ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด ที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1

นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2555

EFFECTS OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES BASED ON HEURISTICS AND MODEL METHOD APPROACHES ON ALGEBRAIC THINKING AND MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITIES OF SEVENTH GRADE STUDENTS

Miss Parichat Chanhorm

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education Program in Mathematics Education
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2012

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1
โดย	นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะครุศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.ชนิตา รักษ์พลเมือง)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(อาจารย์ ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์)

ปริฉัตร์ จันทร์หอม: ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด ที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 (EFFECTS OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES BASED ON HEURISTICS AND MODEL METHOD APPROACHES ON ALGEBRAIC THINKING AND MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITIES OF SEVENTH GRADE STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ.ดร. อัมพร ม้าคนอง, 303 หน้า

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เพื่อศึกษาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด 2) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด 3) เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดกับการเรียนแบบปกติ 4) เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา จำนวน 68 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 35 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 33 คน โดยนักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดและนักเรียนกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลคือ 1) แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต 2) แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 3) แบบสัมภาษณ์ เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ การวิเคราะห์ข้อมูลทำโดยใช้ค่ามัชฌิมเลขคณิต ค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที (t – test)

ผลการวิจัยพบว่า

1) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่าร้อยละ 50

2) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4) นักเรียนกลุ่มทดลองนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิตที่หลากหลาย เช่น ตาราง แผนภาพ กราฟ นิพจน์ สมการ และ การเขียนอธิบาย และความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการที่ดีขึ้น

ภาควิชา หลักสูตรและการสอน ลายมือชื่อนิสิต..........

สาขาวิชา การศึกษาคณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก..........

ปีการศึกษา 2555

5483381527: MAJOR MATHEMATICS EDUCATION
KEYWORDS: HEURISTICS APPROACH / MODEL METHOD APPROACH / ALGEBRAIC THINKING ABILITY / MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITY

PARICHAT CHANHORM: EFFECTS OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES BASED ON HEURISTICS AND MODEL METHOD APPROACHES ON ALGEBRAIC THINKING AND MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING ABILITIES OF SEVENTH GRADE STUDENTS. ADVISOR: ASSOC. PROF. AUMPORN MAKANONG, Ph.D., 303 pp.

The purposes of this research were 1) to study algebraic thinking and mathematical problem solving abilities of students being taught by organizing mathematics learning activities based on heuristics and model method approaches, 2) to compare algebraic thinking and mathematical problem solving abilities of students before and after being taught by organizing mathematics learning activities based on heuristics and model method approaches, 3) to compare algebraic thinking and mathematical problem solving abilities of students being taught by organizing mathematics learning activities based on heuristics and model method approaches and by conventional learning activities, and 4) to study features of algebraic thinking of students being taught by organizing mathematics learning activities based on heuristics and model method approaches.

The subjects were 68 seventh grade students in academic year 2012 of Bantakhunwittaya School. There were 35 students in the experimental group and 33 students in the control group. The experimental group was taught by the organizing mathematics learning activities based on heuristics and model method approaches and the control group was taught by the conventional method. The instruments of data collection were 1) Algebraic thinking abilities tests, 2) Mathematical problem solving abilities test, and 3) An interview protocol. The experimental materials constructed by the researcher were lesson plans focusing on heuristics and model method approaches and conventional lesson plans. The data were analyzed by arithmetic mean, mean of percentage, standard deviation, and t – test.

The results of the study revealed that:

1) Algebraic thinking and mathematical problem solving abilities of students in the experimental group were higher than 50% of the criterion, 2) Algebraic thinking and mathematical problem solving abilities of students in the experimental group were statistically higher than before at .05 level of significance, 3) Algebraic thinking and mathematical problem solving abilities of students in the experimental group were higher than that those of students in the control group at the .05 level of significance, and 4) the experimental group used various representations to think algebraically; these representations included tables, diagrams, graphs, expressions, equations, and words; through the use of these representations, the algebraic thinking abilities of the students were shown to be much more highly developed.

Department: Curriculum and Instruction .... Student's Signature ....

Field of Study: Mathematics Education .... Advisor's Signature ....

Academic Year: 2012 ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาอย่างสูงยิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ ข้อคิดเห็นต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์ในการทำวิทยานิพนธ์ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง ตั้งแต่ต้นจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมที่เป็นประโยชน์ ซึ่งเป็นผลให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่าน ที่กรุณาเสียสละเวลาตรวจพิจารณาให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการปรับปรุงแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลให้มีความถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คณะครู และนักเรียนโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา ที่ให้ความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูล และการทดลองใช้เครื่องมือวิจัยให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณรุ่นพี่นิสิตบัณฑิตศึกษาและเพื่อน ๆ สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้ให้กำลังใจ และช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์มาโดยตลอด

ท้ายสุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ครอบครัวจันทร์หอม คุณพ่อ คุณแม่ และพี่สาว เป็นอย่างสูงที่คอยดูแลเอาใจใส่ ให้ความรักความอบอุ่น เป็นกำลังใจสำคัญ ทั้งยังสนับสนุนด้านการศึกษามาโดยตลอด จนกระทั่งประสบความสำเร็จดังเช่นทุกวันนี้

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

ตารางที่ หน้า

ตารางที่ หน้า

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัจจุบันโลกมีการพัฒนาไปอย่างรวดเร็วทั้งในด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เป็นยุคที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วในกระแสโลกาภิวัตน์ โลกปัจจุบันและโลกอนาคตจึงเป็นโลกแห่งความรู้และเทคโนโลยีสารสนเทศ ดังนั้น การพัฒนาคุณภาพของคนให้เป็นคนมีความรู้ ความสามารถและมีทักษะที่จำเป็นต่อการดำรงชีวิตในยุคโลกาภิวัตน์ไม่ว่าจะเป็นความรู้ด้านภาษา การรู้จักใช้คอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีใหม่ ๆ จึงเป็นสิ่งสำคัญที่สุด (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2544: 1) ดังนั้น การศึกษาเป็นเรื่องสำคัญและจำเป็นสำหรับการสร้างคนเพื่อพัฒนาประเทศ และสามารถดำรงชีวิตได้อย่างมีความสุขได้ ซึ่งการพัฒนาผู้เรียนให้พร้อมที่จะดำเนินชีวิตอยู่ในสังคมในอนาคต ต้องพัฒนาให้เป็นคนที่มีคุณภาพ เป็นผู้ที่มีความรู้ ทักษะความสามารถต่าง ๆ สามารถใช้ความรู้ทักษะและความสามารถเหล่านั้นไปใช้แก้ปัญหาและตัดสินใจอย่างมีเหตุผล (สมเดช บุญประจักษ์, 2547: 1)

จุดมุ่งหมายหลักของการจัดการศึกษาทุกระบบ คือการเตรียมเยาวชนให้เป็นพลเมืองที่มีคุณภาพ มีศักยภาพและมีความสามารถในการแข่งขันได้ในอนาคต การให้การศึกษาที่สอดคล้องกับจุดมุ่งหมายจึงต้องให้นักเรียนสามารถใช้ความรู้ในชีวิตจริง สามารถคิด วิเคราะห์ แก้ปัญหาได้ ดังนั้น การเตรียมเยาวชนให้สามารถดำเนินชีวิตและมีส่วนร่วมในสังคมที่มีวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเป็นพื้นฐาน ที่ส่งผลกระทบต่อทุกชีวิตในทุกระดับทั้งตัวบุคคล ในอาชีพการทำงานและสังคมวัฒนธรรม ทำให้บุคคลสามารถรับรู้และตัดสินประเด็นปัญหาของสังคมที่เกิดจากผลกระทบของวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอย่างมีความรู้ความเข้าใจ มีส่วนร่วมในสังคมระดับชุมชน ระดับประเทศ และระดับโลกอย่างเต็มภาคภูมิ (สสวท, 2552) การที่เยาวชนสามารถดำเนินชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุขนั้น การมีทักษะชีวิต จึงถือว่ามีความสำคัญมาก ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2553: 8) ได้กล่าวไว้ว่า“ทักษะชีวิตเป็นความสามารถของบุคคลในการดำรงชีวิต เป็นทักษะที่ผู้เรียนจำเป็นต้องใช้ในชีวิตประจำวัน ซึ่งทักษะชีวิตประกอบด้วย การตัดสินใจ การแก้ปัญหา การสื่อสาร การคิดวิเคราะห์วิจารณ์ การคิดสร้างสรรค์ การรับรู้ในตน การเห็นใจผู้อื่น การจัดการกับอารมณ์ การจัดการกับความเครียด การสร้างสัมพันธภาพ” ซึ่งทักษะต่าง ๆ เหล่านี้ หลายทักษะเป็นส่วนหนึ่งของทักษะคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาและนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม อีกทั้งคณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ

คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551: 54)

แม้ว่าคณิตศาสตร์จะเป็นวิชาที่มีความสำคัญต่อการพัฒนาศักยภาพของเยาวชน แต่การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมายังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควร เห็นได้จากผลการประเมิน ของสำนักรับรองมาตรฐานและประเมินคุณภาพการศึกษา (สมศ.) พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยอยู่ในระดับปรับปรุง มีจำนวนนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ในระดับดีผ่านเกณฑ์ 75% เพียงร้อยละ 2.5 ซึ่งอยู่ในระดับที่น้อยมาก (สำนักงานรับรองมาตรฐานและประเมินคุณภาพการศึกษา, 2547) สอดคล้องกับผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O – NET) ในปีการศึกษา 2554 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่พบว่านักเรียนทั่วประเทศได้คะแนนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์เพียง 32.08 คะแนน และระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 พบว่านักเรียนทั่วประเทศได้คะแนนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์เพียง 14.99 คะแนน จากคะแนนเต็ม 100 คะแนน (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2554) นอกจากนี้ ผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ร่วมกับนานาชาติในโครงการ TIMSS 2007 (The Trends in International Mathematics and Science Study 2007) โดยทำการประเมินนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า นักเรียนไทยได้คะแนนในวิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ย 441 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยนานาชาติที่มีคะแนนเฉลี่ย 500 คะแนน และพบว่าแนวโน้มของคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ในโครงการ TIMSS ปี 1999-2007 นักเรียนไทยมีแนวโน้มของคะแนนที่ได้ลดลง กล่าวคือ ในโครงการ TIMSS 1999 นักเรียนไทยได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ย 467คะแนน (สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2552) และจากผลการวิจัยและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ร่วมกับนานาชาติครั้งที่ 3 (TIMSS 1999) พบว่า นอกจากเด็กไทยมีค่าเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ต่ำกว่าค่าเฉลี่ยมาตรฐาน แล้ว ยังพบว่าในจำนวนเนื้อหาคณิตศาสตร์ทั้งหมด พีชคณิตเป็นเนื้อหาที่เด็กไทยทำคะแนนสอบได้ต่ำสุด (Mullis, I.V.S. et al., 2000) เช่นเดียวกับการค้นพบของหลาย ๆ ประเทศ แสดงให้เห็นว่าพีชคณิตเป็นวิชาที่ถือเป็นอุปสรรคสำหรับนักเรียนส่วนใหญ่ในระดับมัธยมศึกษา (Herscovice, 1989: 60)

พีชคณิตถือเป็นวิชาที่มีความสำคัญเปรียบเสมือนกระดูกสันหลังของวิชาคณิตศาสตร์ และได้รับการยอมรับว่าเป็นประตูสู่ความสำเร็จของการศึกษาคณิตศาสตร์ในทุก ๆ สาขา (Cai, 2004: 1) สอดคล้องกับ George Booker (2009) ที่กล่าวว่า “พีชคณิตถือเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อประยุกต์กับวิทยาศาสตร์ ธุรกิจ เศรษฐกิจ การค้า การคำนวณ และ บริบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนในชีวิตประจำวัน” และพีชคณิตจะถูกใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่ การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการหาคำตอบ

เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อคาดเดาหรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น (Herbert & Brown, 1997) จากลักษณะของพีชคณิต เป็นการแสดงแนวคิดที่เกี่ยวกับ ตัวแปร สมการ การนำเสนอสถานการณ์ปัญหา เพื่อแสดงแบบรูป แสดงตาราง และสร้างสมการ เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของสื่อสัญลักษณ์ (NCTM, 1989) และจากงานวิจัยหลาย ๆ งานวิจัย แสดงให้เห็นว่าด้วยลักษณะของพีชคณิตที่เป็นลักษณะของตัวแปร ฟังก์ชัน หรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ จะเป็นอุปสรรคต่อการเรียนของนักเรียนและการจัดการเรียนรู้ของครูเป็นอย่างมาก นั่นคือ นักเรียนไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อสร้างสมการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ ยิ่งเป็นโจทย์ปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนด้วยแล้ว (Tall, 1991; Toshiakaira, 2003) จากปัญหาดังกล่าว ครูผู้สอนจึงต้องพัฒนาเครื่องมือที่จะสามารถพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนอย่างมีระบบ

แนวคิดหลักของการคิดเชิงพีชคณิตจะเกี่ยวกับการนำเสนอตัวแทนความคิด การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน ความเท่ากัน ความหมายของตัวแปร แบบรูปและฟังก์ชัน การให้เหตุผลแบบอุปนัย และนิรนัย (Greenes & Findell, 1998) ส่วน Kaput (NCTM, 1993: Online) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการสร้างและนำเสนอตัวแทนความคิดของแบบรูป การสร้างกฎเกณฑ์ทั่วไป และสิ่งที่สำคัญที่สุดคือความคล่องของการสำรวจและการคาดการณ์ สอดคล้องกับ Herbert & Brown (1997) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเครื่องมือในการวิเคราะห์ความแตกต่างของสถานการณ์ปัญหา โดย 1) การแยกแยะข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา 2) การนำเสนอตัวแทนความคิดจากข้อมูลทางคณิตศาสตร์ด้วยการเขียนอธิบาย ใช้แผนภาพ ตาราง กราฟ และสมการ และ 3) การตีความ และประยุกต์ผลจากการค้นพบ เช่น การแก้ปัญหาเพื่อหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบคาดการณ์ และ การอธิบายความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน นอกจากนี้ ทางสมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989) ได้ให้ความหมายของการคิดเชิงพีชคณิตที่พิจารณาตามเนื้อหาในสองลักษณะคือ อิงเนื้อหาพีชคณิต และ อิงเนื้อหา แบบรูป ฟังก์ชัน โดยให้ลักษณะของการคิดที่อิงเนื้อหาพีชคณิตว่า 1) เป็นการเข้าใจในมโนทัศน์ของตัวแปร นิพจน์ และสมการ 2) การนำเสนอตัวแทนความคิดของสถานการณ์ และจำนวนแบบรูปด้วยตาราง กราฟ การอธิบายกฎเกณฑ์ สมการ และ ค้นหาความสัมพันธ์ของการนำเสนอตัวแทนความคิด 3) การวิเคราะห์ตาราง และ กราฟ เพื่ออธิบายคุณสมบัติและความสัมพันธ์ 4) การพัฒนาความเชื่อมั่นในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นโดยใช้รูปภาพ วิธีที่เป็นทางการ และไม่เป็นทางการ 5) การสำรวจตรวจสอบสมการ และ ไม่ใช่สมการเชิงเส้น 6) การประยุกต์วิธีการทางพีชคณิตเพื่อแก้ปัญหาที่หลากหลายของปัญหาในชีวิตจริงและปัญหาทางคณิตศาสตร์ ส่วนลักษณะการคิดที่อิงเนื้อหาแบบรูปและฟังก์ชันคือ 1) การอธิบาย ขยาย วิเคราะห์ และ สร้างความหลากหลายของแบบรูป 2) การอธิบายและนำเสนอตัวแทน

ความคิดของความสัมพันธ์ด้วยตาราง กราฟ กฎ 3) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของหน้าที่ในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เป็นเชิงคุณภาพในลักษณะอื่น ๆ 4) การใช้แบบรูปและฟังก์ชันในการนำเสนอตัวแทนความคิดและแก้สถานการณ์ปัญหา นอกจากนี้ในงานวิจัยของ Cai และคณะ (Cai , J. et al, 2005) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนโดยได้พิจารณาถึงลักษณะพฤติกรรมที่แสดงออกถึงความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต 4 ลักษณะของNCTM นั่นคือ 1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และ 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย เป็นเป้าหมายเพื่อบรรลุถึงความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต เป็นต้น ดังนั้นการศึกษาแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนถือเป็นเรื่องสำคัญและจำเป็นมาก สอดคล้องกับ Russell (1999: 1) ที่กล่าวว่า การที่จะทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้น มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่นักเรียนจะต้องเข้าใจ และพัฒนารูปแบบของการคิด และการให้เหตุผล ด้วยธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับนามธรรมชัดเจน นักเรียนจึงยากที่จะเข้าใจในบริบทของวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง พีชคณิต เพราะฉะนั้นการคิดโดยเฉพาะการคิดเชิงพีชคณิตจะเป็นเครื่องมือสำหรับการทำความเข้าใจลักษณะเนื้อหาที่เป็นนามธรรมได้เป็นอย่างดี จากงานวิจัยต่าง ๆ ได้มีแนวทางในการพัฒนาความสามารถการคิดเชิงพีชคณิตที่หลากหลาย จากแนวคิดของ Bednarz และ Janvier (1996) ได้กล่าวว่า “การใช้สถานการณ์ปัญหาเป็นแนวทางพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตเพื่อการสร้างสมการที่ถูกต้องเหมาะสมจากสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ ถือเป็นสิ่งสำคัญของการแก้ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จ” และแนวทางการใช้รูปภาพแสดงความสัมพันธ์ หรือ การให้คำถามที่เป็นประเด็นปัญหาเป็นประจำแก่นักเรียน การใช้เทคนิคการแก้ปัญหา การใช้เทคโนโลยี รวมทั้งการใช้ตารางแสดงข้อมูล และการสร้างคำถามแนะให้คิด จะเป็นแนวทางที่ช่วยพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนได้ (Clements & Sarama. 2000; Lubinski & Otto. 1999; Ferrini – Mundy, Lappan & Phillips. 1999; Capenter & Levi 2000; Steele. 2000) และแบบรูปถือเป็นเครื่องมือในการสืบสอบการคิดเชิงพีชคณิต สำหรับให้นักเรียนค้นหาและรวบรวมข้อมูล จัดระบบข้อมูล และสร้างกราฟข้อมูล (Enright. 1998; Herbert & Brown. 1999) นอกจากนี้ การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตเบื้องต้นที่ดีที่สุดควรจะมีการพัฒนาผ่านการแก้ปัญหาและใช้รูปภาพ รูปทรงเรขาคณิต เป็นสื่อให้นักเรียนเข้าใจถึงพีชคณิตมากขึ้น (Katz & Barton, 2007) สอดคล้องกับ แนวทางการจัดการเรียนรู้ของประเทศสิงคโปร์ คือได้ใช้แนวคิดโมเดลเมธอด (The Model Method) เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหา กล่าวคือ เป็นการใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด เพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีกับปัญหาที่ต้องการ สามารถสร้างสมการเพื่อแก้โจทย์ปัญหาที่ค่อนข้าง

ซับซ้อนได้ (Charlotte, C. et al, 2007) และการวิเคราะห์หลักสูตรการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์และญี่ปุ่น ได้ใช้แนวคิดโมเดลเมธอด เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตโดยผ่านกระบวนการแก้ปัญหาเกี่ยวพีชคณิต (Ng Swee Fong, 2004) พบว่า คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนสิงคโปร์และญี่ปุ่นอยู่ในระดับที่สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยนานาชาติ (500 คะแนน) กล่าวคือ นักเรียนสิงคโปร์ได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ย 582 คะแนน และนักเรียนญี่ปุ่นได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เฉลี่ย 564 คะแนน (TIMSS 2007 International Mathematics Report, 2008) ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Ferruci, Kaur, Carter และ Yeap (2008: 198 – 203) ที่ศึกษาเกี่ยวกับการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่า การใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน เนื่องจากเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปธรรมอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่เป็นนามธรรม โดยนำเสนอผ่านแบบจำลองที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพและเข้าใจความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ยิ่งขึ้น อีกทั้งเป็นวิธีที่ส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนให้สูงขึ้นด้วย ซึ่งแนวคิดโมเดลเมธอด มีรายละเอียดของแบบจำลองแต่ละแบบ ดังนี้

1. แบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ (part – whole model)

แบบจำลองรูปแบบนี้จะแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ ตั้งแต่ 2 ส่วนขึ้นไปโดยสถานการณ์อาจอยู่ในรูปการบอกแต่ละส่วนมาให้แล้วให้หาข้อมูลทั้งหมด หรือให้ข้อมูลทั้งหมดและข้อมูลบางส่วนมาแล้วให้หาข้อมูลส่วนที่เหลือ แบบจำลองรูปแบบนี้จะช่วยสร้างพื้นฐานในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิตเบื้องต้นให้กับนักเรียน

2. แบบจำลองแบบเปรียบเทียบ (The comparison model)

แบบจำลองรูปแบบนี้เป็นการจำลองความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่ 2 ปริมาณขึ้นไป เมื่อข้อมูลต่าง ๆ เหล่านั้นอยู่ในรูปแบบของการเปรียบเทียบหรือข้อมูลที่แตกต่างกันแบบจำลองรูปแบบนี้มีประโยชน์เช่นเดียวกับแบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ

3. แบบจำลองแบบแสดงการเปลี่ยนแปลง (The change model)

แบบจำลองรูปแบบนี้เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ที่กำหนด อาจจะเป็นการเพิ่มขึ้นหรือลดลง มโนมติเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงนี้เป็นสิ่งที่สำคัญมากเพราะเป็นพื้นฐานสำคัญในการประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิต

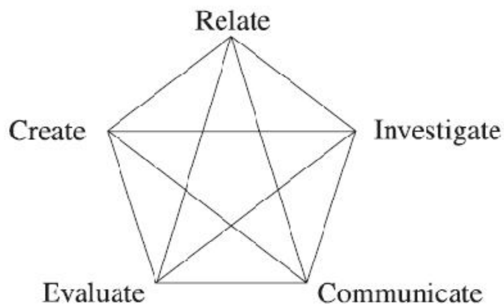
นอกจากนี้ จากการศึกษางานวิจัยของ พรทิพา โสกันทัต (2552) ซึ่งศึกษาเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวด้วย

กลวิธีที่หลากหลาย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันทรายวิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่ พบว่า นักเรียนใช้กลวิธีการวาดภาพจำลองมากที่สุด ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเกี่ยวกับจำนวน โดยนักเรียนจะวาดภาพสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อใช้แสดงความสามารถของข้อมูลต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา ซึ่งนักเรียนให้เหตุผลว่า การวาดภาพจำลองทำให้เห็นภาพชัดเจนโดยเฉพาะโจทย์ที่เกี่ยวกับเศษส่วนเพราะสามารถหาคำตอบได้เลย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ผ่านกระบวนการแก้ปัญหาพีชคณิต ด้วยการสร้างหรือใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดเป็นเครื่องมือช่วยในการแก้โจทย์ปัญหานั้น เป็นแนวทางที่ผู้วิจัยเห็นว่าน่าสนใจและน่าจะนำมาพัฒนาเป็นรูปแบบการสอน ซึ่งการสอนที่เน้นการคิดและแก้ปัญหาของนักเรียนมีมากมาย และการสอนแบบหนึ่งที่อาจนำมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ได้ คือ การสอนตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) Simon และ Newell (1971: 1) กล่าวไว้ว่า “ฮิวริสติกส์ หมายถึง กลยุทธ์หรือกฎเกณฑ์ที่ใช้เรียนรู้การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อย” เป็นกระบวนการที่เหมาะสมเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา โดยพยายามหาตัวเลือกและเหตุผลที่ดีมาอธิบายโจทย์แล้วใช้การวิเคราะห์วิธีการเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์ (Katretchko, 1971) เป็นวิธีการต่าง ๆ ที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหา หรือช่วยให้เกิดความเข้าใจกระบวนการค้นหาคำตอบด้วยตนเอง เพื่อให้เข้าใจโครงสร้างความรู้ และทราบว่าความรู้ถูกสร้างขึ้นมาอย่างไร (Novak & Gowin, 1984: 48) ซึ่งโพลยา (Polya, 2000:1) ได้กล่าวว่า “ฮิวริสติกส์ เป็นกระบวนการหนึ่งที่ช่วยในการเรียนรู้วิธีแก้ปัญหา โดยเน้นในขั้นตอนการตัดสินใจ” สอดคล้องกับ Floyd (2002) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์ว่าเป็นส่วนที่ช่วยการตัดสินใจ (Making Decision) ในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้นักเรียนสามารถกำหนดกลยุทธ์ (Strategy) เทคนิค (Technique) กระบวนการ (Procedure) และกฎเกณฑ์ต่าง ๆ (Rules) ในการเรียน นอกจากนี้การคิดแบบฮิวริสติกส์ยังส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้นและสามารถควบคุมความคิดของตนเองเพื่อให้เข้าใจและเกิดองค์ความรู้ใหม่ นอกจากนี้ฮิวริสติกส์มีส่วนสำคัญช่วยในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดีในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อน เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยสนับสนุนการใช้ความคิดในการแก้ปัญหา และที่สำคัญยังช่วยชี้จุดด้อยของการแก้ปัญหา (Leinhardt & Schwarz, 1997) สอดคล้องกับ ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545) ที่กล่าวว่า “ฮิวริสติกส์ เป็นการสอนที่เน้นการเชื่อมโยงข้อมูลหรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะที่เป็นระบบ โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ต้องการเรียนรู้หรือปัญหาที่ต้องการแก้ไข การฝึกทักษะนี้เป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนอย่างมาก โดยฝึกให้เริ่มต้นจากสิ่งง่ายไปสู่สิ่งที่ซับซ้อนมากขึ้น ทำให้สามารถนำไปแก้ปัญหาได้” เป็นวิธีการที่ช่วยพัฒนาการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ ยังสามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ

มากขึ้น (Garnett, 1991: 102 – 103A) และเป็นวิธีการที่ช่วยให้สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี (James, 1981) ซึ่งได้มีนักวิจัยนำแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนมากมาย เช่น Garnett (1991) ที่ได้พัฒนาวิธีการคิดแบบฮิวริสติกส์ไปใช้ในการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างไม่มีโครงสร้างในการทดลองโดยใช้เทคนิคการสอนหลาย ๆ อย่างรวมกัน การศึกษาใช้เวลา 5 เดือน กับนักเรียน 60 คน ในเกรด 6 การประเมินผลการสอนใช้วิธีหาข้อมูลเชิงคุณภาพและข้อมูลเชิงอุปนัย ผลการทดลองพบว่า หากไม่คำนึงถึงระดับความสามารถพื้นฐานเดิมของนักเรียน การพัฒนาการสอนโดยใช้ฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ ได้ สามารถแสดงโครงเรื่อง ที่ศึกษาได้ และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ เช่นเดียวกับ อรุณี ระย้าแก้ว (2539) ได้ศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นทักษะการคิดแบบฮิวริสติกส์ ในการแก้ปัญหา สมการ อัตราส่วน ร้อยละ สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนกระทู้วิทยา จังหวัดภูเก็ต ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการเรียนรู้ของกลุ่มที่ได้รับการสอนด้วยวิธีสอนที่เน้นทักษะการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่ากลุ่มที่เรียนปกติ ดังนั้นการจัดการเรียนรู้ที่ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์เพื่อแก้ปัญหาจึงถือว่าเป็นแนวทางการจัดการเรียนรู้ที่น่าสนใจที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นวิธีสอนที่เน้นการคิดและตัดสินใจของนักเรียน เป็นวิธีการที่ช่วยให้สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบ ตามที่ Sheffield (2005: 2) ได้นำเสนอแบบจำลองความคิดของขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้กับนักเรียน เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนรู้สาเหตุของปัญหาและการแก้ปัญหา โดยนักเรียนอาจต้องดำเนินการทั้งการแก้ปัญหาแบบเดิมที่เคยทำ การใช้กฎหลักการ และทฤษฎี เชื่อมโยงกับการใช้วิธีการใหม่ ๆ การตั้งคำถามใหม่ จนสามารถสร้างแบบจำลองความคิดทางคณิตศาสตร์รูปแบบใหม่ของนักเรียนเอง ถือว่าเป็นวิธีสอนที่มีประโยชน์อย่างมากในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพราะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนมีความเข้าใจลึกซึ้งในสิ่งที่ต้องการศึกษามีการคิดที่เป็นระบบในการค้นหาคำตอบ ทั้งนี้แบบจำลองความคิดของ Sheffield ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้ คือ สร้างความสัมพันธ์ (Relate) สำรวจ (Investigate) ติดต่อสื่อสาร (Communicate) ประเมิน (Evaluate) และ สร้างคำถามหรือปัญหา (Create) โดยนักเรียนอาจเริ่มต้นจากจุดใดก็ได้ในแบบจำลองความคิดนี้และดำเนินต่อไปยังจุดใดก็ได้เช่นกัน เพื่อตรวจสอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Sheffield & Cruikshank, 2005: 84 – 85)



ภาพประกอบที่ 1 แบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์

ซึ่งแบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์ มีรายละเอียดแต่ละขั้นตอนดังนี้ (Sheffield, 2003: 13 – 14)

1) สร้างความสัมพันธ์ (Relate) เป็นขั้นที่สร้างขึ้นสำหรับการสำรวจตรวจค้น โดยเชื่องโยงปัญหาใหม่กับปัญหาที่เคยพบจากในแบบฝึกหัดที่ผ่านมาว่าเหมือนกันหรือแตกต่างกัน ปัญหาใหม่นี้มีความท้าทายมากขึ้นหรือไม่ ต้องใช้ความรู้เพิ่มเติมหรือไม่

2) สำรวจตรวจค้น (Investigate) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเริ่มใช้ความคิดเกี่ยวกับการสำรวจตรวจสอบ เพื่อหาแนวทางในการหาคำตอบ โดยนักเรียนอาจประยุกต์ใช้รูปแบบการแก้ปัญหาจากโจทย์ที่เคยพบมาก่อนในการหาแนวทางเพื่อแก้ปัญหาใหม่

3) ประเมิน (Evaluate) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนประเมินการคิดของตนเองและรับคำแนะนำการประเมินอย่างละเอียดของคำถามและคำตอบ จากครูผู้สอนเพิ่มเติม

4) สื่อสาร (Communicate) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนแต่ละคนแลกเปลี่ยนวิธีการแก้ปัญหาของตนเองแก่เพื่อนคนอื่น ๆ และอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับวิธีการและคำตอบที่เป็นไปได้

5) สร้างคำถาม (Create) เป็นขั้นที่มีการขยายและสำรวจตรวจสอบประเด็นที่เจาะลึกเพิ่มเติมด้วยการตั้งคำถามใหม่ เพื่อช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจในโครงสร้างของความรู้ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

ดังนั้นจากที่กล่าวมาข้างต้นผู้วิจัยพิจารณาเห็นว่า แนวทางการจัดกิจกรรมตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นแนวทางการจัดกิจกรรมในการใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีความสอดคล้องกับแนวทางการจัดกิจกรรมตามแนวคิดโมเดลเมธอด นั่นคือ เป็นแนวทางที่ช่วยให้นักเรียนเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อสร้างสมการในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน โดยที่การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์นั้น เน้นการตัดสินใจในการพิจารณาความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อวิเคราะห์หาแนวทางแก้ปัญหาที่เหมาะสมในแต่ละประเภทของปัญหาอย่างเป็นระบบ ประกอบกับ การใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด เน้นการสร้างและใช้แบบจำลองเพื่อหาความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อนำเสนอในรูปแบบสื่อสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์หรือรูปแบบของสมการให้ง่ายต่อการแก้ปัญหา

จากการวิเคราะห์ผู้วิจัยคิดว่า แนวทางทั้งสองจะช่วยส่งเสริมให้เกิดการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จึงได้ทำการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด เพื่อพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยผลการวิจัยที่ได้จะเป็นแนวทางและประโยชน์ต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์และครูผู้สอนคณิตศาสตร์ที่จะนำการสอนตามคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดไปประยุกต์ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพต่อไป

คำถามวิจัย

1. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดจะทำให้ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเพิ่มขึ้นหรือไม่
2. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด จะทำให้ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนแตกต่างจากนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติหรือไม่
3. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตเป็นอย่างไร

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดกับการเรียนแบบปกติ
4. เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

สมมติฐานในการวิจัย

การจัดการเรียนการสอนที่ใช้แนวคิดแบบฮิวริสติกส์ เป็นกระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้นและสามารถควบคุมความคิดของตนเองเพื่อให้เข้าใจและเกิดองค์ความรู้ใหม่ ช่วยให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี (Leinhardt & Schwarz,1997: 1) เป็นวิธีการที่ช่วยพัฒนาการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ และยังสามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบมากขึ้น (Garnett, 1984: 102 – 103A) โดยเฉพาะการสร้างแบบจำลองความคิดของ Sheffield ที่ได้นำเสนอขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้กับนักเรียน คือ สร้างความสัมพันธ์ (Relate) สำรวจ (Investigate) ติดต่อสื่อสาร (Communicate) ประเมิน (Evaluate) และ สร้างคำถามหรือปัญหา (Create) โดยอาจเริ่มต้นจากจุดใดก็ได้ในแบบจำลองความคิดนี้และดำเนินต่อไปยังจุดใดก็ได้เช่นกันเพื่อตรวจสอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ ถือเป็นแนวทางการจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนเข้าใจเรื่องที่ศึกษาอย่างลึกซึ้ง ส่งเสริมทักษะการคิดและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ สามารถเชื่อมโยงข้อมูลจนสามารถสร้างเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปอย่างสมเหตุสมผล ดังแสดงให้เห็นจากงานวิจัยของ นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552) ที่ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า ความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์สูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

การจัดการเรียนการสอนโดยการสร้างหรือใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด ถือเป็นรูปแบบของการใช้เครื่องมือช่วยในการแก้ปัญหา กล่าวคือ แนวคิดโมเดลเมธอดจะแสดงให้นักเรียนได้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีกับปัญหาที่ต้องการ สามารถสร้างสมการเพื่อแก้โจทย์ปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนได้ (Charlotte, et al., 2007) ดังแสดงให้เห็นจากงานวิจัยของ Ferruci, Kaur, Carter & Yeap (2008) ได้ทำการศึกษาเรื่องการใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด เพื่อส่งเสริมความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน ผลการศึกษาพบว่า การสร้างและใช้แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดจะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนได้เป็นอย่างดี เนื่องจากเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปธรรมอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่เป็นนามธรรม โดยนำเสนอผ่านแบบจำลองที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพและเข้าใจความสัมพันธ์ของสิ่งโจทย์กำหนดให้ได้ดียิ่งขึ้น

จากผลการวิจัยของนักคณิตศาสตร์ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และแนวคิดโมเดลเมธอด ผู้วิจัยจึงได้กำหนดสมมติฐานของการวิจัยในครั้งนี้ ดังนี้

1. ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

2. ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนการสอนแบบปกติ

3. ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีการนำเสนอวิธีคิดที่หลากหลาย และมีพัฒนาการที่ดีขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานมัธยมศึกษา เขต 11 จังหวัดสุราษฎร์ธานี

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3. ตัวแปรที่ศึกษามีดังนี้

3.1 ตัวแปรต้น ได้แก่ 1) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด 2) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3.2 ตัวแปรตาม ได้แก่ 1) ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต 2) ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

คำจำกัดความในการวิจัย

1. แนวคิดแบบฮิวริสติกส์ หมายถึง แนวคิดซึ่งเป็นกระบวนการที่ช่วยเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ ตามแบบจำลองความคิดของ Sheffield (2003: 13 – 14) ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ สร้างความสัมพันธ์ (Relate) สำรวจ (Investigate) ติดต่อสื่อสาร (Communicate) ประเมิน (Evaluate) และ สร้างคำถามหรือปัญหา (Create) โดยนักเรียนอาจเริ่มต้นจากจุดใดก็ได้ในแบบจำลองความคิดนี้และดำเนินต่อไปยังจุดใดก็ได้เช่นกัน เพื่อตรวจสอบปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. แนวคิดโมเดลเมธอด หมายถึง กลวิธีที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นกระบวนการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาตามแนวคิดของ Yeap BanHar และคณะ (2008: 198 – 203) ที่ได้พัฒนาแนวคิดมาจากเท็กฮ่องโก (Tek – Hong Kho) ซึ่งส่งเสริมให้นักเรียนสร้างหรือใช้แบบจำลองเพื่ออธิบายหรือสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่มีลักษณะเป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรม และนำไปสู่การหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ที่ประยุกต์ใช้จากแบบจำลองความคิดของ Sheffield โดยมีขั้นกิจกรรม 5 ขั้น และในแต่ละขั้นของการจัดกิจกรรมจะเริ่มจากขั้นใดก็ได้และดำเนินต่อไปยังขั้นใดก็ได้เช่นกัน ร่วมกับแนวคิดโมเดลเมธอด ของ Yeap Banhar และคณะ ที่เน้นให้นักเรียนสร้างและใช้แบบจำลองเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรม ทั้งนี้ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างกิจกรรมจากแนวคิดทั้งสองตามธรรมชาติการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 5 ขั้น ดังนี้

