บทที่ 2

แบบจำลองลดรูปของคานตีโมเชนโค

2.1 การวิเคราะห์ด้วยเทคนิคการรบกวนเอกฐาน

แบบจำลอง (1.5)-(1.6) ไม่พิจารณาผลของความหน่วงหนืดที่เกิดจากลม ($\nu = 0$) เนื่องจากมีผลกระทบกับคานน้อยมากเมื่อเทียบกับการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ท และทำการกำหนดพารามิเตอร์ใหม่เป็น $\epsilon = \rho A$, $d = D_s$, $\mu = r = \frac{I}{A}$ และ $a = \kappa AG$ โดยให้ $\kappa AG = 1$, $\rho A = EI$ และ $D_b = \epsilon D_s$ จะได้ [25]

$$\epsilon u_{tt}(x,t) = (1 + d\partial_t)(u_{xx}(x,t) - \varphi_x(x,t)) \tag{2.1}$$

$$\mu\epsilon\varphi_{tt}(x,t) = (1 + d\partial_t)(\epsilon\varphi_{xx}(x,t) + a(u_x(x,t) - \varphi(x,t))) \tag{2.2}$$

ในที่นี้จะพิจารณาเงื่อนไขขอบที่ปลาย $x = 0$ เป็น

- แบบปลายอิสระ

$$\varphi_x(0,t) = 0 \text{ และ } \varphi(0,t) = u_x(0,t) \tag{2.3}$$

- แบบปลายยึด

$$u(0,t) = 0 \text{ และ } \varphi(0,t) = 0 \tag{2.4}$$

- แบบปลายหมุด

$$u(0,t) = 0 \text{ และ } \varphi_x(0,t) = 0 \tag{2.5}$$

และควบคุมที่ปลายอีกข้างหนึ่ง ($x = 1$) ด้วย $u(1,t)$ หรือ $u_x(1,t)$ และ $\varphi(1,t)$ หรือ $\varphi_x(1,t)$

ในแบบจำลอง เมื่อใช้ทฤษฎีการรบกวนเอกฐาน (singular perturbation theory) เข้ามาช่วย โดยให้ $\mu = 0$ แบบจำลองจะลดรูปลงเป็นแบบจำลองคานเฉือน (shear beam model) คือ

$$\epsilon u_{tt}(x,t) = (1 + d\partial_t)(u_{xx}(x,t) - \varphi^s_x(x,t)) \tag{2.6}$$

$$0 = \varphi^s_{xx}(x,t) - b^2\varphi^s(x,t) + b^2 u_x(x,t) \tag{2.7}$$

โดยที่ $b = \sqrt{\frac{a}{\epsilon}}$ และ $\varphi^s(x,t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.7) และเงื่อนไขขอบ

- แบบปลายอิสระ

$$\varphi^s_x(0,t) = 0 \tag{2.8}$$

- แบบปลายยึด

$$\varphi^s(0, t) = 0 \tag{2.9}$$

- แบบปลายหมุด

$$\varphi^s_x(0, t) = 0 \tag{2.10}$$

และในการควบคุมมุมหมุน เราจะกำหนดให้

$$\varphi^s(1, t) = \varphi(1, t) \tag{2.11}$$

หรือในการควบคุมโมเมนต์ เราจะกำหนดให้

$$\varphi^s_x(1, t) = \varphi_x(1, t) \tag{2.12}$$

เพื่อให้ปลายด้านที่ใช้ในการควบคุมมุมหมุนหรือโมเมนต์มีค่าเท่ากันในแบบจำลองทั้งสอง

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคการรบกวนเอกฐาน ($\mu = 0$) ใช้ได้เมื่อ $\mu > 0$ มีค่าน้อยๆ ด้วย

ผลเฉลยของ (2.7) สามารถหาได้โดยใช้เทคนิคของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เนื่องจากเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปรต้น x เพียงตัวเดียวโดยพิจารณา $u_x(x, t)$ เสมือนเป็นพจน์คงที่ ที่ทราบค่าอยู่แล้ว ซึ่งจะได้ผลเฉลยเป็น

$$\varphi^s(x, t) = \cosh(bx)\varphi^s(0, t) + \frac{1}{b}\sinh(bx)\varphi^s_x(0, t) - \int_0^x b\sinh(b(x-y))u_y(y, t)dy \tag{2.13}$$

