บทที่ 2

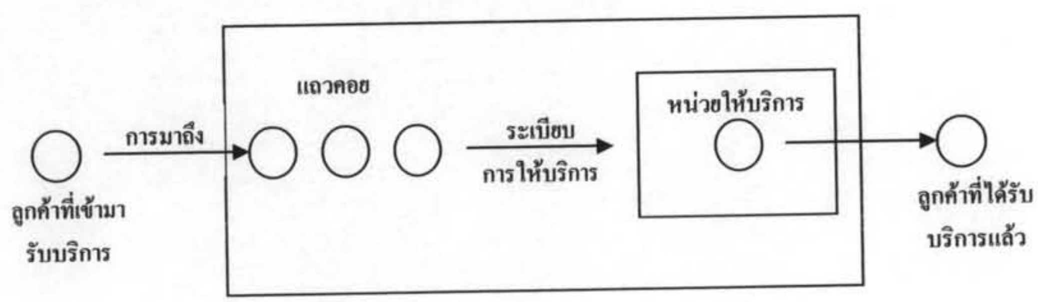
ทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

2.1 ทฤษฎีแถวคอย

การรอคอยเป็นสถานการณ์ที่พบเห็นได้ทั่วไปในชีวิตประจำวัน ไม่ว่าจะเป็นหน่วยงานของรัฐบาล หรือเอกชน ตัวอย่างเช่น การรอคอยเพื่อเข้ารับบริการในโรงพยาบาล ไปรษณีย์ การจ่ายเงินตามห้างสรรพสินค้า แถวคอยของข้อความที่รอเข้ายังหน่วยรับข้อความ (Router) เป็นต้น ปัญหาแถวคอยจะเกิดขึ้นเมื่อการบริการไม่เพียงพอต่อผู้รับบริการ (ลูกค้า) ที่เพิ่มปริมาณมากขึ้น การที่มีลูกค้าเข้าแถวรอรับบริการเป็นจำนวนมาก ลูกค้าจะเกิดความรู้สึกเบื่อหน่ายไม่พอใจ และอาจออกจากแถวคอยไปก่อนที่จะได้รับบริการหรืออาจจะไม่กลับมารับบริการอีกในอนาคต เหตุการณ์เช่นนี้ทำให้ธุรกิจได้รับความเสียหายได้ ปัญหาของผู้บริหาร ก็คือจะต้องจัดเตรียมการให้บริการต่อลูกค้าอย่างไร จึงจะเหมาะสม ที่จะทำให้การบริการมีประสิทธิภาพมากที่สุด ทฤษฎีที่ใช้ในการอธิบายเรื่องเหล่านี้ เรียกว่า ทฤษฎีแถวคอย (Queuing Theorem) โดยการสร้างรูปแบบปัญหาทางคณิตศาสตร์และนำมาวิเคราะห์เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว

2.1.1 โครงสร้างของระบบแถวคอย

โครงสร้างของระบบแถวคอยโดยทั่วไปจะประกอบด้วย ลูกค้าที่เข้ามารับบริการ แถวคอย หน่วยให้บริการที่ให้บริการแก่ลูกค้าที่เข้ามารับบริการซึ่งอาจมี 1 หน่วยหรือมากกว่า 1 หน่วยก็ได้ ซึ่งสามารถเขียนเป็นโครงสร้างของระบบแถวคอยได้ดังนี้



รูปที่ 2.1 โครงสร้างพื้นฐานของระบบแถวคอย

2.1.2 รูปแบบการเข้ามาของผู้ใช้บริการ (Arrival pattern of customers)