1) **ขั้นสร้างความสัมพันธ์ (Relate)** เป็นขั้นที่ครูให้สถานการณ์ปัญหาแก่นักเรียนและนักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยนักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์จากการเชื่อมโยงข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา หรือ การเชื่อมโยงข้อมูลจากความรู้เดิมที่มีกับความรู้ใหม่ที่เรียน หรือ การเชื่อมโยงปัญหาที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนกับปัญหาใหม่ ว่ามีลักษณะที่เหมือน คล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร และต้องใช้ความรู้อะไรบ้างในการแก้ปัญหา

2) **ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นปัญหาเพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสร้างแบบจำลองที่เหมาะสม ในการแสดงตัวแทนความคิดของนักเรียน และใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ในการหาตัวแบบทางคณิตศาสตร์สู่แนวทางการแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ

3) **ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ว่ามีความเหมือน คล้ายคลึง หรือ แตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัด ของการใช้แบบจำลองในแต่ละแบบอย่างไร

4) **ขั้นประเมิน (Evaluate)** เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสิทธิภาพของการใช้แบบจำลองว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา ตลอดจนร่วมกันประเมินถึงผลลัพธ์ว่ามีความถูกต้องหรือไม่

5) ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create) เป็นขั้นที่ครูสร้างคำถามใหม่ หรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่จากสถานการณ์ปัญหาเดิมแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนหาแนวทางการแก้ปัญหา ด้วยการสร้างแบบจำลองในการสำรวจตรวจค้นเกี่ยวกับประเด็นที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมหรือข้อค้นพบใหม่

4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานเล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

5. ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต หมายถึง ความสามารถของแต่ละบุคคลในการใช้ทักษะการคิดเพื่อทำความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวกับพีชคณิต ซึ่งความสามารถนี้วัดได้จากคะแนนรวมจากแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยปรับจากแนวคิดของ NCTM (2000: 37) ซึ่งพิจารณาลักษณะที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตใน 4 ลักษณะ คือ

1) ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด วิเคราะห์และอธิบายลักษณะความสัมพันธ์ของแบบรูป (ลำดับทางเลขคณิต เรขาคณิต) เพื่อขยายแบบรูป และสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปโดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้

2) ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด ในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ แล้วนำเสนอโดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้

3) ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด เกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ตาราง กราฟ นิพจน์ สมการ) ช่วยในการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบได้

4) ความสามารถในการวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด วิเคราะห์ข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลายเพื่อตอบคำถามและอธิบายการเปลี่ยนแปลงและความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นเพื่อสนับสนุนคำตอบได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

6. ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการดำเนินการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่ประกอบด้วยความสามารถในการทำความเข้าใจ

โจทย์ปัญหา ตลอดจนเลือกตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ แล้วดำเนินการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น ๆ ซึ่งความสามารถนี้วัดได้จากคะแนนรวมจากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยมีองค์ประกอบ คือ 1) ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา 2) ความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา 3) ความสามารถในการแก้ปัญหาและหาคำตอบ 4) ความสามารถในการตรวจสอบคำตอบ

ประโยชน์ที่ได้รับ

1. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดทำให้ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น ซึ่งเป็นสิ่งที่นักเรียนควรได้รับการพัฒนาเนื่องจากมีความสำคัญต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์
2. เป็นแนวทางสำหรับครูและผู้ที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้นำขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดได้นำไปประยุกต์ ใช้ในบริบทที่หลากหลาย
3. นักเรียนได้รับการกระตุ้นให้ใช้ความคิดทางคณิตศาสตร์ และเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับที่ดีขึ้น นักเรียนมีการปรับเปลี่ยนพฤติกรรมการเรียนโดยเฉพาะความสามารถของนักเรียนในการพยายามค้นหาคำตอบได้ด้วยตนเองมากขึ้น
4. ข้อค้นพบจะเป็นพื้นฐานแก่นักวิจัยรุ่นต่อไปที่สนใจทำวิจัยเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดต่อไป

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาประกอบในการวิจัย ดังนี้

1. แนวคิดแบบฮิวริสติกส์
    1.1 แบบการคิด
    1.2 ความหมายของการคิดแบบฮิวริสติกส์
    1.3 แนวคิดและความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์
    1.4 กระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียนการสอน
    1.5 การคิดแบบฮิวริสติกส์กับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
    1.6 ประโยชน์ของการจัดการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์
2. แนวคิดโมเดลเมธอด (The Model Method Approach)
    2.1 แนวคิดโมเดลเมธอดกับประเทศสิงคโปร์
    2.2 แนวคิดโมเดลเมธอด
    2.3 ความหมายของแนวคิดโมเดลเมธอด
    2.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด
    2.5 แนวคิดโมเดลเมธอดกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
    2.6 แนวคิดโมเดลเมธอดกับการคิดเชิงพีชคณิต
    2.7 ความสำคัญของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด
3. การคิดเชิงพีชคณิต
    3.1 ความหมายของพีชคณิต
    3.2 การคิด
    3.3 ความหมายของการคิดเชิงพีชคณิต
    3.4 ลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิต
    3.5 ความสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต
    3.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต
    3.7 การวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

4. การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์

4.2 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.3 ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์

4.4 ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี

4.5 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.6 กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.7 ปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.8 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.9 การวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดแบบฮิวริสติกส์

5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดโมเดลเมธอด

5.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงพีชคณิต

5.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. แนวคิดแบบฮิวริสติกส์

1.1 แบบการคิด

นักการศึกษาและนักจิตวิทยาหลายท่านได้ให้คำอธิบายของแบบการคิดไว้ดังนี้

ออซูเบล (Ausubel, 1968: 176) กล่าวว่า แบบการคิด เป็นความแตกต่างของแต่ละบุคคลที่ไม่เปลี่ยนแปลงในการจัดระเบียบของการคิด และเป็นลักษณะของการคิดที่มีมาอย่างยาวนานในตัวบุคคล

โคแกน (Kogan, 1971: 80) กล่าวว่า แบบการคิด เป็นความแตกต่างระหว่างบุคคลในเรื่องของการรับรู้ การจำ การคิด รวมทั้งความเข้าใจ การแปลง และการนำสารสนเทศไปใช้ประโยชน์

วิทคิน รัสคิน และแครพ (Witkin, Oltman, Raskin, and Karp, 1971: 230) อธิบายว่า แบบการคิด คือ ลักษณะหรือหน่วยปฏิบัติการในตัวบุคคลที่ทำให้บุคคลแสดงออกถึงการรับรู้และการคิดที่ค่อนข้างคงเส้นคงวา โดยมีลักษณะดังนี้

1) แบบการคิดเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับรูปแบบการรับรู้มากกว่าเป็นขั้นตอนของกระบวนการ

2) แบบการคิดมีอิทธิพลต่อบุคลิกภาพของบุคคล และเป็นตัวบ่งชี้คุณลักษณะที่โดดเด่นในตัวบุคคลให้แสดงออกมา

3) แบบการคิดเป็นสิ่งที่ติดตัวบุคคลแต่ละคนซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงไปตามอายุขัย แต่ไม่ได้เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมโดยสิ้นเชิง

ออสเบิร์นและออสเบิร์น (Ausburn and Ausburn, 1978: 200) กล่าวว่า แบบการคิดเป็นมิติทางจิตวิทยาที่แสดงให้เห็นความคงที่ของวิธีการที่แต่ละบุคคลได้มาและประมวลผลสารสนเทศต่าง ๆ

โกลด์สเตนและแบล็กแมน (Goldstein and Blackman, 1981: 80) กล่าวว่า แบบการคิดเป็นลักษณะของแต่ละบุคคลในการจัดกระทำสิ่งแวดล้อมที่ได้รับ เป็นการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าที่แวดล้อมกับผลที่บุคคลได้รับจากสิ่งเร้านั้น

เมสซิกค์ (Messick, 1984: 45) อธิบายว่า แบบการคิด เป็นวิธีการที่คนเราพึงพอใจที่จะรวบรวม วิเคราะห์ ประเมินผลและแปลความข้อมูล

ชิพแมนและชิพแมน (Shipman and Shipman, 1985: 78) กล่าวว่า แบบการคิดเป็นความหลากหลายของคนเราที่คงที่ในการรับรู้ การจัดระเบียบ การประมวลผลข้อมูล และการจดจำสารสนเทศ

โจแนสเซนและแกรโบวาสกี (Jonassen and Grabowaski, 1993: 146) อธิบายว่า แบบการคิด คือ วิธีที่คนเรามองโลกรอบตัวเองและมีปฏิสัมพันธ์ต่อสิ่งนั้น ซึ่งวิธีการนี้เป็นวิธีการที่บุคคลใช้อย่างสม่ำเสมอตลอดชีวิตของคน ๆ นั้น

วูลฟอล์ค (Woolfolk, 1995) อธิบายว่าแบบการคิดเป็นวิธีการรับและจัดระเบียบสารสนเทศที่แต่ละบุคคลมีแตกต่างกัน ซึ่งเป็นผลมาจากปัจจัยต่าง ๆ เช่น การเลี้ยงดู การฝึก

ไรด์ดิงและเรย์เนอร์ (Riding and Rayner, 1998) ให้ความหมายว่า แบบการคิด คือ วิธีการที่แต่ละคนชอบทำ และทำจนเป็นนิสัยในการจัดระเบียบและนำเสนอสารสนเทศ

ลอง (Long, 2009: 49) อธิบายว่า แบบการคิด เป็นบุคลิกลักษณะของบุคคล ซึ่งเป็นวิธีที่มักใช้ในการจัดระเบียบและประมวลข้อมูล

ฟอร์ด วิลสัน ฟอสเตอร์ และอิลลิส (Ford, Wilson, Foster and Ellis, 2002) กล่าวว่า แบบการคิด เป็นนิสัยเฉพาะของบุคคลที่ไม่เปลี่ยนแปลงในการใช้กลยุทธ์ต่าง ๆ ในการประมวลผล

แมคเนอร์เนย์และแมคเนอร์เนย์ (Mclnerney and Mclnerney, 2002: 232) อธิบายว่า แบบการคิด เป็นกระบวนการที่เกี่ยวกับการทำความเข้าใจและการคิดที่คงที่ของแต่ละบุคคล ภายใน

วัฒนธรรมการทำความเข้าใจโลกของตน การสร้างแนวคิดอย่างมีความหมาย การเรียนรู้ภาพการแก้ปัญหาและการเชื่อมโยงสิ่งที่เกี่ยวข้อง โดยเป็นนิสัยการคิดที่แต่ละบุคคลตีความและตอบสนองต่อสภาพแวดล้อม

ชายด์ (Child, 2004: 89) ให้คำอธิบายว่า แบบการคิด คือ แบบแผนคุณลักษณะของบุคคลในการรับรู้และการคิดซึ่งแต่ละบุคคลแสดงออกในการแก้ปัญหา

นิตยา โสรีกุล (2547: 90) ได้สรุปว่า แบบการคิด เป็นลักษณะหรือหน่วยปฏิบัติการในตัวบุคคลที่ทำให้บุคคลแสดงออกถึงการรับรู้และการคิดที่ส่งผลต่อบุคลิกภาพ ทักษะ ความสามารถ และพฤติกรรมการเรียนรู้ในด้านต่าง ๆ เช่น การรับรู้ ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ และการแก้ปัญหา เป็นต้น

ประสาท อัครปรีดา (2547: 100) ได้อธิบายว่า แบบการคิด คือ ลักษณะที่เป็นแบบเฉพาะตัวของแต่ละบุคคลในการรับข้อมูล (Perceive) การจัดระเบียบ (Organized) และกระบวนการประมวลผลสารสนเทศ (Information Processing) วิถีทางเหล่านี้เป็นลักษณะนิสัยเฉพาะตัวที่แต่ละบุคคลมักจะกระทำเช่นนั้นในสถานการณ์ต่าง ๆ เช่น บางคนมีปฏิกิริยาตอบสนองต่อสิ่งรอบตัวอย่างรวดเร็ว บางคนมักคิดไตร่ตรองก่อนมีปฏิกิริยาหรือตอบสนอง

สุรางค์ โค้วตระกูล (2548: 109) ได้สรุปว่า แบบการคิด คือวิธีการคิดของแต่ละบุคคล ซึ่งมีความสำคัญต่อพฤติกรรมและการแสดงออกของแต่ละบุคคล ทั้งทางด้านสังคมและการเรียนรู้ เพราะฉะนั้นถ้าครูทราบว่านักเรียนมีความแตกต่างระหว่างบุคคลเกี่ยวกับแบบการคิดย่อมช่วยให้มีความเข้าใจนักเรียนดีขึ้น และหาวิธีการสอนที่เหมาะสมกับนักเรียนที่มีแบบการคิดแตกต่างกันดังกล่าว

นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552: 21) แบบการคิดนั้น เป็นลักษณะและวิธีการเฉพาะที่คงที่ของแต่ละบุคคลในการรับ รวบรวม จัดระเบียบ แปลความ วิเคราะห์ ประเมินผล เชื่อมโยงและนำเสนอสารสนเทศ ที่ส่งผลต่อบุคลิกภาพ ทักษะ ความสามารถ ทัศนคติ การมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม และพฤติกรรมการเรียนรู้ในด้านต่าง ๆ เช่น การคิด การทำความเข้าใจ การจำ การตอบสนอง การนำไปใช้ในการแก้ปัญหา เป็นต้น ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงไปตามอายุขัย แต่ไม่ได้เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมโดยสิ้นเชิง

จากนิยามของแบบการคิดข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า แบบการคิด คือ ลักษณะที่เป็นแบบเฉพาะตัวของแต่ละบุคคลในการรับข้อมูล และส่งผลถึงพฤติกรรมและการแสดงออกของแต่ละบุคคลที่จะจัดระบบความคิดไม่ว่าจะเป็นการรับ รวบรวม จัดระเบียบ แปลความ วิเคราะห์ ประเมินผล

เชื่อมโยงและนำเสนอสารสนเทศ และถ่ายทอดออกมาในรูปแบบต่าง ๆ ที่ส่งผลต่อบุคลิกภาพ ทักษะ ความสามารถ ทัศนคติ การมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม และพฤติกรรมการเรียนรู้ในด้านต่าง ๆ

1.2 ความหมายของการคิดแบบฮิวริสติกส์

ฮิวริสติกส์ (Heuristics) จัดเป็นกลยุทธ์ที่ช่วยสนับสนุนการเรียนการสอน ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนสามารถประสบความสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งมีนักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงความหมายของฮิวริสติกส์ (Heuristics) ไว้ดังนี้

ไซมอนและนีเวล (Simon and Newell, 1971: 1) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง กลยุทธ์หรือกฎเกณฑ์ที่ใช้เรียนรู้การแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อย

แคทเรชโค (Katretchko, 1971: 1) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง กระบวนการที่เหมาะสมเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา โดยพยายามหาตัวเลือกและเหตุผลที่ดีมาใช้อธิบายโจทย์จากนั้นจึงใช้การวิเคราะห์วิธีการเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์ที่ต้องการ

เรสเตอร์ (Lester, 1980: 1) ได้ให้ความหมายของฮิวริสติกส์ไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึงแผนการกระทำในการหาหนทางแก้ปัญหา โดยใช้ทักษะเป็นเครื่องมือช่วยในการแก้ปัญหา

เพอร์กิน (Perkins, 1981) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ เป็นกลวิธีหรือหลักการโดยทั่วไปที่ช่วยในการแก้ปัญหาของนักเรียน แต่ไม่สามารถรับประกันได้ว่าจะสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้

ดี โบโน (De Bono, 1984: 10) ให้แนวคิดว่า ฮิวริสติกส์ ประกอบด้วยมุมมองทั้งหมดสำหรับการคิดซึ่งไม่สามารถระบุแนวทางหรือวิธีการได้ชัดเจนเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

สชอนฟิลด์ (Schoenfeld, 1985: 23) กล่าวว่า ฮิวริสติกส์ เป็นวิธีการที่กระตุ้นให้ผู้เรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหาต่างๆ ให้ประสบความสำเร็จ ด้วยตัวเอง นัยโดยทั่วไปที่ช่วยให้บุคคลแต่ละคนทำความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาที่ดีขึ้น หรือ สร้างแนวทางไปสู่กระบวนการแก้ปัญหา ตัวอย่างของฮิวริสติกส์ประกอบด้วย การวาดภาพ การโต้แย้งด้วยเหตุผล การพิจารณาปัญหาที่คล้ายกัน เป็นต้น

โนแวค และ โกวิน (Novak and Gowin, 1984: 48) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง วิธีการต่าง ๆ ที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหา หรือช่วยให้เกิดความเข้าใจกระบวนการค้นหาคำตอบด้วยตนเองเพื่อให้เข้าใจโครงสร้างความรู้ และทราบถึงว่าความรู้ถูกสร้างขึ้นมาอย่างไร

มูสตาคัส (Moustakas, 1990: 1) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง กระบวนการต่าง ๆ ที่จะทำให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ต้องการ และเป็นหนทางหนึ่งในการช่วยค้นหาความรู้เพิ่มเติมโดยผ่านกระบวนการที่เหมาะสมและอยู่ในความสนใจ

มาติเนส (Martinez, 1998: 606) กล่าวว่า ฮิวริสติกส์ เป็นกลวิธีที่มีประสิทธิภาพ และไม่มีขอบเขตจำกัด แต่ไม่มีหลักประกันความสำเร็จที่แน่นอนในการทำงาน ฮิวริสติกส์มีความสำคัญมาก เนื่องจาก เป็นเครื่องมือที่ช่วยแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้

โกลดิน (Goldin, 1998: 153) กล่าวว่า ฮิวริสติกส์ เป็นสิ่งที่นำไปใช้ประโยชน์มากสุดเกี่ยวกับการจัดระบบหน่วยข้อมูล และเป็นโครงสร้างสำคัญในการนำเสนอตัวแทนความคิดหรือระบบสำหรับการวางแผน การควบคุม และ การดำเนินการ

มิดเดิลตัน และ วีลเลอร์ (Middleton and Wheeler, 1999: 1) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง วิธีการหนึ่งที่จะนำมาใช้เพื่อช่วยเพิ่มโอกาสในการแก้ปัญหา โดยไม่รับประกันว่าจะสามารถหาคำตอบของปัญหาได้ในทุกกรณี แต่จะช่วยในขั้นตอนการออกแบบวิธีสำหรับแก้ปัญหา (Design Process) ซึ่งจะมีแตกต่างกันขึ้นกับว่าเป็นปัญหาชนิดใด

เวอร์สชาฟฟิล (Verschaffel, 1999: 217) กล่าวว่า ฮิวริสติกส์ เป็นวิธีการค้นหาอย่างมีระบบในการวิเคราะห์ปัญหาและการเปลี่ยนแปลงรูปแบบต่าง ๆ

โพลยา (Polya, 2000: 1) กล่าวไว้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง กระบวนการหนึ่งที่ช่วยในการเรียนรู้วิธีแก้ไขปัญหา โดยเน้นในขั้นตอนการตัดสินใจ

เชฟฟิลด์ (Sheffield, 2009: 1) กล่าวว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง การเชื่อมโยงข้อมูล หรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะที่เป็นระบบ โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ต้องการเรียนรู้หรือปัญหาที่ต้องการแก้ ทำให้นักเรียนรู้ต้นเหตุของปัญหา สามารถสร้างปัญหาย่อยจากปัญหาที่พบเพื่อทำให้ปัญหานั้นง่ายขึ้น จึงกล่าวได้ว่า ฮิวริสติกส์เป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยในเรื่องการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ ตลอดจนสามารถช่วยแก้ปัญหาที่ต้องการ

ยุพิน พิพิธกุล (2530: 52) กล่าวว่า คำว่า ฮิวริสติกส์ ได้รับมาจากภาษากรีก ซึ่งหมายความว่า “ฉันพบ” นักเรียนจะต้องเป็นผู้ค้นหาคำตอบด้วยตนเอง แทนการบอกของครู วิธีนี้ต้องการที่จะให้นักเรียนได้กระทำด้วยตนเองหรือเรียนรู้ด้วยตนเอง วิธีนี้พยายามที่จะให้นักเรียนเป็นผู้ค้นพบ และเป็นผู้ประดิษฐ์ ครูเป็นเพียงผู้มองดูอยู่เคียงข้างนักเรียน นักเรียนจะเลือกทางเดินของตัวเอง และดำเนินการต่อไปด้วยตัวเขาเอง ครูไม่จำเป็นที่จะส่งเสริมหรือแนะนำนักเรียน ไม่ต้องการที่จะให้ครูยอมรับหรือไม่ยอมรับในผลงานของเขา ถ้านักเรียนต้องการที่จะทำสิ่งใดให้สำเร็จ ครูจงปล่อยให้เขาทำไปตามวิธีทางของเขา ให้เขาได้ช่วยตัวเองด้วยเหตุผลและข้อโต้แย้ง ครูไม่ควรใช้ตำราหรือสิ่งที่ทำไว้แล้วเป็นข้อบีบบังคับตัวนักเรียน วิธีการนี้จะทำให้นักเรียนเชื่อมั่นในตัวของเขาเอง และมีอิสระในการทำงาน งานของครูไม่ใช่แก้ปัญหาให้นักเรียนแต่เป็นการทำให้นักเรียนมีความสามารถในการที่จะแก้ปัญหาด้วยตัวเขาเอง

นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552: 21) กล่าวว่า ฮิวริสติกส์ คือ กระบวนการต่าง ๆ ที่นักเรียนได้ใช้พื้นฐานความรู้ที่มีอยู่ในการเรียนเนื้อหาใหม่หรือแก้ปัญหาที่พบ โดยใช้การวิเคราะห์และเชื่อมโยงข้อมูลในลักษณะการโยงความสัมพันธ์ของความรู้เพื่อให้เกิดความเข้าใจในโครงสร้างของความรู้

จากที่กล่าวมาข้างต้น พอสรุปได้ว่า ฮิวริสติกส์ หมายถึง การเชื่อมโยงข้อมูล หรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะที่เป็นระบบ โดยการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ต้องการเรียนรู้หรือปัญหาที่ต้องการแก้ ทำให้นักเรียนรู้สาเหตุของปัญหา เกิดความเข้าใจในโครงสร้างของปัญหาและพยายามแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

1.3 แนวคิดและความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์

จากการศึกษาวิธีการ และแนวคิดในการแก้ปัญหาที่โพลยา (Polya, 1945: 1-5) เสนอไว้ ได้ศึกษาวิธีการที่ช่วยในการแก้ปัญหา โดยแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา ขั้นที่ 2 วางแผนในการแก้ปัญหา ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ และ ขั้นที่ 4 ตรวจวิธีการและคำตอบ และได้มีการใช้กันอย่างแพร่หลายในการแก้ปัญหานั้นต่อมาพบว่ามีบางปัญหาที่ไม่สามารถใช้ขั้นตอนข้างต้นในการแก้ปัญหาได้ โดยเฉพาะปัญหาที่จะต้องใช้การตัดสินใจของผู้แก้ปัญหาเข้ามามีส่วนร่วม และปัญหาที่มีความซับซ้อน ทำให้ต้องหาวิธีการแบบใหม่เพื่อที่จะสามารถแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนได้ จึงได้มีการออกแบบวิธีการสำหรับแก้ปัญหาในรูปแบบใหม่ ๆ ขึ้นมา ฮิวริสติกส์ (Heuristics) เป็นวิธีการแก้ปัญหารูปแบบหนึ่งที่ได้มีการศึกษากันอย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา

การคิดแบบฮิวริสติกส์มีส่วนสำคัญทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้และเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ สามารถเชื่อมโยงความรู้ที่เรียนเข้ากับความรู้เดิมที่เคยเรียนมาแล้ว และนักเรียนสามารถที่จะตรวจสอบสิ่งที่ได้เรียนรู้อย่างเป็นเหตุเป็นผล มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ ดังนี้

โอลส์สัน และ รีส (Ohlsson and Rees, 1991: 1) ได้กล่าวถึง ความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์ว่า ฮิวริสติกส์มีส่วนสำคัญในการเรียนเพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์ในเชิงพฤติกรรมของการเรียนรู้ของมนุษย์ ในเรื่องการทำความเข้าใจเกี่ยวกับกระบวนการเรียนรู้ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี เมื่อเทียบกับกระบวนการเรียนรู้โดยใช้วิธีการอื่นที่ใช้หลักเกณฑ์การประเมินแบบเดียวกัน

ลีอินฮาร์ท และ ชวาทซ์ (Leinhardt and Schwarz, 1997: 1) ได้กล่าวถึงความสำคัญของฮิวริสติกส์ไว้ว่า ฮิวริสติกส์มีส่วนสำคัญช่วยในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดีในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อน เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยสนับสนุนการใช้ความคิดในการแก้ปัญหาและที่สำคัญยังช่วยชี้จุดด้อยของการแก้ปัญหา

โพลยา (Polya, 2000: 1) กล่าวว่า การคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นการศึกษาขั้นตอนและกฎเกณฑ์เพื่อใช้ในการค้นหาและสร้างทางเลือกใหม่สำหรับแก้ปัญหา

ฟอยด์ (Floyd, 2002: 1-4) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristics) ว่าเป็นส่วนที่ช่วยการตัดสินใจ (Making Decision) ในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้นักเรียนสามารกำหนด กลยุทธ์ (Strategy) เทคนิค (Technique) กระบวนการ (Procedure) และกฎเกณฑ์ต่างๆ (Rules) ในการเรียน นอกจากนี้ การคิดแบบฮิวริสติกส์ยังส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้นและสามารถควบคุมความคิดของตนเองเพื่อให้เข้าใจและเกิดองค์ความรู้ใหม่ได้

ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545: 11) ได้กล่าวว่า ฮิวริสติกส์มีความสำคัญทำให้นักเรียนเข้าใจในการเรียนรู้ตามหลักคณิตศาสตร์ ช่วยในการแก้ปัญหาได้ เนื่องจากนักเรียนสามารถคิดค้นทางเลือกใหม่ ๆ ในการแก้ปัญหาทำให้สามารถที่จะแก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบ นอกจากนี้การคิดแบบฮิวริสติกส์ยังส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้นและสามารถควบคุมความคิดของตนเองเพื่อให้เข้าใจและเกิดองค์ความรู้ใหม่

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ฮิวริสติกส์มีความสำคัญทำให้นักเรียนเข้าใจในการเรียนรู้ตามหลักคณิตศาสตร์ ช่วยในการแก้ปัญหา สามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้นักเรียนสามารถกำหนดกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้เอง ส่งผลให้นักเรียนขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้น สามารถควบคุมความคิดเพื่อทำความเข้าใจและสร้างความรู้ใหม่ ๆ ได้ด้วยตนเองต่อไป

1.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

นักการศึกษาหลายท่านได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการใช้กระบวนการของฮิวริสติกส์กับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

ไซมอน และ นีเวล (Simon and Newell, 1971: 1-5) ได้กล่าวถึงกระบวนการของฮิวริสติกส์โดยแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การระบุเป้าหมายเชิงเนื้อหา คือ การแบ่งเนื้อหาที่จะเรียนออกเป็นประเด็นย่อยๆ เพื่อศึกษาในแต่ละประเด็นที่ระบุไว้ โดยผู้เรียนเป็นผู้แบ่งเป้าหมายเชิงเนื้อหาย่อย โดยพิจารณาจากความรู้เดิมหรือวัตถุประสงค์ในการเรียนแต่ละคาบ

2. การวิเคราะห์วิธีการที่จะนำไปสู่เป้าหมายหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ โดยให้นักเรียนหาข้อแตกต่างระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด

3. พิจารณาจากผลสรุปไปยังสิ่งที่กำหนดให้ ซึ่งกระบวนการนี้ให้ความสำคัญไปยังข้อสรุปของปัญหาซึ่งผู้ที่แก้ปัญหาจะต้องพยายามเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสิ่งที่กำหนดให้ได้

4. พิจารณาทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา โดยตัดวิธีการที่เป็นไปไม่ได้ทิ้งไป เพื่อให้ได้วิธีเพียงวิธีเดียวที่ดีที่สุด

มิดเดิลตัน และ วีลเลอร์ (Middleton and Wheeler, 1999: 1-7) ได้กล่าวถึงการนำฮิวริสติกส์ไปใช้ในการอธิบายในองค์ความรู้ใหม่ที่เกิดขึ้น ซึ่งสามารถจำแนกได้เป็น 2 ขั้นตอนที่มีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

1. การกำหนดองค์ความรู้ที่ต้องการศึกษา คือการกำหนดองค์ความรู้เรื่องใดเรื่องหนึ่งขึ้นมาที่สนใจศึกษา เช่น การกำหนดว่า “ลูกบอลเป็นทรงกลม”

2. การหาขั้นตอนที่เหมาะสมกับองค์ความรู้ คือการกำหนดองค์ความรู้ขึ้นมา เพื่อหาวิธีจัดการกับสิ่งนั้น เช่น ถ้าต้องการเล่น “บาสเกตบอล” ด้วยบอลลูกนั้น จะต้องทำอย่างไร เป็นต้น

สำหรับผู้ที่มีความเชี่ยวชาญ ในเรื่องการแก้ปัญหา สามารถนำความรู้เหล่านั้นไปประยุกต์ใช้งานได้ทันที เพื่อให้ได้ผลสัมฤทธิ์ตามที่ต้องการ โดยที่พยายามเขียนสิ่งที่เข้าใจนั้นออกมา แล้วใช้วิธีการให้เหตุผลด้วยฮิวริสติกส์ เพื่อหาคำตอบของปัญหาในขณะที่ผู้ริเริ่มศึกษาเรื่องนี้จะใช้วิธีการลองผิดลองถูกแล้วค่อย ๆ เปลี่ยนจากขั้นตอนการกำหนดองค์ความรู้มาเป็นการหาวิธีที่ช่วยจัดการกับองค์ความรู้นั้น สำหรับในบางกรณีของปัญหาที่ต้องการแนวความคิดใหม่ ๆ จะมีการนำกระบวนการทางฮิวริสติกส์เข้าไปใช้ด้วย

เดวิด และ บิกนีเวลล์ (David and Zbigniew, 2000: 404-408) ได้กล่าวถึงกระบวนการของการคิดแบบฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาไว้ 10 ขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นพิจารณาปัญหา เพื่อให้ได้หนทางในการแก้ปัญหาโดยพิจารณาจากข้อมูลที่มีอยู่เป็นหลัก

2. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาเข้าใจปัญหาได้

3. ขั้นหาทางเลือกในการแก้ปัญหา

4. ขั้นพิจารณาปัญหาโดยการเรียนรู้อย่างรอบคอบกับวิธีการแก้ปัญหาที่เคยได้เรียนรู้มาแล้วในอดีต

5. ขั้นหาทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยไม่ยึดติดกับขั้นตอนเดิม ๆ ที่เคยทำมาแล้ว

6. ขั้นปฏิบัติตามแผนที่วางไว้โดยไม่สนใจว่าคำตอบนั้นจะดีที่สุดเสมอไป

7. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาโดยไม่สนใจสิ่งที่เกิดขึ้นระหว่างการแก้ปัญหา สามารถจัดการกับปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยไม่ยึดติดกับกรอบความคิดแบบเดิม ๆ

8. ขั้นการกำหนดค่าคงที่แทนสิ่งไม่ทราบค่าในกรณีที่ปัญหามีความซับซ้อนมากขึ้นและไม่สามารถตีความจากปัญหาในจุดนั้นๆได้

9. ขั้นเก็บรวบรวมผลลัพธ์ของการแก้ปัญหาเพื่อใช้ในอ้างอิง

10. ทำขั้นตอนที่ 1-9 ซ้ำและสรุปออกมาเป็นรูปแบบที่ชัดเจน

พีลลี่ (Peelle, 2001: 1-9) ได้นำการคิดแบบฮิวริสติกส์ไปใช้กับการเรียนการสอนโดยได้พัฒนารูปแบบการสอนมาตรฐานเพื่อช่วยในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งตัวอย่างรูปแบบการสอนที่นำฮิวริสติกส์มาใช้ คือ รูปแบบการสอนเชิงสำรวจ (Exploration Mode) การสอนเชิงสำรวจจะช่วยให้นักเรียนพยายามหาหัวข้อเรื่องหรือปัญหาที่ตนเองสนใจ แล้วพยายามค้นหาทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดออกมา แล้วจัดทำออกมาเป็นแบบแผน (map) เพื่อใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหานั้น ๆ ต่อไป โดยมีการแลกเปลี่ยนความรู้เรื่องนั้น ๆ ระหว่างกลุ่มเพื่อน และครูผู้สอน เพื่อช่วยยืนยันว่าสิ่งที่ค้นพบนั้นเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นต่อการเรียนรู้ ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดผลดีและผลเสียต่อการเรียนดังนี้

1. นักเรียนจะศึกษาข้อมูลจากแหล่งที่ตนเองเลือกเท่านั้น เช่น ห้องสมุด ห้องคอมพิวเตอร์ หรือบ้านของตนเอง ซึ่งอาจจะเก็บข้อมูลไม่ครบในบางเรื่องไป และใช้เวลาค่อนข้างมาก

2. นักเรียนอาจจะไม่มีเวลาเพียงพอที่จะค้นหาข้อมูลเป็นจำนวนมาก

3. รูปแบบการสอนแบบนี้เหมาะที่นักเรียนจะนำไปประยุกต์ใช้กับงานหรือการบ้านที่ได้รับมอบหมายจากครูผู้สอน

4. ช่วยให้นักเรียนทราบความเป็นมา และเหตุผลจากข้อมูลจริงในเรื่องที่ตนเองศึกษา

5. ช่วยให้นักเรียนศึกษาไปพร้อมกับการเรียนรู้ แต่อาจจะมีบางประเด็นที่ยากต่อการทำความเข้าใจ

6. สามารถเรียนรู้ได้อย่างสบายใจแต่ถ้าในบางปัญหาที่มีความยากทำให้ต้องหยุดไปอาจจะทำให้รู้สึกผิดหวังได้

7. นักเรียนจะเป็นผู้คิดเองว่าจะทำสิ่งใดต่อไป ซึ่งบางครั้งก่อให้เกิดการตัดสินใจผิดพลาดได้ง่าย

8. ช่วยให้นักเรียนพยายามที่จะแก้ปัญหาที่ท้าทายใหม่ ๆ ซึ่งบางปัญหาก็อาจจะไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการใช้คณิตศาสตร์เพียงอย่างเดียว

9. นักเรียนจะมีความรู้สึกถึงความเป็นเจ้าของในสิ่งที่ตนเองค้นพบ แต่ด้วยการใช้เมตาคอกนิชัน (Meta-cognition) เพียงอย่างเดียว คงไม่สามารถทำเช่นนั้นได้

10. นักเรียนสามารถนำเสนอ “แบบแผน” ที่ตนเองค้นพบได้ แต่การกระทำแบบนี้เหมือนเป็นการนำเสนอข้อมูลเพียงด้านเดียว

11. นักเรียนจะรู้สึกภูมิใจในสิ่งที่ตนเองทำสำเร็จ แต่ครูผู้สอนไม่สามารถนำข้อมูลดังกล่าวไปใช้ได้ทันที ต้องพิจารณาให้ถี่ถ้วนก่อน

12. นักเรียนจะนำทักษะที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันมาใช้ เช่น การสำรวจ การทดลอง การให้เหตุผลโดยใช้ฮิวริสติกส์ และการตัดสินใจอย่างอิสระ

ดังนั้นการนำฮิวริสติกส์มาใช้ในการสอนเชิงสำรวจประกอบด้วยขั้นตอนที่นักเรียนเพื่อจัดเก็บระบบข้อมูลที่ค้นคว้าและช่วยให้นักเรียนจะได้จัดการอย่างเป็นระบบกับข้อมูลที่ค้นคว้ามา ช่วยนักเรียนในการให้เหตุผลโดยใช้ฮิวริสติกส์และช่วยในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนตลอดจนทำให้เกิดการเรียนรู้ตามหลักคณิตศาสตร์

