$

และสามารถพิจารณาความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ $\bar{x}_u$ ให้อยู่ในรูปความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{x}_u$ ดังนี้

$$SD.(\bar{x}_u) = \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\left(N^2_h\bar{M}^2_h(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)}$$

$$\text{และ}\quad CV.(\bar{x}_u) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\left(N^2_h\bar{M}^2_h(1-\frac{n_h}{N_h})\frac{S^2_{hb}}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M^2_{hi}(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}})\frac{S^2_{hwi}}{m_{hi}}\right)}}{\bar{x}_u}$$

เนื่องจากไม่สามารถหาค่า $V(\bar{x}_u)$ ได้ จึงต้องอาศัยข้อมูลจากตัวอย่างประมาณค่าความแปรปรวนของ $\bar{x}_u$ ซึ่งจัดเป็นตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $V(\bar{x}_u)$ ได้ในรูป

$$v(\bar{x}_u) = \frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)$$

ในทำนองเดียวกัน ตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $SD.(\bar{x}_u)$ และ $CV.(\bar{x}_u)$ คือ

$$sd.(\bar{x}_u) = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{m_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}$$

และ $$cv.(\bar{x}_u) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}}{\bar{x}_u}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติที่จะกล่าวถึงต่อไปคือ ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่สอง สำหรับพวกที่ u ซึ่งมีสูตรดังนี้คือ

$$V(\bar{\bar{x}}_u) = \frac{1}{\left(\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}\right)^2} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right) \frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 \left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)$$

และสามารถหาตัวประมาณที่ไม่มีความเอียงเฉของความแปรปรวนของ $\bar{\bar{x}}_u$ ได้ในรูป

$$v(\bar{\bar{x}}_u) = \frac{1}{\left(\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}\right)^2} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1-\frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)$$

นอกจากจะพิจารณาความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของ $\bar{\bar{x}}_u$ ในรูปของความแปรปรวนแล้ว เรายังสามารถพิจารณาความคลาดเคลื่อนดังกล่าวอยู่ในรูปความเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{\bar{x}}_u$ ดังนี้คือ

$$SD.(\bar{\bar{x}}_u) = \frac{1}{\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}} \sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}$$

และ $$CV.(\bar{\bar{x}}_u) = \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}}{\bar{\bar{x}}_u\left(\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}\right)}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหาตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของความ–เบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{\bar{x}}_u$ ได้ ดังนี้คือ

$$sd.(\bar{\bar{x}}_u) = \frac{1}{\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}} \sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}$$

และ $$cv.(\bar{\bar{x}}_u) = \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}}{\bar{\bar{x}}_u\left(\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}\right)}$$

ความคลาดเคลื่อนจากการสุ่มตัวอย่างของตัวสถิติที่กล่าวถึงต่อไปคือ ความแปร–ปรวนของค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 ดังนี้

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{N^2}\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)$$

ความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{x}$ มีสูตรดังนี้คือ

$$SD.(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}$$

$$\text{และ} \quad CV.(\bar{x}) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}}{N\bar{\bar{x}}}$$

โดยสามารถหาตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $V(\bar{x})$, $SD.(\bar{x})$ และ $CV.(\bar{x})$ ได้ตามลำดับ ดังนี้คือ

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{N^2}\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)$$

$$sd.(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}$$

$$\text{และ} \quad cv.(\bar{x}) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)}}{N\bar{\bar{x}}}$$

ความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 2 มีสูตรดังนี้คือ

$$V(\bar{\bar{x}}) = \frac{1}{\left(\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}M_{hi}\right)^2}\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left(N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{N_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}}\right)$$

ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่าง ขั้นที่ 2 มีสูตรดังนี้

$$SD.(\bar{\bar{x}}) = \frac{1}{\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1- \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 \left(1- \frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}$$

และความคลาดเคลื่อนของค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการศึกษาต่อหน่วยตัวอย่าง ขั้นที่ 2 มีสูตรดังนี้

$$CV.(\bar{\bar{x}}) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1- \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{S_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}^2 \left(1- \frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{S_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}}{\bar{\bar{x}} \left(\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi} \right)}$$

เราไม่สามารถทราบค่าที่แท้จริงของความแปรปรวนของ $\bar{\bar{x}}$ จึงต้องอาศัยข้อมูลที่เก็บรวบรวมจากผลการสำรวจมาประมาณค่าความแปรปรวนของ $\bar{\bar{x}}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณ-ค่าที่ไม่มีความเอียงเฉของ $V(\bar{\bar{x}})$ มีสูตรดังนี้คือ

$$v(\bar{\bar{x}}) = \frac{1}{\left(\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi} \right)^2} \sum_{u=1}^{d} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1- \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1- \frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)$$

ความเบี่ยงเบนมาตรฐานและความคลาดเคลื่อนมาตรฐานสัมพัทธ์ของ $\bar{\bar{x}}$ มีตัวประมาณค่าที่ไม่มีความเอียงเฉดังนี้คือ

$$sd.(\bar{\bar{x}}) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d} \sum_{h=1}^{L} \left(N_h^2 \bar{M}_h^2 \left(1- \frac{n_h}{N_h}\right) \frac{s_{hb}^2}{n_h} + \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} M_{hi}^2 \left(1- \frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right) \frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}} \right)}}{\sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} M_{hi}}$$

$$\text{และ } cv.(\bar{\bar{x}}) = \frac{\sqrt{\sum_{u=1}^{d}\sum_{h=1}^{L}\left[N_h^2\bar{M}_h^2\left(1-\frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_{hb}^2}{n_h}+\frac{N_h}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}M_{hi}^2\left(1-\frac{m_{hi}}{M_{hi}}\right)\frac{s_{hwi}^2}{m_{hi}}\right]}}{\bar{\bar{x}}\left(\sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}M_{hi}\right)}$$