2.1.2.1 ลักษณะการเข้ามารับบริการของลูกค้า อธิบายในรูปแบบของอัตราการเข้ามาโดยเฉลี่ยของผู้ใช้บริการ หรือระยะห่างระหว่างคนที่เข้ามาโดยเฉลี่ย แบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. อัตราการเข้ามาคงที่ กรณีนี้มักจะพบในระบบการผลิต เช่น สินค้าที่ยังผลิตไม่เสร็จจะเข้ามาตามสายพาน เพื่อรับการผลิตในขั้นถัดไปในระยะห่างเท่า ๆกัน
2. อัตราการเข้ามาไม่คงที่ กล่าวคือ ในแต่ละช่วงเวลามีลูกค้าเข้ามาใช้บริการไม่แน่นอน เช่น ร้านอาหารจะมีลูกค้าเข้ามาใช้บริการมากช่วงเช้า กลางวัน และเย็น แต่ช่วงเวลาระหว่างมื้ออาจจะมีลูกค้าน้อย หรือไม่มีลูกค้าเลยก็ได้ เป็นต้น ลักษณะการเข้ามารับบริการนี้เป็นไปอย่างสุ่ม (random) ซึ่งอธิบายโดยใช้ รูปแบบการแจกแจงความน่าจะเป็น (probabilistic) ซึ่งจะมีอยู่หลายแบบด้วยกัน แต่ส่วนมากลูกค้าที่เข้ามาใช้บริการจะมีการแจกแจงเป็นปัวส์ซอง (Poisson) หรือช่วงห่างระหว่างการเข้ารับบริการของลูกค้าคนที่อยู่ติดกันมีการแจกแจงเป็นเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential)

2.1.2.2 จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการ แบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ ลูกค้าเข้ามารับบริการแบบเดี่ยว หรือ ลูกค้าเข้ามารับบริการเป็นกลุ่ม

2.1.2.3 ขนาดประชากรของลูกค้าที่เข้ามารับบริการ มี 2 ลักษณะ คือ ประชากรของลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีขนาดจำกัด และประชากรของลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีขนาดไม่จำกัด

2.1.3 รูปแบบการให้บริการ (Service pattern)

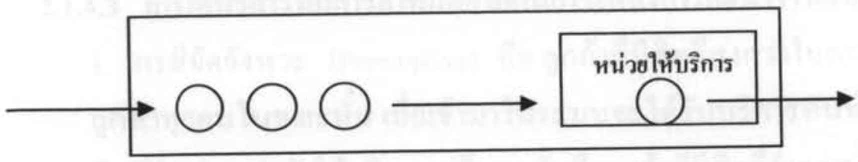
อธิบายด้วยอัตราการให้บริการโดยเฉลี่ย (mean service rate) หรือเวลาที่ใช้ในการบริการตั้งแต่ต้นจนกระทั่งให้บริการเสร็จเรียบร้อย จะมากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับความชำนาญของผู้ให้บริการ

2.1.3.1 เวลาที่ใช้ในการให้บริการ แบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ

1. มีการให้บริการในอัตราคงที่ หมายถึง การให้บริการในแต่ละรายจะใช้เวลาการให้บริการเท่า ๆ กัน พบในกรณีที่หน่วยให้บริการเป็นเครื่องจักร
2. มีการให้บริการในอัตราที่ไม่แน่นอน

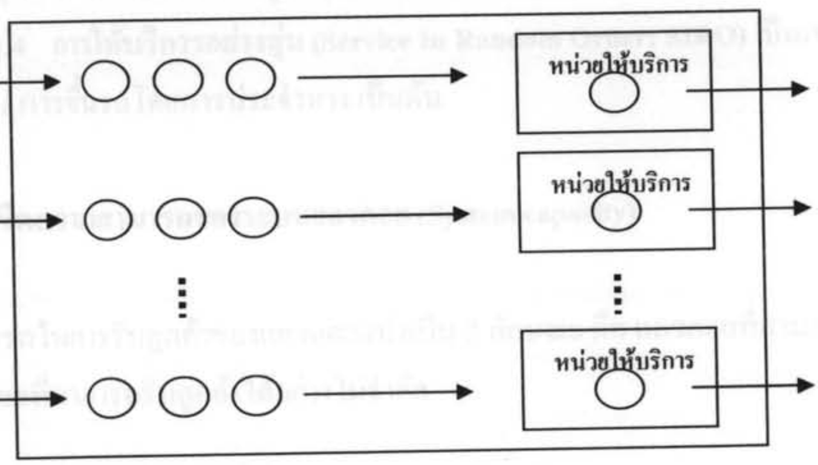
2.1.3.2 การจัดหน่วยให้บริการ มีหลายลักษณะ เช่น

1. กรณีที่มีแถวคอย 1 แถว และมีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย เช่น การใช้บริการของเครื่อง ATM จำนวน 1 เครื่อง เป็นต้น