โนแวคและโกวิน (Novak and Gowin, 1984: 1) กล่าวว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ เป็นหลักการเฉพาะที่สนับสนุนให้นักเรียนค้นพบด้วยตนเอง วิธีการค้นพบด้วยตนเองช่วยเหลือให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ นอกจากนี้ยังเป็นการระดมพลังความคิดและเป็นวิธีทำให้นักเรียนและครูมองเห็นความหมายของสิ่งที่เรียนและความหมายของความรู้สึกร่วม เป็นกระบวนการช่วยนักเรียนให้ได้เรียนในสิ่งที่มีความหมายควรแก่การเรียน เป็นกระบวนการเรียนที่มีลักษณะเป็นสัญลักษณ์ หรือ การร่วมรับรู้ ซึ่งทำให้ความคิดของนักเรียนมีความชัดเจนขึ้นโดยครูและนักเรียนมีส่วนร่วมรับรู้ในความคิดต่าง ๆ ด้วยกัน และขยายขอบเขตของความคิดนั้น ๆ โดยตัดสินใจร่วมกัน

นอกจากนี้ โนแวคและโกวิน (Novak and Gowin, 1984:11) เสนอแนวคิดเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ สรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นการเรียนเกี่ยวกับธรรมชาติ และโครงสร้างของความรู้ซึ่งช่วยให้นักเรียนเข้าใจวิธีการเรียนของตนเองและความรู้ เป็นสิ่งหนึ่งที่ช่วยแสดงให้นักเรียนเข้าใจว่ามนุษย์สามารถสร้างความรู้ใหม่ได้อย่างไร การค้นหาความจริง การเรียนที่อยู่ภายในข้อกำหนดที่ว่าต้องเป็นการเรียนที่เกิดขึ้นโดยตัวของนักเรียนเอง โดยที่เมื่อนักเรียนได้เรียนตามวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์นี้ เขาจะรับภาระหน้าที่ของเขาเองในอันที่จะรู้จักการเชื่อมโยงความคิดที่ได้จากข้อมูลที่มีความสัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะใหม่ที่เป็นระบบ โดยการสำรวจหาความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนระหว่างข้อมูลที่ต้องการเรียนรู้ หรือปัญหาที่ต้องการแก้ ต้องคำนึงถึงสาเหตุ ส่วนประกอบต่าง ๆ ของปัญหา หรือข้อปลีกย่อยบางประการของปัญหา นอกจากนี้ยังต้องคำนึงถึงการผันแปรหรือเปลี่ยนแปลงความสัมพันธ์ของส่วนประกอบต่าง ๆ รู้จักเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบต่าง ๆ และรู้จักสับเปลี่ยนความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบนั้น ๆ เพื่อที่จะให้ได้มาซึ่งข้อแก้ปัญหาที่เหมาะสม การสนทนา การอภิปราย การพูดโต้แย้งภายในกลุ่มและต่างกลุ่ม ตลอดจนการแลกเปลี่ยนข้อคิดเห็นระหว่างครูกับนักเรียน สิ่งเหล่านี้เป็นองค์ประกอบสำคัญที่จะช่วยทำให้การเชื่อมโยงของข้อ

ความคิดเป็นไปได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ หรือมิฉะนั้นอาจช่วยให้เห็นการเชื่อมโยงที่ขาดหายไประหว่างข้อมูลต่าง ๆ ทำให้สามารถสืบค้นหาข้อมูลต่าง ๆ เข้ามาเชื่อมโยงเสริมให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ครบถ้วนสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เยนและฟลอรา (Yen and Flora, 1985: 3 – 4) ได้กล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ สรุปได้ว่า การฝึกให้นักเรียนใช้การคิดแบบฮิวริสติกส์จะทำให้ระดับความสามารถในการแก้ปัญหาสูงขึ้น และมีทัศนคติต่อการเรียนดีขึ้น เนื่องจากการคิดแบบฮิวริสติกส์ช่วยในการพัฒนาระดับการเรียนรู้และค้นหาข้อมูลในการศึกษาหาความรู้ใหม่ ๆ ได้โดยตนเอง ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนสูงขึ้น

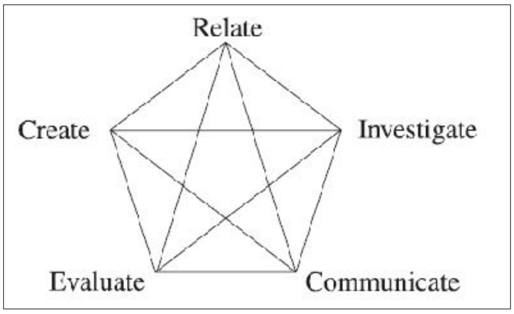
เจมส์และวิลเลี่ยม (James and William, 1992: 44 – 45) ได้กล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ว่าเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ ได้ ช่วยพัฒนาการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และยังสามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้ ตลอดจนช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบมากขึ้น

ฟลอยด์ (Floyd, 2oo5: 2 – 5) ได้กล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ว่า การให้นักเรียนคิดแบบฮิวริสติกส์ช่วยในการตัดสินใจในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้สามารถกำหนดกลยุทธ์ เทคนิค กระบวนการและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ในการเรียนได้

เชฟฟิลด์ (Sheffield, 2003: 103) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์นี้ครูและนักเรียนควรร่วมกันส่งเสริมให้เกิดการคิดการสำรวจตรวจค้น และการตรวจสอบโดยเน้นให้นักเรียนใช้คำถามต่าง ๆ ด้วยตนเองต่อเนื่องจากคำถามของครู ทั้งนี้ก่อนที่ครูจะถามคำถามนักเรียน ครูควรลองใช้คำถามนั้น ๆ กับเพื่อนครูก่อน เพื่อหาคำตอบที่เป็นไปได้ ก่อนที่จะอ่านเฉลยเกี่ยวกับวิธีการและคำตอบที่เป็นไปได้ ซึ่งวิธีนี้จะทำให้ครูเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นในเหตุผลที่หลากหลายแง่มุมการเป็นตัวแทนและความสัมพันธ์ที่อาจจะเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันในวิธีการหาคำตอบ

นอกจากนี้ เชฟฟิลด์ (Sheffield, 2005:2) ได้นำเสนอแบบจำลองความคิดของขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้กับนักเรียน เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนรู้สาเหตุของปัญหาและการแก้ปัญหา โดยนักเรียนอาจต้องดำเนินการทั้งการแก้ปัญหาแบบเดิมที่เคยใช้ การใช้กฎ หลักการ และทฤษฎีเชื่อมโยงกับการใช้วิธีการใหม่ ๆ การตั้งคำถามใหม่ จนสามารถสร้างแบบจำลองความคิดทางคณิตศาสตร์รูปแบบใหม่ของนักเรียนเอง ถือว่าเป็นวิธีสอนที่มีประโยชน์อย่างมากในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพราะเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนมีความเข้าใจลึกซึ้งในสิ่งที่ต้องการศึกษา มีการคิดที่เป็นระบบในการค้นหาคำตอบ ทั้งนี้แบบจำลองความคิดของ เชฟฟิลด์ ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้คือ

สร้างความสัมพันธ์ (Relate) สำรวจ (Investigate) ติดต่อสื่อสาร (Communicate) ประเมิน (Evaluate) และ สร้างคำถามหรือปัญหา (Create) โดยนักเรียนอาจเริ่มต้นจากจุดใดก็ได้ในแบบจำลองความคิดนี้ และดำเนินต่อไปยังจุดใดก็ได้เช่นกัน เพื่อตรวจสอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ (Sheffield & Cruikshank, 2005: 84 – 85)



ภาพประกอบที่ 1 แบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์

ซึ่งแบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์ มีรายละเอียดแต่ละขั้นตอนดังนี้ (Sheffield, 2003: 13 – 14)

1) สร้างความสัมพันธ์ (Relate) เป็นขั้นที่สร้างขึ้นสำหรับการสำรวจตรวจค้น โดยเชื่องโยงปัญหาใหม่กับปัญหาที่เคยพบจากในแบบฝึกหัดที่ผ่านมาว่าเหมือนกันหรือแตกต่างกัน ปัญหาใหม่นี้มีความท้าทายมากขึ้นหรือไม่ ต้องใช้ความรู้เพิ่มเติมหรือไม่

2) สำรวจตรวจค้น (Investigate) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนเริ่มใช้ความคิดเกี่ยวกับการสำรวจตรวจสอบ เพื่อหาแนวทางในการหาคำตอบ โดยนักเรียนอาจประยุกต์ใช้รูปแบบการแก้ปัญหาจากโจทย์ที่เคยพบมาก่อนในการหาแนวทางเพื่อแก้ปัญหาใหม่

3) ประเมิน (Evaluate) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนประเมินการคิดของตนเองและรับคำแนะนำการประเมินอย่างละเอียดของคำถามและคำตอบ จากครูผู้สอนเพิ่มเติม

4) สื่อสาร (Communicate) เป็นขั้นที่ให้นักเรียนแต่ละคนแลกเปลี่ยนวิธีการแก้ปัญหาของตนเองแก่เพื่อนคนอื่น ๆ และอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับวิธีการและคำตอบที่เป็นไปได้

5) สร้างคำถาม (Create) เป็นขั้นที่มีการขยายและสำรวจตรวจสอบประเด็นที่เจาะลึกเพิ่มเติมด้วยการตั้งคำถามใหม่ เพื่อช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจในโครงสร้างของความรู้ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

นอกจากนี้ นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552: 28) ได้กล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ โดยการนำแบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์มาประยุกต์ใช้ ว่า แบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์ นี้ไม่ได้สิ้นสุดการคิดเพียงเมื่อค้นพบวิธีการแก้ปัญหาเท่านั้น ในขณะที่มีหลายแบบจำลองความคิดสิ้นสุดเมื่อนักเรียนค้นพบคำตอบ โดยไม่ได้ย้อนกลับมาพิจารณาปัญหานั้น ๆ อีกเลย ซึ่งแบบจำลองความคิดที่มีลักษณะเช่นนี้นับว่าขาดการกระตุ้นให้นักเรียนคิดลึกซึ้งเกี่ยวกับแนวคิด

ทางคณิตศาสตร์ และขาดการค้นพบมโนทัศน์ใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจำเป็นต้องเรียนรู้ที่จะสำรวจปัญหา เมื่อเขาค้นพบว่าความท้าทายของคณิตศาสตร์ไม่ได้เริ่มต้นที่การค้นพบปัญหาแล้วสิ้นสุดที่การแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ แต่นักคณิตศาสตร์กล่าวว่า คณิตศาสตร์ที่แท้จริงเริ่มต้นหลังจากที่ปัญหาที่ค้นพบได้แล้ว แบบจำลองความคิดนี้แตกต่างจากคำถามคณิตศาสตร์ที่แบบเดิม ๆ สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษที่เคยถามว่าประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนควรจัดให้เพิ่มขึ้นหรือไม่ ซึ่งหมายความรวมถึงการเพิ่มหัวข้อเรื่องในหลักสูตร หรือควรเร่งรัดมากกว่านี้หรือไม่ซึ่งหมายถึงการทำให้นักเรียนในหลักสูตรการเรียนการสอนเดิมที่มีอยู่ให้จบเร็วมากขึ้น ทั้งนี้แบบจำลองความคิดที่มีลักษณะเปิด ดังเช่นตัวอย่างนี้ สามารถประยุกต์ใช้ได้ทั้งหลักสูตรการเรียนการสอนในปัจจุบัน และสำหรับหลักสูตรที่มีการปรับปรุงใหม่

จากที่กล่าวมา พอสรุปการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ ว่า เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยให้นักเรียนสามารถคิดอย่างเป็นระบบมากขึ้น เนื่องจากมีการเก็บข้อมูลที่ดี และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ นอกจากนี้ยังทำให้สามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง ตลอดจนแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้ด้วยตนเองโดยใช้ทักษะพื้นฐานการเรียนรู้ที่ศึกษามาแล้วประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ปัญหาใหม่ได้

1.5 การคิดแบบฮิวริสติกส์กับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ถือเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนั้นการสอนให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้นั้น ครูผู้สอนต้องให้นักเรียนเกิดความเข้าในโครงสร้างของความรู้ โดยนักเรียนต้องอาศัยพื้นฐานความรู้ที่มีอยู่ในการคิดวิเคราะห์แก้ปัญหา และสามารถที่จะเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของความรู้เพื่อให้สามารถแก้ปัญหาได้ ซึ่งมีนักการศึกษาได้เสนอแนวทางการคิดแบบฮิวริสติกส์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

แบรนส์ฟอร์ด และ สเตน (Bransford and Stain, 1984: 1-7) ได้เสนอขั้นตอนของฮิวริสติกส์ในการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. การทำความเข้าใจปัญหา (Identify the problem)
2. กำหนดและแยกแยะปัญหา (Define and represent the problem)
3. กำหนดทางเลือกในการแก้ปัญหา (Explore possible solution strategies)
4. เนินการตามแผนที่วางไว้ (Act on the strategies)
5. มองย้อนกลับไปแต่ละขั้นและประเมินผล (Look back and evaluate)

รีชติน (Rechtin, 1991: 1-5) ได้นำฮิวริสติกส์ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อน โดยแบ่งได้เป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

1. จัดให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย เพื่อช่วยประเมินระบบโดยรวมว่ามีความซับซ้อนหรือไม่ โดยลดขั้นตอนบางอย่างที่ไม่มีความจำเป็นหรือซ้ำซ้อนออกไป

2. ปรับให้อยู่ในรูปแบบและขั้นตอนที่กำหนด ตามแผนผัง และขั้นตอนที่เตรียมไว้ โดยมี 3 ขั้นตอนย่อยคือ

2.1 ปรับโครงสร้างตามลักษณะหน้าที่และลักษณะทางกายภาพ

2.2 ปรับโครงสร้างของระบบทั้งหมด โดยแบ่งตามหน้าที่

2.3 ปรับเปลี่ยนผลิตผล และกระบวนการ ให้เหมาะสม

3. จัดกลุ่มในเรื่องที่มีความสัมพันธ์กัน โดยแบ่งระบบงานทั้งหมดออกเป็นหน่วยย่อย รวมถึงตัวเลือกที่เป็นไปได้ โดยแต่ละหน่วยย่อยจะมีความสัมพันธ์กันทั้งเรื่องของหน้าที่และวิธีการออกแบบ กระบวนการฮิวริสติกส์ที่เกี่ยวข้องมีดังนี้

3.1 คัดเลือกหน่วยที่ไม่เกี่ยวข้องกันออกมาตามที่เป็นไปได้

3.2 ใช้ฟังก์ชันที่เหมาะสมในการจัดให้แต่ละระดับนั้นมีหน่วยที่ไม่ซ้ำกัน

3.3 จัดกลุ่มของสิ่งที่มีอิทธิพลมากที่สุดในระบบ และกลุ่มที่มีปัญหากับระบบเข้าไว้ด้วยกัน

4. ปรับเปลี่ยนไปตามสิ่งกระตุ้นภายนอก โดยขั้นตอนนี้จะเน้นไปถึงการปรับให้ระบบมีความยืดหยุ่นต่อสิ่งกระตุ้นภายนอก เช่น ความไม่แน่นอน ความยุ่งยากใจ และสิ่งรบกวน

5. จัดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ซึ่งจากรูปแบบทั่วไปจะถูกพัฒนาขึ้นไปเรื่อย ๆ อย่างค่อยเป็นค่อยไปจนกว่าจะสามารถจัดระบบทั้งหมดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้

6. ตรวจสอบการเข้ากันได้ของระบบ มีการจัดระบบงานโดยรวม เมื่อพิจารณาจากวิธีการปฏิบัติที่ผ่านมา และพฤติกรรม โดยพิจารณา 2 ส่วน คือ ระบบงานที่มีความซับซ้อน และทำให้ระบบมีความเป็นหนึ่งเดียวกัน โดยกระบวนการฮิวริสติกส์ที่นำมาใช้ มีดังนี้

6.1 การปรับใช้เทคโนโลยีที่มีความทันสมัยให้เหมาะกับสภาพทางสังคมที่เปลี่ยนไป

6.2 การวางระบบที่มีความแตกต่างกัน (Architectures) ก่อให้เกิดความแตกต่างด้านพฤติกรรม

6.3 ระบบงานที่มีความซับซ้อนมาก ๆ จะไม่สามารถหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดได้ครบทุกเงื่อนไข

6.4 การใช้ฮิวริสติกส์จะทำให้การจัดการระบบง่ายกว่าการทำแบบระบบการคิดแบบย้อนกลับ (Reverse)

มหาวิทยาลัยแมคมาสเตอร์ (McMaster University, 1998: 1-6) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของการแก้ปัญหา โดยแบ่งเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

1. การให้คำจำกัดความของปัญหา (Define the problem) โดยการทำความเข้าใจปัญหาและหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ

2. สร้างทางเลือกในการหาคำตอบ โดยใช้วิธีการดังต่อไปนี้

2.1 หาความสัมพันธ์และเชื่อมโยงกับปัญหาที่คล้ายคลึงกัน

2.2 ตั้งสมมติฐาน

2.3 หาเกณฑ์ชี้วัดที่เหมาะสม

2.4 เก็บรวบรวมข้อมูล รายละเอียดที่ไม่ครบถ้วน

2.5 คาดเดาคำตอบและผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

2.6 หาทางเลือกจากสิ่งอื่นที่สัมพันธ์กันก่อนหรือเริ่มวิเคราะห์จากส่วนย่อยๆ ในปัญหานั้น ๆ หากสิ่งที่กล่าวมาแล้วไม่สามารถช่วยในการหาคำตอบได้

3. การวางแผนงาน (plan)

3.1 การระบุประเภทของปัญหาและเลือกวิธีการแก้ปัญหาอย่างใดอย่างหนึ่งที่เหมาะสม

3.2 การนำเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหา

4. ดำเนินการตามแผนที่วางไว้

5. พิจารณาผลกระทบที่เกิดขึ้น

5.1 ตรวจสอบว่าวิธีการแก้ปัญหาถูกต้องและตรวจสอบผลลัพธ์สมเหตุสมผลหรือไม่

5.2 ตรวจสอบกระบวนการโดยตั้งอยู่บนพื้นฐานของความเป็นไปได้

มินยิ และ คณะ (Minyi et. al, 2002: 1-10) ได้เสนอขั้นตอนของฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาไว้ 11 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. ขั้นพิจารณาหาความสัมพันธ์และความคล้ายกันกับปัญหาเดิมที่ได้รับการพิสูจน์มาแล้ว โดยพยายามเชื่อมโยงข้อมูลที่ได้รับโดยอาศัยจากความรู้เดิมมาใช้ในการแก้ปัญหา

2. ขั้นวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล เงื่อนไขและตัวไม่ทราบค่าหรือวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างการตั้งสมมติฐานและการสรุป

3. ขั้นพิจารณาข้อมูลที่กำหนดให้ในปัญหาว่ามีความสัมพันธ์กับปัญหาที่เคยได้เรียนมาแล้วในอดีต

4. ขั้นกำหนดให้คำจำกัดความของข้อมูลที่เกี่ยวข้องให้อยู่ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์

5. ขั้นเขียนสิ่งที่ต้องการให้เกิดขึ้นเมื่อถึงเป้าหมายในระยะหนึ่งของการแก้ปัญหา

6. ขั้นใช้กระบวนการวิเคราะห์ข้อมูลและการตั้งสมมติฐานเพื่อตรวจสอบหาหนทางที่ดีที่สุดในการแก้ปัญหา

7. ขั้นแบ่งปัญหาเป็นกรณีศึกษาย่อย โดยพิจารณาจากคุณสมบัติของสิ่งที่สนใจศึกษาในปัญหานั้น ๆ

8. ขั้นพิจารณากรณีย่อยในแต่ละกรณีเพื่อตัดกรณีที่เป็นไปไม่ได้โดยใช้วิธีขัดแย้ง

9. ขั้นเปลี่ยนรูปของปัญหาไปและดำเนินการขั้นที่ 1-3 ซ้ำอีกครั้ง

10. ขั้นพิจารณาจากข้อสรุปหรือสมการสุดท้ายแล้วตั้งสมมติฐานขึ้นมาว่าน่าจะเกิดจากสิ่งใดและทำซ้ำตามกระบวนการนี้ไปเรื่อยจนกระทั่งถึงขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายกว่าเดิม ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยการวิเคราะห์ข้อมูล การตั้งสมมติฐาน และการแก้ปัญหาโดยวิธีการอื่น

11. ขั้นพยายามจัดรูปของปัญหาให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นโดยให้สมมูลกับสิ่งที่เคยเรียนมาในอดีต

ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545: 17) สรุปว่า ขั้นตอนของฮิวริสติกส์ที่ใช้สำหรับแก้ปัญหา มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา โดยการให้คำจำกัดความของปัญหาและพิจารณาจากข้อมูลที่มีอยู่เพื่อหาความสัมพันธ์ของข้อมูล

2) ขั้นหาทางเลือกในการแก้ปัญหา โดยการสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

3) พิจารณาทางเลือกที่เหมาะสม โดยการพิจารณาทางเลือกที่เป็นไปได้และสามารถหาคำตอบได้เหมาะสม

4) ตรวจสอบ เป็นขั้นตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหาทั้งหมด และได้ผลตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปว่า ขั้นตอนของการแก้ปัญหาแบบฮิวริสติกส์มี 4 ขั้นตอน คือ 1) การทำความเข้าใจปัญหา 2) การวางแผนแก้ปัญหาและพิจารณาทางเลือกที่เหมาะสม 3) การแก้ปัญหาตามวิธีที่เลือก 4) การตรวจสอบคำตอบและการดำเนินการแก้ปัญหา

1.6 ประโยชน์ของการจัดการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์

นักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์ไว้ดังนี้

เจมส์ (James, 1981: 4-5) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์ ว่า ฮิวริสติกส์นั้นจะช่วยให้สามารถเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี

การ์เนต (Garnett, 1984: 102-103A) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์ว่า ฮิวริสติกส์ช่วยพัฒนาการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ ได้ และยังสามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาได้อย่างเป็นระบบมากขึ้น

โอลส์สัน และ รีส (Ohlsson and Rees, 1991: 1-3) ได้นำฮิวริสติกส์ไปใช้ในการแก้ปัญหาในขั้นตอนการตั้งสมมติฐาน และคาดคะเนคำตอบที่จะเกิดขึ้น ในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงพฤติกรรมการเรียนรู้ตามหลักการทางคณิตศาสตร์ เพื่อประโยชน์ดังนี้

1. ใช้เป็นค่าคงที่สำหรับอ้างอิงถึงระดับความเข้าใจปัญหา (Problem states)
2. เพื่อวัดระดับความสามารถของผู้ที่ศึกษา (performance)
3. ใช้ตรวจสอบและแก้ไขในส่วนที่ผิดพลาด (detects and correct)

เยน (Yen, 1985: 3-4) ได้กล่าวประโยชน์ของการคิดแบบฮิวริสติกส์กับการเรียนสรุปได้ว่า ฮิวริสติกส์จะทำให้ระดับความสามารถในการแก้ปัญหาสูงขึ้น และมีทัศนคติต่อการเรียนดีขึ้น เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยในการช่วยพัฒนาระดับการเรียนรู้และค้นหาข้อมูลในการศึกษาหาความรู้ใหม่ ๆ ได้ด้วยของตนเอง สามารถส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนให้สูงขึ้นได้

ฟอยด์ (Floyd, 2002: 2-5) ได้กล่าวประโยชน์การคิดแบบฮิวริสติกส์ สรุปได้ว่า การคิดแบบฮิวริสติกส์ ช่วยในการตัดสินใจ (Making Decision) ในการแก้ปัญหา เนื่องนักเรียนสามารถสร้างทางเลือกในการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ทำให้สามารถกำหนดกลยุทธ์ (Strategy) เทคนิค (Technique) กระบวนการ (Procedure) และกฎเกณฑ์ต่าง ๆ (Rules) ในการเรียน

ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545: 21) สรุปว่าฮิวริสติกส์มีประโยชน์ ช่วยให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างเป็นระบบมากขึ้น เนื่องจากมีการเก็บข้อมูลที่ดี และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ นอกจากนี้ยังทำให้สามารถสร้างองค์ความรู้ใหม่ได้ด้วยตนเอง ซึ่งใช้ทักษะพื้นฐานการเรียนรู้ที่ศึกษามาเป็นอย่างดี

จากที่กล่าวมาสรุปว่า ฮิวริสติกส์ มีประโยชน์ ช่วยพัฒนาการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ ในสถานการณ์ปัญหาได้ดีขึ้น ช่วยพัฒนาระดับการเรียนรู้และ

ค้นหาข้อมูลได้ด้วยของตนเอง ช่วยให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างเป็นระบบมากขึ้น เนื่องจากมีการเก็บข้อมูลที่ดี และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล และมีแนวทางในการหาคำตอบที่หลากหลาย

2. แนวคิดโมเดลเมธอด (The Model Method Approach)

2.1 โมเดลเมธอดในประเทศสิงคโปร์

ตั้งแต่ประเทศสิงคโปร์ได้รับอิสรภาพในการบริหารประเทศ ปี 1965 ระบบการศึกษาได้มีการพัฒนาขึ้น และเป็นครั้งแรกที่ได้ริเริ่มพัฒนาระบบการจัดการศึกษาใหม่ทั้งระดับประถมศึกษาและระดับมัธยมศึกษาขึ้นในช่วงปลายปี 1970 ซึ่งเป้าหมายหลักคือการจัดให้เด็กสิงคโปร์ทั้งหมดได้มีโอกาสศึกษาอย่างน้อยจนถึงอายุ 10 ปี สำหรับระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์ถือเป็นรายวิชาที่มีความจำเป็นอันดับแรกที่จัดให้มีขึ้นในระดับมัธยมศึกษา และได้เริ่มจัดให้นักเรียนได้เลือกเรียนหรือถูกแบ่งตามระดับความสามารถของนักเรียนเอง ซึ่งความแตกต่างของหลักสูตรจะเป็นแนวทางที่ออกแบบขึ้นเพื่อค้นหาความต้องการและความสามารถที่หลากหลายของนักเรียน (Soh, 2005, 2008)

ในปี ค.ศ. 1975 กระทรวงศึกษาธิการของประเทศสิงคโปร์ ได้จัดให้มีการสำรวจผลสัมฤทธิ์รายวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับประถมศึกษา จากข้อสรุปพบว่า ผลสัมฤทธิ์พื้นฐานของทักษะด้านจำนวนและทักษะความรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนประถมศึกษาปีที่ 6 อยู่ในระดับที่ต่ำ ดังนั้นในปี ค.ศ. 1981 ทางกระทรวงศึกษาธิการของสิงคโปร์ได้จัดให้มีการทดสอบทักษะความรู้พื้นฐานรายวิชาคณิตศาสตร์ โดย กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 1 – 4 จำนวนมากกว่า 17,000 คน ผลการประเมินพบว่า นักเรียนมากกว่า 50% ของนักเรียนประถมศึกษาปีที่ 3 และ 4 มีระดับผลการทดสอบอยู่ในเกณฑ์ที่ต้องปรับปรุง โดยที่ 87% ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 – 4 สามารถแก้ปัญหาเมื่อมีคำสำคัญหรือตัวช่วยในโจทย์มาให้ได้ และ 46% ของนักเรียนดังกล่าวสามารถแก้ปัญหาโดยปราศจากคำสำคัญหรือตัวช่วยใด ๆ สิ่งเหล่านี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนระดับประถมศึกษาไม่มีทักษะความชำนาญในพื้นฐานรายวิชาคณิตศาสตร์ และปัญหาดังกล่าวเป็นหัวข้อที่ถกเถียงกันในบทวิจารณ์ของหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ แนวทางการจัดการเรียนการสอน และโครงสร้างในรายวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ในเวลาต่อมา (MOE, 1979,1981; Cheong, 2002)

ในปี ค.ศ. 1980 สถาบันเพื่อการพัฒนาหลักสูตรของประเทศสิงคโปร์ (CDIS) ถือได้ว่ามีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง โดยมีทีมวิจัยที่มากความสามารถและหลากหลายความเชี่ยวชาญเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า “ทีมวิจัยคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา” หรือ “PMP” ซึ่งนำโดย

ดร.โก เท็ก ฮอง (Kho Tek Hong) ได้ระดมกำลังสมองอย่างหนักสำหรับจัดสร้างวัสดุการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อใช้สำหรับพัฒนาการเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา เพื่อเป็นแนวทางการจัดการเรียนการสอนที่มีประสิทธิภาพและเกิดประสิทธิผลในการพัฒนาของครูและนักเรียน นั่นคือ PMP ได้สร้างลักษณะการสอนที่สนับสนุน “The Concrete – Pictorial – Abstract approach” นั่นคือ ทฤษฎีการเรียนรู้ของบรูเนอร์ จากวัตถุที่เป็นของจริงมีลักษณะเป็นรูปธรรม เปลี่ยนเป็น ภาพ และนามธรรมในที่สุด ในแนวทางนี้นักเรียนจะรู้จักใช้สิ่งต่าง ๆ ในประสบการณ์การเรียนรู้ และเป็นบริบทที่มีความหมาย โดยเปลี่ยนแปลงวัตถุของจริง และนำเสนอตัวแทนความคิดในลักษณะของรูปภาพ ในการช่วยให้นักเรียนได้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นนามธรรมให้เข้าใจมากขึ้น และได้เรียกแนวทางนี้ว่า โมเดลเมธอด (CDIS, 1987; Yip & Sim, 1990; Ang, 2008)

แนวคิดโมเดลเมธอด สำหรับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กลายเป็นที่รู้จักกันในประเทศสิงคโปร์ ซึ่งถือเป็นนวัตกรรมเพื่อพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยทีมวิจัยได้ชี้ให้เห็นถึงลักษณะเฉพาะของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีลักษณะของปัญหาค่อนข้างยากและมีความซับซ้อนทำให้นักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ ซึ่งแนวทางที่เรียกว่า“โมเดลเมธอด”นี้เป็นนวัตกรรมที่ช่วยแก้ปัญหานี้ได้ โดยนักเรียนใช้วิธีการวาดรูปภาพแบบจำลองเพื่อนำเสนอเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาคณิตศาสตร์ในเชิงปริมาณ ทั้งจำนวนที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า และอธิบายลักษณะความสัมพันธ์ในสถานการณ์เหล่านั้น อาจเป็นแบบจำลองที่แบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ และการเปรียบเทียบข้อมูล (Part – Whole and Comparison) ในการแก้ปัญหา แนวทางนี้ช่วยให้นักเรียนมีมุมมองในการเห็นภาพความสัมพันธ์และแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้นได้ โดยความคิดหลักของแบบจำลองที่แบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ และแบบจำลองที่ใช้ในการเปรียบเทียบข้อมูล จะถูกใช้ในการแสดงหรืออธิบายแนวคิดที่เกี่ยวกับเศษส่วน อัตราส่วน และ ร้อยละ (Kho, 1987) และ แนวคิดโมเดลเมธอดได้มีการประยุกต์มากขึ้นเพื่อใช้กับวิธีการทางพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษา และช่วยให้นักเรียนสามารถแสดงวิธีคิดสร้างสมการเชิงพีชคณิตและแก้ปัญหาได้ และถือได้ว่าเป็นการเปิดช่องทางในการเรียนคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมและมัธยม จากวิธีการในเชิงตัวเลข ไปเป็นวิธีการในเชิงพีชคณิตนั่นเอง (Kho, 2005)

ในปี ค.ศ. 1990 ระบบการศึกษาของประเทศสิงคโปร์ได้ถูกกล่าวขานเกี่ยวกับการค้นพบความท้าทายใหม่ โดยความสำคัญอยู่ที่การเพิ่มระดับการจัดการศึกษาให้มีคุณภาพสำหรับนักเรียนทั้งประเทศ ถือเป็นการกระจายกระบวนการเพื่อการขับเคลื่อนประสิทธิภาพทางการศึกษาไปสู่อันดับหนึ่งท่ามกลางผู้นำทางการศึกษาทั่วโลก หลักสูตรคณิตศาสตร์ได้ปรับปรุงขึ้นในปี ค.ศ. 1990 ให้เป็นมาตรฐานที่มีความสำคัญทั้งกระบวนการและผลผลิตเกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์ ข้อสรุปดังกล่าว

ปรากฏอยู่ในกรอบแนวคิดวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งกลายเป็นแนวทางสำคัญในการจัดการศึกษารายวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ ภายในกรอบแนวคิดได้เขียนและอธิบายถึงจุดประสงค์หลักของระบบการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ และจัดให้มีแนวทางการสอน การเรียน การวัดและประเมินวิชาคณิตศาสตร์ และกรอบแนวคิดวิชาคณิตศาสตร์ได้มีการพัฒนาและมีการปรับปรุงหลักสูตรคณิตศาสตร์อีกครั้งในปี ค.ศ. 2000 และ 2003 เพื่อจะได้พัฒนาและปรับปรุงให้เกิดความสมบูรณ์ทั้งทางด้านความสำคัญและความต้องการของประเทศ เช่น การบูรณาการด้วยกันของ 3 หลัก นั่นคือ ทักษะการคิด ข้อมูลและเทคโนโลยี และ การศึกษานานาชาติ รวมไว้ด้วยกันในหลักสูตรคณิตศาสตร์ (Goh & Gopinathan, 2008; Soh, 2005, 2005, 2008; MOE, 1990, 2000,2006)

กรอบแนวคิดวิชาคณิตศาสตร์และแนวคิดโมเดลเมธอดเป็นกุญแจสำคัญสำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ ทั้งสองได้รับการพัฒนาและสนใจมากขึ้น เมื่อประเทศสิงคโปร์ได้กลายเป็นที่รู้จักจากการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ระดับนานาชาติของนักเรียน ในปี ค.ศ. 1995 ค.ศ. 1999 และ ค.ศ. 2003 นี่เป็นข้อมูลที่มีความสำคัญสำหรับการปรับปรุงและการพัฒนาของกรอบแนวคิดวิชาคณิตศาสตร์ และแนวคิดโมเดลเมธอด ซึ่งเป็นสิ่งที่น่าสนใจสำหรับครูคณิตศาสตร์และผู้วิจัยทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการเข้าใจในคณิตศาสตร์ให้ดีขึ้นเหมือนในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์

2.2 แนวคิดโมเดลเมธอด

แนวคิดโมเดลเมธอด เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนซึ่งเป็นไปตามแนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ของบรูเนอร์ ที่ถูกพัฒนาขึ้นจากทีมวิจัยของ โก เท็ก ฮอง (Kho Tek Hong) เพื่อพัฒนาเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์

บรูเนอร์ได้ให้แนวคิดว่า มนุษย์สามารถเรียนหรือคิดเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ได้ และแบ่งพัฒนาการทางสติปัญญาและการคิดของมนุษย์ออกเป็น 3 ระยะดังนี้ (Bruner; et al. 1966: 6 – 48)

1. ระยะที่มีประสบการณ์ตรงและสัมผัสได้ (Enactive Stage) เด็กจะแสดงออกทางความคิดด้วยการกระทำ เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาโดยการกระทำ ซึ่งเป็นการสัมผัสกับสิ่งที่เป็นรูปธรรม (Concrete Objects or Manipulative) และวิธีการเช่นนี้จะดำเนินต่อไปตลอดชีวิตโดยมิหยุดอยู่เพียงช่วงอายุใดอายุหนึ่ง เช่น ในชีวิตประจำวันของคนเรา แม้แต่ผู้ใหญ่เองบางครั้งยังใช้วิธีการแก้ปัญหาหรือถ่ายทอดประสบการณ์ด้วยการกระทำ เช่น การสอนให้คนตีกอล์ฟ หรือตีเทนนิสนั้น วิธีการที่เหมาะสมวิธีหนึ่ง คือ การแสดงท่าทางให้ดูเป็นตัวอย่าง ซึ่งจะได้ผลดีกว่าการอธิบายด้วยคำพูดเพียงอย่างเดียว

2. ระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อในการมองเห็น (Iconic Stage) พัฒนาการทางความคิดในระยะนี้ขึ้นอยู่กับการมองเห็น/การนึกภาพในใจ และการใช้ประสาทสัมผัส เช่นการใช้รูปภาพ ไดอะแกรม ฟิล์มที่เป็นสื่อทางสายตา ซึ่งเด็กจะถ่ายทอดประสบการณ์ต่าง ๆ ด้วยการมีภาพแทนในใจ และยิ่งโตขึ้นเด็กก็จะสร้างภาพในใจได้มากขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าความรู้ความเข้าใจของคนเราจะเพิ่มขึ้นตามอายุ และส่งผลช่วยให้เด็กที่โตรู้จักการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ได้ดียิ่งขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากพัฒนาการทางความรู้ ความเข้าใจได้เพิ่มขึ้นตามอายุ