เมื่อหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน (integration by parts) และนิยามตัวแปรผิดพลาด $[\bar{\varphi}(x, t) = \varphi(x, t) - \varphi^s(x, t)]$ จะได้มุมหมุนของคานตีโมเชนโคเป็น

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \bar{\varphi}(x, t) + \cosh(bx)(\varphi(0, t) - \bar{\varphi}(0, t)) + \frac{1}{b}\sinh(bx)(\varphi_x(0, t) - \bar{\varphi}_x(0, t)) \\ &\quad + b\sinh(bx)u(0, t) - \int_0^x b^2\cosh(b(x-y))u(y, t)dy \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.1.1 กรณีคานปลายอิสระ [26]

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขขอบ (2.3) และ (2.8) ใน (2.14) จะได้

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \bar{\varphi}(x, t) + \cosh(bx)(\varphi(0, t) - \bar{\varphi}(0, t)) \\ &\quad + b\sinh(bx)u(0, t) - b^2\int_0^x \cosh(b(x-y))u(y, t)dy \end{aligned} \tag{2.15}$$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ และเงื่อนไขขอบ (2.11) ใน (2.15) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\varphi(0, t) = \bar{\varphi}(0, t) + \frac{1}{\cosh(b)}\left[\varphi(1, t) - b\sinh(b)u(0, t) + b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y, t)dy\right] \tag{2.16}$$

แทนค่า (2.16) ใน (2.15) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t) + \frac{\cosh(bx)}{\cosh(b)}\left[\varphi(1,t) - b\sinh(b)u(0,t) + b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \\ &\quad + b\sinh(bx)u(0,t) - b^2\int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \qquad (2.17)\end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ (2.17) เทียบกับ x แล้วแทนลงใน (2.1) และ (2.3) จะได้แบบจำลองคานตีโมเชนโคแบบปลายอิสระ ที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ทเป็น

$$\begin{aligned}\epsilon u_{tt}(x,t) &= (1+d\partial_t)\Big\{u_{xx}(x,t) + b^2u(x,t) + b^3\int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy - b^2\cosh(bx)u(0,t) - \bar{\varphi}_x(x,t) \\ &\quad - \frac{b\sinh(bx)}{\cosh(b)}\left[\varphi(1,t) - b\sinh(b)u(0,t) + b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right]\Big\} \qquad (2.18) \\ u_x(0,t) &= \varphi(0,t) \\ &= \bar{\varphi}(0,t) + \frac{1}{\cosh(b)}\left[\varphi(1,t) - b\sinh(b)u(0,t) + b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \qquad (2.19)\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อยแบบไฮเพอร์โบลิก และจะนำมาใช้ในการออกแบบตัวควบคุมด้วยการแปลงปริพันธ์ก้าวถอยหลังต่อไป

พิจารณาแบบจำลองลดรูป (reduced order model) กล่าวคือ เราจะสมมติว่า $\bar{\varphi}(x,t) = 0$ จะพบว่ายังไม่สามารถใช้การแปลงก้าวถอยหลังได้เนื่องจากพจน์ $\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy$ ทำให้แบบจำลอง (2.18) ไม่เป็นระบบป้อนกลับโดยแท้ แต่เราสามารถกำจัดพจน์ดังกล่าวได้โดยให้

$$\varphi(1,t) = b\sinh(b)u(0,t) - b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy \qquad (2.20)$$

แบบจำลองลดรูปของคานตีโมเชนโคแบบปลายอิสระที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ทคือ

$$\begin{aligned}\epsilon u_{tt}(x,t) &= (1+d\partial_t)\Big\{u_{xx}(x,t) + b^2u(x,t) - b^2\cosh(bx)u(0,t) \\ &\quad + b^3\int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy\Big\} \qquad (2.21) \\ u_x(0,t) &= \varphi(0,t) \qquad (2.22)\end{aligned}$$