รูปที่ 2.2 แสดงระบบแถวคอยที่มีแถวคอย 1 แถว และมีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย

2. กรณีที่มีแถวคอย C แถว และมีหน่วยให้บริการ C หน่วยแบบขนาน เช่น ช่องจ่ายเงินในซุปเปอร์มาร์เก็ต เป็นต้น



รูปที่ 2.3 แสดงระบบแถวคอยที่มีแถวคอย C แถว และมีหน่วยให้บริการ C หน่วยแบบขนาน

2.1.4 ระเบียบการให้บริการของแถวคอย (queue discipline)

เป็นการกำหนด รูปแบบการให้บริการกับลูกค้าที่เข้ามารับบริการในหน่วยให้บริการ ซึ่งมีกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ดังนี้

2.1.4.1 การให้บริการตามลำดับก่อนหลัง (First In First Out: FIFO) คือ การให้บริการเรียงตามลำดับเวลา ใครมาก่อนจะได้รับบริการก่อน

2.1.4.2 การให้บริการลูกค้าคนสุดท้ายก่อน (Last In First Out: LIFO) คือ การให้บริการกับลูกค้าที่เข้ามายังระบบทีหลังก่อน เช่น ในระบบสินค้าคงเหลือที่สินค้าไม่มีการเสื่อมคุณภาพ มักจะหยิบอันที่อยู่ในตำแหน่งที่หยิบง่าย ซึ่งมักจะเป็นอันทีเก็บเข้าสต็อกทีหลัง

2.1.4.3 การให้บริการที่มีการกำหนดสิทธิ์ในการให้บริการก่อน (Priority)

1. กรณีขัดจังหวะ (Preemptive) คือ ลูกค้าที่มีสิทธิ์สูงกว่าในการได้รับบริการก่อนลูกค้าทุกคนในขณะนั้น เมื่อเข้ามาในระบบจะได้รับบริการทันที ถึงแม้ว่าลูกค้าที่มีสิทธิ์ต่ำกว่าจะกำลังใช้บริการอยู่ก็ตาม นั่นคือลูกค้าที่มีสิทธิ์ต่ำกว่านั้นถูกขัดจังหวะ
2. กรณีไม่ถูกขัดจังหวะ (Nonpreemptive) คือ ลูกค้าที่มีสิทธิ์สูงกว่าในการได้รับบริการก่อนลูกค้าทุกคนในขณะนั้น เมื่อเข้ามาในระบบจะถูกจัดให้อยู่ต้นแถวรอคอย แต่จะไม่ได้รับบริการในทันที ต้องรอจนกว่าผู้ที่ใช้บริการอยู่จะแล้วเสร็จ ถึงแม้ว่าลูกค้าที่กำลังใช้บริการอยู่จะมีสิทธิ์ต่ำกว่าก็ตาม

2.1.4.4 การให้บริการอย่างสุ่ม (Service In Random Order: SIRO) เป็นการให้บริการที่ไม่มีแบบแผน เช่น การขึ้นรถโดยสารประจำทาง เป็นต้น

2.1.5 ขีดความสามารถของระบบแถวคอย (System capacity)

ความสามารถในการรับลูกค้าของแถวคอยแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ แถวคอยที่สามารถรับลูกค้าได้จำกัด และ แถวคอยที่สามารถรับลูกค้าได้อย่างไม่จำกัด

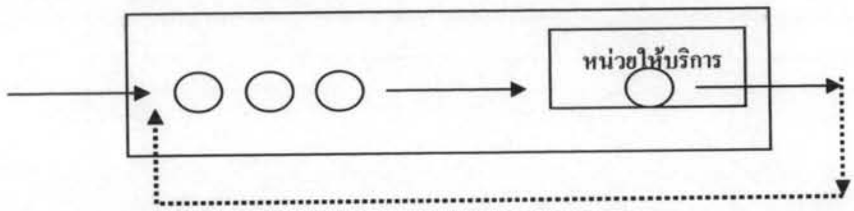
2.1.6 ขั้นตอนการให้บริการ (Service stages)