3. ระยะของการสร้างความสัมพันธ์และใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Stage) ซึ่งเป็นระดับที่ผู้เรียนสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนสิ่งที่เห็นในระดับที่สอง หรือสิ่งที่สัมผัสในระดับที่หนึ่งได้ เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ โดยใช้สัญลักษณ์หรือภาษา ระยะนี้ถือเป็นระยะที่สูงที่สุดของพัฒนาการทางความรู้และความเข้าใจ เนื่องจากภาษาเป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นถึงความคิดซึ่งเด็กจะสามารถคิดหาเหตุผลและเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมตลอดจนสามารถคิดแก้ปัญหาได้ เพราะบรูเนอร์เชื่อว่าความรู้และภาษามีพัฒนาการขึ้นมาพร้อม ๆ กัน

บรูเนอร์ (2005: Online; citing Bruner. 1973. Going Beyond the Information Given) ได้ยกตัวอย่างการสร้างความรู้ของเด็กโดยใช้การมองภาพ โดยให้เด็กนำเมล็ดถั่วไปจัดวางเป็นแถว ๆ ละเท่า ๆ กัน ถ้าจำนวนเมล็ดถั่วที่นำมาเรียงเป็นจำนวนเฉพาะ เด็กจะไม่สามารถจัดวางถั่วในรูปหลายแถว ๆ ละเท่า ๆ กันได้ เด็กสังเกตว่าจำนวนเมล็ดถั่วที่ทำให้เกิดเช่นนี้เป็นจำนวนเฉพาะ เด็กที่สามารถสังเกตได้ว่าการที่สามารถนำเมล็ดถั่วมาจัดเรียงได้ในลักษณะดังกล่าว จำนวนเมล็ดถั่วนั้นจะเป็นจำนวนประกอบ นั่นคือเด็กสามารถสร้างความรู้เกี่ยวกับการคูณและจำนวนเฉพาะโดยใช้การมองภาพ

แนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ของบรูเนอร์ เน้นให้นักเรียนได้เห็นหรือสัมผัสกับวัตถุหรือสื่อของจริงก่อน (Concrete Representation) ต่อจากนั้นจึงใช้ภาพ เป็นสื่อ (Pictorial Representation) ซึ่งในตามแนวคิดโมเดลเมธอดนี้จะใช้แถบสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangular Bars) เป็นสื่อ และสุดท้ายจึงจะใช้สัญลักษณ์ ซึ่งเป็นสื่อนามธรรม (Abstract Representation) เป็นขั้นตอนในการพัฒนา ถ้าหากเราดำเนินการตามขั้นตอนดังกล่าว นักเรียนก็จะเกิดมุมมองในการนำเสนอตัวแทนความคิด (Visual Representation) ในการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง

2.3 ความหมายของแนวคิดโมเดลเมธอด

มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของแนวคิดโมเดลเมธอด ไว้ดังนี้

บานฮา และคณะ (BanHar et al., 2008: 198 – 207) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็นแนวทางการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์วิธีหนึ่งที่ใช้การวาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นแบบจำลองในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน โดยแบบจำลองที่ใช้จะแบ่งออกเป็น 3

รูปแบบ คือ แบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ (part – whole model) แบบจำลองแบบเปรียบเทียบ (The comparison model) และ แบบจำลองแบบแสดงการเปลี่ยนแปลง (The change model)

ฟงและเคอร์รี่ (Ng Swee Fong and Kerry Lee, 2005: 62) กล่าวว่า แนวคิดโมเดลเมธอด หมายถึง สิ่งที่คล้ายกับลักษณะการนึกภาพอย่างมีมุมมองของข้อมูลที่มีเงื่อนไขในสถานการณ์ปัญหา ดังนั้นภายใต้มุมมองโดยรวมของปัญหาทั้งหมด มันเป็นโครงสร้างที่สร้างขึ้นด้วยชุดของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีความสัมพันธ์กันระหว่างแผ่นสี่เหลี่ยมที่เป็นลักษณะเฉพาะและมีความสัมพันธ์กันของแผ่นสี่เหลี่ยมทั้งหมด ซึ่งถูกนำเสนอในภาพรวม แต่ละแผ่นสี่เหลี่ยมจะระบุให้แต่ละหน่วยเท่ากัน ซึ่งถูกใช้ในหนังสือเรียนของสิงคโปร์ และคู่มือของครู แนวคิดโมเดลเมธอดสามารถใช้ในการแก้ปัญหาที่ต้องการให้เหตุผลของจำนวน เช่นเดียวกับ การต้องการเหตุผลทางพีชคณิต ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญในการปูพื้นฐานเกี่ยวกับโครงสร้างของแบบจำลองเช่นเดียวกัน

แนวคิดโมเดลเมธอด เป็นวิธีการวาดแบบจำลองซึ่งเป็นกลยุทธ์ที่มีประสิทธิภาพใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการแสดงออกของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่ใช้หน่วยบาร์ โดยวาดรูปแบบจำลอง นักเรียนจะได้รู้เกี่ยวกับตัวแปรที่กำหนดในปัญหาตัวแปรที่ต้องหาและแม้แต่วิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหา การวาดรูปแบบจำลองแบบนี้ยังมีกลยุทธ์ที่หลากหลาย มันสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่ง่าย ๆ เช่น ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการบวก ลบ คูณ หาร และยังสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ไขปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วน ทศนิยม ร้อยละ และอัตราส่วน การใช้แบบจำลองยังฝึกให้นักเรียนคิดในลักษณะเชิงพีชคณิตที่หลากหลายมากขึ้น

ลิซ่า อิงลาร์ด (Lisa Englard, 2010: 158) กล่าวว่า แนวคิดโมเดลเมธอดเป็นการนำเสนอตัวแทนความคิดเกี่ยวกับปริมาณของนักเรียนด้วยบาร์หรือแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีความเปลี่ยนแปลงแตกต่างของความยาว ใช้ตั้งแต่พื้นฐานของการดำเนินการทั้งสี่ ซึ่งช่วยให้นักเรียนระบุลักษณะของตัวดำเนินการว่าเป็นโจทย์ปัญหาที่มีการดำเนินการเดียว และทำให้ง่ายมากขึ้นสำหรับการคำนวณสำหรับค่าตัวกลางที่เป็นปัญหาที่ซับซ้อนมากขึ้น

เนอนิโรวสกี้ (Nernirovsky, 1996b) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็นโครงสร้างที่สรุปขั้นตอนการสร้างความสัมพันธ์ที่นำเสนอออกมาของโจทย์ปัญหา และต้องไม่มีความสับสนกับแนวทางการสร้างแบบจำลอง

เบอร์นาร์ด และ แจนแวร์ (Bednarz & Janvier, 1996) กล่าวว่า โมเดลเมธอดเป็นโครงสร้างที่ประกอบด้วยบาร์สี่เหลี่ยมและค่าเชิงตัวเลขที่นำเสนอข้อมูล และสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อนำเสนอปัญหา บาร์สี่เหลี่ยมถูกแทนที่ด้วยตัวที่ไม่ทราบค่าที่เป็นตัวอักษรในสมการ บาร์

สี่เหลี่ยม 1 อัน ใช้แทน 1 หน่วย ในแบบจำลองเป็นการสร้างความสัมพันธ์กันของหลาย ๆ หน่วย

ฟง (Ng Swee Fong, 2003: 3) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็น โครงสร้างของแผ่นบาร์สี่เหลี่ยม สำหรับปัญหาที่เป็นสมการเชิงเส้น เพื่อหาตัวไม่ทราบค่าในสมการ ซึ่งบาร์สี่เหลี่ยมจะนำเสนอตัวแทนของค่าที่ไม่ทราบ และนักเรียนคาดหวังในการแก้สมการโดยวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างบาร์สี่เหลี่ยมนั่นเอง

สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2009: 3) กล่าวว่า ยุทธวิธีในการสร้างแบบจำลองในการช่วยนักเรียนให้เข้าใจและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการแสดงในลักษณะของรูปภาพและเชื่อมโยงให้นักเรียนเข้าสู่การคิดเชิงนามธรรม และเป็นกระบวนการที่พัฒนาทักษะการมองและการคิดเชิงพีชคณิต

สรุปได้ว่า แนวคิดโมเดลเมธอด เป็นกลวิธีในการนำเสนอตัวแทนความคิด ตีความจากโจทย์ปัญหา โดยการวาดแบบจำลองลักษณะที่เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งแบบจำลองมีหลายรูปแบบ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลายได้

2.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดโมเดลเมธอด

แนวคิดโมเดลเมธอด ถือว่าเป็นยุทธวิธีหนึ่งที่ช่วยเกี่ยวกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยแนวคิดโมเดลเมธอดมีรูปแบบของการสร้างแบบจำลองเพื่อให้เหมาะสมกับการนำไปประยุกต์ใช้ในแต่ละลักษณะของโจทย์ปัญหาที่มีความเหมาะสมแตกต่างกัน ซึ่งนักการศึกษาได้นำเสนอรูปแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังนี้

บานฮา และคณะ (BanHar et al., 2008: 198 – 207) ได้สรุปว่า แบบจำลองที่ใช้ตามแนวคิดโมเดลเมธอด แบ่งออกเป็น 3 รูปแบบ คือ

1. แบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ (part – whole model)
2. แบบจำลองแบบเปรียบเทียบ (The comparison model) และ
3. แบบจำลองแบบแสดงการเปลี่ยนแปลง (The change model)

ซึ่งรายละเอียดของแบบจำลองแต่และแบบเป็นดังนี้

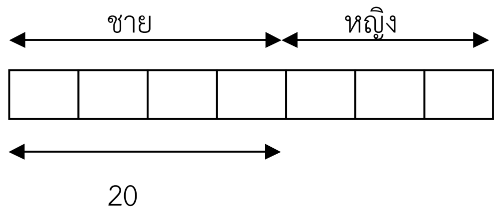
1. แบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ (part – whole model)

แบบจำลองรูปแบบนี้จะแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ ตั้งแต่ 2 ส่วนขึ้นไปโดยสถานการณ์อาจอยู่ในรูปการบอกแต่ละส่วนมาให้แล้วให้หาข้อมูลทั้งหมด หรือให้ข้อมูลทั้งหมดและข้อมูลบางส่วนมาแล้วให้หาข้อมูลส่วนที่เหลือ แบบจำลองรูปแบบนี้จะช่วยสร้างพื้นฐานพื้นฐานในการ

แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิตเบื้องต้นให้กับนักเรียน ดังเช่น

$\frac{3}{7}$ ของนักเรียนชั้น ม.1/1 เป็นนักเรียนหญิง และในชั้น ม.1/1 มีนักเรียนชาย 20 คน จงหาว่าในชั้น ม.1/1 มีนักเรียนหญิงกี่คน

วิธีทำ



จากแบบจำลอง จะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก 4 รูป แทนจำนวนนักเรียนชาย 20 คน

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก 1 รูป แทนจำนวนนักเรียน $20 \div 4 = 5$ คน

เพราะฉะนั้น ในชั้น ม.1/1 มีนักเรียนหญิง $3 \times 5 = 15$ คน

2. แบบจำลองแบบเปรียบเทียบ (The comparison model)

แบบจำลองรูปแบบนี้เป็นการจำลองความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่ 2 ปริมาณขึ้นไป เมื่อข้อมูลต่าง ๆ เหล่านั้นอยู่ในรูปแบบของการเปรียบเทียบหรือข้อมูลที่แตกต่างกันแบบจำลองรูปแบบนี้มีประโยชน์เช่นเดียวกับแบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ ดังเช่น

มีตะกร้าอยู่ 3 ใบ คือ ตะกร้า A ตะกร้า B และตะกร้า C

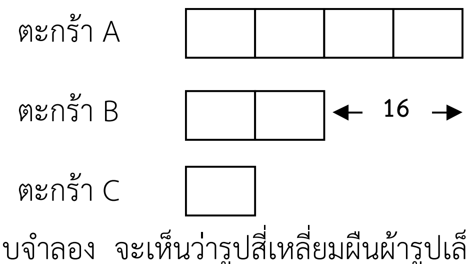
ตะกร้า A บรรจุกล้วยเป็น 4 เท่าของตะกร้า C

ตะกร้า B บรรจุกล้วยน้อยกว่าตะกร้า A อยู่ 16

ตะกร้า C บรรจุกล้วยเป็นครึ่งหนึ่งของตะกร้า B

จงหาว่าแต่ละตะกร้าบรรจุกล้วยกี่ผล

วิธีทำ



จากแบบจำลอง จะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก 2 รูป แทนจำนวนกล้วย 16 ผล

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก 1 รูป แทนจำนวนกล้วย $16 \div 2 = 8$ ผล

เพราะฉะนั้น ตะกร้า A บรรจุกล้วย $4 \times 8 = 32$ ผล

ตะกร้า B บรรจุกล้วย $2 \times 8 = 16$ ผล

ตะกร้า C บรรจุกล้วย $1 \times 8 = 8$ ผล

3. แบบจำลองแบบแสดงการเปลี่ยนแปลง (The change model)

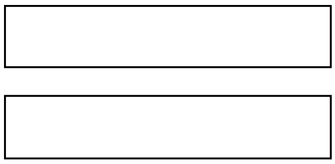
แบบจำลองรูปแบบนี้เป็นการแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ที่กำหนด อาจจะเป็นการเพิ่มขึ้นหรือลดลง มโนมติเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงนี้เป็นสิ่งที่สำคัญมากเพราะเป็นพื้นฐานสำคัญในการประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิต ดังเช่น

มานีและมานะมีเงินเท่ากัน ถ้ามานีใช้เงินไป 18 บาท และมานะใช้เงินไป 25 บาท หลังจากใช้เงินไปแล้วมานีจะเหลือเงินเป็นสองเท่าของมานะ จงหาว่าเริ่มต้นมานีและมานะมีเงินเท่าไร

วิธีทำ ขั้นที่ 1 ก่อนใช้เงิน

มานี

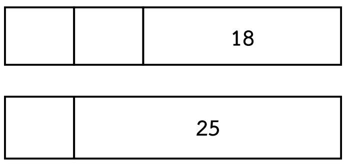
มานะ



ขั้นที่ 2 หลังใช้เงิน

มานี

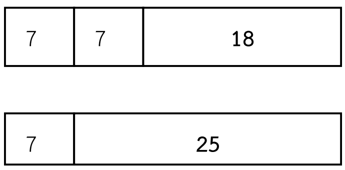
มานะ



ขั้นที่ 3 จะได้

มานี

มานะ



จากแบบจำลองจะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปเล็ก 1 รูป แทนจำนวนเงิน 25 – 18 = 7 บาท

ดังนั้น เริ่มต้นมานีมีเงิน 7 + 7 + 18 = 32 บาท

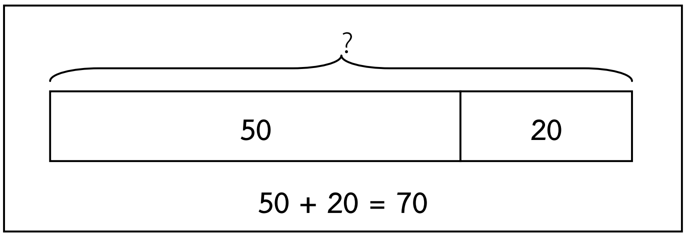
เริ่มต้นมานะมีเงิน 7 + 25 = 32 บาท

เพราะฉะนั้น เริ่มต้นมานีและมานะมีเงิน 32 บาท

จากรูปแบบการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดทั้ง 3 แบบ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้หลากหลาย ตามลักษณะโจทย์ปัญหา ดังนี้ (Frank Schaffer: 4 – 5)

ตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการบวก

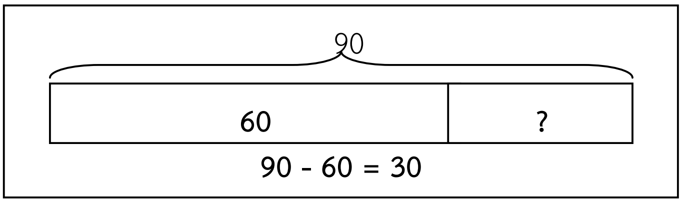
มิลิซา มีลูกปัดสีน้ำเงิน 50 เม็ด มีลูกปัดสีแดง 20 เม็ด มิลิซามีลูกปัดทั้งหมดเท่าไร



ภาพประกอบที่ 2 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการบวก

ตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการลบ

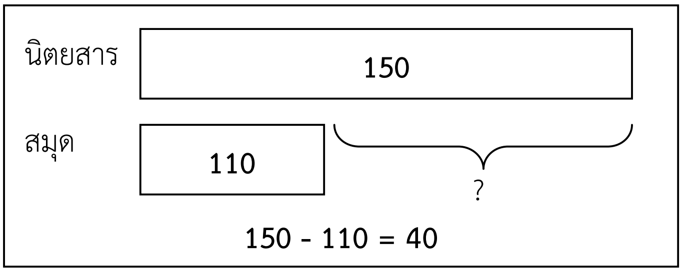
เบนและแอนดี้มีรถของเล่นรวมกัน 90 คัน โดยที่แอนดี้มีรถของเล่น 60 คัน เบนจะมีรถของเล่นจำนวนเท่าไร



ภาพประกอบที่ 3 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการลบ

ตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการเปรียบเทียบข้อมูล

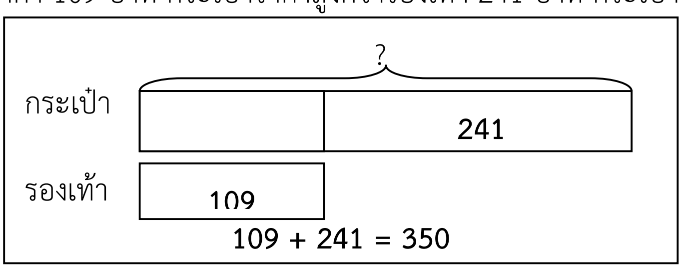
นายไซมอนมีนิตยสาร 150 เล่ม และมีสมุด 110 เล่ม จำนวนนิตสารมีมากกว่าสมุดเท่าไร



ภาพประกอบที่ 4 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการลบเปรียบเทียบข้อมูล

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองเกี่ยวกับสองรายการที่มีความแตกต่างกัน

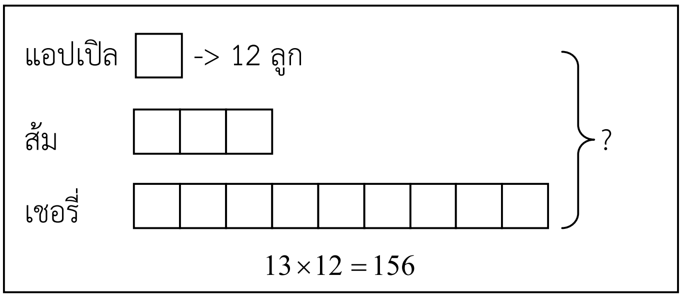
รองเท้าราคา 109 บาท กระเป๋าราคาสูงกว่ารองเท้า 241 บาท กระเป๋าราคาเท่าไร



ภาพประกอบที่ 5 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับสองรายการที่มีความแตกต่างกัน

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองที่เกี่ยวข้องกันหลายรายการ

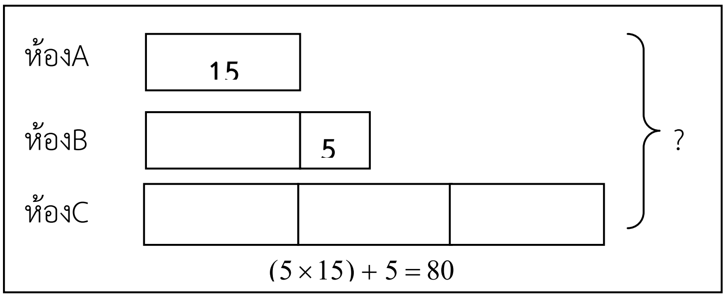
ดริวซื้อแอปเปิล 12 ลูก ซื้อส้ม 3 เท่าของจำนวนที่ซื้อแอปเปิล และซื้อเชอรี่เป็น 3 เท่าของจำนวนที่ซื้อส้ม จงหาจำนวนผลไม้ทั้งหมดที่ดริวซื้อ



ภาพประกอบที่ 6 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับข้อมูลหลายรายการ

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองเกี่ยวกับหลายรายการที่มีความแตกต่างกัน

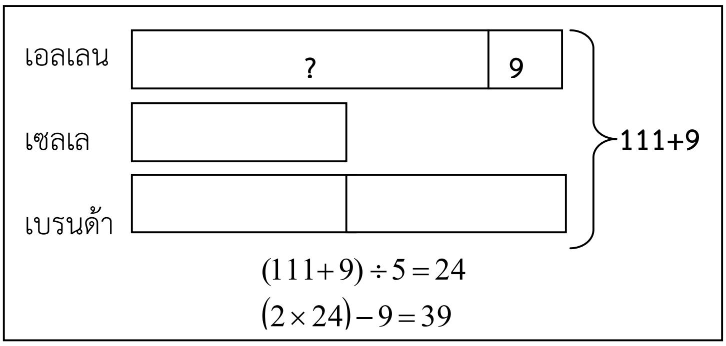
นักเรียนห้อง A มีจำนวน 15 คน จำนวนนักเรียนห้อง B มากกว่าห้อง A อยู่ 5 คน และห้อง C มีจำนวนนักเรียนเป็น 3 เท่าของห้อง A จงหาจำนวนนักเรียนทั้งสามห้องรวมกัน



ภาพประกอบที่ 7 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับหลายรายการที่แตกต่างกัน

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองที่เกี่ยวกับการสร้างส่วนรวม

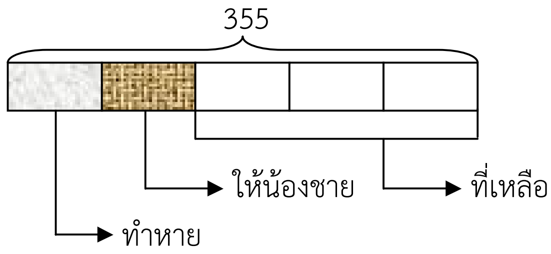
เอลเลน เซลเล และ เบรนด้า ทำขนมปังจำนวน 111 ชิ้น เซลเล ทำขนมปังเป็น 2 เท่าของที่เบรนด้าทำ และเอเลนทำขนมปังน้อยกว่าเซลเล 9 ชิ้น จงหาจำนวนขนมปังที่เอเลนทำ



ภาพประกอบที่ 8 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการสร้างส่วนรวม

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองที่เกี่ยวกับเศษส่วน

จอร์จ มีลูกแก้ว 355 ลูก เขาทำหายไป $\frac{1}{5}$ ของทั้งหมดที่มีอยู่ และให้น้องชายไป $\frac{1}{4}$ ของที่เหลือ จงหาว่าเดิมจอร์จมีลูกแก้วทั้งหมดกี่ลูก



5 ส่วน คิดเป็น 355 ลูก

1 ส่วน คิดเป็น $355 \div 5 = 71$ ลูก

3 ส่วน คิดเป็น $3 \times 71 = 213$ ลูก

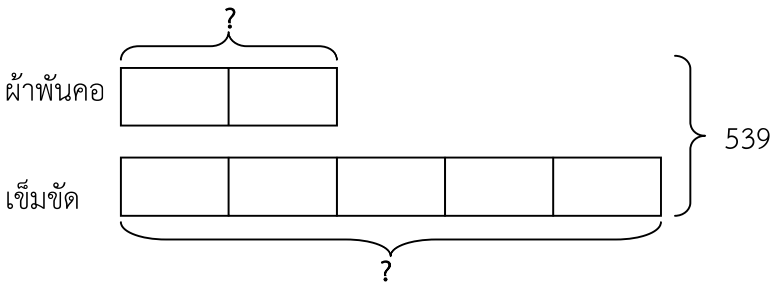
ภาพประกอบที่ 9 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับเศษส่วน

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองที่เกี่ยวกับอัตราส่วน

แอรอน ซื้อผ้าพันคอและเข็มขัดในราคา 2 : 5 ตามลำดับ หากทั้งสองอย่างมีราคารวมกัน 539 บาท

1) จงหาราคาของผ้าพันคอ

2) จงหาราคาของเข็มขัด



$539 \div 7 = 77$

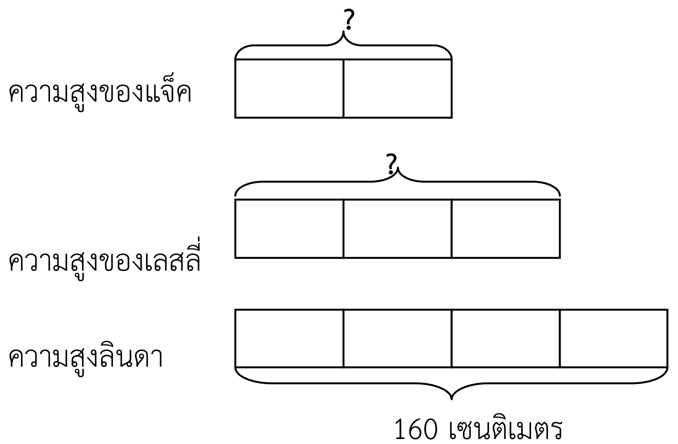
ผ้าพันคอ 2 หน่วย คิดเป็น $2 \times 77 = 154$

เข็มขัด 5 หน่วย คิดเป็น $5 \times 77 = 385$

ภาพประกอบที่ 10 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับอัตราส่วน

ตัวอย่างการใช้แบบจำลองที่เกี่ยวกับการเปรียบเทียบเศษส่วน

ความสูงของแจ็คเป็น $\frac{2}{3}$ ของความสูงเลสลี่ ความสูงของเลสลี่เป็น $\frac{3}{4}$ ของความสูงลินดา ถ้าลินดามีความสูง 160 เซนติเมตร จงหาความสูงของแจ็คและเลสลี่



1 หน่วย คิดเป็น $160 \div 4 = 40$ เซนติเมตร

ความสูงของเลสลี่ 3 หน่วย คิดเป็น $3 \times 40 = 120$ เซนติเมตร

ความสูงของแจ็ค 2 หน่วย คิดเป็น $2 \times 40 = 80$ เซนติเมตร

ภาพประกอบที่ 11 แสดงตัวอย่างแบบจำลองที่เกี่ยวกับการเปรียบเทียบเศษส่วน

ซึ่ง สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2009: 4) ได้สรุปขั้นในการสร้างแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด ไว้ดังนี้

1. อ่านสถานการณ์ปัญหาให้เข้าใจ
2. ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
3. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ โดยระบุว่า คืออะไร หมายความว่าอย่างไร
4. สร้างแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมา
5. ตรวจสอบในประเด็นสำคัญเช่น เงื่อนไข และคำถามที่โจทย์ต้องการ
6. ปรับเปลี่ยนแบบจำลองให้สอดคล้องกับข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา
7. คำนวณและแก้สมการ
8. เขียนคำตอบตามเงื่อนไขของคำถาม

2.5 แนวคิดโมเดลเมธอดกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

การใช้แนวคิดโมเดลเมธอดเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอน โดยเฉพาะการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้มีนักการศึกษาหลายท่านให้ความเห็นเกี่ยวกับการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

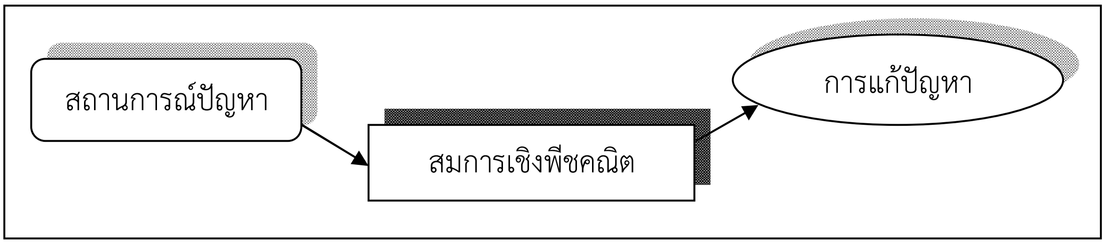
โก เท็ก ฮอง (Kho Tek Hong, 2000: 65) กล่าวเกี่ยวกับ มุมมองของการแก้ปัญหา และการนำเสนอตัวแทนความคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เพื่อแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดโมเดลเมธอดกับการแก้ปัญหาและการคิดเชิงพีชคณิต ดังนี้

ปัญหาคณิตศาสตร์ประกอบด้วยสถานการณ์ปัญหา ข้อมูล (ความสัมพันธ์ในเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณ) และ คำถาม ซึ่งการแก้ปัญหาเป็นการค้นหาคำตอบจากคำถาม นักเรียนต้องการทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา เข้าใจในความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่ทราบค่าและจำนวนที่ไม่ทราบค่าก่อนที่นักเรียนจะหาคำตอบและตอบคำถาม

ภาพประกอบที่ 12

แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานการณ์ปัญหา การทำความเข้าใจปัญหา และ การแก้ปัญหา

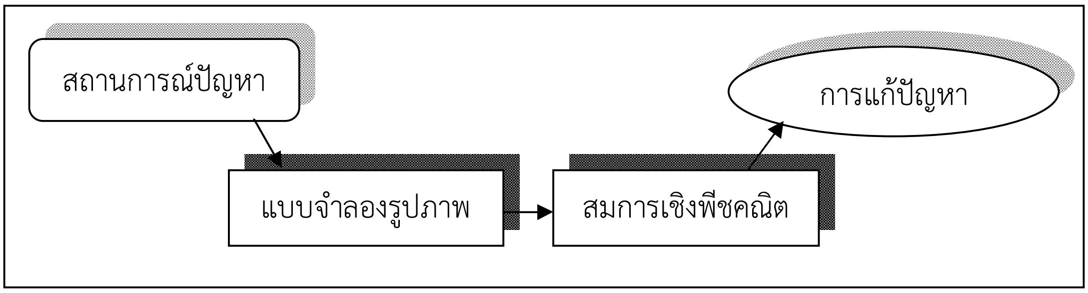
การนำเสนอปัญหาเป็นบทบาทสำคัญในการทำความเข้าใจกระบวนการทำความเข้าใจอย่างลึกซึ้งของปัญหา สำหรับในวิธีการทางพีชคณิต นักเรียนสร้างสมการทางพีชคณิตในการนำเสนอสถานการณ์ปัญหา และเชื่อมโยงจำนวนที่ทราบค่า และจำนวนที่ไม่ทราบค่า จากนั้นดำเนินการแก้สมการเพื่อตอบคำถาม



ภาพประกอบที่ 13

แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานการณ์ปัญหา สมการเชิงพีชคณิต และ การแก้ปัญหา

เมื่อนักเรียนใช้แนวคิดโมเดลเมธอดร่วมกับวิธีการทางพีชคณิต โดยการสร้างแบบจำลองที่มีลักษณะเป็นรูปภาพเพื่อช่วยให้นักเรียนมีวิธีการสร้างสมการเพื่อแก้สถานการณ์ปัญหา



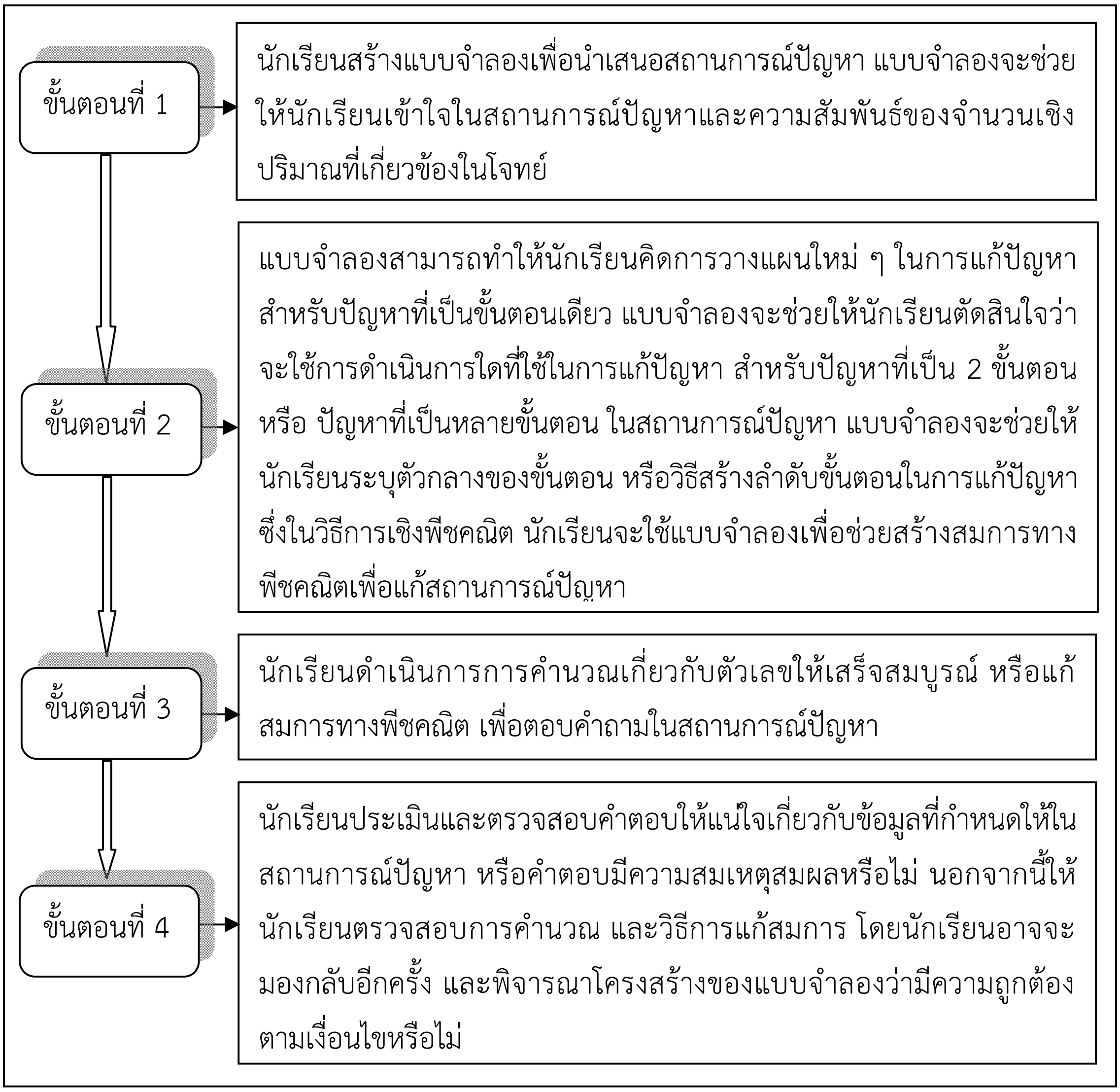
ภาพประกอบที่ 14
แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสถานการณ์ปัญหา แบบจำลองรูปภาพ
สมการเชิงพีชคณิต และ การแก้ปัญหา

ระเบียบวิธีคิดในการแก้ปัญหา

ในทฤษฎีเกี่ยวกับกระบวนการคิดทางการเรียน ระเบียบวิธีคิดเป็นอุปสรรคสำหรับโครงสร้างและกระบวนการคิดทางจิตใจ นักเรียนได้สร้างระเบียบวิธีคิดในกระบวนการของการเรียนและการแก้ปัญหาเพื่อทำความเข้าใจและแก้ปัญหาให้เกิดความสำเร็จ ตัวอย่างเช่น แบบจำลองการแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ (Part – Whole) และ แบบจำลองแบบเปรียบเทียบ (The comparison model) เป็นลักษณะที่เป็นรูปแบบภาพของ "ส่วนย่อย – ส่วนย่อย – ส่วนรวม" (part – part – whole) และ "การเปรียบเทียบข้อมูล" ของกรีนโน ที่เป็นระเบียบวิธีการนำเสนอตัวแทนความคิดโครงสร้างของแนวคิดในสถานการณ์ปัญหา (Greeno, 1978: Nesher, Greeno, & Riley, 1982)

การนำเสนอตัวแทนความคิดด้วยรูปภาพ สามารถทำให้นักเรียนมีการนึกภาพหรือมองเห็นโครงสร้างของปัญหา และ สามารถเข้าใจในความสัมพันธ์เชิงปริมาณที่เกี่ยวข้องในสถานการณ์ปัญหา ความหลากหลายในโครงสร้างของปัญหา สามารถพิจารณาระเบียบความคิดของปัญหา เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด พวกเขาจะมีความตระหนักในการจัดระเบียบทางความคิดสำหรับสถานการณ์ปัญหาที่มีความเหมาะสมในการสร้างแบบจำลอง การเข้าใจในข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา และการวางแผนสำหรับการสร้างสมการตามแนวคิดโมเดลเมธอด วิธีการดังกล่าวนักเรียนสามารถสร้างแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้เอง และจะเป็นการพัฒนาความสามารถและความเชื่อมั่นในการแก้สถานการณ์ปัญหา ยิ่งไปกว่านั้น นักเรียนสามารถประยุกต์การเรียนเกี่ยวกับวิธีการเชิงพีชคณิตด้วยแนวคิดโมเดลเมธอด ในแนวทางนี้ นักเรียนสามารถสร้างระเบียบการคิดสำหรับวิธีการทางพีชคณิตจากระเบียบการคิดของโมเดลเมธอดได้ด้วยตัวเอง

แนวคิดโมเดลเมธอดกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา



ภาพประกอบที่ 15 แสดงแนวคิดโมเดลเมธอดกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา

จาก 4 ขั้นตอน นักเรียนสามารถปฏิบัติและพัฒนาทักษะการรู้คิด โดยนักเรียนสามารถปรับเปลี่ยนวิธีการและพัฒนาให้ดีขึ้นเกี่ยวกับการแก้ปัญหา โดยกระทำซ้ำทั้ง 4 ขั้นตอน ซึ่งสามารถส่งเสริมกระบวนการคิดเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาในลักษณะปัญหาที่คล้ายคลึงกัน และขยายวิธีการเดียวกันไปยังสถานการณ์ปัญหาอื่น ๆ

นอกจากนี้ ยังมีนักการศึกษาได้กล่าวถึงการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

ฟง (Ng Swee Fong, 2004: 43) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็นเครื่องมือสำหรับการแก้ปัญหา ซึ่งครูสามารถพัฒนาแนวคิดการสร้างแบบจำลอง เพื่อให้นักเรียนใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหา ซึ่งใช้

เป็นตัวแทนของนามธรรมมาเป็นลักษณะของรูปธรรมของโจทย์ปัญหา บาร์สี่เหลี่ยมจะใช้เป็นตัวแสดงแทนของทั้งจำนวนที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า

ฟง และ เคอร์รี่ (Ng Swee Fong and Kerry Lee, 2005: 62) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็นการค้นหาคำตอบเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับตัวเลข และปัญหาพีชคณิตอย่างง่าย โมเดลเมธอด เป็นสิ่งที่คล้ายกับการมองหรือพิจารณาข้อมูลที่ได้รับจากโจทย์ปัญหา จากนั้นใช้การมองดังกล่าวสร้างโครงสร้างของโจทย์ปัญหาด้วยบาร์สี่เหลี่ยมเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลตามเงื่อนไขในโจทย์ปัญหา ทำให้สามารถช่วยให้นักเรียนเห็นภาพรวมของโจทย์ปัญหา และง่ายสำหรับการแก้ปัญหาหาตัวไม่ทราบค่าตามที่เราต้องการ

โมเดลเมธอด เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับจำนวนและปัญหาพีชคณิตอย่างง่าย เนื่องจากแบบจำลองของโมเดลเมธอดทำให้มองเห็นลักษณะที่หลากหลาย การวาดแบบจำลองช่วยอธิบายลักษณะของความเป็นนามธรรมที่เจอในปัญหาและพิจารณาออกมาในรูปแบบของจำนวนหรือสมการ แล้วแก้เพื่อหาคำตอบ

โก เท็ก ฮอง ซูเหมย ลิม และ ชู (Kho Tek Hong, Yeo Shu Mei, James Lim, Seah Jiak Choo, 2009: 25) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็นแบบจำลองที่สามารถทำให้เรียนรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของปัญหาที่หลากหลายซึ่งเป็นปัญหาอย่างง่าย แบบจำลองที่สร้างขึ้นจะแสดงการอธิบายโครงสร้างของปัญหาที่เจอ และอธิบายให้เห็นถึงจำนวนที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า ที่มีความสัมพันธ์กันในโจทย์ปัญหา โมเดลเมธอดเป็นเครื่องมือที่ให้อำนาจนักเรียนได้สร้างมุมมองและตัดสินใจในการดำเนินการเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา การวิเคราะห์โครงสร้างของโจทย์ปัญหาอย่างง่ายที่มีแนวคิดหลัก ๆ ทั้งการบวก ลบ คูณ และหาร

โก เท็ก ฮอง (Kho Tek Hong, 2000: 65) กล่าวว่า โมเดลเมธอดมีอิทธิพลต่อการเรียนและการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งที่ช่วยในการพัฒนาให้นักเรียนมีทักษะการคิดและความสามารถในการแก้ปัญหาให้สูงขึ้น เป็นกลวิธีที่มีคุณภาพในการเชื่อมโยงการแก้ปัญหากับวิธีทางพีชคณิต

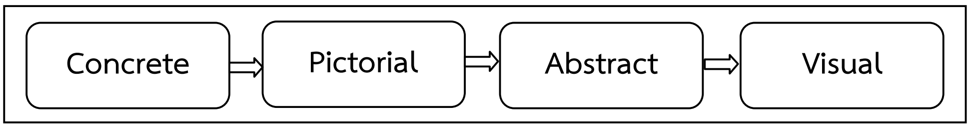
จิตมา คงเมือง (2553: 17–18) กล่าวว่า การวาดแบบจำลองจะแสดงให้เห็นถึงการเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลในโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ จึงเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพสูงที่จะช่วยให้นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ นักเรียนผู้ที่เชื่อมโยงความรู้ทั่วไปไปสู่การวาดแบบจำลองนี้ได้จะสามารถสร้างลำดับขั้นของการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง ซึ่งเป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับครูผู้สอนที่จะนำไปใช้ในการสนับสนุนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพราะเป็นวิธีการที่ใช้เพื่อเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนในการเรียนในระดับที่สูงขึ้นไป

2.6 แนวคิดโมเดลเมธอดกับการคิดเชิงพีชคณิต

ในประเทศสิงคโปร์ นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาต้องการใช้วิธีการทางพีชคณิตในการแก้ปัญหาให้สำเร็จ ซึ่งวิธีการทางพีชคณิตเป็นสิ่งที่ไม่อาจหลีกเลี่ยงได้ในการสร้างวิธีการและกระบวนการแก้ปัญหา และมักเป็นอุปสรรค์สำคัญสำหรับนักเรียนในการสร้างสมการทางพีชคณิตเพื่อแสดงแทนเกี่ยวกับข้อมูลจากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ (Stacey and Macgregor, 2000) นักเรียนเหล่านี้ยากที่จะแก้สมการได้ เนื่องจาก ขาดทักษะด้านพีชคณิตที่มีความเหมาะสม ในขณะที่นักเรียนที่คุ้นเคยกับการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการแก้สถานการณ์ปัญหาและใช้แนวคิดโมเดลเมธอดอย่างต่อเนื่องถ้ายังไม่มีความสามารถในวิธีการทางพีชคณิตมากพอ โดยแท้จริงแล้วแนวคิดโมเดลเมธอดสามารถประยุกต์ใช้ในวิธีการทางพีชคณิตเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับปัญหาที่เป็นพีชคณิตได้หลากหลาย (Kho, 1978, 2005, 2007; Fong, 1994; Ng, 2001: Cheong, 2002; Beckmann, 2004)

โก เท็ก ฮอง (Kho, 2000: 68 – 69) กล่าวว่า การใช้แบบจำลองการแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ และแบบจำลองการเปรียบเทียบข้อมูลตามแนวคิดโมเดลเมธอดด้วยการใช้ภาพนำเสนอตัวแทนความคิดทำให้นักเรียนเข้าใจได้ง่ายขึ้นเกี่ยวกับแนวคิดเชิงนามธรรมสำหรับการดำเนินการทั้งการบวก ลบ คูณ และหาร เกี่ยวกับเศษส่วน อัตราส่วน และร้อยละ แนวคิดโมเดลเมธอดช่วยการเรียนของนักเรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การนึกภาพในใจของผู้เรียน การพัฒนาความสามารถและความเชื่อมั่นในการแก้ปัญหาที่เป็นความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา นักเรียนใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการแก้สถานการณ์ปัญหา โดยวาดแบบจำลองเพราะการนึกภาพในใจเพื่อนำเสนอตัวแทนความคิดของจำนวนทั้งจำนวนที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า และใช้การสร้างความสัมพันธ์ข้อมูลที่ให้มาในโจทย์ปัญหา แบบจำลองจะเพิ่มทักษะการคิดและทักษะการแก้ปัญหา นักเรียนสามารถแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยสามารถใช้แบบจำลองช่วยในการสื่อสารและเชื่อมโยงความคิดและแก้ปัญหาของแต่ละคนและเป็นการทำให้เกิดความคล่องแคล่ว และช่วยเหลือกันในการเรียนเป็นทีม

การวาดแบบจำลองและการสร้างสมการทางพีชคณิตในการแก้ปัญหาของนักเรียน สามารถทำความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต เช่น ให้ x แทนด้วยจำนวนที่ไม่ทราบค่า และสร้างสมการเพื่อค้นหาค่าของ x แบบจำลองของแนวคิดโมเดลเมธอดสามารถทำให้นักเรียนวิเคราะห์ข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ และเข้าใจแนวคิดการสร้างสมการทางพีชคณิตเพื่อแก้ปัญหาได้ ถือว่าเป็นการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพอย่างยิ่งกับนักเรียนเพื่อแก้สถานการณ์ปัญหา รวมถึงลักษณะปัญหาที่มีความท้าทายด้วย



ภาพประกอบที่ 16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดโมเดลเมธอดกับการคิดเชิงพีชคณิต

แบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด เป็นการเริ่มต้นของวิธีการทางพีชคณิต ในประเทศสิงคโปร์ นักเรียนใช้แนวคิดโมเดลเมธอดก่อนที่จะเรียนการแก้สมการทางพีชคณิต นักเรียนใช้ประสบการณ์ในการใช้แผ่นสี่เหลี่ยมเพื่อการนำเสนอหรือแสดงแทนจำนวนในโมเดลเมธอดสามารถทำให้นักเรียนสามารถใช้ตัวอักษรหรือสัญลักษณ์ในการแสดงจำนวนได้ (Kho, 1987)

การใช้แบบจำลองในการทำงานจะใช้แทนที่ตัวเลขเชิงคณิตศาสตร์เพื่อสร้างสมการเชิงพีชคณิตตามแบบจำลองโมเดลเมธอดเพื่อแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ แนวทางนี้เป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนฝึกทำความเข้าใจในโครงสร้างของโจทย์ปัญหาและตีความในโจทย์ปัญหาเพื่อสร้างสมการทางพีชคณิต ทั้งนี้นักเรียนต้องมีความสนใจและมุ่งมั่นตั้งใจในการเรียนด้วย ซึ่งผลที่เกิดขึ้นจะเป็นการยกระดับการเรียนเกี่ยวกับพื้นฐานทางพีชคณิตให้ดีขึ้น ซึ่งถือเป็นกุญแจสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จ

2.7 ความสำคัญของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยแนวคิดโมเดลเมธอด

นักการศึกษาได้สรุปความสำคัญของการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการจัดการเรียนรู้ ดังนี้

โก เท็ก ฮอง (Kho, 1987) กล่าวว่า แนวคิดโมเดลเมธอดเป็นการแปลความหมายโจทย์ปัญหาโดยการนึกภาพในใจ ให้เป็นตัวเลขทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ปัญหาหรือปัญหาเกี่ยวกับพีชคณิต เป็นการสร้างพื้นฐานให้เกิดความเข้าใจชัดเจนในโครงสร้างของปัญหา

ลิซ่า (Lisa, 2010: 158) กล่าวว่า โมเดลเมธอดช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างง่าย ที่หลายหลาย ดังนี้

1. การค้นหาส่วนรวม การเพิ่มส่วนย่อย การค้นหาส่วนที่หายไป การหาส่วนใหญ่เมื่อทราบส่วนย่อย

2. เพื่อหาจำนวนที่มากกว่า โดยเพิ่มจำนวนที่น้อยกว่าเพื่อหาความต่าง โดยลบจำนวนที่น้อยกว่าจากจำนวนที่มากกว่า เพื่อหาจำนวนที่น้อยกว่าโดยลบความต่างจากจำนวนที่มากกว่า

3. เพื่อหาส่วนรวม จากการคูณส่วนย่อยด้วยจำนวนที่เท่ากันเพื่อหาส่วนย่อย จากการหารส่วนรวมด้วยอัตราส่วนทางคณิตศาสตร์

นอกจากนี้ ลิซ่า ได้กล่าวอีกว่า การสร้างแบบจำลองของนักเรียนทำให้การเรียนและการทำความเข้าใจผ่านการแก้ปัญหา เกิดความท้าทายในการแก้โจทย์ปัญหาที่เป็นปัญหาหลายขั้นตอน แบบจำลองสามารถใช้ได้กับทุกระดับไม่ว่าจะเป็นระดับประถมศึกษา หรือระดับมัธยมศึกษา ด้วยรูปแบบการพัฒนาที่มีความเหมาะสมของ กลวิธี “concrete-to-pictorial-to-abstract” ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนและครูสามารถทำความเข้าในในวิชาคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็น การดำเนินการ เศษส่วน

ร้อยละ อัตราส่วน และพีชคณิต

สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2009: 3) กล่าวว่า แบบจำลองของแนวคิดโมเดลเมธอดเป็นการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและทักษะการให้เหตุผลทางพีชคณิต ดังนี้

1. การสร้างแบบจำลองแผ่นสี่เหลี่ยมเป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบของแต่ละสถานการณ์ปัญหา

2. ขณะสร้างแบบจำลอง การให้ข้อมูลเป็นการระบุจำนวนไม่ทราบค่าไปพร้อม ๆ กัน ซึ่งจะเป็นแนวคิดสำคัญในการคิดเชิงพีชคณิต

3. การวาดแบบจำลองเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนเห็นมุมมองต่อไปในการค้นหาแนวคิดและความสัมพันธ์ร่วมกันในลักษณะที่หลากหลายของปัญหาคณิตศาสตร์

แฟรงค์ ชาฟเฟอร์ (Frank Schaffer, 2009: 4 – 5) กล่าวว่า ทักษะ และกลวิธีในการคิดเป็นสิ่งสำคัญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การใช้โมเดลเมธอดเป็นการประยุกต์การใช้ทักษะจากการที่นักเรียนคิดผ่านสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า แนวคิดโมเดลเมธอด มีความสำคัญในการจัดการเรียนการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ แบบจำลองของแนวคิดโมเดลเมธอดช่วยในการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและทักษะการให้เหตุผลทางพีชคณิต เป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบของแต่ละสถานการณ์ปัญหา เป็นแนวคิดสำคัญในการคิดเชิงพีชคณิต และส่งเสริมให้นักเรียนเห็นมุมมองต่อไปในการค้นหาแนวคิดและความสัมพันธ์ร่วมกันในลักษณะที่หลากหลายของปัญหาคณิตศาสตร์

3. การคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking)

3.1 ความหมายของพีชคณิต

พีชคณิตถือเป็นเนื้อหาหนึ่งที่มีอยู่ในทุก ๆ เนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ มีนักการศึกษาหลายท่านให้ความหมายของพีชคณิตดังนี้

สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM. 2000: 37) กล่าวเกี่ยวกับพีชคณิตว่า คนส่วนใหญ่จะเข้าใจว่าพีชคณิตเป็นวิชาที่ว่าด้วยการแก้สมการที่ซับซ้อนหรือการดำเนินการเกี่ยวกับนิพจน์ และจะต้องเกี่ยวข้องกับเรื่องของตัวแปร ซึ่งส่วนดังกล่าวเป็นเพียงส่วนปลายของพีชคณิตที่ต้องผ่านขั้นตอนอื่นมาก่อนไม่ใช่ทั้งหมด พีชคณิตจึงไม่ใช่เป็นเพียงวิชาที่ว่าด้วยศาสตร์แห่งการแก้สมการและการดำเนินการเกี่ยวกับตัวแปรเพียงส่วนเดียวเท่านั้น

สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989) กล่าวว่า ลักษณะของพีชคณิตเป็นการแสดงแนวคิดที่เกี่ยวกับ ตัวแปร สมการ การนำเสนอสถานการณ์ปัญหา เพื่อแสดงแบบรูป แสดงตาราง และสร้างสมการ เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของสื่อสัญลักษณ์

ยูซิสกินส์ (Usiskin, 1999: 5) ศาสตราจารย์ทางด้านการศึกษาแห่งมหาวิทยาลัยชิคาโก สหรัฐอเมริกา เคยเป็นหนึ่งในคณะผู้บริหารของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM) เป็นผู้ที่สนใจและมีผลงานวิจัยที่ได้รับการยอมรับอย่างกว้างขวางเกี่ยวกับสาขาพีชคณิตกล่าวว่า “ไม่ใช่เรื่องง่ายที่จะให้คำนิยามของพีชคณิต” แต่อย่างไรก็ตามนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายคนก็ยังพยายามที่จะให้คำจำกัดความของพีชคณิตตามมุมมองของตนและขอบเขตที่ตนเองสนใจศึกษา

คริสท์มัสและเฟย์ (Chirstmas; & Fey. 1999: 5-13) ให้มุมมองว่าพีชคณิตควรประกอบด้วยสองส่วนคือ ส่วนของเนื้อหา ได้แก่ เรื่องตัวแปร ฟังก์ชัน กราฟ สมการและอสมการ และส่วนของสมบัติ ได้แก่ สมบัติของจำนวนจริงและสับเซตของจำนวนจริง ทั้งสองส่วนนี้ประกอบกันจะเกิดเป็นระบบสัญลักษณ์ที่สามารถนำไปใช้อธิบายและสรุปความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ได้

กรีเนสและฟินเดลล์ (Greenes; & Findell. 1999: 127) มีมุมมองว่าแนวคิดหลักทางพีชคณิตควรประกอบด้วย การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย การนำเสนอ สมการ ตัวแปร ฟังก์ชัน

เฮอเบิร์ตและบราวน์ (Herbert; & Brown. 1997) มองพีชคณิตในแง่ของการใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการหาคำตอบ เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อคาดเดาหรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น

ทอล และโทเชียเกียร่า (Tall, 1991; Toshiakaira, 2003) จากงานวิจัยหลาย ๆ งานวิจัยแสดงให้เห็นว่าด้วยลักษณะของพีชคณิตที่เป็นลักษณะของตัวแปรฟังก์ชัน หรือสัญลักษณ์คณิตศาสตร์จะเป็นอุปสรรคต่อการเรียนของนักเรียนและการจัดการเรียนรู้ของครูเป็นอย่างมาก นั่นคือ นักเรียนไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อสร้างสมการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ ยิ่งเป็นโจทย์ปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนด้วยแล้ว

ไค (Cai, 2004: 1) พีชคณิตถือเป็นวิชาที่มีความสำคัญเปรียบเสมือนกระดูกสันหลังของวิชาคณิตศาสตร์ และได้รับการยอมรับว่าเป็นประตูสู่ความสำเร็จของการศึกษาคณิตศาสตร์ในทุก ๆ สาขา

หลิว (Lew. 2004: 88-95) มีทัศนะว่าพีชคณิตคือวิชาที่เกี่ยวข้องกับนิพจน์ สัญลักษณ์ และการขยายจำนวนที่นอกเหนือไปจากจำนวนนับ เพื่อหาคำตอบของสมการ เพื่อวิเคราะห์ความสัมพันธ์และเพื่อกำหนดโครงสร้างของระบบการนำเสนอซึ่งประกอบด้วยนิพจน์และความสัมพันธ์

วิษณุ นภาพันธ์ (2551: 22 – 24) สรุปเกี่ยวกับขอบเขตความหมายของวิชาพีชคณิตที่สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ลักษณะ ได้แก่ ประการแรก มองว่าพีชคณิตคือวิชาที่เกี่ยวข้องกับลักษณะที่เป็นนามธรรมหรือกรณีทั่วไปของเลขคณิต เช่น เรื่องสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนจริง ประการที่สอง มองว่าพีชคณิตคือภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับเรื่องตัวแปร นิพจน์ และโครงสร้างของการใช้สัญลักษณ์ ประการที่สาม มองว่าพีชคณิตคือวิชาที่ว่าด้วยเรื่องฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการค้นหาแบบรูปของสิ่งต่าง ๆ การนำเสนอความคิดในรูปของสมการ ตาราง และกราฟและการแก้สมการเพื่อหาคำอธิบายของสถานการณ์ เป็นต้น

นอกจากนี้มีนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายท่านที่พยายามให้ความหมายของพีชคณิตในลักษณะของภาษา (Usiskin. 1999; Kriegler. 2003) โดยมีมุมมองว่าพีชคณิตคือภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ เป็นภาษาแทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต และเป็นภาษาที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร กรณีทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์ เป็นต้น

สรุปได้ว่า พีชคณิตคือวิชาที่เกี่ยวข้องกับลักษณะที่เป็นนามธรรม ถือเป็นภาษาของวิชาคณิตศาสตร์ ที่เป็นตัวแปร นิพจน์ และโครงสร้างของการใช้สัญลักษณ์ ฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา และมีการนำเสนอความคิดในรูปของสมการ ตาราง กราฟ และการแก้สมการเพื่อหาคำตอบในการอธิบายของสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ

3.2 การคิด

การคิด เป็นลักษณะเฉพาะของมนุษย์ซึ่งเป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นในสมองของบุคคล (Cognitive Process) มีแนวทางอันแน่วแน่ โดยอาศัยข้อมูล ประสบการณ์จากสิ่งแวดล้อมต่าง ๆ ที่ผ่านเข้ามาทางอวัยวะรับสัมผัส การรู้สึก การรับรู้ และระบบความจำ มาสัมพันธ์กับสิ่งเร้าและสภาพแวดล้อม และนำมาวิเคราะห์ เปรียบเทียบ สังเคราะห์ และประเมินอย่างมีระบบ มีเหตุผล เพื่อให้ได้แนวทางในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม หรือสร้างสรรค์สิ่งใหม่ การแก้ปัญหานั้นอาศัยนามธรรม และสัญลักษณ์เป็นส่วนใหญ่ การคิดมักจะจบลงด้วยการสรุปผลในขั้นสุดท้าย (กันยา สุวรรณแสง. 2532; สมสุข โถวเจริญ. 2541: 15; กรมวิชาการ. 2542: 3; Berger. 1984: 306 อ้างถึงใน รุ่งทิวา นาบำรุง. 2550: 16 – 17)

รัสเซล (Russell. 1956: 3-28) กล่าวว่าการคิดเป็นกระบวนการ การคิดอาจจะเริ่มจากการตั้งต้นที่บางสิ่งบางอย่างผ่านไปสู่แบบรูปของความสัมพันธ์ และไปสู่จุดมุ่งหมายหรือข้อสรุป การเรียนรู้จึงส่งผลต่อประสิทธิภาพในการคิดแบบต่าง ๆ รัสเซลได้จำแนกการคิดในสถานการณ์ต่างๆ ออกเป็น 6 ประเภท คือ การคิดแบบการหยั่งรู้ (Perceptual Thinking) การคิดแบบเชื่อมโยง (Associative

Thinking) การคิดแบบอุปนัย-นิรนัย (Inductive-Deductive Thinking) ซึ่งนำไปสู่การสร้างมโนทัศน์ การคิดแบบสร้างสรรค์หรือจินตนาการ (Creative or Imaginative Thinking) คิดแบบวิจารณญาณ (Critical Thinking) และ การคิดแก้ปัญหา (Problem Solving)

กู๊ด (Good, 1959: 570) ให้ความหมายของการคิดไว้ 4 นัย สรุปได้ดังนี้

1. การคิด หมายถึง กระแสของการคิดที่ยังไม่ได้รับการจัดระเบียบหรือความคิดที่ไม่ได้ถูกกำหนดกฎเกณฑ์ ข้อบังคับต่าง ๆ หรือเป็นกระแสของการจินตนาการความรู้ความซาบซึ้ง ความประทับใจ ความทรงจำ และความหวัง

2. การคิด เป็นการคาดคะเนหรือเดาโดยไม่มีขอบเขตตั้งแต่ระดับขั้นพื้นฐานรวมไปถึงระดับที่สูงกว่า และปรากฏชัดในความพยายามที่จะลงความเห็น

3. การคิด หมายถึง การคิดพิจารณาไตร่ตรองหรือการทำสมาธิ โดยปราศจากความมุ่งมั่นที่จะควบคุมธรรมชาติหรือประสบการณ์ใด ๆ

4. การคิด คือ การมองบางสิ่งบางอย่างด้วยการคิดพิจารณาไตร่ตรองหรือมีความรอบคอบ เพื่อให้บรรลุถึงการตั้งมั่นในความเชื่อและการควบคุมการกระทำ

เพียเจต์ (Piaget, 1977: 21) ได้กล่าวถึงการคิดของบุคคลโดยสรุปได้ว่า เป็นกระบวนการใน 2 ลักษณะ คือ เป็นกระบวนการดูดซึมที่เกิดจากการพบหรือมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมแล้วดูดซึมภาพหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ เข้าไว้ในความคิดตน และเป็นกระบวนการปรับเข้าโครงสร้างโดยการจัดสิ่งเร้าใหม่ให้เข้ากับความรู้หรือความคิดเดิม บุคคลจะใช้กระบวนการนี้ทั้ง 2 ลักษณะร่วมกันหรือสลับกันเพื่อปรับการคิดของตนให้เข้ากับสิ่งเร้ามากที่สุด ผลของการปรับเปลี่ยนดังกล่าวจะช่วยพัฒนาวิธีการคิดของบุคคลจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งที่สูงกว่า

สุภนันท์ เสถียรศรี (2536: 14) กล่าวถึงการคิดโดยสรุปได้ว่า ความคิดมีลักษณะเป็นทั้งกระบวนการและผลผลิต ซึ่งมีลักษณะที่ต่อเนื่องกันแยกออกจากกันไม่ได้โดยเด็ดขาดแต่อาจนำมาอธิบายต่างกัน คือในกรณีที่กล่าวถึงกระบวนการก็จะใช้วิธีการคิดหรือทักษะการคิดมาอธิบาย ส่วนในกรณีของผลผลิตก็จะกล่าวถึงคุณภาพความคิด ซึ่งเป็นผลที่เกิดจากการใช้วิธีการคิดที่ดี เพื่อให้ได้ผลผลิตของความคิดที่มีคุณภาพ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทั้งในเชิงวิชาการและไม่ใช่วิชาการตลอดจนสร้างคุณลักษณะประจำตัวให้เป็นไปตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตร

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (2548: 9) ให้ความหมายของความคิด สรุปได้ว่า เป็นกระบวนการทำงานของสมองที่เกิดขึ้นภายใน ขึ้นอยู่กับความสามารถของสมองแต่ละซีกของมนุษย์ ซึ่งเป็นความสามารถเฉพาะบุคคล

ทิศนา แขมมณี นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์ และ ศรินธร วิทยะสิรินันท์ (2547: 4-13) ได้กล่าวถึงทักษะการคิดว่าเป็นคำที่แสดงพฤติกรรมการคิดที่มีลักษณะเป็นรูปธรรมที่ช่วยให้มองเห็นพฤติกรรม/การกระทำที่ชัดเจนของการคิดนั้น ๆ

อาจสรุปถึงการคิดได้ว่า เป็นกระบวนการของกิจกรรมทางสมอง ที่มีกระบวนการอันหลากหลายและซับซ้อน ซึ่งเป็นความสามารถเฉพาะตัวของแต่ละบุคคลในการใช้กระบวนการคิดภายในนำไปสู่พฤติกรรมการคิดที่สื่อออกมาเป็นรูปธรรม เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิต โดยอาศัยประสบการณ์ ทักษะ และความรู้ใหม่ที่ได้รับมาช่วยในการสรุปและอธิบายผล

ลำดับขั้นการเรียนรู้หรือลำดับขั้นการคิด

การคิดเป็นสิ่งสำคัญ ซึ่งบุคคลแต่ละคนย่อมมีระดับความคิด หรือลำดับขั้นของการคิดที่แตกต่างกัน โดยมีนักการศึกษาได้จัดลำดับขั้นของการคิดไว้ดังนี้

บลูม ได้จัดลำดับขั้นการเรียนรู้หรือลำดับขั้นการคิด (Bloom’s Taxonomy) เป็น 6 ขั้น คือ ความรู้ – ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมินค่า (Bloom. 1961; Armstrong. 1998: 117-119; Mazano. 2001: 5-9) มาร์ซาโนได้จัดลำดับการเรียนรู้คล้ายกับของบลูม โดยให้ชื่อว่า “New Taxonomy of Educational Objectives”

New Taxonomy ได้อธิบายถึงตัวแปรเกี่ยวกับกระบวนการภายในสมอง โดยกล่าวถึงระบบภายในสมอง 3 ระบบ คือ ระบบของตนเอง ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง และ ระบบทางด้านการรู้คิด ซึ่งระบบทั้งสามจะใช้ในการเก็บสะสมความรู้ที่อยู่ในองค์ประกอบที่สี่ของแบบจำลองพฤติกรรม (Mazano. 2001: 10-12) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

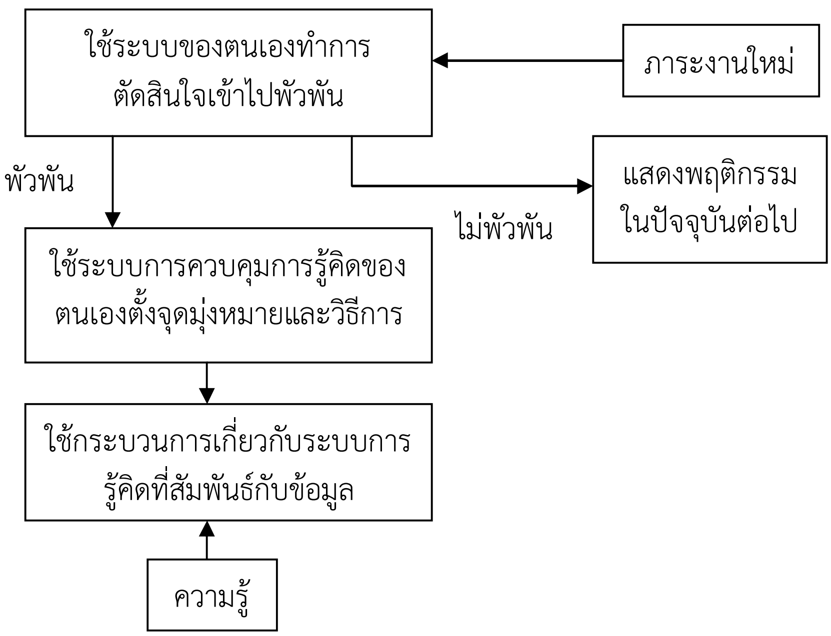
ระบบของตนเอง (The Self-System) เป็นตัวตัดสินเข้าสู่ภาระงานใหม่ ถ้าภาระงานมีความสำคัญ หรือมีโอกาสที่จะประสบความสำเร็จสูง หรือมีความรู้สึกทางบวกที่จะเข้าไปมีส่วนร่วมกับภาระงาน บุคคลนั้นก็จะเข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้น แต่ถ้าภาระงานชิ้นใหม่ถูกประเมินในลักษณะตรงกันข้าม แรงกระตุ้นที่จะเข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้นก็จะต่ำ

ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง (The Meta-Cognitive System) เป็นการรู้ถึงความคิดของตนเองในการกระทำอะไรอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือเป็นการประเมินการคิดของตนเองและใช้ความรู้นั้นในการควบคุมหรือปรับการกระทำของตนเอง ซึ่งการคิดในลักษณะนี้จะครอบคลุมถึงการวางแผน การควบคุมกำกับการกระทำของตนเอง การตรวจสอบความก้าวหน้าและการประเมินผล บุคคลที่ตระหนักถึงการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะสามารถปรับปรุงกระบวนการคิดของตนให้ดีขึ้นเรื่อยๆ จึงส่งผลต่อความสามารถทางการคิดของบุคคลนั้นในภาพรวม ถ้าภาระงานใหม่ถูกเลือก ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะถูกนำเข้าไปเกี่ยวข้อง คนที่เริ่มต้นภาระงานโดยใช้ระบบการควบคุม

การรู้คิดของตนเองจะตั้งจุดมุ่งหมายที่สัมพันธ์กับภาระงานใหม่ ดังนั้นบุคคลนั้นจึงมีโอกาสที่จะประสบความสำเร็จตามจุดมุ่งหมายที่กำหนด ซึ่งระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจะมีปฏิสัมพันธ์ต่อเนื่องกับระบบทางด้านการรู้คิด

ระบบการรู้คิด (The Cognitive System) เป็นกระบวนการคิดที่ต้องดำเนินไปเป็นลำดับขั้นตอน ที่จะช่วยให้การคิดนั้นประสบผลสำเร็จตามจุดมุ่งหมายของการคิดนั้น ๆ ซึ่งในแต่ละลำดับขั้นตอนอาจต้องอาศัยทักษะการคิดหรือลักษณะการคิดจำนวนมาก และเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ เช่น ทำการอ้างอิง เปรียบเทียบ จำแนกประเภท และประมาณ

สำหรับความรู้ (Knowledge) จะมีความสัมพันธ์กับภาระงานใหม่ การที่คนเราจะประสบความสำเร็จอย่างสูงขึ้นอยู่กับปริมาณความรู้ที่แต่ละคนมีเกี่ยวกับภาระงานใหม่นั้น โดยความรู้จะประกอบไปด้วยตัวแปร 3 ด้าน คือ ข้อมูล กระบวนการทางสมอง และกระบวนการทางกายภาพ แบบจำลองพฤติกรรมใน New Taxonomy ของมาร์ซาโน แสดงดังภาพประกอบที่ 17



ที่มา: Marzano, Robert J. (2001). Designing a New Taxonomy of Educational Objectives. p.11.

ภาพประกอบที่ 17 แบบจำลองพฤติกรรมตามแนวคิดของมาร์ซาโน

นอกจากนี้มาร์ซาโนยังได้จัดแบ่งระบบภายในสมองทั้ง 3 ระบบ ตามกระบวนการภายในสมองออกเป็น 6 ระดับ ดังภาพประกอบที่ 18

ระดับที่ 6: ระบบของตนเอง (Self – System)
ระดับที่ 5: ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง (Meta – Cognitive System)
ระดับที่ 4: การใช้ประโยชน์จากความรู้ (Knowledge Utilization)
ระดับที่ 3: การคิดวิเคราะห์ (Analysis)
ระดับที่ 2: ความเข้าใจ (Comprehension)
ระดับที่ 1: การตรวจสอบแก้ไข (Retrieval)
ระบบการรู้คิด (Cognitive System)

ภาพประกอบที่ 18 แสดงกระบวนการภายในสมอง 6 ระดับของ New Taxonomy

ที่มา: Marzano, Robert J. (2001). Designing a New Taxonomy of Educational Objectives. p.30.