2.1.2 กรณีคานปลายยึด

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขขอบ (2.4) และ (2.9) ลงใน (2.14) จะได้

$$\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t) + \frac{1}{b}\sinh(bx)(\varphi_x(0,t) - \bar{\varphi}_x(0,t)) - b^2\int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \qquad (2.23)$$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ และเงื่อนไขขอบ (2.11) ใน (2.23) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\varphi_x(0,t) = \bar{\varphi}_x(0,t) + \frac{b}{\sinh(b)}\left[\varphi(1,t) + b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \qquad (2.24)$$

แทนค่า (2.24) ใน (2.23) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t) + \frac{\sinh(bx)}{\sinh(b)}\left[\varphi(1,t) + b^2\int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \\ &\quad - b^2\int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \qquad (2.25)\end{aligned}$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาสมการของมุมหมุนอีกรูปแบบหนึ่ง โดยหาอนุพันธ์ของ (2.23) เทียบกับ x จะได้

$$\varphi_x(x,t) = \bar{\varphi}_x(x,t) + \cosh(bx)(\varphi_x(0,t) - \bar{\varphi}_x(0,t)) - b^2 u(x,t) - b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy \quad (2.26)$$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ และเงื่อนไขขอบ (2.12) ใน (2.26) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\varphi_x(0,t) = \bar{\varphi}_x(0,t) + \frac{1}{\cosh(b)}\left[\varphi_x(1,t) + b^2 u(1,t) + b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \quad (2.27)$$

แทนค่า (2.27) ใน (2.23) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t) + \frac{\sinh(bx)}{b\cosh(b)}\left[\varphi_x(1,t) + b^2 u(1,t) + b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \\ &\quad -b^2 \int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \end{aligned} \quad (2.28)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ (2.25) และ (2.28) เทียบกับ x แล้วแทนลงใน (2.1) และ (2.4) จะได้แบบจำลองคานตีโมเชนโคแบบปลายยึด ที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ทเป็น

$$\begin{aligned}\epsilon u_{tt}(x,t) &= (1 + d\partial_t)\left\{u_{xx}(x,t) + b^2 u(x,t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy - \bar{\varphi}_x(x,t)\right. \\ &\quad \left. - \frac{b\cosh(bx)}{\sinh(b)}\left[\varphi(1,t) + b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right]\right\}\end{aligned} \quad (2.29)$$

และ

$$\begin{aligned}\epsilon u_{tt}(x,t) &= (1 + d\partial_t)\left\{u_{xx}(x,t) + b^2 u(x,t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy - \bar{\varphi}_x(x,t)\right. \\ &\quad \left. - \frac{\cosh(bx)}{\cosh(b)}\left[\varphi_x(1,t) + b^2 u(1,t) + b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy\right]\right\}\end{aligned} \quad (2.30)$$

มีเงื่อนไขขอบเป็น

$$u(0,t) = 0 \quad (2.31)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อยแบบไฮเพอร์โบลิกเช่นกัน

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\bar{\varphi}_x(x,t) = 0$ เราสามารถทำให้เป็นระบบป้อนกลับโดยแท้ ได้โดยให้

$$\varphi(1,t) = -b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy \quad (2.32)$$

เป็นเงื่อนไขควบคุมมุมหมุนที่ขอบดีรีเคลหรือ

$$\varphi_x(1,t) = -b^2 u(1,t) - b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy \quad (2.33)$$

เป็นเงื่อนไขควบคุมโมเมนต์ที่ขอบนอยมันน์

แบบจำลองลดรูปของคานตีโมเชนโคแบบปลายยึดที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ทเป็น

$$\epsilon u_{tt}(x,t) = (1 + d\partial_t)\left\{u_{xx}(x,t) + b^2 u(x,t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy\right\} \quad (2.34)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (2.35)$$