ระบบแถวคอยบางระบบประกอบด้วยการให้บริการหลายขั้นตอน แบ่งเป็น 2 ลักษณะ

2.1.6.1 การให้บริการตามขั้นตอน

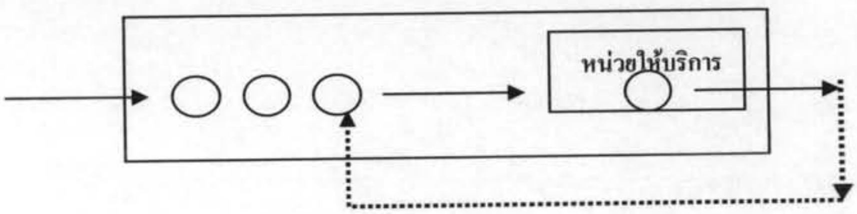
2.1.6.2 การให้บริการแบบป้อนกลับ (Feedback queuing system) คือ การให้บริการกับลูกค้าที่สามารถให้ลูกค้าย้อนกลับมารับบริการซ้ำในขั้นตอนก่อนหน้านั้นได้ การกลับเข้าสู่ระบบของลูกค้าที่วนซ้ำ จะขึ้นอยู่กับระเบียบการให้บริการแถวคอยว่าจะจัดการลูกค้าประเภทวนซ้ำอย่างไร ซึ่งมี 2 ลักษณะ คือ

1. การให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (FIFO) คือ ลูกค้าที่วนซ้ำจะได้รับบริการตามลำดับเวลาที่เข้ารับบริการ นั่นคือจะรอรับบริการที่ท้ายแถวของแถวคอย



รูปที่ 2.4 แสดงระบบแถวคอยที่มีการให้บริการแบบป้อนกลับเมื่อนโยบายการให้บริการเป็นแบบ FIFO

2. การให้บริการแบบกึ่งกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (Semi-Priority) คือ ลูกค้าที่วนซ้ำจะยังไม่ได้รับบริการในทันที แต่จะได้รับบริการหลังจากที่ ลูกค้าที่รอรับบริการที่หัวแถวของแถวคอยได้รับบริการเสร็จสิ้น นั่นคือ เมื่อเข้ามาในระบบจะถูกจัดให้อยู่ต้นแถวคอย



รูปที่ 2.5 แสดงระบบแถวคอยที่มีการให้บริการแบบป้อนกลับแบบเมื่อนโยบายการให้บริการเป็นแบบ Semi-Priority

2.1.7 สัญลักษณ์ที่ใช้แสดงลักษณะของตัวแบบแถวคอย

ในปัญหาแถวคอยจะมีตัวแบบแถวคอยที่มีความหลากหลาย ขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูลพื้นฐานของระบบ จึงมีการกำหนดสัญลักษณ์ที่ใช้เรียกระบบแถวคอยต่าง ๆสัญลักษณ์ ที่ใช้เรียกว่า Kendoll Notation คือ (A/B/C): (X/Y/Z) โดยที่

A หมายถึง การแจกแจงความน่าจะเป็นของการเข้าสู่ระบบแถวคอย

B หมายถึง การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาในการให้บริการ

C หมายถึง จำนวนหน่วยให้บริการ (C = 1, 2, 3,…)

X หมายถึง ระเบียบการให้บริการของแถวคอย

Y หมายถึง ขีดความสามารถของระบบแถวคอย

Z หมายถึง ขนาดของประชากรที่เข้ามารับบริการ

2.1.8 สัญลักษณ์ที่ใช้ในระบบแถวคอย

p คือ สัดส่วนในการให้บริการแบบป้อนกลับ

λ คือ อัตราการเข้ามารับบริการ โดยเฉลี่ยของลูกค้า

μ คือ อัตราการให้บริการ โดยเฉลี่ยของหน่วยให้บริการ

$\frac{1}{\lambda}$ คือ เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการ โดยเฉลี่ยของลูกค้า 2 คนที่อยู่ถัดกัน

$\frac{1}{\mu}$ คือ เวลาโดยเฉลี่ยในการให้บริการลูกค้าแต่ละคน

2.1.9 การกำหนดสิทธิ์ในการให้บริการในระบบแถวคอย (Sheldon M.Roos , 2002)