สองระดับแรก คือระดับที่ 6 และ ระดับที่ 5 เป็นการจัดการและการกระทำทั่วไปของเด็กที่อยู่ภายนอกระบบการรู้คิด ส่วนระดับที่ 4 ลงมาถึงระดับที่ 1 จะอยู่ภายในระบบการรู้คิด ซึ่งเป็นการอธิบายถึงระดับของความคิดที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระดับที่ 6: ระบบของตนเอง เป็นตัวบงการแรงจูงใจและความสนใจของคน ประกอบด้วยระบบที่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันของเจตคติ ความเชื่อ และอารมณ์ ซึ่งปฏิสัมพันธ์ขององค์ประกอบเหล่านี้เป็นตัวกำหนดแรงจูงใจและความสนใจ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ระบบของตนเองจะเป็นตัวกำหนดว่าคนเราจะเข้าไปพัวพันกับภาระงานหรือไม่เข้าไปพัวพันกับภาระงานนั้น ถ้าเรามีความสนใจในภาระงานใด ตัวแปรที่เกี่ยวกับความคิด (ได้แก่ ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองระบบการรู้คิด และตัวแปรด้านความรู้) จะถูกนำมาใช้ ระบบของตนเองประกอบด้วย 1) กาตรวจสอบความสำคัญ (Examining Importance) 2) การตรวจสอบประสิทธิภาพ (Examining Efficacy) 3) การตรวจสอบการตอบสนองทางอารมณ์(Examining Emotional Response) และ4) การตรวจสอบแรงจูงใจทั้งหมด (Examining Overall Motivation)

ระดับที่ 5: ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเอง เป็นการรับรู้เกี่ยวกับจุดมุ่งหมายในการเรียนรู้ของเด็ก เป็นความคิดในการรวบรวมกระบวนการคิดของเด็กเพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายสามารถสะท้อนและปรับความคิดของตัวเอง ระบบการควบคุมการรู้คิดของตนเองจำแนกออกเป็น4 ประเภท คือ 1) การกำหนดเป้าหมายเฉพาะ (Goal Specification) 2) การควบคุมกระบวนการ (Process Monitoring) 3) การควบคุมความชัดเจน (Monitoring Clarity) และ 4) การควบคุมความถูกต้อง (Monitoring Accuracy)

ระดับที่ 4: การใช้ประโยชน์จากความรู้ เป็นกระบวนการที่แต่ละคนจะใช้เพื่อทำให้งานของตนประสบผลสำเร็จ ในระดับนี้จะจำแนกการใช้ประโยชน์จากความรู้ออกเป็น 4 ประเภท คือ 1) การตัดสินใจ (Decision Making) 2) การแก้ปัญหา (Problem Solving) 3) การค้นพบที่ได้มาจากการ

ทดลอง (Experimental Inquiry) และ 4) การสืบเสาะหาความรู้ (Investigation)

ระดับที่ 3: การวิเคราะห์ ในกระบวนการวิเคราะห์จะประกอบด้วยการดำเนินการทางการคิด 5 ประเภทคือ 1) การจับคู่ (Matching) เป็นการจำแนกความเหมือนและความแตกต่างของสิ่งต่าง ๆ 2) การจัดหมวดหมู่ (Classification) เป็นการจัดกลุ่มของข้อมูลตามความเหมาะสม 3) การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน (Error Analysis) 4) การสร้างกรณีทั่วไป (Generalization) เป็นการอนุมานสิ่งที่เคยเรียนแล้วไปสู่สถานการณ์และสิ่งแวดล้อมใหม่และ 5) รายละเอียด(Specification) เป็นการสร้างข้อมูลที่อาศัยการทำนาย ซึ่งการดำเนินการทางการคิดเหล่านี้จะผุดขึ้นมาอย่างเป็นธรรมชาติโดยปราศจากการคิดอย่างมีจิตสำนึก (Conscious Thought)

ระดับที่ 2: ความเข้าใจ ประกอบด้วยกระบวนการที่สัมพันธ์กันสองกระบวนการคือการสังเคราะห์และการนำเสนอตัวแทนความคิด การสังเคราะห์เป็นกระบวนการเกี่ยวกับการกลั่นความรู้ที่ประกอบด้วย การนำออก (Deletion) การสร้างกรณีทั่วไป และ การสร้างองค์ความรู้ใหม่ (Construction) ส่วนการนำเสนอตัวแทนความคิดเป็นกระบวนการแห่งความเข้าใจของกาสร้างสรรค์สัญลักษณ์ที่มีความต่อเนื่องกันในความรู้ซึ่งให้กำเนิดเส้นทางที่เป็นกระบวนการของการสังเคราะห์ การนำเสนอตัวแทนความคิดเป็นการแปลงความรู้ไปสู่สัญลักษณ์ มโนภาพ (ที่ไม่ใช่ภาษา) บางอย่าง การนำเสนอตัวแทนความคิดทางสัญลักษณ์ที่เป็นที่รู้จักกันดีในชั้นเรียนตั้งแต่ระดับอนุบาลจนถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 คือ ผังความคิด (Graphic Organizers) ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงภาษาและสัญลักษณ์เข้าด้วยกัน

ระดับที่ 1: การตรวจสอบแก้ไข เป็นการกระตุ้นและถ่ายโอนความรู้จากความจำถาวร (Permanent Memory) ไปสู่ความจำในการลงมือทำ (Working Memory) การตรวจสอบแก้ไขเป็นกระบวนการที่อยู่ในระบบการรู้คิดและเป็นกระบวนการซึ่งมีมาแต่กำเนิด กระบวนการตามสภาพจริงที่จัดอยู่ในการตรวจสอบแก้ไขนี้ค่อนข้างจะแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับชนิดของความรู้ที่ได้รับการตรวจสอบแก้ไข ถ้ากล่าวตามนัยของความรู้ที่เป็นข้อมูล การตรวจสอบแก้ไขจะรวมถึงการถ่ายโอนอย่างง่ายเกี่ยวกับรายละเอียดหรือแนวคิดที่รวบรวมมาจากความจำถาวรไปสู่ความจำในการลงมือทำ ซึ่งตาม New Taxonomy การตรวจสอบแก้ไขเทียบได้กับการระลึก (Recall) เช่นเมื่อนักเรียนแก้ไขข้อมูลที่ขัดแย้งกันจากความจำถาวรและสะสมมันไว้ในความจำในการลงมือทำ ข้อมูลนี้จะรวมถึงการระลึกถึงรายละเอียดจากตัวแปรข้อมูลด้วย นั่นคือ เมื่อข้อมูลได้รับการแก้ไขจากความจำถาวร มันจะบรรจุองค์ประกอบที่ไม่ชัดเจนในประสบการณ์เริ่มต้นของนักเรียนเกี่ยวกับข้อมูล เพราะว่าโดยธรรมชาติคนเราจะวางแผนอย่างละเอียดกับข้อมูลเริ่มต้นที่นำไปสู่ความจำในการลงมือทำ

แบบการรู้คิด

แบบการรู้คิด (Cognitive Styles) เปรียบประดุจวัตถุดิบในการแก้ปัญหา เพราะปัญหาทุกอย่างจะต้องอาศัยประสบการณ์และวิธีการเฉพาะเป็นอย่าง ๆ ไป และแบบการรู้คิดของเด็กจะเปลี่ยนไปเมื่ออายุมากขึ้น นอกจากนี้ ซุคแมนและสปอลดิง (Suchman, J R.; & Spaulding, R.1970: 1-5) ยังเชื่อว่า แบบการรู้คิดเกี่ยวข้องกับกิจกรรมทางสมองหลายประการ โดยเฉพาะเขาเน้นให้เห็นว่าการรับรู้ (Perception) เป็นสื่อสำคัญที่ทำให้คนคิดไปต่าง ๆ กัน ขึ้นอยู่กับประสบการณ์หรือมโนทัศน์ของบุคคลนั้น เช่นเดียวกับที่เคแกน และมอสส์ ซีเกลและฮูพเพอร์ (Kagan; & Moss. 1962; Sigel; & Hooper. 1968: 172) ได้แบ่งแบบการรู้คิดออกเป็น 3 แบบ คือ

1. การคิดแบบวิเคราะห์เชิงพรรณนา (Descriptive-Analytical Styles) คือ การคิดที่จัดสิ่งของเข้าเป็นพวกเดียวกัน โดยพิจารณาความคล้ายคลึงของส่วนต่างๆ ดังตัวอย่าง การให้เหตุผลในการจับคู่ภาพ 2 ภาพ จากภาพ 3 ภาพที่กำหนดให้ ซึ่งมีภาพคน ไม้บรรทัด นาฬิกา จะเลือกจับคู่นาฬิกากับไม้บรรทัด ด้วยเหตุผลที่ว่าเพราะต่างมีตัวเลขเหมือนกัน

2. การคิดแบบใช้การอนุมานเพื่อแยกประเภท (Categorical-Inferential Styles) คือการคิดที่จัดสิ่งของเข้าเป็นพวกเดียวกันโดยอาศัยการอนุมานถึงความรู้ที่ตนได้รับ ดังตัวอย่างการให้เหตุผลในการจับคู่ภาพ คือเมื่อกำหนดภาพคน ไม้บรรทัด นาฬิกา จะเลือกจับคู่นาฬิกากับไม้บรรทัด ด้วยเหตุผลที่ว่าเพราะต่างก็เป็นสิ่งไม่มีชีวิตเหมือนกัน

3. การคิดแบบโยงความสัมพันธ์ (Relational Styles) คือ การคิดที่จัดสิ่งของเข้าเป็นพวกเดียวกัน โดยอาศัยประสบการณ์ยึดถือหน้าที่ที่สัมพันธ์กันของสิ่งของในสถานการณ์อันใดอันหนึ่ง ดังตัวอย่าง การให้เหตุผลในการจับคู่ภาพ คือเมื่อกำหนดภาพคน ไม้บรรทัด นาฬิกา จะเลือกจับคู่คนกับนาฬิกา ด้วยเหตุผลที่ว่าเพราะคนต้องใช้นาฬิกา

การคิดแบบวิเคราะห์จะเป็นลักษณะของการคิดที่ยึดถือสิ่งเร้าเป็นศูนย์กลาง ส่วนการคิดอีกสองแบบเป็นลักษณะการคิดที่ยึดถือตนเองเป็นศูนย์กลาง เพราะต้องอาศัยความรู้และประสบการณ์ของตนเองเป็นส่วนประกอบด้วย

กล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การแบ่งแบบการรู้คิดตามแนวของเคแกน มอสส์ และ ซีเกล เกิดจากความเชื่อที่ว่า กิจกรรมทางสมองจะประกอบด้วยกระบวนการต่าง ๆ 3 ประการ คือ การอาศัยข้อมูลภายนอก การอาศัยข้อมูลภายในที่ได้สะสมไว้ และการผสมผสานเกี่ยวโยงข้อมูลที่ได้สะสมไว้ กระบวนการทั้ง 3 ประการนี้จะอยู่ภายใต้อิทธิพลของลักษณะปัญหาที่แต่ละบุคคลประสบ ซึ่งจะสอดคล้องกับแบบการรู้คิดทั้ง 3 แบบตามลำดับ ความแตกต่างของแบบการรู้คิดจะมีการรับรู้เป็นสื่อสำคัญที่ทำให้แต่ละบุคคลคิดไปต่าง ๆ กัน (Suchman; & Spaulding. 1970?: 1-2) การคิดแบบวิเคราะห์เป็นการรับรู้ส่วนย่อยต่าง ๆ ของสิ่งแวดล้อมมากกว่ารับรู้ส่วนทั้งหมด การคิดแบบโยง

ความสัมพันธ์เป็นการโยงความคิดหรือการรับรู้กับความคิดหรือการรับรู้อื่น ๆ โดยอาศัยความเกี่ยวโยงที่บุคคลมีมาจากประสบการณ์ และการคิดแบบจำแนกประเภทเป็นการจัดกลุ่มสิ่งที่รับรู้เข้าในระบบการรู้คิด

จากการศึกษาทฤษฎีและแนวคิดทางด้านการคิดส่วนหนึ่งสรุปได้ว่า การคิดไม่ว่าจะเป็นแบบใดล้วนประกอบด้วยกระบวนการคิด และความรู้ประกอบกัน กระบวนการคิดคือวิธีการที่ก่อให้เกิดทักษะการคิด และทักษะการคิดเป็นกระบวนการที่สามารถเรียนรู้ได้ โดยผู้เรียนสามารถนำความรู้และประสบการณ์ของตนมาใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาทักษะการคิด ซึ่งการคิดจะมีคุณภาพเพียงใดขึ้นอยู่กับการแสวงหาข้อมูลของผู้คิด ความสนใจ และต้องการมีส่วนร่วมในการคิดของแต่ละบุคคลผู้อื่นจะไปคิดแทนย่อมไม่ได้

มิติของการคิด

มีนักการศึกษาให้ความหมายของมิติของการคิดไว้ดังนี้

ทิศนา แขมมณี และคณะ (2544: 68) ได้กล่าวถึงสาระที่เกี่ยวข้องกับการคิดหรือมิติของการคิดไว้ 6 ด้าน ดังนี้ คือ

1. มิติด้านข้อมูล หรือเนื้อหาที่ใช้ในการคิด

ในการคิดบุคคลไม่สามารถคิดโดยไม่มีเนื้อหาของการคิดได้ การคิดเป็นกระบวนการในการคิดจึงต้องมีการคิดอะไรควบคู่ไปกับการคิดอย่างไร ข้อมูลที่มนุษย์ใช้ในการคิดพิจารณาแก้ปัญหาแบ่งออกเป็น 3 ด้านด้วยกันคือ ข้อมูลเกี่ยวกับตนเอง ข้อมูลเกี่ยวกับสังคม สิ่งแวดล้อม และข้อมูลทางวิชาการ บุคคลต้องพิจารณาข้อมูลทั้ง สามส่วนควบคู่กันอย่างผสมกลมกลืน จนกระทั่งพบทางออกในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม

2. มิติด้านคุณสมบัติที่เอื้ออำนวยต่อการคิด

ในการคิดพิจารณาเรื่องใด ๆ โดยอาศัยข้อมูลต่าง ๆ นั้น คุณสมบัติส่วนตัวบางประการมีผลต่อการคิด และคุณภาพของการคิด เช่น คนที่ใจกว้างย่อมยินดีที่จะรับฟังข้อมูลจากหลายฝ่าย จนอาจจะได้ข้อมูลมากกว่าคนที่ไม่รับฟัง ซึ่งข้อมูลเหล่านี้จะมีผลต่อการคิด ช่วยให้คิดพิจารณาเรื่องต่าง ๆ รอบครอบขึ้น คุณสมบัติส่วนตัวจึงมักจะส่งเสริมการคิดให้มีคุณภาพมากขึ้น

3. มิติด้านทักษะการคิด

ในการคิดบุคคลจำเป็นต้องมีทักษะพื้นฐานหลายประการในการดำเนินการคิด เช่น ความสามารถในการจำแนกความเหมือนและความต่างของสิ่งสองสิ่ง หรือมากกว่า และความสามารถในการจัดกลุ่มของที่มีลักษณะเหมือนกันเป็นทักษะพื้นฐานในการสร้างมโนทัศน์เกี่ยวกับสิ่งนั้น ความสามารถในการสังเกต รวบรวมข้อมูล และการตั้ง สมมติฐานเป็นทักษะพื้นฐานในกระบวนการ

คิดแก้ปัญหา เป็นต้น ทักษะที่นับเป็นทักษะการคิดขั้นพื้นฐานจะมีลักษณะเป็นทักษะย่อยซึ่งมีกระบวนการหรือขั้นตอนในการคิดไม่มากนัก ทักษะที่มีกระบวนการ หรือขั้นตอนมาก และซับซ้อนส่วนใหญ่ต้องใช้ทักษะพื้นฐานหลายทักษะผสมผสานกันซึ่งเรียกว่า ทักษะการคิดขั้นสูง

4. มิติด้านลักษณะการคิด

คำจำนวนมากเหล่านี้มีใช้กันอยู่ทั้งในชีวิตประจำวัน และในวงวิชาการนับเป็นหลักฐานที่แสดงให้เห็นว่า คนเรามีลักษณะการคิดหลายแบบ ลักษณะการคิดที่มีผู้ศึกษาไว้มากได้แก่การคิดแก้ปัญหา การคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และการคิดอย่างมีวิจารณญาณ ที่กล่าวมาแล้วเป็นการคิดที่ใช้ทักษะการคิดจำนวนมากและการคิดจำเป็นต้องเป็นไปตามลำดับขั้นตอน มีกระบวนการที่ชัดเจน ลักษณะที่เป็นหัวใจของการคิดก็คือ เป้าหมายของการคิด ไม่ว่าจะคิดสิ่งใด การตั้งเป้าหมายของการคิดให้ถูกทางเป็นสิ่งที่สำคัญมาก เพราะการคิดนั้น หากเป็นไปในทางที่ผิด แม้การคิดจะมีคุณภาพเพียงใดก็จะก่อให้เกิดความเสียหายและความเดือดร้อนแก่ส่วนรวมได้ ยิ่งความคิดมีคุณภาพสูง ความเดือดร้อน เสียหายก็จะยิ่งสูงตามไปด้วย ดังนั้นหากไม่มีทิศทางที่ถูกต้องคอยกำกับควบคุมแล้ว การคิดนั้นก็ไร้ประโยชน์ การคิดถูกทางจึงเป็นการคิดที่คำนึงถึงประโยชน์ส่วนรวม และประโยชน์ระยะยาว

5. มิติด้านกระบวนการคิด

กระบวนการคิด เป็นการคิดที่ต้องดำเนินการไปเป็นลำดับขั้นตอน ที่จะช่วยให้การคิดนั้นประสบผลสำเร็จตามจุดมุ่งหมายของการคิดนั้น ๆ ซึ่งในแต่ละลำดับขั้นตอนต้องอาศัยทักษะการคิดหรือลักษณะการคิดจำนวนมาก กระบวนการที่สำคัญมีหลายกระบวนการได้แก่

5.1 กระบวนการคิดอย่างมีวิจารณญาณได้แก่ ลำดับขั้นตอนของการคิดที่จะช่วยให้ได้ความคิดที่ผ่านการกลั่นกรอง และประเมินมาอย่างรอบคอบแล้วว่าเป็นความคิดที่มีเหตุผลเชื่อถือได้

5.2 กระบวนการคิดแก้ปัญหาได้แก่ ลำดับขั้นตอนของการคิด และการดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้สามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

5.3 กระบวนการคิดริเริ่มสร้างสรรค์ได้แก่ ลำดับขั้นตอนของการคิด เพื่อให้ได้สิ่งใหม่ที่ยังไม่เคยมีมาก่อน ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในทางสร้างสรรค์

5.4 กระบวนการตัดสินใจได้แก่ ลำดับขั้นตอนของการคิด เพื่อให้สามารถตัดสินใจได้อย่างถูกต้องเหมาะสม

6. มิติด้านการควบคุม และประเมินการคิดของตนเอง

การควบคุมการรู้คิดของตนเองหมายถึง การรู้ตัวถึงความคิดของตนเองในการกระทำอะไรอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือการประเมินการคิดตนเอง และใช้ความรู้นั้นในการควบคุมหรือ

ปรับการกระทำของตนเอง มีผู้เรียกการคิดในลักษณะนี้ว่า การคิดอย่างมียุทธศาสตร์ซึ่งครอบคลุมการวางแผน การควบคุมกำกับการกระทำของตนเอง การตรวจสอบความก้าวหน้า และการประเมินผล

มิติของการคิดทั้ง 6 ด้านนี้ จะปรากฏอยู่ในกระบวนการคิด ซึ่งหากเกิดขึ้นอย่างครบถ้วนและมีคุณภาพก็จะส่งผลให้การคิดนั้นมีคุณภาพไปด้วย บุคคลทั่วไปทุก ๆ คนมักมีทักษะการคิดพื้นฐานและคุณสมบัติที่เอื้ออำนวยต่อการคิดเป็นทุนอยู่แล้วแต่จะแตกต่างกัน เมื่อบุคคลรับข้อมูลที่มีอยู่หลากหลายเข้ามา และต้องการคิดอย่างมีจุดมุ่งหมาย บุคคลนั้นก็จะสามารถใช้ทักษะที่มีอยู่เป็นเครื่องมือในการคิด ปฏิบัติการกับข้อมูลต่าง ๆ เพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายของการคิดนั้นได้

3.3 ความหมายของการคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking)

การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นลักษณะหนึ่งของการคิดโดยทั่วไป เป็นการคิดในเชิงการคำนวณ การคิดแก้ปัญหา การให้เหตุผล ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ รวมทั้งสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันและสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ (Rickart, 1996: 285) ซึ่งการคิดเชิงพีชคณิตถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ดังที่นักการศึกษาได้ให้ความเห็นไว้ต่อไปนี้

ไครเลอร์ (Kriegler, 2003) ได้กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งในขอบเขตของเนื้อหาพีชคณิตนั้นจำเป็นต้องใช้ทักษะการคิดเชิงคณิตศาสตร์ เช่น การให้เหตุผล การใช้ตัวแทนความคิด และการแก้ปัญหา เป็นต้น เพื่อทำความเข้าใจในแนวคิดของเนื้อหาที่เป็นพีชคณิต

จะเห็นว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และการคิดเชิงพีชคณิตก็เป็นเครื่องมือในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จ ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความมีนักการศึกษากล่าวถึงความหมายของการคิดเชิงพีชคณิต ดังนี้

ไคเรน และ ชาลู๊ช (Kieran and Chalouh, 1993) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต เกี่ยวกับการพัฒนาของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ภายใต้กรอบเนื้อหาที่เป็นพีชคณิตโดยการสร้างความหมายสำหรับสัญลักษณ์และการดำเนินการของพีชคณิตในแง่ของเลขคณิต

คาปุต (Kaput, 1993: Online) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการสร้างและนำเสนอตัวแทนความคิดของแบบรูป การสร้างกฎเกณฑ์ทั่วไป และสิ่งที่สำคัญที่สุดคือความคล่องของการสำรวจและการคาดการณ์

ไคเรน(Kieran, 1996: 4) ได้กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต เป็นการใช้ความหลากหลายของตัวแทนความคิดในจัดการกับข้อมูลเชิงปริมาณในสถานการณ์ปัญหาในวิธีเชิงสัมพันธ์

เฮอร์เบิร์ต (Herbert and Brown, 1997) ให้ความหมายว่า การคิดเชิงพีชคณิตคือการใช้เครื่องหมายทางคณิตศาสตร์และเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ที่หลากหลาย ดังนี้

1) การแยกแยะข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา

2) การใช้ตัวแทนความคิดแสดงข้อมูลทางคณิตศาสตร์ด้วยภาษา แผนภาพ ตาราง กราฟ และ สมการ

3) การตีความและประยุกต์ผลจากการค้นพบทางคณิตศาสตร์ เช่น การแก้ปัญหาสำหรับตัวไม่ทราบค่า การทดสอบ การคาดการ และการระบุหน้าที่ความสัมพันธ์

ไดรสคอล (Driscoll, 1997) กล่าวว่า เครื่องมือในการคิดเชิงพีชคณิตประกอบด้วยความสามารถในการคิดเกี่ยวกับหน้าที่และการทำงาน และการคำนวณโครงสร้างของระบบ

กรีน และ ฟินเดล (Greenes and Findell, 1998) กล่าวว่า แนวคิดหลักของการคิดเชิงพีชคณิตเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการใช้ตัวแทนความคิด การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน ความสมดุล ความหมายของตัวแปร แบบรูปและฟังก์ชัน การให้เหตุผลแบบนิรนัย และการให้เหตุผลแบบอุปนัย

สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989) ให้ความหมายของการคิดเชิงพีชคณิตที่พิจารณาตามเนื้อหาสองลักษณะคือ อิงเนื้อหาพีชคณิต และอิงเนื้อหาที่เป็นแบบรูป ฟังก์ชัน

ไดรสคอล (Driscoll, 1999) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต คือการพิจารณาเกี่ยวกับความสามารถในด้านการใช้ตัวแทนความคิดแทนข้อมูลเชิงปริมาณของสถานการณ์ เพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรให้มีความชัดเจน หรือเป็นรูปธรรมมากขึ้น

สวัฟฟอร์ด (Swafford and Langrall's, 2000: 2) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต คือความสามารถของการดำเนินการเพื่อค้นหาจำนวนไม่ทราบค่า ซึ่งข้อมูลเชิงปริมาณหรือจำนวนสามารถที่จะหาค่าได้ ซึ่งแตกต่างการคำนวณเพราะจะเกี่ยวกับการดำเนินการกับจำนวนที่ทราบค่า

ณัชชา กมล (2548: 4) ได้ให้ความหมายของการคิดเชิงพีชคณิตว่า หมายถึงความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิดของแต่ละคน ในการทำความเข้าใจในเนื้อหาพีชคณิต ซึ่งได้ระบุขอบเขตการศึกษาใน 3 สิ่งสำคัญที่บ่งบอกความเป็นพีชคณิต คือ แบบรูป การใช้ตัวแทนความคิด และ ตัวแปร

ดังนั้นจากที่นักการศึกษาได้กล่าวมา พอสรุปได้ว่า การคิดเชิงพีชคณิต หมายถึงความสามารถของแต่ละบุคคลในการใช้ทักษะการคิดเพื่อทำความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวกับพีชคณิต

3.4 ลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิต

มีนักการศึกษาได้ให้ลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิตไว้ดังนี้

คาปุต (Kaput, 1999) กล่าวว่า กฎเกณฑ์ทั่วไปในกระบวนการของการเรียนรู้เกิดจากคณิตศาสตร์ เรขาคณิต การออกแบบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่สามารถระบุลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตได้ 5 ลักษณะ คือ

1. การสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป
2. การจัดระบบการเปลี่ยนแปลง
3. การวิเคราะห์โครงสร้างของสัญลักษณ์ทางพีชคณิต
4. การวิเคราะห์ฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ และ ตัวแปร
5. การใช้ความหลากหลายในการตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย

เชลลี่ ไคลเกอร์ (Shelley Kriegler, 2005: 2) กล่าวว่าการคิดเชิงพีชคณิต มีลักษณะดังนี้

พีชคณิตเป็นลักษณะโดยทั่วไปของคณิตศาสตร์

1. แนวคิดภายใต้วิธีการจากการคำนวณ
2. อัตราส่วน และสัดส่วน
3. การตรวจสอบ ประเมิน

พีชคณิตในฐานะภาษาสำหรับคณิตศาสตร์

1. เข้าใจในความหมายของตัวแปรและนิพจน์
2. เข้าใจในความหมายของสมการ
3. เข้าใจและใช้ระบบจำนวนอย่างถูกต้อง
4. อ่าน เขียน จำนวนและสัญลักษณ์ตามข้อตกลงของพีชคณิตได้
5. ใช้เครื่องหมายเท่ากันแสดงแทนวิธีทำ นิพจน์ สมการ และอสมการ ได้

พีชคณิตในฐานะเป็นเครื่องมือสำหรับการทำงานและเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1.การหา นิพจน์ กรณีทั่วไปของแบบรูป และกฎเกณฑ์ทั่วไปในบริบทจริง
2. นำเสนอตัวแทนความคิดเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้สมการ ตาราง กราฟ หรือ นิพจน์
3. ทำงานเกี่ยวกับการลดและขยายแบบรูป
4. พัฒนาทักษะการสร้างกราฟ

เฮอร์เบิร์ต (Herbert and Brown, 1997) ได้ให้ลักษณะของ การคิดเชิงพีชคณิตไว้ ดังนี้

1) การแยกแยะข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา
2) การใช้ตัวแทนความคิดแสดงข้อมูลทางคณิตศาสตร์ด้วยภาษา แผนภาพ ตาราง

กราฟ และ สมการ

3) การตีความและประยุกต์ผลจากการค้นพบทางคณิตศาสตร์ เช่น การแก้ปัญหาสำหรับตัวไม่ทราบค่า การทดสอบ การคาดการ และการระบุหน้าที่ความสัมพันธ์

สมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1989) ได้ให้ลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิตไว้ 2 ลักษณะคือ

ลักษณะของการคิดที่อิงเนื้อหาพีชคณิต ไว้ดังนี้

1) เป็นการเข้าใจในมโนทัศน์ของตัวแปร นิพจน์ และ สมการ

2) การนำเสนอตัวแทนความคิดของสถานการณ์ และจำนวนแบบรูปด้วยตาราง กราฟ การอธิบายกฎเกณฑ์ สมการ และ ค้นหาความสัมพันธ์ของการนำเสนอตัวแทนความคิด

3) การวิเคราะห์ตาราง และ กราฟ เพื่ออธิบายคุณสมบัติและความสัมพันธ์

4) การพัฒนาความเชื่อมั่นในการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นโดยใช้รูปภาพ วิธีที่เป็นทางการ และไม่เป็นทางการ

5) การสำรวจตรวจสอบอสมการ และ ไม่ใช่สมการเชิงเส้น

6) การประยุกต์วิธีการทางพีชคณิตเพื่อแก้ปัญหาที่หลากหลายของปัญหาในชีวิตจริงและปัญหาทางคณิตศาสตร์

ลักษณะการคิดที่อิงเนื้อหาที่เป็นแบบรูปและฟังก์ชันไว้ ดังนี้

1) การอธิบาย ขยาย วิเคราะห์ และ สร้างความหลากหลายของแบบรูป

2) การอธิบายและนำเสนอตัวแทนความคิดของความสัมพันธ์ด้วยตาราง กราฟ กฎ

3) การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของหน้าที่ในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงในผลลัพธ์ที่เป็นเชิงคุณภาพในความต่าง อื่น ๆ

4) การใช้แบบรูปและฟังก์ชันในการนำเสนอตัวแทนความคิดและแก้ปัญหา

นอกจากนี้ ไค และคณะ (Cai, J. et al. 2005) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนโดยได้พิจารณาถึงลักษณะพฤติกรรมที่แสดงออกถึงความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต 4 ลักษณะของ NCTM ปี 2000 ประกอบด้วย

1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย เป็นเป้าหมายเพื่อบรรลุถึงการคิดเชิงพีชคณิต

วิลล์ วินสัน (Will Windsor 2009: 666) การพิจารณาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต นักเรียนต้องแสดงออกถึง

1. การให้เหตุผลเกี่ยวกับแบบรูป (ด้วยกราฟ จำนวน แบบรูป รูปภาพ) เน้นให้เห็นถึงความเหมือนและความต่าง ของลำดับที่สมบูรณ์

2. สามารถหากรณีทั่วไปได้และพิจารณาความเป็นธรรมชาติหรือลักษณะเฉพาะได้

3. หาตัวไม่ทราบค่า การสับเปลี่ยนหรือเปลี่ยนแปลงของการดำเนินการ

4. สามารถคิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ที่เป็นคณิตศาสตร์

แอนนา มาโทส (Ana Matos, 2009: 27) ได้กล่าวว่า ลักษณะที่แสดงว่ามีการคิดเชิงพีชคณิต นักเรียนต้องสามารถ

1. ระบุและอธิบายแบบรูปในสถานการณ์ที่หลากหลายและสร้างกรณีทั่วไปได้

2. สามารถนำเสนอและวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันผ่านตาราง กราฟ และนิพจน์ทางพีชคณิต

3. ให้ความสำคัญกับการให้เหตุผลในการนิพจน์เชิงพีชคณิต และใช้ภาษาสัญลักษณ์ทางพีชคณิตให้มีวิธีการที่มีประสิทธิภาพ

ดังนั้นสรุปได้ว่า การคิดเชิงพีชคณิต หมายถึง การใช้ทักษะการคิดเพื่อทำความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวกับพีชคณิต โดยสามารถพิจารณาลักษณะที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตใน 4 ลักษณะ คือ 1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และ 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

3.5 ความสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต

มีนักการศึกษาได้ให้ความสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิตไว้ มีดังนี้

เฮอร์เบิร์ต และ บราวน์ (Herbert & Brown, 1997) กล่าวว่า พีชคณิตถือเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เพื่อประยุกต์กับวิทยาศาสตร์ ธุรกิจ เศรษฐกิจ การค้า การคำนวณ และ บริบทที่เกี่ยวข้องกับจำนวนในชีวิตประจำวัน และพีชคณิตจะถูกใช้เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา ได้แก่ การวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาและการนำเสนอข้อมูลในรูปของการอธิบายและการ

หาคำตอบ เช่น การหาตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อคาดเดาหรือการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ เป็นต้น

รัซเซลล์ (Russell, 1999: 1) กล่าวว่า การที่จะทำให้การเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนดีขึ้นมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่นักเรียนจะต้องเข้าใจ และพัฒนารูปแบบของการคิด และการให้เหตุผล ด้วยธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับนามธรรมชัดเจน นักเรียนจึงยากที่จะเข้าใจในบริบทของวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง พีชคณิต เพราะฉะนั้นการคิดโดยเฉพาะการคิดเชิงพีชคณิตจะเป็นเครื่องมือสำหรับการทำความเข้าใจลักษณะเนื้อหาที่เป็นนามธรรมได้เป็นอย่างดี จากงานวิจัยต่าง ๆ ได้มีแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตที่หลากหลาย

ดริสคอลล์ (Driscoll, 1999) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตสามารถนำเสนอตัวแทนความคิดแทนจำนวนในสถานการณ์ปัญหา ซึ่งเป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรให้สามารถเห็นได้ชัดเจน เราใช้การคิดเชิงพีชคณิตเป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างหลากหลาย

ชามเบอร์ (Chambers, 1994) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต เป็นแนวทางของการคิด เป็นวิธีการพิจารณาและแสดงออกถึงความสัมพันธ์ เป็นแนวทางในการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปที่หลากหลาย ช่วยในเรื่องของการคิดให้เป็นรูปธรรม เป็นโครงสร้างและนำเสนอตัวแทนความคิดของแบบรูป การสร้างกรณีทั่วไป และที่สำคัญที่สุด คือช่วยในเรื่องของการสำรวจ ตรวจสอบ และการคาดการณ์ต่าง ๆ ได้ การคิดเชิงพีชคณิตเป็นการคิดที่สอดแทรกอยู่ในทุกเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการคิดเกี่ยวกับนามธรรมและเป็นเครื่องมือสำคัญในการให้เหตุผลในเรื่องต่าง ๆ

ลี (Lee, 1996: 103) ได้กล่าวไว้ว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นสิ่งที่ถือว่าสำคัญในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อทำให้นักเรียนได้เข้าใจเกี่ยวกับเนื้อหาในทักเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์

รูปป์ คูโค ราซาลา และ กีลีแมนิค (Ruopp, Cuoco, Rasala, & Kelemanik, 1997) กล่าวว่าบุคคลใดที่สามารถพัฒนาให้เกิดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตได้ จะสามารถประยุกต์การคิดในการเรียนที่หลากหลาย และมีความสามารถในการแก้สถานการณ์ปัญหาได้ ซึ่งเป็นการทำให้ผู้เรียนกลายเป็นนักคิด เป็นคนมีเหตุผล เป็นนักคณิตศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ นักเศรษฐศาสตร์ นักธุรกิจ และ เป็นคนที่มีประสิทธิภาพ นี่เป็นการอธิบายให้เห็นว่าการคิดเชิงพีชคณิตมีความสำคัญมากในประวัติศาสตร์ วิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ วงการธุรกิจ งานหนังสือ ทหารกองทัพ วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ และการดำเนินชีวิตประจำวัน

สทีน, ชามเบอร์ และซิลเวอร์ (Steen, 1992; Chambers, 1994; Silver, 1997) กล่าวว่าการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต เป็นการเตรียมพร้อมให้นักเรียนประสบความสำเร็จในประสบการณ์เนื้อหาพีชคณิตและอื่น ๆ และเป็นการเตรียมตัวต่อการเรียนในระดับมัธยมศึกษา และระดับที่สูงขึ้น

ณัชชา กมล และ บานฮาร์ (Natcha Kamol & Yeap Ban Har, 2550: 1) การคิดเชิงพีชคณิตถือเป็นเครื่องมือในการเรียนเนื้อหาพีชคณิต เป็นสิ่งหนึ่งที่พัฒนาความเข้าใจของนักเรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์

สรุปได้ว่า การคิดเชิงพีชคณิตมีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ให้ประสบความสำเร็จ เพราะการคิดเชิงพีชคณิตเป็นเครื่องมือสำคัญในการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และนำไปสู่การพัฒนาตัวผู้เรียนให้มีระบบ ระเบียบ ในการคิด สามารถประยุกต์การคิดในการแก้สถานการณ์ปัญหา และพัฒนาการคิดเกี่ยวกับการใช้ชีวิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

3.6 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

จากความเห็นของนักการศึกษาหลายท่านเกี่ยวกับความสำคัญของการคิดเชิงพีชคณิต ทำให้ทราบว่าการคิดเชิงพีชคณิตมีความสำคัญกับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มาก ดังนั้นสมควรอย่างยิ่งที่ควรหาแนวทางการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตให้เกิดกับนักเรียนให้มากที่สุด ได้มีนักการศึกษานำเสนอแนวทางการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตไว้ดังนี้

เดียน่า สทีล และ ดีบรา (Dianaf, Steele and Debra I. Johanning, 2004: 1) ได้ใช้ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของเป็นแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน การพัฒนาความคิดของเพียเจต์ เป็นแนวทางในการพัฒนาระดับการคิดของนักเรียนเกรด 7 โดยเริ่มจากการให้นักเรียนได้เชื่อมโยงจากรูปธรรม ไปสู่รูปแบบที่เป็นนามธรรม โดยเก็บรวบรวม และวิเคราะห์ข้อมูลทั้งเชิงคุณภาพและเชิงปริมาณ ผลปรากฏว่า นักเรียนมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่สูงขึ้นได้

ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของ Piaget

ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของ Piaget (Piaget’s Theory of Intellectual Development) ให้ข้อเท็จจริงที่ว่า วิธีคิด ภาษา ปฏิกิริยา พฤติกรรมของเด็กต่างจากผู้ใหญ่ นำไปสู่แนวคิดที่ว่า เด็กที่มีอายุน้อยจะเรียนได้ดีจากกิจกรรมที่ใช้สื่อรูปธรรม (Ginsburg & Opper, 1969 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2546: 1) นั่นคือนักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายในสถานการณ์ที่คุ้นเคยเพราะนักเรียนได้เห็นสื่อจริงซึ่งนักเรียนจะเข้าใจได้ดี โดยกิจกรรมที่ใช้สื่อรูปธรรมดังกล่าวสอดคล้องกับการสัมผัสสื่อจริง นอกจากนี้ Piaget ยังเน้นว่า การมี ปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียนมีบทบาทต่อการพัฒนาสติปัญญามากนั่นคือการให้ผู้เรียนได้คิด พูด อภิปราย แลกเปลี่ยนความคิดเห็น สอดคล้องกับ การแสดงภาษาเขียน และภาษาพูดมีบทบาทต่อการพัฒนาสติปัญญา

โครงสร้างของลักษณะผลการเรียนรู้ที่ได้จากการสังเกต (The Structure of the Observed Learning Outcome)

โครงสร้างของลักษณะผลการเรียนรู้ที่ได้จากการสังเกต (The Structure of the Observed Learning Outcome) ซึ่งเรียกว่า SOLO model หรือบางครั้งอาจเรียกว่า SOLO Taxonomy ตามที่บิกส์และคอลลิส (Biggs; & Collis.1982: 62-63; 1991: 57-76 อ้างถึงใน รุ่งทิวา นาบำรุง. 2550: 14 – 16) ได้พัฒนาขึ้นมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1982

SOLO model ได้พัฒนามาจากโครงสร้างทั่วไปของการพัฒนาทางสติปัญญาของเพียเจต์ (Piaget's Stages of Cognitive Development) SOLO model ได้นำเสนอวิธีการวิเคราะห์และจัดระดับของการปฏิบัติ โดยการพิจารณาถึงลักษณะในการสังเกตผลของการเรียนรู้จากการตอบสนองของเด็กต่อระดับความซับซ้อนของคำถามที่ตั้งขึ้นในหลากหลายหัวข้อ/วิชา ใน SOLO model จะประกอบด้วย ลักษณะเฉพาะ 2 ประการ ได้แก่ 1) ลำดับขั้นพัฒนาการ 5 ขั้น (Five Modes of Functioning) และ 2) ลักษณะของการตอบสนอง 5 ระดับ (Five Levels of Response) ลำดับขั้นพัฒนาการ 5 ขั้น ใน SOLO model ของบิกส์และคอลลิส เป็นพัฒนาการจากการกระทำเชิงรูปธรรมไปสู่มโนทัศน์เชิงนามธรรม (โดยใช้อายุเป็นตัวแบ่งระดับ) ซึ่งแบ่งออกเป็น 5 ขั้น ดังต่อไปนี้

1. การใช้ประสาทสัมผัส (Sensor motor) (จากแรกเกิด) ทารกสามารถมีปฏิสัมพันธ์กับโลกด้วยวิถีทางตามรูปธรรมเท่านั้น การเรียนรู้พัฒนาผ่านการตอบสนองทางความรู้สึก

2. การใช้ภาพเป็นสื่อ (Iconic) (จากประมาณ 2 ขวบ) เด็กจะเรียนรู้ผ่านการจินตนาการภายในหรือผ่านรูปภาพ

3. รูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic) (จากประมาณ 6 ขวบ) ในขั้นนี้จะรวมถึงกระบวนการที่เป็นนามธรรมมากขึ้นเกี่ยวกับการเรียนรู้และถือว่าเป็นการเปลี่ยนแปลงที่สำคัญไปสู่นามธรรม จากการใช้สัญลักษณ์ในโลกจริงโดยตรงไปสู่ภาษาพูด การเขียน ซึ่งเป็นขั้นที่สองของระบบสัญลักษณ์ที่ต้องใช้ประสบการณ์ ในขั้นนี้จะตรงกับเด็กในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษา

4. แบบเป็นทางการ (Formal) (จากประมาณ 15 หรือ 16 ปี) เป็นระบบเชิงนามธรรมที่สูงขึ้น เด็กที่ได้รับการพัฒนาจนถึงขั้นนี้จะสามารถพัฒนาสมมุติฐานต่าง ๆ ในโลกอย่างเป็นระเบียบ ในขั้นนี้จะเป็นเด็กระดับปริญญาตรี และมีหลักฐานบ่งชี้ว่าความสามารถในการคิดแบบเป็นทางการนี้ควรใช้เป็นพื้นฐานสำหรับรับเข้าศึกษาในมหาวิทยาลัย

5. หลังแบบเป็นทางการ (Post formal) (จากประมาณ 22 ปี) การคิดหลังแบบเป็นทางการจะปรากฏออกมาเป็นคำถามซึ่งนำไปสู่ทฤษฎีและการสร้างทฤษฎีใหม่ เกิดเป็นนวัตกรรมระดับสูงในหลายๆ สาขาวิชา

ในแต่ละลำดับขั้นของพัฒนาการยังจำแนกออกเป็น 5 ระดับ ได้แก่

1. ระดับก่อนจะมีมุมมอง (Prestructural) ผู้เรียนจะแสดงความวอกแวกบ่อยครั้ง หรือเข้าใจสถานการณ์ผิด และไม่เข้าไปพัวพันกับภาระงานหรือไม่ปฏิบัติงาน

2. ระดับมุมมองเดียว (Unistructural) เด็กจะมุ่งความสนใจไปที่ตัวแปร/ปัญหา แต่จะใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องเพียงข้อมูลเดียว การสรุปจะไม่เที่ยงตรง (Invalid) ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดปัญหาต่อไปนี้ให้ เด็กในระดับนี้จะสามารถแก้ปัญหาได้

ก) ถ้า q = 8 + 4 แล้ว q = ?