2.1.3 กรณีคานปลายหมุด

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขขอบ (2.5) และ (2.10) ลงใน (2.14) จะได้

$$\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x,t) + \cosh(bx)(\varphi(0,t) - \bar{\varphi}(0,t)) - b^2 \int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \quad (2.36)$$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ และเงื่อนไขขอบ (2.11) ใน (2.36) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\varphi(0,t) = \bar{\varphi}(0,t) + \frac{1}{\cosh(b)}\left[\varphi(1,t) + b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \quad (2.37)$$

แทนค่า (2.37) ใน (2.36) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t) + \frac{\cosh(bx)}{\cosh(b)}\left[\varphi(1,t) + b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \\ &\quad - b^2 \int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \end{aligned} \quad (2.38)$$

นอกจากนี้เรายังสามารถหาสมการของมุมหมุนอีกรูปแบบหนึ่ง โดยหาอนุพันธ์ของ (2.36) เทียบกับ x จะได้

$$\varphi_x(x,t) = \bar{\varphi}_x(x,t) + \sinh(bx)(\varphi(0,t) - \bar{\varphi}(0,t)) - b^2u(x,t) - b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy \quad (2.39)$$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ และเงื่อนไขขอบ (2.12) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\varphi(0,t) = \bar{\varphi}(0,t) + \frac{1}{\sinh(b)}\left[\varphi_x(1,t) + b^2u(1,t) + b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \quad (2.40)$$

แทนค่า (2.40) ใน (2.36) จะได้

$$\begin{aligned}\varphi(x,t) &= \bar{\varphi}(x,t) + \frac{\cosh(bx)}{\sinh(b)}\left[\varphi_x(1,t) + b^2u(1,t) + b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy\right] \\ &\quad - b^2 \int_0^x \cosh(b(x-y))u(y,t)dy \end{aligned} \quad (2.41)$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของ (2.38) และ (2.41) เทียบกับ x แล้วแทนลงใน (2.1) จะได้แบบจำลองลดรูปของคานตีโมเชนโคแบบปลายหมุด ที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ทเป็น

$$\begin{aligned}\epsilon u_{tt}(x,t) &= (1 + d\partial_t)\Big\{u_{xx}(x,t) + b^2u(x,t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy \\ &\quad - \bar{\varphi}_x(x,t) - \frac{b\sinh(bx)}{\cosh(b)}\left[\varphi(1,t) + b^2 \int_0^1 \cosh(b(1-y))u(y,t)dy\right]\Big\} \end{aligned} \quad (2.42)$$

และ

$$\begin{aligned}\epsilon u_{tt}(x,t) &= (1 + d\partial_t)\Big\{u_{xx}(x,t) + b^2u(x,t) + b^3 \int_0^x \sinh(b(x-y))u(y,t)dy - \bar{\varphi}_x(x,t) \\ &\quad - \frac{b\sinh(bx)}{\sinh(b)}\left[\varphi_x(1,t) + b^2u(1,t) + b^3 \int_0^1 \sinh(b(1-y))u(y,t)dy\right]\Big\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

และมีเงื่อนไขขอบเป็น

$$u(0,t) = 0 \quad (2.44)$$

จะเห็นว่าในการติดตั้งคานแบบปลายยึดและแบบปลายหมุดนั้นเราสามารถใช้ตัวควบคุม $\varphi(1,t)$ หรือ $\varphi_x(1,t)$ แบบเดียวกันและยังได้สมการลดรูปเหมือนกันอีกด้วย

2.2 สรุป

คานตีโมเชนโคที่มีการหน่วงเคลวิน-ฟอจ์ท สามารถพิจารณาเสมือนคานเฉือนที่ถูกรบกวน โดยใช้ทฤษฎีการรบกวนเอกฐาน ซึ่งทำให้เป็นระบบป้อนกลับโดยแท้ด้วยการควบคุมมุมหมุนหรือโมเมนต์ที่ขอบจะได้แบบจำลองลดรูปเป็นสมการไฮเพอร์โบลิกอันดับสองที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรของการกระจัดตามขวางเท่านั้น และสำหรับคานปลายยึดหรือหมุดสามารถใช้ตัวควบคุมที่ขอบเดียวกันในการทำให้เป็นระบบป้อน-กลับโดยแท้ และมีแบบจำลองลดรูปเหมือนกันอีกด้วย