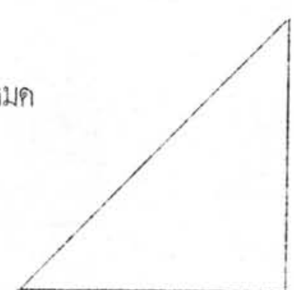
กล่าวสรุปได้ว่า ความแปรปรวนของตัวสถิติในรูปค่าเฉลี่ยหรือค่าประมาณของความแปรปรวนของค่าเฉลี่ย จะได้มาจากความแปรปรวนหรือค่าประมาณของความแปรปรวนของตัวสถิติซึ่งอยู่ในรูปยอดรวม

ถ้ามีการพิจารณาองค์ประกอบของความแปรปรวนของตัวประมาณค่าหรือตัวสถิติ (Estimators or statistics) ในการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น จะพบว่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าที่ได้จากการประมาณยอดรวมหรือค่าเฉลี่ยหรือค่าอื่น ๆ นั้น มีอยู่ 2 ส่วนที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนี้คือ

ความแปรปรวนทั้งหมดของตัวประมาณค่าเมื่อใช้การเลือกตัวอย่าง 2 ขั้น (Total variation of estimators in two-stage sampling) เท่ากับความแปรปรวนระหว่างหน่วยขั้นที่ 1 บวกด้วยความแปรปรวนระหว่างหน่วยขั้นที่ 2 ภายในหน่วยขั้นที่ 1 (Variation between first-stage units add variation within first-stage units)

สำหรับในกรณีนี้ จะพิจารณาในรูป $V_{ht}^2 = V_{hb}^2 + V_{hwi}^2$ ซึ่งคล้ายกับทฤษฎีทางเรขาคณิต ดังรูปประกอบข้างล่างนี้

V_{ht}^2 = ความแปรปรวนทั้งหมดของตัวประมาณค่า



V_{hwi}^2 = ความแปรปรวนระหว่างหน่วยขั้นที่ 2 ภายในหน่วยขั้นที่ 1

V_{hb}^2 = ความแปรปรวนระหว่างหน่วยขั้นที่ 1

โดยที่ V_{hb}^2 คือ ความแปรปรวน (variation) ที่เกิดขึ้น เพราะใช้ตัวอย่างในขั้นที่ 1 เพียง n_h หน่วยจากที่มีอยู่ทั้งหมด N_h หน่วย ประมาณค่าที่น่าสนใจของประชากรทั้งหมดในแต่ละชั้นภูมิ ซึ่ง V_{hb}^2 จะเกิดขึ้นเสมอไม่ว่าในขั้นที่ 2 นั้นจะสำรวจทุกหน่วยหรือสำรวจเพียงบางหน่วยก็ตาม จากการวิเคราะห์ดูจะพบว่า V_{hb}^2 จะลดลงเป็นศูนย์ เมื่อทำการเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 ในแต่ละชั้นภูมิ ให้ใกล้เคียงกับจำนวนหน่วยขั้นที่ 2 ทั้งหมดที่มีอยู่ในแต่ละชั้นภูมินั้น ๆ หรือเมื่อ σ_{hb}^2 เป็นศูนย์ $\left(\sigma_{hb}^2 = \frac{n_h-1}{N_h} S_{hb}^2 \right)$ ซึ่งไม่ขึ้นกับการเลือกหน่วยตัวอย่างในขั้นที่ 2

และ V_{hwi}^2 คือ ความแปรปรวนที่เกิดขึ้นเพราะใช้ตัวอย่างในขั้นที่ 2 เพียง m_{hi} หน่วยจากที่มีอยู่ทั้งหมด M_{hi} หน่วย ภายในหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 จากการวิเคราะห์ดูจะพบว่า V_{hwi}^2 จะลดลงเป็นศูนย์เมื่อทำการเลือกหน่วยตัวอย่างขั้นที่สองให้ใกล้เคียงกับจำนวนหน่วยขั้นที่ 2 ที่มีอยู่ในแต่ละหน่วยตัวอย่างขั้นที่ 1 หรือเมื่อ σ_{hwi}^2 เป็นศูนย์ $\left(\sigma_{hwi}^2 = \frac{M_{hi}-1}{M_{hi}} S_{hwi}^2 \right)$ ซึ่งไม่ขึ้นกับการเลือกหน่วยตัวอย่างในขั้นแรก

จากการพิจารณาถึงองค์ประกอบของความแปรปรวนของตัวประมาณค่าในการเลือกตัวอย่าง 2 ขั้นนี้ สามารถทราบได้ว่า ถ้าต้องการควบคุมขนาดของความแปรปรวนของตัวประมาณค่าที่ได้จากการใช้ตัวอย่าง จะต้องทำทั้ง 2 ขั้น โดยการเลือกใช้จำนวนตัวอย่าง (sample size) ในแต่ละขั้นให้เหมาะสม ทั้งนี้ ต้องคำนึงถึงขนาดของ V_{hb}^2 และ V_{hwi}^2 ที่พอจะยอมรับได้ พร้อมทั้งคำนึงถึงความสามารถในการทำงานสนามและทรัพยากรต่าง ๆ ที่จะใช้ประกอบอีกด้านหนึ่งด้วย