ข) 4 + 3 = ?

ค) ถ้า 7 * 4 = 3 แล้ว * = ?

ถ้ากำหนดจำนวนที่มีค่าน้อยๆ ให้ เด็กจะกล่าวว่าข้อความ ค) ดูเหมือนจะไม่ได้ยากกว่าข้อความ ก) และ ข)

3. ระดับหลายมุมมอง (Multi – structural) เด็กในระดับนี้จะใช้ข้อมูลสองข้อมูล หรือมากกว่านั้น แต่จะไม่มีการสังเคราะห์ข้อมูลหรือไม่เข้าใจความสัมพันธ์ใดๆ ระหว่างข้อมูลเหล่านั้น ไม่มีการบูรณาการ เด็กระดับนี้จะประสบความสำเร็จในการใช้ข้อมูลที่หลากหลายจากความจำในการลงมือทำ ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดปัญหาต่อไปนี้

ก) $n = (6\times8) \div 4$ $\quad n = ?$

ข) (3* 6) ÷ 3 = 6   * = ?

ค) (2*3) * 4 = 9   * = ?

ง) 5*3 = 4 o 2   * = ? ; o = ?

ที่ระดับนี้เด็กจะใช้ข้อมูลที่หลากหลายขั้น และในการแก้ปัญหาเด็กจะใช้การลองผิดลองถูก

4. ระดับเห็นความสัมพันธ์ (Relational) เด็กสามารถใช้ข้อมูลทั้งหมดที่หามาได้ และจะผสานข้อมูลทั้งหมดตามความสัมพันธ์ ข้อมูลทั้งหมดจะกลายเป็นโครงสร้างที่เชื่อมโยงกันและมีความสอดคล้องกันในระบบที่เป็นที่รู้จัก ที่ระดับนี้เด็กจะทำการตัดสินใจอย่างถูกต้องกับข้อมูลที่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกันภายในข้อความที่กำหนดให้ เช่น เด็กในระดับนี้จะสามารถแก้ปัญหาลักษณะต่อไปนี้ได้อย่างถูกต้อง

ก) (4×3) o1 = 5 o (1o 2) o = ?

ข) (3o 4) o1 = 12*(6* 2) o = ? ; * = ?

ค) (96× 42) ÷100 = (96× 21) ÷ 50 ข้อความนี้เป็นจริงหรือเท็จ

5. ระดับขยายนามธรรม (Extended Abstract) เด็กสามารถขยายแนวคิดนอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ มีการให้เหตุผลในระดับสูงขึ้น และสามารถสร้างกรณีทั่วไปใหม่ ๆ รวมทั้งที่เป็นนามธรรม การใช้ความเข้าใจเกี่ยวกับข้อมูลที่กำหนดให้มาสร้างสมมุติฐานหรือสร้าง

หลักการเชิงนามธรรม เด็กในระดับนี้สามารถพิจารณาความเป็นไปได้ของคำตอบ และมีโอกาสที่จะตอบปัญหาลักษณะต่อไปนี้ได้

ก) $(a \circ 3) \circ 4 = 8 \circ = ?\ ;\ a = ?$

ข) 7 * 6 = 5* 4 ข้อความนี้เป็นจริงหรือเท็จ

(ให้กำหนดลักษณะเฉพาะของ *และนิยามข้อยกเว้นของการดำเนิน * เอง)

ทฤษฎีการเรียนรู้ของบรูเนอร์

บรูเนอร์ได้ให้แนวคิดว่า มนุษย์สามารถเรียนหรือคิดเกี่ยวกับสิ่งต่าง ๆ ได้ และแบ่งพัฒนาการทางสติปัญญาและการคิดของมนุษย์ออกเป็น 3 ระยะ ดังนี้ (Bruner; et al. 1966: 6 – 48)

1. ระยะที่มีประสบการณ์ตรงและสัมผัสได้ (Enactive Stage) เด็กจะแสดงออกทางความคิดด้วยการกระทำ เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาโดยการกระทำ ซึ่งเป็นการสัมผัสกับสิ่งที่เป็นรูปธรรม (Concrete Objects or Manipulative) และวิธีการเช่นนี้จะดำเนินต่อไปตลอดชีวิตโดยมิหยุดอยู่เพียงช่วงอายุใดอายุหนึ่ง เช่น ในชีวิตประจำวันของคนเรา แม้แต่ผู้ใหญ่เองบางครั้งยังใช้วิธีการแก้ปัญหาหรือถ่ายทอดประสบการณ์ด้วยการกระทำ เช่น การสอนให้คนตีกอล์ฟ หรือตีเทนนิสนั้น วิธีการที่เหมาะสมวิธีหนึ่ง คือ การแสดงท่าทางให้ดูเป็นตัวอย่าง ซึ่งจะได้ผลดีกว่าการอธิบายด้วยคำพูดเพียงอย่างเดียว

2. ระยะของการใช้ภาพเป็นสื่อในการมองเห็น (Iconic Stage) พัฒนาการทางความคิดในระยะนี้ขึ้นอยู่กับการมองเห็น/การนึกภาพในใจ และการใช้ประสาทสัมผัส เช่นการใช้รูปภาพ ไดอะแกรม ฟิล์มที่เป็นสื่อทางสายตา (Visual Medium) ซึ่งเด็กจะถ่ายทอดประสบการณ์ต่าง ๆ ด้วยการมีภาพแทนในใจ และยิ่งโตขึ้นเด็กก็จะสร้างภาพในใจได้มากขึ้น ซึ่งแสดงให้เห็นว่าความรู้ความเข้าใจของคนเราจะเพิ่มขึ้นตามอายุ และส่งผลช่วยให้เด็กที่โตรู้จักการถ่ายทอดประสบการณ์ออกมาเป็นสัญลักษณ์ได้ดียิ่งขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากพัฒนาการทางความรู้ ความเข้าใจได้เพิ่มขึ้นตามอายุ

3. ระยะของการสร้างความสัมพันธ์และใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Stage) ซึ่งเป็นระดับที่ผู้เรียนสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนสิ่งที่เห็นในระดับที่สอง หรือสิ่งที่สัมผัสในระดับที่หนึ่งได้เป็นการถ่ายทอดประสบการณ์หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ โดยใช้สัญลักษณ์หรือภาษา ระยะนี้ถือเป็นระยะที่สูงที่สุดของพัฒนาการทางความรู้และความเข้าใจ เนื่องจากภาษาเป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นถึงความคิดซึ่งเด็กจะสามารถคิดหาเหตุผลและเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมตลอดจนสามารถคิดแก้ปัญหาได้ เพราะ บรูเนอร์เชื่อว่าความรู้และภาษามีพัฒนาการขึ้นมาพร้อม ๆ กัน

ประเทศสิงคโปร์ได้นำแนวคิดของบรูเนอร์มาพัฒนาเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต ที่เรียกว่า “แนวคิดโมเดลเมธอด”

แนวคิดโมเดลเมธอด เป็นนวัตกรรมในการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาวิชาคณิตศาสตร์โดยทีมวิจัยใน ค.ศ.1980 ที่เห็นประเด็นความยากมากกับปัญหาที่ซับซ้อน ยิ่งเป็นลักษณะที่เป็นนามธรรมและสัญลักษณ์ทางพีชคณิต แนวทางนี้เป็นการให้นักเรียนในการวาด รูปภาพแบบจำลองเพื่อนำเสนอเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในเชิงปริมาณทั้งจำนวนที่ทราบค่าและไม่ทราบค่า ช่วยให้นักเรียนมีมุมมองและแก้ปัญหาได้ โดยความคิดหลักของแนวทางนี้ แบบจำลองที่แบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ และแบบจำลองที่ใช้ในการเปรียบเทียบข้อมูล และแบบจำลองที่แสดงความเปลี่ยนแปลง จะถูกใช้ในการแสดงตัวอย่างของแนวคิดสำหรับเศษส่วน สัดส่วน และ เปอร์เซ็นต์ (Kho, 1987) โมเดลเมธอดมีการประยุกต์ขึ้นเพื่อใช้กับวิธีการทางพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษา เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถแสดงวิธีทำสมการเชิงพีชคณิตและแก้ปัญหา นี่จะเป็นการเปิดช่องทางในการเรียนคณิตศาสตร์ทั้งในระดับประถมและมัธยมจากวิธีการในเชิงตัวเลข ไปเป็นวิธีการในเชิงพีชคณิต

การนำเสนอตัวแทนความคิดด้วยรูปภาพ สามารถทำให้นักเรียนมีการนึกภาพหรือมองเห็นโครงสร้างของปัญหา และ สามารถเข้าใจในความสัมพันธ์เชิงปริมาณที่เกี่ยวข้องในสถานการณ์ปัญหาความหลากหลายในโครงสร้างของปัญหา สามารถพิจารณาระเบียบความคิดของปัญหา เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาโดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด พวกเขามีความตระหนักในการใช้ของระเบียบความคิดของปัญหาที่มีความเหมาะสมในการสร้างแบบจำลอง การเตรียมข้อมูลที่ให้มาในสถานการณ์ปัญหา และการวางแผนสำหรับการสร้างสมการตามแนวคิดโมเดลเมธอด วิธีการดังกล่าว นักเรียนสามารถสร้างแนวคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้เอง และจะเป็นการพัฒนาความสามารถและความเชื่อมั่นในการแก้สถานการณ์ปัญหา ยิ่งไปกว่านั้น นักเรียนสามารถประยุกต์การเรียนเกี่ยวกับวิธีการเชิงพีชคณิต

นอกจากนี้ ยังมีนักการศึกษาได้กล่าวถึงการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต ดังนี้

ฟง และ เคอร์รี่ (Ng Swee Fong and Kerry Lee, 2005: 62) กล่าวว่า โมเดลเมธอด เป็นการค้นหาคำตอบเพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับตัวเลข และปัญหาพีชคณิตอย่างง่าย โมเดลเมธอด เป็นสิ่งที่คล้ายกับการมองหรือพิจารณาข้อมูลที่ได้รับจากโจทย์ปัญหา จากนั้นใช้การมองดังกล่าวสร้างโครงสร้างของโจทย์ปัญหาด้วยบาร์สี่เหลี่ยมเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลตามเงื่อนไขในโจทย์ปัญหา ทำให้สามารถช่วยให้นักเรียนเห็นภาพรวมของโจทย์ปัญหา และง่ายสำหรับการแก้ปัญหาหาตัวไม่ทราบค่าตามที่เราต้องการ โมเดลเมธอดเป็นกลวิธีที่มีคุณภาพในการเชื่อมโยงการแก้ปัญหากับวิธีการทางพีชคณิต

นอกจากนี้ยังมีนักการศึกษานำทฤษฎีอื่น ๆ มาประยุกต์ใช้ในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตอย่างเช่น ยีน และ บิงฮัมตัน (Jean Schmittau, Binghamton, 2005: 37) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับ

การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต เขากล่าวว่า การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต เป็นสิ่งที่สำคัญ เนื่องจากพีชคณิตมีลักษณะเป็นนามธรรม มีสัญลักษณ์ ความสัมพันธ์ ถือเป็นเครื่องมือในการเรียนเนื้อหาอื่น ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ ทฤษฎีของ Vygotsky เป็นทฤษฎีที่ช่วยสนับสนุนและพัฒนาระดับการคิดของนักเรียนเกี่ยวกับเรื่องนามธรรมและความเป็นกรณีทั่วไป ได้เข้าใจมากขึ้น เนื่องจากทฤษฎีนี้เน้นการทำกิจกรรมทางสังคม ให้นักเรียนทำงานร่วมกัน มีความกระตือรือร้นในการเรียน

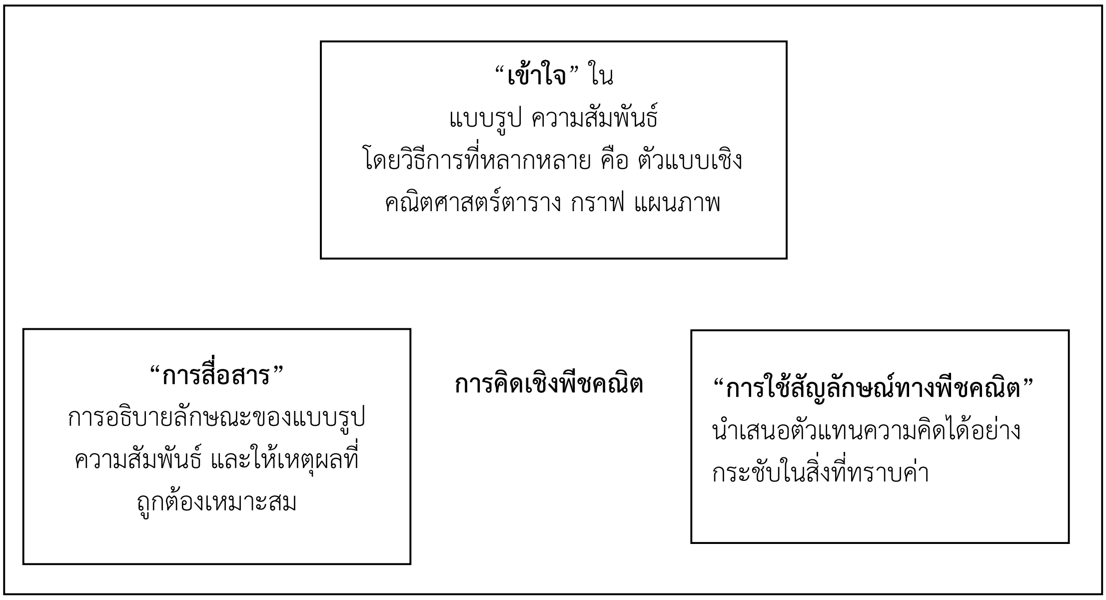
ทฤษฎีการเรียนรู้ในพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ ของ Vygotsky

ทฤษฎีการเรียนรู้ในพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ (Vygotsky, 1978) เป็นหนึ่งในทฤษฎีวัฒนธรรมเชิงสังคมของ Vygotsky (Vygotsky's social constructivism) ซึ่งเน้นในเรื่องบทบาทสำคัญ ของการมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมต่อพัฒนาการเรียนรู้ Vygotsky มี ความเชื่อว่าพฤติกรรมทางสังคมนำไปสู่พัฒนาการการใช้ภาษา และเป็นการเพิ่มพัฒนาการทางความคิดได้ด้วย Vygotsky อธิบาย ว่า ในการจัดการเรียนรู้สิ่งสำคัญที่จะต้องคำนึงถึง คือระดับ พัฒนาการ 2 ระดับ อันได้แก่ ระดับพัฒนาการที่เป็นจริง (Actual Development Level) และระดับพัฒนาการที่สามารถจะเป็นไป ได้ (Potential Development Level) ระยะห่างระหว่างระดับ พัฒนาการที่เป็นจริงและระดับพัฒนาการที่สามารถจะเป็นไปได้ นั้นเรียกว่า พื้นที่รอยต่อพัฒนาการ (Zone of Proximal Development) ตามข้อมูลที่ปรากฏใน Wink & Putney (2002) Vygotsky เปรียบเทียบการเรียนรู้กับพัฒนาการไว้ว่า การเรียนรู้ใน อดีต (Past learning) คือ ระดับพัฒนาการที่เป็นจริง ส่วนการเรียนรู้ในปัจจุบัน(Present learning) คือพื้นที่รอยต่อพัฒนาการ สำหรับการเรียนรู้ในอนาคตนั้น (Future learning) คือระดับพัฒนาการที่ สามารถจะเป็นไปได้

แนวทางที่หลากหลายในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตได้ถูกพัฒนาขึ้นของนักการศึกษามากมายและหลากหลาย ดังนี้

ลี, บลานตัน และ คาปุต (Lee, 2001; Blanton and Kaput, 2005) ได้พัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนด้วยการสนับสนุนให้นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่เกี่ยวกับพีชคณิต ซึ่งเป็นการทำงานที่หลากหลายของวิธีการทางพีชคณิต สนับสนุนให้นักเรียนใช้ใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการทางพีชคณิตบ่อย ๆ

จอร์จ บุคเกอร์ (George Booker, 2010: 15) กล่าวว่าการคิดเชิงพีชคณิตเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป แนวทางของการนำเสนอตัวแทนความคิดในการสร้างความสัมพันธ์และวิเคราะห์ความแตกต่างได้อย่างเหมาะสม ซึ่งถือเป็นหนทางในการคิดผสมผสานเชื่อมโยงกับระหว่างเนื้อหาที่หลากหลาย และเตรียมพร้อมสำหรับเนื้อหาที่เป็นกฎเกณฑ์ของพีชคณิต ซึ่งไม่สามารถพัฒนาได้ถ้าขาดกระบวนการจัดการให้นักเรียนได้พบความหลากหลายในการเรียนมากพอ



ภาพประกอบที่ 19

ภาพแสดงแบบจำลองการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของ George Booker

วิลล์ วินสัน (Will Windsor, 2010: 667) **ได้**พัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต โดยให้นักเรียนได้ผ่านประสบการณ์ในการทำโจทย์ปัญหา 3 ขั้นตอน คือ

1. นักเรียนสามารถอธิบายลักษณะทั่วไปและความสัมพันธ์ในธรรมชาติของภาษา
2. วิเคราะห์โจทย์ไปสู่แนวคิดที่ใช้แผนภาพ และสัญลักษณ์ทางพีชคณิต
3. การใช้นิพจน์ สมการ ตาราง กราฟ

เขายังกล่าวอีกว่า การแก้ปัญหาและการคิดเชิงพีชคณิต ถูกใช้ไปพร้อม ๆ กันในสถานการณ์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นองค์ประกอบร่วมกันในการเรียนและทำความเข้าในวิชาคณิตศาสตร์ เมื่อนักเรียนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนจะพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์อย่างลึกซึ้ง เนื่องจากเป็นการช่วยให้เข้าใจในมโนทัศน์ของคณิตศาสตร์ที่กำลังเรียน ซึ่งการแก้ปัญหาเป็นโครงสร้างในเป้าหมายที่หลากหลายของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ รวมถึงการคิดเชิงพีชคณิตด้วย

เช่นเดียวกับ ซิลเวอร์ (Silver, 1981) ที่พบว่า แนวทางการแก้ปัญหาและการใช้โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในการหาวิธีการสร้างสมการ โดยแก้ปัญหาความสัมพันธ์ในปัญหา นักเรียนสามารถถ่ายโยงสิ่งที่ได้เรียนรู้จาก 1 ปัญหา เพื่อทำความเข้าใจในอีกหลายปัญหาที่มีความคล้ายคลึงกัน

คอนเฟรย์ (Confrey, 1997) กล่าวว่า การใช้กระบวนการการแก้ปัญหาเป็นแนวทางในการช่วยนักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาโครงสร้างคณิตศาสตร์ และเป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตในแนวทางการให้สถานการณ์ปัญหาในบริบทที่หลากหลาย ซึ่งการใช้

สถานการณ์ปัญหาเป็นแนวทางของครูเพื่อช่วยให้นักเรียนจัดระบบ เชื่อมโยงระหว่างสถานการณ์ โดยทำความเข้าใจความสัมพันธ์ว่าเป็นอย่างไร เมื่อทราบจำนวนแรกก็สามารถสร้างความสัมพันธ์เพื่อหาค่าของจำนวนอื่น ๆ และสร้างกรณีทั่วไป ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นแนวคิดสำคัญของการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต และการทำงานเป็นทีมยังทำให้ความเข้าใจแนวคิดทางพีชคณิตได้พัฒนามากขึ้นผ่านบริบทที่หลายหลาย

จากแนวทางการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักการศึกษาที่หลากหลายเหล่านี้ล้วนเป็นแนวทางที่ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ และปรับใช้ตามบริบทจริงได้ เพื่อให้นักเรียนมีการคิดเชิงพีชคณิตที่ดีขึ้น

3.7 การวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

มีนักการศึกษานำเสนอแนวทางในการวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ไว้ดังนี้

ณัชชา กมล (2548: 65) ได้ศึกษาและพัฒนาร่างกรอบที่แสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งกรอบลักษณะการคิดนี้ถือเป็นการพัฒนากรอบการวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน ซึ่งพิจารณาใน 3 ตัวบ่งชี้ คือ การเข้าใจแบบรูป การนำเสนอ และตัวแปร โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 1 ตารางแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตทั่วไป

ตัวบ่งชี้ / ระดับ	***ลักษณะทั่วไป***
1	- นักเรียนไม่พยายามตอบคำถาม - นักเรียนไม่เข้าใจในงานที่มอบหมาย หรือทำงานไม่สำเร็จ - นักเรียนจำถามไม่ได้ หรือไม่สามารถถามคำถามได้ - ไม่สามารถเชื่อมโยงทางตรรกะ ไม่ตอบคำถาม เดาคำตอบ ให้คำตอบที่ไม่สัมพันธ์กับคำถาม
2	- ใช้เฉพาะความสัมพันธ์แบบมุมมองเดียว ในการหาคำตอบ - ตั้งคำถามและพยายามถามคำถามต่อเนื่อง - ตอบคำถามถูก แต่ไม่คงเส้นคงวา
3	- มีมุมมอง หรือมีแนวคิด 2 หรือมากกว่า 2 แนวทาง ในการหาคำตอบ - ไม่สำเร็จในการเชื่อมโยงมุมมองในแต่ละแนวทาง
4	- มีการประยุกต์มากขึ้น หรือเห็นข้อมูลในทุก ๆ มุมมอง - แสดงการประยุกต์ภายใต้เงื่อนไขของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร

ตารางที่ 2 ตารางแสดงกรอบลักษณะการคิดของตัวบ่งชี้ “การเข้าใจแบบรูป”

ตัวบ่งชี้ / ระดับ	การเข้าใจแบบรูป
1	- ไม่เข้าใจหรือสับสนเกี่ยวกับแบบรูป - ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ - เดาคำตอบ ไม่สามารถตอบคำถามได้ ถึงแม้ว่าเป็นคล้ายคลึงคำถามเดิม - ใช้พจน์หลาย ๆ พจน์ของแบบรูปแต่ไม่สามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ได้ - ใช้พจน์เดียวจากแบบรูปที่กำหนดให้เพื่อหาพจน์ที่ต้องการให้หาได้ แต่ไม่คงเส้นคงวาในการหาพจน์อื่น ๆ - ใช้วิธีการไม่เหมาะสมในการหาคำตอบ - ทราบว่าเป็นลักษณะของแบบรูป แต่ไม่ทราบวิธีว่าจะใช้แบบรูปที่กำหนดมาให้นั้นหาคำตอบได้อย่างไร
2	- สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถหาพจน์ที่สูงกว่านี้ได้ - แสดงเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างค่าที่กำหนดในแบบรูป แต่ไม่สามารถใช้ความสัมพันธ์เพื่อหาค่าในพจน์ที่สูงขึ้นได้ - ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ที่กำหนดให้เพื่อหาค่าของพจน์ที่ต้องการได้โดยวาดภาพ การนับ หรือ คำนวณก่อนทุกครั้งเมื่อกำหนดแบบรูปมาให้
3	- แสดงเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่กำหนดมาให้ และใช้ความสัมพันธ์เหล่านี้ในการหาค่าของพจน์ที่สูงขึ้น - ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่กำหนดให้เพื่อสร้างระเบียบวิธีการในการหาค่าของพจน์ที่กำหนดให้ แม้จะเป็นพจน์ที่สูงขึ้น ไม่มีการหาพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า - ไม่สามารถเชื่อมความสัมพันธ์ของแต่ละพจน์ ไปเป็นจำนวน เมื่อกำหนดแบบรูปมาให้ เช่น ไม่สามารถหาความสัมพันธ์ของ $a_n = 6 + 2(n-1)$
4	- สามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ และพจน์ที่เป็นลักษณะของจำนวนเมื่อกำหนดแบบรูปมาให้ และสามารถขยายความสัมพันธ์โดยการใช้คำพูด - สร้างกรณีทั่วไปในลักษณะความสัมพันธ์ของสัญลักษณ์แบบรูปได้ หรือหาค่าจากการกำหนดกรณีทั่วไปมาให้ได้

ตารางที่ 3 แสดงกรอบลักษณะการคิดของตัวบ่งชี้ “การนำเสนอ”

ตัวบ่งชี้ / ระดับ	การนำเสนอ
1	- ไม่เข้าใจคำถาม หรือ สับสนเกี่ยวกับคำถาม โดยหลีกเลี่ยงการถามหรือตอบคำถามไม่สัมพันธ์กับข้อมูล - ไม่เข้าใจเงื่อนไขของปัญหา - ไม่สามารถตอบคำถาม หรือตอบคำถามไม่สัมพันธ์กับข้อมูล เดาคำตอบ - ไม่สามารถอธิบายจุดบนกราฟได้
2	- เข้าใจคำถาม แต่ไม่ทราบวิธีสร้างกราฟ หรือตาราง ในการนำเสนอข้อมูลที่กำหนดให้ได้ - เข้าใจคำถาม แต่สร้างกราฟไม่ครบสมบูรณ์ เนื่องจากใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ไม่ถูกต้อง - สร้างวิธีการนำเสนอที่ไม่ตรงกับความต้องการของโจทย์ เช่น แผนที่ หรือ เส้น แต่เรียกทั้งสองว่ากราฟ - สร้างตารางซึ่งไม่สามารถจัดระบบข้อมูลได้ เช่น ตารางค่อนข้างยากในการอ่าน - อธิบายกราฟด้วยการอ่านกราฟบนแกนเดียว การเปรียบเทียบข้อมูลจากกราฟเพียงประเด็นเดียว
3	- นำเสนอได้ถูกต้องและชัดเจนในบางข้อมูลของในกราฟ หรือตารางแต่บางข้อมูลไม่ตรงตามเงื่อนไข - ไม่สามารถจัดระบบเงื่อนไขได้ทั้งหมดของปัญหาเมื่อกำหนดกราฟมาให้ - อธิบายกราฟด้วยประเด็นครบถ้วนทั้งแกน x และ แกน y
4	- นำเสนอตัวแทนความคิดได้ถูกต้องและมีระบบระเบียบของข้อมูลทั้งหมดที่กำหนดให้ในรูปของกราฟหรือตาราง ภายใต้เงื่อนไขและความสัมพันธ์ของข้อมูล - นำเสนอข้อมูลในตารางซึ่งอย่างสมบูรณ์แบบตามข้อมูลที่กำหนดมาให้ - เปรียบเทียบข้อมูลจากกราฟทั้งประเด็นของแกนกราฟทั้งสองแกน และการขยายความสัมพันธ์ของกราฟ

ตารางที่ 4 ตารางแสดงกรอบลักษณะการคิดของตัวบ่งชี้ “การเข้าใจตัวแปร”

ตัวบ่งชี้ / ระดับ	การเข้าใจตัวแปร
1	- มีความลำบากในการทำความเข้าใจงานที่กำหนดให้ หรือทำงานไม่สำเร็จ - ตอบคำถามไม่สัมพันธ์กับข้อมูลหรือเดาคำตอบ - ไม่ทราบความหมายของตัวแปร - เข้าใจผิดเกี่ยวกับการดำเนินการเกี่ยวกับการแก้สมการ นิพจน์ และ อสมการ
2	- ไม่เข้าใจกฎของตัวแปรว่าเหมือนกับจำนวนทั่วไป ใช้เฉพาะมุมมองเดียวของจำนวนในการหาข้อสรุป
3	- ไม่ค่อยเข้าใจในกฎของตัวแปรว่าเหมือนกับจำนวนทั่วไป ใช้จำนวนมากกว่า 2 จำนวนในการหาข้อสรุป - ไม่สามารถจัดระบบทุก ๆ เงื่อนไขของตัวแปรซึ่งนั่นไม่ชัดเจนของสถานการณ์ที่กำหนดให้
4	- เข้าใจกฎของตัวแปรสามารถให้ความสมเหตุสมผลของข้อสรุปได้ - จัดการเงื่อนไขของตัวแปร แม้ว่าเป็นสถานการที่ซับซ้อนได้

ซึ่งจากกรอบลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตนี้ ได้สอดคล้องกับการจัดระดับการคิดของ Biggs และ Collis ที่ระบุว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับการคิดในระดับเดียวกันทั้ง 3 ตัวบ่งชี้ ซึ่งถือกรอบลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตนี้ สามารถนำไปปรับ และพัฒนา เพื่อนำไปใช้ในการวัดลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของผู้วิจัยที่สนใจในบริบทที่หลากหลายได้

4. การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาต่างประเทศและนักการศึกษาไทยได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

บรุคเนอร์ (Bruckner, 1957: 301) กล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่าเป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่นักเรียนไม่สามารถตอบได้ทันทีโดยวิธีที่เคยชินและสิ่งที่เป็นปัญหาของนักเรียนเมื่อวานนี้อาจจะไม่เป็นปัญหาในวันนี้ก็ได้

แอนเดอร์สันและพิงกรี (Anderson and Pingry, 1973: 228) ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการวิธีการแก้ไขหรือหาคำตอบซึ่งผู้แก้ปัญหาจะทำได้ดีนั้นต้องมีวิธีการที่เหมาะสมโดยใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผนและการตัดสินใจประกอบกันไป ปัญหาจะมีความสัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหา สถานการณ์หนึ่งอาจเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งแต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับบุคคลอื่นก็ได้

อดัมส์ (Adams, 1977: 176) ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า หมายถึงสถานการณ์ที่เกี่ยวกับปริมาณและต้องมีการตัดสินใจลงมือกระทำเพื่อหาคำตอบ โดยที่ปัญหานั้นจะเป็นปัญหาที่ใช้ภาษา เรื่องราวหรือคำพูดก็ได้

เบลล์ (Bell, 1978: 310) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า สถานการณ์ใดจะเป็นปัญหาสำหรับบุคคลหนึ่งหากเขาเอาใจใส่ ต้องการที่จะตอบสนองสถานการณ์นั้นแต่ไม่สามารถแก้สถานการณ์นั้นได้ทันที การหาคำตอบของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์จะเป็นปัญหาหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับบุคคลนั้น

ครูลิคและรุดนิค (Krulik and Rudnick, 1993: 6) กล่าวถึงความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า เป็นสถานการณ์ที่ต้องการการคิด สังเคราะห์ความรู้ที่ได้เรียนมาเพื่อหาทางออก ซึ่งเป็นกระบวนการที่บุคคลใช้ความรู้พื้นฐานหรือความรู้เดิม ทักษะและความเข้าใจในการแก้ปัญหา/สถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย กระบวนการดังกล่าวเริ่มต้นด้วยการเผชิญปัญหาและหาข้อสรุปถึงคำตอบ ซึ่งนักเรียนต้องสังเคราะห์ในสิ่งที่เขาได้เรียนมาและนำไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ใหม่

ครูคชางและเชฟเฟิลด์ (Cruikshank and Sheffield, 2000: 38) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่าปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือสถานการณ์ที่ทำให้เกิดความงุนงง ซึ่งนักเรียนไม่คุ้นเคย ไม่สามารถหาวิธีการแก้ได้ทันทีทันใดหรือไม่ทราบวิธีการหาคำตอบได้อย่างรวดเร็ว ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นคำถามหรือสถานการณ์ที่มีเนื้อหาเกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์แต่ไม่ได้หมายความว่า จะเกี่ยวกับจำนวนเท่านั้น ปัญหาคณิตศาสตร์บางปัญหาเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับสมบัติทางกายภาพหรือการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์โดยไม่เกี่ยวข้องกับจำนวน

สุพัตรา ผาติวิสันติ์ (2535: 13) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ซึ่งผู้ตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่เพื่อหาวิธีที่เหมาะสมที่สุดในการแก้ปัญหาให้สำเร็จลงได้

พิชากร แปลงประสพโชค (2540: 18) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า ปัญหาเป็นสถานการณ์ที่เราต้องแก้หรือหาทางออกของปัญหา แต่ยังหาสิ่งที่เป็นทางออกหรือ คำตอบของสถานการณ์ไม่ได้เนื่องจากมีอุปสรรคบดบังปัญญาเราอยู่ ผู้แก้ปัญหา คือ บุคคลที่มีปัญหาและรู้เป้าหมายที่ต้องบรรลุเพื่อแก้ปัญหานั้น ๆ แต่ยังไม่มีเครื่องมือหรือวิธีการใด ๆ อันจะนำไปสู่เป้าหมายนั้น