การกำหนดสิทธิ์ในการให้บริการลูกค้ามีความจำเป็นเมื่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีหลายกลุ่ม จะพิจารณาจากสถานการณ์ที่มีลูกค้าเข้ามารับบริการ 2 กลุ่ม โดยการมาถึงของลูกค้าเป็นกระบวนการปัวส์ซองที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent Poisson Process) ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ และมีการแจกแจงของการให้บริการคือ G_1 และ G_2 เมื่อเรากำหนดให้ลูกค้ากลุ่มที่หนึ่งได้รับบริการก่อน นั่นคือถ้ายังมีลูกค้าจากกลุ่มที่หนึ่งรออยู่ในแถวคอยลูกค้าจากกลุ่มที่สองจะไม่ได้รับบริการอย่างไรก็ตามถ้าลูกค้าจากกลุ่มที่สองกำลังรับบริการอยู่ก็จะได้รับบริการต่อไปโดยไม่มีการขัดจังหวะจากลูกค้าจากกลุ่มที่หนึ่ง

จากตัวแบบแถวคอย M/G/1 ได้ว่า $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ ซึ่งการรวมกันของสอง Independent Poisson Process ยังคงเป็น Poisson Process ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับผลรวมของค่าเฉลี่ยทั้งสองกระบวนการ

กรณีไม่มีการกำหนดสิทธิ์ในการให้บริการ กล่าวคือการเข้ารับบริการตามลำดับก่อนหลัง (FIFO) เวลาคอยเฉลี่ยที่ใช้ในระบบเมื่อมีนโยบายในการให้บริการแบบ FIFO (V_{FIFO}) คือ

$$V_{FIFO} = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\lambda E[S])} = \frac{\lambda_1 E[S_1^2] + \lambda_2 E[S_2^2]}{2(1-\lambda_1 E[S_1] - \lambda_2 E[S_2])} \qquad \text{.........................} \quad (2.1)$$

เมื่อ S_i แทนเวลาในการให้บริการของลูกค้ากลุ่มที่ i ซึ่งมีการแจกแจงของการให้บริการ คือ G_i , $i = 1, 2$

กรณีมีการกำหนดสิทธิ์ในการให้บริการ (Priority)

เวลาคอยเฉลี่ยที่ใช้ในระบบเมื่อมีนโยบายในการให้บริการแบบ Priority $\left(V_{\Pr iority}\right)$ คือ

$$V_{\Pr iority} = \sum_{i=1}^{2} V^{i} \qquad \text{.........................} \quad (2.2)$$

เมื่อ V^i แทนเวลาคอยเฉลี่ยที่ใช้ในระบบของลูกค้ากลุ่มที่ i , $i = 1, 2$

$$V^{i} = \lambda_i E[S_i] W_q^i + \frac{\lambda_i E[S_i^2]}{2} \qquad \text{.........................} \quad (2.3)$$

โดยที่ W_q^i แทน เวลาคอยเฉลี่ยในแถวคอยของลูกค้ากลุ่ม i, $i = 1, 2$

$$W_q^1 = \frac{\lambda_1 E[S_1^2] + \lambda_2 E[S_2^2]}{2(1 - \lambda_1 E[S_1])} \qquad \text{.........................} \quad (2.4)$$

และ

$$W_q^2 = \frac{\lambda_1 E[S_1^2] + \lambda_2 E[S_2^2]}{2(1 - \lambda_1 E[S_1] - \lambda_2 E[S_2])(1 - \lambda_1 E[S_1])} \qquad \text{.........................} \quad (2.5)$$

2.2 ความยาวนานของการจำลอง (มานพ วราภักดิ์, 2547)

ในการจำลองข้อมูลทางสถิติ สิ่งที่ต้องการคือการประมาณที่มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง ซึ่งความยาวนานในการจำลองมีผลโดยตรงสำหรับความถูกต้อง และเชื่อถือได้

สำหรับตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีค่าคาดหมาย $E(X)=\theta$ เราสามารถจำลองตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ของ X ได้จากตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ (ซึ่ง $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบเดียวกัน) นำมาหาค่าประมาณของ θ ซึ่งอาจหาค่าประมาณแบบจุดหรือแบบช่วงของ θ ดังนั้นคุณภาพของค่าประมาณจะขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ ปัจจัยที่สำคัญปัจจัยหนึ่ง คือ ขนาดตัวอย่าง หรือความยาวนานของการจำลองว่าควรจะจำลอง X_i จำนวนเท่าใด นั่นคือ เราจะหาค่า n ที่เหมาะสมที่จะได้ค่าประมาณมีความคลาดเคลื่อนน้อยตามเกณฑ์ที่กำหนด

โดยใช้ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) กล่าวว่า ถ้า $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นอิสระกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน โดยมีค่าเฉลี่ย θ และความแปรปรวน σ^2 เป็นค่าจำกัด

ดังนั้น $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ย θ และความแปรปรวน $\frac{\sigma^2}{n}$ เมื่อ n มีขนาดใหญ่

การใช้ค่า $\frac{\sigma^2}{n}$ โดยปกติจะมีปัญหาที่ว่า ไม่ทราบค่าแปรปรวนประชากร σ^2 ในกรณีนี้ จะต้องประมาณค่า σ^2 โดยใช้ตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ตัวประมาณที่ใช้กันโดยทั่วไปสำหรับ σ^2 คือ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง และทฤษฎีบทสลัทสกี (Slutsky's Theorem) ได้ว่าตัวแปรสุ่ม $Z = \frac{\left(\overline{X} - \theta\right)\sqrt{n}}{S} \sim N(0,1)$ โดยประมาณ

ซึ่งได้ $P\left(-Z_{\alpha/2} \le \frac{\left(\overline{X} - \theta\right)\sqrt{n}}{S} \le Z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$

หรือ $P\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \theta \le \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$

จะได้ ตัวประมาณแบบช่วงสำหรับ θ คือ $\left[\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

ด้วยระดับความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ โดยมีขนาดของช่วงความเชื่อมั่น เท่ากับ

$$\left(\overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 2Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

หรือ ขนาดของครึ่งช่วงความเชื่อมั่น เท่ากับ $Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ ซึ่งถ้าเพิ่ม n จะทำให้ขนาดของครึ่งช่วงความเชื่อมั่น แคบลงดังนั้น ในการจำลอง จะทำการจำลองยาวนานจนกว่าขนาดของครึ่งช่วงความเชื่อมั่นจะแคบตามต้องการภายใต้ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

2.3 การหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร ด้วยหลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่ม (Method of Batch means) (โสภณ บัญชาบุษบง, 2547)

ในบางกรณีตัวอย่างสุ่ม $W_1,W_2,...,W_n$ ที่ได้จากการจำลองไม่เป็นอิสระกัน หากเราคำนวณหาค่าเฉลี่ย $\overline{W}_n$ และค่าแปรปรวนตัวอย่าง S^2 จาก $W_1,W_2,...,W_n$ แล้วนำไปคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร โดยตรงเช่นเดียวกับในกรณีตัวอย่างสุ่ม $W_1,W_2,...,W_n$ ที่เป็นอิสระกันนั้น จะทำให้ได้ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากรที่ไม่ถูกต้อง วิธีที่จะสามารถจัดการกับปัญหานี้คือ ใช้หลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่ม (Method of Batch means) โดยมีวิธีการดังนี้

1. จำลองตัวอย่างสุ่ม $W_1,W_2,...,W_n$
2. จับกลุ่ม $W_1,W_2,...,W_n$ ให้มี k กลุ่ม กลุ่มละขนาด b ซึ่ง $n = kb$

กลุ่ม	**ตัวอย่างสุ่ม**
1	$W_1,W_2,...,W_b$
2	$W_{b+1},W_{b+2},...,W_{2b}$
$\vdots$	$\vdots$
k	$W_{(k-1)b+1},W_{(k-1)b+2},...,W_{kb}$

3. คำนวณค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม (Batch mean)

กลุ่ม	**ค่าเฉลี่ย**
1	$\overline{W}_1(b) = \dfrac{\sum_{i=1}^{b} W_i}{b}$
2	$\overline{W}_2(b) = \dfrac{\sum_{i=1}^{b} W_{b+i}}{b}$
$\vdots$	$\vdots$
k	$\overline{W}_k(b) = \dfrac{\sum_{i=1}^{b} W_{(k-1)b+i}}{b}$

4. คำนวณค่าเฉลี่ยตัวอย่างรวม (Overall sample mean)

$$\overline{\overline{W}}(k,b) = \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{W}_j(b)}{k}$$

5. คำนวณค่าแปรปรวนตัวอย่างรวม (Overall sample variance)

$$S^2(k,b)=\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\overline{W}_j(b)-\overline{\overline{W}}(k,b)\right)^2}{k-1}$$

6. หาค่า b ที่มีขนาดใหญ่เพียงพอ ซึ่งเมื่อ b มีขนาดใหญ่ โดยใช้ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของลูกโซ่มาร์คอฟ จะทำให้ค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม $\overline{W}_j(b)$ เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติ $N(W,\sigma^2)$ เหมือนกันโดยประมาณ และจะได้ว่า $\frac{\left(\overline{\overline{W}}(k,b)-W\right)}{\sqrt{S^2(k,b)/k}}$ จะมีการแจกแจงแบบ $t_{\alpha/2,n-1}$ โดยที่ $E\left(\overline{\overline{W}}(k,b)\right)\approx W$

7. ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของค่าเฉลี่ยประชากร หาได้จาก

$$\left[\overline{\overline{W}}(k,b)-t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S^2(k,b)}{k}},\overline{\overline{W}}(k,b)+t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{S^2(k,b)}{k}}\right]$$

2.4 การทดสอบสมมติฐาน (กัลยา วานิชย์บัญชา, 2545)

2.4.1 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากร

เป็นการทดสอบว่าค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการทดสอบของประชากรสองชุดมีความแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้ข้อมูลตัวอย่าง 2 ชุด สุ่มจากประชากรทั้งสองอย่างเป็นอิสระกัน

ถ้ากำหนดให้

ประชากร	ค่าเฉลี่ย	ความแปรปรวน
ชุดที่ 1	μ_1	σ_1^2
ชุดที่ 2	μ_2	σ_2^2

นำมาทดสอบสมมติฐาน ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

หรือ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

หรือ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

กำหนดให้

ตัวอย่างที่สุ่มจากประชากร	ขนาดตัวอย่าง	ค่าเฉลี่ย	ความแปรปรวน
ชุดที่ 1	n_1	$\overline{X}_1$	S_1^2
ชุดที่ 2	n_2	$\overline{X}_2$	S_2^2

$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_1 - \mu_2$

และความแปรปรวน $\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$

นั่นคือ จะได้สถิติทดสอบ $$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

เนื่องจากโดยทั่ว ๆ ไป ผู้ทดสอบมักจะไม่ทราบค่าความแปรปรวนของทั้งสองประชากรจึงต้องประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองด้วยค่าความแปรปรวนจากตัวอย่าง (S_1^2 และ S_2^2) แต่การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรด้วยค่าความแปรปรวนจากตัวอย่าง เมื่อ $n_1 < 30$ หรือ $n_2 < 30$ มี 2 กรณี

1. กรณีที่ความแปรปรวนของประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบเท่ากัน $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ เราจะประมาณ σ^2 ด้วย S_p^2

ซึ่ง S_p^2 แทนค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของค่าแปรปรวนจากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสอง

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

การแจกแจงของ $\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ จะมีการแจกแจงแบบเป็นแบบที

ที่องศาความเป็นอิสระ $n_1 + n_2 - 2$

นั่นคือ ตัวสถิติเพื่อการทดสอบ $$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1 + n_2 - 2)}$$

2. กรณีที่มีความแปรปรวนของประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบไม่เท่ากัน $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

การแจกแจงของ $\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$ จะมีการแจกแจงแบบเป็นแบบที

ที่มีองศาความเป็นอิสระ ν เมื่อ $\nu = \dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$

ในกรณีที่จำนวนตัวอย่างซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่นำมาทดสอบสมมติฐานมีขนาดใหญ่ $(n_1 \geq 30, n_2 \geq 30)$ อาจใช้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Z) ประมาณการแจกแจงแบบที (t) ได้เนื่องจาก ค่าการแจกแจงทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันมาก เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่พอ

2.4.2 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างความแปรปรวนของสองประชากร

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากรเรา เราต้องทราบก่อนว่าประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ ซึ่งการทดสอบว่าความแปรปรวนของสองประชากรแตกต่างกันหรือไม่ มีสมมติฐานเพื่อการทดสอบ คือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

จะได้ว่า $\dfrac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$ มีการแจกแจงแบบ F ที่องศาความเป็นอิสระ $(n_1 - 1)$ และ $(n_2 - 1)$

หรือ $\dfrac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2}$ มีการแจกแจงแบบ F ที่องศาความเป็นอิสระ $(n_2 - 1)$ และ $(n_1 - 1)$

2.4.3 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองนโยบาย ด้วยหลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่ม (Method of batch mean) (George S. Fishman, 1978)

จากหลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่มที่ได้กล่าวไว้แล้วข้างต้น ซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาการหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร กรณีตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ที่ได้จากการจำลองไม่เป็นอิสระกัน หลักการนี้ยังสามารถใช้ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองนโยบาย ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, \ldots, W_n$ ของทั้งสองนโยบายที่ได้จากการจำลองไม่เป็นอิสระกันได้อีกด้วย ซึ่งเมื่อขนาดของตัวอย่างสุ่มในแต่ละกลุ่ม (b) มีขนาดใหญ่ โดยใช้ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของลูกโซ่มาร์คอฟ จะทำให้ค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม $\overline{W}_j(b)$ เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติ $N(W, \sigma^2)$ เหมือนกันโดยประมาณ

กำหนดให้ นโยบายที่ 1 (Policy 1)

$\overline{W}_{1,j}(b)$ เป็นเวลาคอยเฉลี่ยในกลุ่มที่ j จากนโยบายที่ 1 โดยที่ $j = 1,2,\ldots k_1$
เมื่อ b มีค่ามาก
จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \overline{W}_{1,1}(b) \sim N(W_1, \sigma_1^2) \\
X_2 &= \overline{W}_{1,2}(b) \sim N(W_1, \sigma_1^2) \\
\vdots &\quad \vdots \\
X_{k_1} &= \overline{W}_{1,k_1}(b) \sim N(W_1, \sigma_1^2)
\end{aligned}
$$

นโยบายที่ 2 (Policy 2)

$\overline{W}_{2,j}(b)$ เป็นเวลาคอยเฉลี่ยในกลุ่มที่ j จากนโยบายที่ 1 โดยที่ $j = 1,2,\ldots k_2$
เมื่อ b มีค่ามาก
จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \overline{W}_{2,1}(b) \sim N(W_2, \sigma_2^2) \\
X_2 &= \overline{W}_{2,2}(b) \sim N(W_2, \sigma_2^2) \\
\vdots &\quad \vdots \\
X_{k_2} &= \overline{W}_{2,k_2}(b) \sim N(W_2, \sigma_2^2)
\end{aligned}
$$

และเมื่อกำหนดให้ i คงที่ และ b มีค่ามาก $\overline{W}_{i,j_1}(b)$ และ $\overline{W}_{i,j_2}(b)$ สามารถประมาณได้ว่าเป็นอิสระต่อกันทุก ๆ j_1 และ j_2 เมื่อ $j_1 \neq j_2$

โดยมีสัญลักษณ์ และความสัมพันธ์ระหว่างสัญลักษณ์ ดังนี้

1. ในที่นี้พิจารณาสองนโยบาย ได้แก่ FIFO และ Priority

   ให้สัญลักษณ์ $i = 1$ เมื่อนโยบายการให้บริการเป็นแบบ FIFO

   $i = 2$ เมื่อนโยบายการให้บริการเป็นแบบ Priority

   ตัวอย่างเช่น ในหัวข้อ 2.4.3

   $\overline{W}_{2,1}(b)$ คือ เวลาคอยเฉลี่ยของตัวอย่างจากนโยบายการให้บริการเป็นแบบ Priority ใน batch ชุดที่ 1

2. นิยามให้ $\overline{\overline{W}}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} \overline{W}_{ij}}{k}$

3. $\overline{\overline{W}}$ เป็นตัวประมาณ ใช้ในการประมาณ V ซึ่งเป็นค่าคงที่ แสดงถึงค่าเฉลี่ยประชากรของเวลาคอย