ยุพิน พิพิธกุล (2542: 5) กล่าวโดยสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่นักเรียนจะต้องค้นหาความจริงหรือสรุปสิ่งใหม่ที่ผู้เรียนยังไม่เคยเรียนมาก่อน หรือเป็นปัญหาเกี่ยวกับวิธีการ การพิสูจน์ ทฤษฎีบท ปัญหาที่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่อาศัยนิยาม ทฤษฎีบทต่าง ๆ จะถูกนำมาใช้โดยอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์เข้ามาแก้ปัญหา

กรมวิชาการ (2544: 9) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นงานที่บุคคลเผชิญอยู่และต้องการหาคำตอบแต่ไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ประกอบด้วยสิ่งสำคัญ 3 ประการคือ ความต้องการที่จะค้นหาคำตอบ ตอบคำถามของปัญหานั้นไม่ได้ทันทีทันใด และต้องใช้ความพยายามอย่างสม่ำเสมอจะแก้ปัญหานั้นได้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 16) กล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการคำตอบซึ่งบุคคลต้องใช้สาระความรู้ และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้หาคำตอบไม่คุ้นเคยกับสถานการณ์นั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด ต้องใช้ทักษะ ความรู้และประสบการณ์หลายอย่างประมวลเข้าด้วยกันจึงหาคำตอบได้ สถานการณ์หรือคำถามข้อใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ ขึ้นอยู่กับบุคคลผู้แก้ปัญหาและเวลา บางสถานการณ์อาจเป็นปัญหาสำหรับบา.คน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับอีกบุคคลอื่น ๆ ก็ได้

รสอุบล ธรรมพานิชวงค์ (2545: 15) ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ ซึ่งผู้ตอบไม่สามารถตอบได้ทันที การได้มาซึ่งคำตอบต้องอาศัยความรู้ ประสบการณ์ และวิธีการที่เหมาะสมในการตัดสินใจ

ราตรี เกตบุตตา (2546: 38) กล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ คำถามหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบเพื่อให้บรรลุจุดมุ่งหมายที่ต้องการ ซึ่งเป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาไม่คุ้นเคยมาก่อนไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ประสบการณ์และวิธีการที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา

สมเดช บุญประจักษ์ (2550: 71) ให้ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าเป็นสถานการณ์ที่ต้องใช้ความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ ซึ่งปัญหาอาจอยู่ในรูปของตัวเลข สัญลักษณ์ รูปภาพ ข้อความ หรือเป็นโจทย์ปัญหา

แน่งน้อย ทองธวัช (2527: 16) ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึง ปัญหาที่เกี่ยวกับปริมาณ การหาคำตอบนั้นต้องใช้การตัดสินและการรวบรวมความคิดซึ่งปัญหาคณิตศาสตร์เป็นปัญหาที่พบในชีวิตประจำวัน

กำจร มุณีแก้ว (2539: 16) ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ว่า เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ การและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้อใช้วิธีการที่เหมาะสม ใช้ความรู้และประสบการณ์ในการตัดสินใจ

ดวงทิพย์ เพ็ชรนิล (2544: 48-49) ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้ เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณหรือจำนวนหรือคำอธิบายให้เหตุผล ผู้แก้ปัญหาไม่คุ้นเคยมาก่อนและไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ต้องใช้ทักษะ ความรู้ และประสบการณ์หลาย ๆ อย่างประมวลเข้าด้วยกัน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 79) กล่าวถึงความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่มีเนื้อหาสาระกระบวนการ หรือความรู้ที่ผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อนและไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที การหาคำตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ ประกอบกับความสามารถด้านการวิเคราะห์ การสังเคราะห์และการตัดสินใจ

เบญจมาศ ฉิมมาลี (2550: 65) ได้สรุปความหมายของปัญหาว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึงคำถามหรือสถานการณ์ที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ โดยที่ผู้ตอบไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที แต่ต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ และทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มาประมวลเข้าด้วยกัน เพื่อกำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบนั้น ๆ

สุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552: 30) ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง คำถามหรือสถานการณ์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งต้องใช้ความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการตอบคำถามหรือหาคำตอบของสถานการณ์นั้น ๆ

ความหมายของปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่มีเนื้อหาสาระกระบวนการ หรือความรู้ที่ผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อนและไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที การหาคำตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆประกอบกับความสามารถด้านการวิเคราะห์ การสังเคราะห์และการตัดสินใจเพื่อกำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบนั้น ๆ

4.2 ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

นักการศึกษาทั้งไทยและต่างประเทศหลายท่าน ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

เบลล์ (Bell, 1978: 310) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการหาคำตอบของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งผู้หาคำตอบพิจารณาแล้วว่าเป็นปัญหา

บรังคา (Branca, 1980: 3-8) ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 3 นัย ดังนี้

1. การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมายของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (Problem Solving as a goal)

2. การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการ (Problem Solving as a Process)

3. การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐาน (Problem Solving as a Basic Skill)

โพลยา (Polya, 1980: 1) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นการหาวิธีการหรือทางออกในสิ่งที่ยุ่งยาก สิ่งที่เป็นอุปสรรค ซึ่งไม่สามารถที่จะคิดหาคำตอบได้ในทันทีทันใด การแก้ปัญหาเป็นสำเร็จของสติปัญญาซึ่งเป็นความสามารถเฉพาะบุคคล

เคนเนดี (Kennady, 1984: 81) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการแสดงออกของแต่ละบุคคลในการตอบสนองสถานการณ์ปัญหา

เมเยอร์และฮีการ์ที (Mayer and Hegarty, 1987: 31) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง การที่ผู้แก้ปัญหาคิดหรือหาทางออกว่าจะแก้ปัญหานั้นอย่างไร ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องเข้าใจสถานการณ์ที่กำหนดให้เพื่อนำไปสู่จุดหมาย

แฮทฟิลด์ เอ็ดวาดส์ และบิทเทอร์ (Hatfield, Edwards and Bitter, 1993: 55) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ วิธีการที่ปัญหาได้รับการแก้โดยวิธีนั้น วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์พิจารณาจากองค์ประกอบ 2 ประการคือ ทักษะและระดับความชำชองของนักเรียน และขอบเขตของเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนมีความสามารถใช้ได้มาแต่เดิม ปัญหาที่ยิ่งซับซ้อนมากเท่าไรก็อาจจะต้องใช้กลวิธีแก้ปัญหามากขึ้นเท่านั้น

ครูคชางค์และเชฟฟิลด์ (Cruikshank and Sheffield, 2005: 81 – 82) กล่าวไว้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การคิดหาวิธีที่ให้ได้มาซึ่งคำตอบของคำถามหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ ซึ่งวิธีการคิดของแต่ละคนอาจแตกต่างกัน

อัมพร ม้าคนอง (2553: 39) กล่าวไว้โดยสรุปว่า การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนและเกี่ยวของกับความรู้ ทักษะ และความสามารถหลายอย่าง เช่น ความรู้ในเนื้อหา ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการทำงาน ทักษะการคิด และความสามารถในการประเมินการทำงานของตนเองนอกจากนี้ยังเกี่ยวข้องกับประสบการณ์ เจตคติ และความเชื่อของผู้แก้ปัญหาด้วย

สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 14) สรุปไว้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่บุคคลใช้ความรู้ ทักษะและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา ทั้งปัญหาธรรมดาและปัญหาแปลกใหม่ การแก้ปัญหาจึงรวมถึงกระบวนการแก้ปัญหาทั้งหมด ไม่ใช่แค่เพียงผลลัพธ์สุดท้าย

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 18) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ ความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ผสมผสานกับข้อมูลต่าง ๆ ที่กำหนดในปัญหาเพื่อกำหนดวิธีการหาคำตอบของปัญหา

ปฐมพร บุญลี (2545: 10) กล่าวไว้โดยสรุปว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ วิธีการ กระบวนการ ยุทธวิธี หรือเทคนิคเฉพาะต่าง ๆ ที่ผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยความรู้ ความจำ การคิดวิเคราะห์ รวมทั้งประสบการณ์ที่เกิดจากการเรียนรู้ของผู้แก้ปัญหาเอง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550: 7) กล่าวว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

เบญจมาศ ฉิมมาลี (2550: 54) ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีการหรือคำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์โดยอาศัยความรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของผู้แก้ปัญหา

สุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552: 31) ได้สรุปว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์ที่ต้องอาศัยความรู้และวิธีการทางคณิตศาสตร์

ดังนั้นสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นตอนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหา ความคิดและประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ไปผสมผสานกับข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดในปัญหาเพื่อแสดงวิธีการหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์

4.3 ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้เกณฑ์แตกต่างกันไป ซึ่งผู้วิจัยได้รวบรวมไว้ดังนี้

รัสเซล (Russell, 1961: 256) แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาที่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่ปรากฏในแบบเรียนและหนังสือเรียนทั่ว ๆ ไป
2. ปัญหาที่ไม่มีรูปแบบ ได้แก่ ปัญหาที่พบได้ทั่ว ๆ ไปในชีวิตประจำวัน

เลอบลานซ์ (LeBlance, 1977: 17-25) แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาที่ปรากฏในหนังสือแบบเรียน
2. ปัญหาที่พบในหนังสือทั่วๆไปที่ไม่ใช่แบบเรียน

เลอบลานซ์ และคณะ(LeBlanc et al, 1980: 105-106) ได้แบ่งโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเภท คือ

1. ปัญหาในหนังสือแบบเรียน (Standard textbook problem) เป็นปัญหาสำหรับเกริ่นนำหรือทำตามการดำเนินการเลขคณิต เช่น การคูณจำนวนเต็ม ลักษณะของปัญหาในหนังสือแบบเรียนสามารถแก้ปัญหาโดยประยุกต์ใช้ขั้นตอนเดียวหรือใช้ขั้นตอนที่เรียนผ่านมาแล้ว นักเรียนสามารถใช้สื่อรูปธรรมหรือบริบทในชีวิตจริง เป้าหมายของปัญหาในหนังสือแบบเรียนคือสามารถระลึกได้ถึงข้อเท็จจริงพื้นฐาน ทักษะ ขั้นตอน การดำเนินการมูลฐาน มีประสิทธิภาพมากขึ้นและเป็นปัญหาเชื่อมโยงระหว่างการดำเนินการและประยุกต์ใช้กับสถานการณ์ในชีวิตจริง

2. ปัญหากระบวนการ (Process problem) เป็นปัญหาที่ต้องการให้ใช้กลวิธีหรือวิธีการที่ไม่เป็นขั้นตอน แต่ยังคงใช้ขั้นตอนวิธีในการแก้ปัญหา ปัญหาชนิดนี้กระตุ้นการใช้กระบวนการให้ได้คำตอบมากกว่าคำตอบที่ได้ ความสำเร็จของการแก้ปัญหาไม่ได้ขึ้นอยู่กับการประยุกต์ใช้มโนทัศน์ กฎ สูตร แต่ขึ้นอยู่กับการใช้กลวิธีมากกว่าหนึ่งกลวิธีในการหาคำตอบ ปัญหากระบวนการบางปัญหามีมากกว่าหนึ่งคำตอบ

ครูลิคและเรย์ (Krulik and Reys, 1980: 24) ได้แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 5 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาที่เป็นความรู้ความจำ
2. ปัญหาทางพีชคณิต
3. ปัญหาที่เป็นการประยุกต์ใช้
4. ปัญหาที่หาส่วนที่ขาดหายไป
5. ปัญหาเกี่ยวกับสถานการณ์

ชาร์ลและเลสเตอร์(Charles and Lester, 1982: 6-10) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ได้ 6 ประเภท โดยพิจารณาตามเป้าหมายของการฝึก ดังนี้

1. ปัญหาที่ใช้ฝึก (Drill exercise) คือปัญหาที่ใช้ฝึกขั้นตอนและการคำนวณเบื้องต้น

2. ปัญหาข้อความอย่างง่าย (Simple translation problem) เป็นปัญหาข้อความที่เคยพบ เช่น ปัญหาในหนังสือเรียน ต้องการฝึกให้คุ้นเคยกับการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาขั้นตอนเดียวที่มุ่งให้มีความเข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ และความสามารถในการคิดคำนวณ

3. ปัญหาข้อความที่ซับซ้อน (Complex translation problem) คล้ายกับปัญหาข้อความอย่างง่าย แต่เพิ่มเป็นปัญหาที่มี 2 ขั้นตอนหรือมากกว่า หรือมากกว่า 2 การดำเนินการ

4. ปัญหาที่เป็นกระบวนการ (Process problem) เป็นปัญหาที่ไม่เคยพบมาก่อนไม่สามารถ เปลี่ยนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ทันที จะต้องจัดปัญหาให้ง่ายขึ้น หรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ แล้วหารูปแบบทั่วไปของปัญหา ซึ่งนำไปสู่การคิดและการแก้ปัญหาเป็นการพัฒนายุทธวิธีต่าง ๆ เพื่อความเข้าใจ วางแผนการแก้ปัญหาและการประเมินผลคำตอบ

5. ปัญหาการประยุกต์ (Applied problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ทักษะความรู้ มโนมติ และ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ การได้มาซึ่งคำตอบต้องอาศัยวิธีทางคณิตศาสตร์เป็นสำคัญ เช่น การจัดกระทำ การรวบรวมและการแทนข้อมูล การตัดสินใจเกี่ยวกับข้อมูลในเชิงปริมาณ เป็นปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการ มโนมติ ข้อเท็จจริงในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ซึ่งทำให้ผู้เรียนได้เห็นประโยชน์และเห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ชีวิตจริง

6. ปัญหาปริศนา (Puzzle problem) เป็นปัญหาที่บางครั้งได้คำตอบจากการเดาสุ่มไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา บางครั้งต้องใช้เทคนิคเฉพาะ บางครั้งต้องใช้วิธีที่ไม่ธรรมดา หรือต้องใช้ความรู้ที่ลึกซึ้ง ปัญหาประเภทนี้จะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้ความคิดสร้างสรรค์และมีความยืดหยุ่นในการแก้ปัญหา และเป็นปัญหาที่มองได้หลายมุมมอง

โพลยา (Polya, 1985: 123 – 128) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท โดยพิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา ดังนี้

1. ปัญหาให้ค้นหา (Problems to Find) เป็นปัญหาในการค้นหาสิ่งที่ต้องการ ซึ่งอาจเป็นปัญหาในเชิงทฤษฎี หรือปัญหาในเชิงปฏิบัติ อาจเป็นรูปธรรมหรือนามธรรม ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งเป็น 3 ส่วนคือ สิ่งที่ต้องการหา ข้อมูลที่กำหนดให้ และเงื่อนไข

2. ปัญหาให้พิสูจน์ (Problems to Prove) เป็นปัญหาที่ให้แสดงอย่างสมเหตุสมผลว่า ข้อความที่กำหนดเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ส่วนสำคัญของปัญหานี้แบ่งเป็น 2 ส่วนคือ สมมติฐานหรือสิ่งที่กำหนดให้ และผลสรุปหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์ พิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหา

ชาร์ลและคณะ (Charles el al, 1987: 11-13) กล่าวถึงประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ครูควรสอนให้กับนักเรียน ได้แก่

1. ปัญหาขั้นตอนเดียว (One-step problem) เป็นปัญหาที่ให้ผู้แก้ปัญหาต้องแปลงสถานการณ์ที่เป็นเรื่องราวให้เป็นประโยคทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ หาร ปัญหาประเภทนี้มักพบในการเรียนการสอนปกติ ยุทธวิธีพื้นฐานที่ใช้แก้ปัญหาขั้นตอนเดียว คือ การเลือกวิธีดำเนินการ

2. ปัญหาหลายขั้นตอน (Multi-step problem) ปัญหาประเภทนี้ต่างจากปัญหาขั้นตอนเดียวที่จำนวนของการดำเนินการที่จำเป็นในการหาคำตอบ ปัญหาหลายขั้นตอนมีจำนวนการดำเนินการมากกว่าหนึ่งตัว ยุทธวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาหลายขั้นตอน คือ การเลือกการดำเนินการ

3. ปัญหากระบวนการ (Process problem) เป็นปัญหาที่ไม่สามารถแปลงเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์โดยการเลือกดำเนินการได้ทันที แต่ต้องใช้กระบวนการต่าง ๆ ช่วย เช่น การทำปัญหาให้ง่ายขึ้นการแบ่งปัญหาออกเป็นปัญหาย่อย ๆ การเขียนแผนภาพ การเขียนกราฟแทนปัญหา การแก้ปัญหาประเภทนี้ต้องใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ เช่น การประมาณคำตอบ การเดาและตรวจสอบ การค้นหาแบบรูปการทำย้อนกลับ ปัญหากระบวนการหนึ่งอาจใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหาได้หลายแบบ

4. ปัญหาการประยุกต์ (Applied problem) บางครั้งเรียกว่าปัญหาเชิงสถานการณ์ เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ทักษะ ความรู้ มโนมติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง ซึ่งจะต้องใช้วิธีการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น การรวบรวมข้อมูลทั้งที่โจทย์กำหนดและไม่ได้กำหนดให้ การจัดกระทำกับข้อมูล เป็นปัญหาที่จะทำให้ผู้แก้ปัญหาเห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์

เมเยอร์และฮีการ์ที (Mayer and Hegarty, 1987: 32) แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดา (Routine Problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหารู้วิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้อง รู้ว่าต้องใช้วิธีการใดจึงจะเหมาะสม

2. ปัญหาไม่ธรรมดา (Nonroutine Problem) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาไม่ทราบในทันทีทันใดว่าจะแก้ปัญหานั้นอย่างไร

เมเยอร์และฮีการ์ที ให้ข้อสังเกตว่า ปัญหาคณิตศาสตร์บางปัญหาอาจเป็นปัญหาธรรมดาสำหรับนักเรียนคนหนึ่งแต่อาจเป็นปัญหาที่ไม่ธรรมดาสำหรับนักเรียนคนอื่นก็ได้

แฮทฟิลด์ เอ็ดเวิร์ดและบิทเทอร์ (Hatfield, Edwards and Bitter, 1989: 37) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์โดยพิจารณาตามลักษณะของปัญหา แบ่งออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1. ปัญหาปลายเปิด (Open - Ended) เป็นปัญหาที่มีจำนวนคำตอบที่เป็นไปได้หลายคำตอบ ปัญหาเหล่านี้มองว่า กระบวนการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบ

2. ปัญหาให้ค้นพบ (Discovery) ปัญหาประเภทนี้จะให้คำตอบในขั้นสุดท้าย แต่จะมีวิธีการที่หลากหลายให้ผู้เรียนใช้ในการหาคำตอบ

3. ปัญหาที่กำหนดแนวทางในการค้นพบ (Guided discovery) เป็นปัญหาที่เป็นลักษณะร่วมของปัญหา มีเงื่อนไขปัญหา และบอกทิศทางในการแก้ไขปัญหา ผู้เรียนไม่รู้สึกหมดหวังในการหาคำตอบ

คุทซ์ (Kutz, 1991: 93) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ตามการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. การแก้ปัญหาธรรมดาหรือโจทย์ปัญหา (Routine or word problem solving) เป็นปัญหาที่นักเรียนคุ้นเคย มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยกับโครงสร้างลักษณะของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหา

2. การแก้ปัญหาที่ไม่ธรรมดา (Nonroutine or word problem solving) เป็นปัญหาที่นักเรียนไม่คุ้นเคย มีโครงสร้างซับซ้อน ผู้แก้ปัญหาจะต้องประมวลความรู้ ความคิดรวบยอดและหลักการต่าง ๆ ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.1 ปัญหากระบวนการ (Process problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้กระบวนการอย่างมีลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหา

2.2 ปัญหาในรูปปริศนา (Puzzle problem) เป็นปัญหาที่ท้าทายและให้ความสนุกสนาน

บารูดี (Baroody, 1993: 34-36) แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท โดยพิจารณาจากเป้าหมายในการหาคำตอบของปัญหา ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดา (Routine Problem) หรือปัญหาอย่างง่าย หรือปัญหาชั้นเดียว (Simple (one step) Translation Problems) เป็นปัญหาที่ใช้ในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างเดียว และสามารถแก้ปัญหานั้นโดยตรง

2. ปัญหาไม่ธรรมดา (Nonroutine Problem) แบ่งออกเป็น 7 ลักษณะ ดังนี้

2.1 ปัญหาซับซ้อนหรือปัญหาหลายชั้น (Complex (Multistep) Translation Problems) เป็นปัญหาที่จะต้องประยุกต์ใช้ในการดำเนินทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ 2 การดำเนินการขึ้นไปในการแก้ปัญหา

2.2 ปัญหาที่ต้องปรับใช้สิ่งอื่นของปัญหา (Other Modification of Translation Problem) เป็นการรวบรวมปัญหาหลายชั้นและชั้นเดียวแล้วเปลี่ยนเป็นวิธีการอื่น ๆ เพื่อต้องการความคิดวิเคราะห์ได้แก่ ปัญหาที่ต้องการหาองค์ประกอบที่ผิด หรือสิ่งที่ผิดของโจทย์ปัญหาที่ต้องการประยุกต์คำตอบ ปัญหาที่ให้ข้อมูลมาก ๆ หรือข้อมูลน้อย ๆ หรือข้อมูลที่ไม่ถูกต้อง ปัญหาที่สามารถแก้ปัญหาได้มากกว่า 1 วิธี ปัญหาที่ต้องการคำตอบมากกว่า 1 คำตอบ ปัญหาที่ต้องใช้ความอดทนในการแก้ปัญหา

2.3 ปัญหากระบวนการ (Process Problem) เป็นปัญหาที่ต้องใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา

2.4 ปัญหาปริศนา (Puzzle Problem) เป็นปัญหาที่มีเทคนิคและต้องการความลึกซึ้ง เป็นปัญหาเกี่ยวกับกลอุบาย ปัญหาประเภทนี้จะทำให้เกิดความสนุกสนานและท้าทาย

2.5 ปัญหาเฉพาะที่ไม่ระบุเป้าหมาย (Nongoal – Specific Problem) ปัญหาประเภทนี้ มีลักษณะเป็นปัญหาปลายเปิด ซึ่งไม่ต้องการหาคำตอบหรือเงื่อนไขคำตอบ

2.6 ปัญหาประยุกต์ (Applied Problem) ขยายจากสถานการณ์ในชีวิตจริง

2.7 ปัญหายุทธวิธี (Strategy Problem) กำหนดจุดมุ่งหมายที่จะต้องแก้ ผู้เรียนบางคนอาจจะมุ่งไปที่คำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ แต่ปัญหาประเภทนี้จะช่วยระบุหรือเน้นยุทธวิธีที่จะช่วยทำให้เข้าใจปัญหา และกระบวนการในการแก้ปัญหา

ฮัทฟิล์, นอนี่ และ บิทเทอร์ (Hatfield, Noney and Bitter ,1993: 37) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์โดยพิจารณาตามลักษณะของปัญหา แบ่งออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1. ปัญหาปลายเปิด (Open – Ended) เป็นปัญหาที่มีจำนวนคำตอบที่เป็นไปได้หลายคำตอบ ปัญหาเหล่านี้มองว่า กระบวนการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบ

2. ปัญหาให้ค้นพบ (Discovery) ปัญหาประเภทนี้จะให้คำตอบในขั้นสุดท้าย แต่จะมีวิธีการที่หลากหลายให้ผู้เรียนใช้ในการหาคำตอบ

3. ปัญหาที่กำหนดแนวทางในการค้นพบ (Guided discovery) เป็นปัญหาที่เป็นลักษณะร่วมของปัญหา มีเงื่อนไขปัญหา และบอกทิศทางในการแก้ไขปัญหา ผู้เรียนไม่รู้สึกหมดหวังในการหาคำตอบ

เรย์และคณะ (Reys et al., 2004: 16) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์โดยพิจารณาจากผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหา สรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดาหรือปัญหาที่คุ้นเคย (Routine problem) เป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการประยุกต์ใช้ในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มักอยู่ในรูปโจทย์ปัญหาที่เป็นถ้อยคำหรือเรื่องราวที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนนัก ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยหรือมีประสบการณ์เกี่ยวกับโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหานั้นมาแล้ว

2. ปัญหาไม่ธรรมดาหรือปัญหาที่แปลกใหม่ไม่คุ้นเคย (Nonroutine problem) เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน แปลกใหม่สำหรับผู้แก้ปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องประมวลความรู้ ความสามารถ และประสบการณ์หลายอย่างเข้าด้วยกันเพื่อนำมาใช้แก้ปัญหา

ดอซซี่ย์ (Dossey, 2005) ได้แบ่งปัญหาคณิตศาสตร์เป็น 3 ประเภท คือ

1. ปัญหาที่ต้องตัดสินใจ (Decision making) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องทำความเข้าใจปัญหา ลักษณะและข้อจำกัดของปัญหา สามารถแปลงข้อมูลของปัญหา เลือกวิธีการแก้ปัญหาภายใต้ข้อจำกัด สามารถตรวจสอบและประเมินการตัดสินใจ และสื่อสารคำตอบได้

2. ปัญหาที่ต้องวิเคราะห์และวางแผน (System analysis and design) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องวิเคราะห์ความซับซ้อนหรือสร้างการวางแผน จับประเด็นเหตุผลภายในปัญหาซึ่งสอดคล้องกับจุดประสงค์ อธิบายความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นภายใน ค้นหาสาเหตุหรือคำตอบจากการวางแผน ประเมินค่าความสมเหตุสมผลแล้วเผยแพร่ได้

3. ปัญหาที่ต้องจับประเด็นปัญหา (Trouble shooting) เป็นปัญหาที่ผู้แก้ปัญหาต้องวิเคราะห์ถึงความผิดพลาดที่เกิดขึ้น เข้าใจถึงสาเหตุอันเนื่องมาจากปัญหาเช่น ขั้นตอนการทำสามารถบ่งชี้ถึงจุดที่ทำให้เกิดภาวะวิกฤตได้ วิเคราะห์และหาคำตอบ และสามารถตรวจสอบหรือพิสูจน์คำตอบแล้วเผยแพร่ได้

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2536: 432 – 433) ได้แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. ปัญหาเกี่ยวกับสาระ ได้แก่ปัญหาที่ปรากฏอยู่ในหนังสือทั่วไปเป็นปัญหาที่นำความรู้เกี่ยวกับวิธีคำนวณที่เรียนมาแล้วมาใช้หาคำตอบของสภาพการณ์ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ปัญหาชนิดนี้มุ่งขยายประสบการณ์ด้านการคิดคำนวณมากกว่าการเรียนรู้ด้านการแก้ไขปัญหาอย่างแท้จริง

2. ปัญหาเกี่ยวกับกระบวนการ เป็นปัญหาที่มุ่งเน้นกระบวนการในการหาคำตอบมากกว่าตัวคำตอบเอง ในการหาคำตอบบางครั้งไม่จำเป็นต้องนำการบวก ลบ คูณ หาร มาใช้แต่ใช้กระบวนการคิดอื่น ๆ ปัญหาชนิดนี้พัฒนาความสามารถในการแก้ไขปัญหาได้ดีและยังส่งเสริมวิธีการคิดอย่างสร้างสรรค์และสร้างความรู้สึกท้าทายอีกด้วย

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2538: 53) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. พิจารณาจากจุดประสงค์ของปัญหา แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1.1 ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาให้ค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ จำนวน หรือให้หาวิธีการ คำอธิบายให้เหตุผล

1.2 ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาที่ให้แสดงการให้เหตุผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริงหรือข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ

2. พิจารณาจากตัวผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของแต่ละปัญหา แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

2.1 ปัญหาธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อนมากนัก ผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีการแก้ปัญหา

2.2 ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อนในการแก้ปัญหา ผู้แก้ปัญหาจะต้องประมวลความรู้ ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกันเพื่อนำมาใช้แก้ปัญหา

อเนก จันทรจรูญ (2545: 8) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างไม่ซับซ้อน สามารถใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์เพียงอย่างเดียวในการแก้ปัญหา และผู้แก้ปัญหาคุ้นเคยกับโครงสร้างของปัญหาได้แก่ปัญหาในหนังสือเรียน

2. ปัญหาไม่ธรรมดา เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อน ผู้แก้ปัญหาไม่คุ้นกับปัญหาที่จะแก้ ผู้แก้จะต้องใช้ความคิดวิเคราะห์ รวบรวม ประยุกต์ความรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์หลายอย่าง พร้อมทั้งการใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหามาช่วยแก้ปัญหานั้น ๆ

สมเดช บุญประจักษ์ (2550: 71) แบ่งประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์ตามลักษณะของปัญหาสรุปได้ดังนี้

1. ปัญหาที่ใช้ฝึกทักษะ เป็นปัญหาที่ต้องการให้ใช้วิธีการและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ เป็นปัญหาที่คล้ายในบทเรียนปกติ ไม่ซับซ้อน เน้นให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะการคำนวณ ฝึกขั้นตอนวิธี มุ่งหวังให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ เกิดความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์และเกิดทักษะที่ต้องการ ปัญหาอาจอยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์หรือประโยคข้อความ

2. ปัญหาที่ใช้พัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาที่มีโครงสร้างซับซ้อนกว่าปกติ หรือเป็นปัญหาที่มีหลายขั้นตอน ผู้แก้ปัญหาอาจไม่เคยพบมาก่อน ในการแก้ปัญหาต้องใช้ความรู้ ทักษะ มโนมติ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งต้องมีการคิดวางแผนและอาศัยวิธีทางคณิตศาสตร์ เช่น การรวบรวมข้อมูล การแทนข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ การจัดระบบ การประมวลผลและแปลความหมาย โดยมุ่งหวังให้ผู้เรียนได้ฝึกใช้ความรู้ วิธีการแก้ปัญหาและข้อเท็จจริงต่างๆในการหาคำตอบ

สุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552: 37) สรุปว่าประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งได้หลายประเภทขึ้นกับเกณฑ์ในการจำแนกตามแนวคิดของนักการศึกษาแต่ละท่าน เช่น แบ่งประเภทของปัญหา

กษมา วุฒิสารวัฒนา (2548: 44) สรุปว่า ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์สามารถแบ่งได้ 2 ลักษณะใหญ่ คือขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ จะแบ่งเป็นปัญหาให้ค้นพบ และปัญหาให้พิสูจน์ หากขึ้นอยู่กับลักษณะการนำไปใช้และความซับซ้อนของปัญหา จะแบ่งเป็น ปัญหาธรรมดา และปัญหาไม่ธรรมดา

นุตริยา จิตตารมย์ (2548: 27) ได้สรุปว่า การแบ่งประเภทของโจทย์ปัญหาขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ในการแบ่งอาจแบ่งตามจุดประสงค์ของปัญหา ตามการดำเนินการหาคำตอบ ตามเป้าหมายในการหาคำตอบ หรืออาจแบ่งตามผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหา ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าโจทย์ปัญหามี 2 ประเภท คือ

1. โจทย์ปัญหาที่ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์อาจมีขั้นตอนเดียวหรือหลายขั้นตอนและประยุกต์ใช้กลวิธีต่าง ๆ ในการหาคำตอบ

2. โจทย์ปัญหาที่ต้องพิสูจน์ใช้การให้เหตุผล วิเคราะห์ ตัดสินใจ และหาคำตอบของปัญหา ซึ่งในแต่ละโจทย์ปัญหาผู้แก้ปัญหาจะต้องพิจารณาลักษณะโครงสร้างของปัญหาให้ชัดเจน เพื่อจะได้ประมวลความรู้และประสบการณ์หาคำตอบได้เหมาะสมกับลักษณะของโจทย์ปัญหา

เบญจมาศ ฉิมมาลี (2550: 72) ได้สรุปว่า ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์แบ่งได้หลายประเภทขึ้นกับเกณฑ์ในการจำแนกตามแนวคิดของนักการศึกษาแต่ละท่าน

สรุปได้ว่า ประเภทของปัญหาคณิตศาสตร์สามารถแบ่งได้หลายประเภท ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ของผู้สร้างปัญหาว่าต้องการจำแนกลักษณะของปัญหาตามลักษณะ เกณฑ์ เป้าหมาย หรือแนวคิดของนักการศึกษาคณิตศาสตร์ท่านใด เช่น แบ่งตามจุดประสงค์ของปัญหา แบ่งตามการดำเนินการหาคำตอบ แบ่งตามเป้าหมายในการหาคำตอบ หรืออาจแบ่งตามผู้แก้ปัญหาและความซับซ้อนของปัญหา เป็นต้น

4.4 ลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี

จากการแบ่งประเภทของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้แตกต่างกัน ดังนั้นการสร้างหรือเลือกโจทย์ปัญหาจึงควรพิจารณาถึงลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้มีนักการศึกษาเสนอแนวคิดลักษณะของโจทย์ปัญหาที่ดีและน่าสนใจ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างหรือเลือกโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

เนลสันและเคอร์ปาทริค (Nelson and Kirkpatrik, 1975: 71-72) ได้กล่าวถึงลักษณะของปัญหาที่ดีสำหรับนักเรียน ดังนี้

1. ปัญหานั้นควรเป็นข้อพิสูจน์ที่แสดงถึงความเป็นจริงและความถูกต้อง
2. สถานการณ์ของปัญหา ควรนำมาซึ่งสิ่งที่เป็นจริงหรือประยุกต์มาจากสิ่งที่เป็นจริง
3. ควรเป็นปัญหาที่นักเรียนสนใจ
4. ควรให้นักเรียนสามารถนำปัญหามาเปลี่ยนแปลงให้อยู่ในรูปธรรมได้
5. ควรมีวิธีการที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหา
6. ลักษณะของปัญหาควรมีความเป็นไปได้

7. ควรสร้างปัญหาที่ให้เชื่อว่าสามารถแก้ปัญหาได้และรู้ว่าเมื่อใดจะได้คำตอบ

คลายด์ (Clyde, 1967: 108) กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี สรุปได้ดังนี้

1. มีความใกล้เคียงกับปัญหาในชีวิตประจำวัน และสัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหามากที่สุด โดยอาจเป็นเรื่องราวหรือเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นกับผู้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันหรือลักษณะคล้ายกับสถานการณ์ในชีวิตจริง เป็นต้น

2. สถานการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นปัญหา ควรใช้ภาษาหรือบรรยายในลักษณะที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์และไม่ควรเป็นปัญหาธรรมดาทั่ว ๆ ไป

ครูลิคและเรย์ (Krulik and Reys, 1980: 280) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่าการสร้างปัญหาคณิตศาสตร์ให้น่าสนใจ ควรคำนึงถึงความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของผู้แก้ปัญหา กลวิธีที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหา และความสามารถในการใช้ภาษาของผู้แก้ปัญหา

เลอบลานซ์ และคณะ (LeBlanc et al, 1980: 106-107) ได้เสนอแนะลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีและน่าสนใจสำหรับใช้สอนในชั้นเรียน สรุปได้ว่า ครูต้องเลือกหรือออกแบบปัญหาที่นักเรียนสนใจการนำเข้าสู่ประเด็นปัญหาและร่วมมือกันทำให้ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา การเลือกปัญหาจะต้องเหมาะสมกับระดับความยากซึ่งเป็นสิ่งสำคัญ องค์ประกอบที่ทำให้ปัญหาเกิดความยากโดยทั่วไปมีอยู่ 4 องค์ประกอบ คือ

1. การเลือกใช้คำศัพท์
2. ความยาวและโครงสร้างของถ้อยคำหรือประโยค
3. ขนาดและความซับซ้อนของจำนวน
4. การตั้งปัญหาหรือการแสดงปัญหา

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ควรใช้คำศัพท์ง่าย ๆ ศัพท์ทางคณิตศาสตร์ควรหลีกเลี่ยงเพื่อให้นักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหาด้วยตัวนักเรียนเอง ระดับความยากของการอ่านควรจะเพิ่มให้เหมาะสมกับความยาวและความซับซ้อนของถ้อยคำและประโยคในโจทย์ปัญหา โจทย์ปัญหาที่ใช้สอบถ้าเป็นประโยคยาว ๆ สามารถแบ่งเป็นสองส่วนหรือมากกว่า หรืออาจจะเขียนใหม่เป็นประโยคสั้น ๆ ตามความเข้าใจ การใช้การคำนวณด้วยมือควรลดระดับความยากและความซับซ้อนของปัญหา การเปลี่ยนแปลงการตั้งปัญหาหรือการแสดงปัญหา สามารถเลือกได้ตามระดับความยากของปัญหา

ทีสเซนและคณะ (Thiessen et al, 1989: 38) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีควรเป็นปัญหาที่ทำให้นักเรียนเห็นประโยชน์ น่าสนใจ ให้ความบันเทิงและเป็นปัญหาที่หลากหลาย เช่น ปัญหาปริศนาหรือเกมต่าง ๆ

ครูลิคและรุดนิค (Krulik and Rudnick, 1993: 10 - 20) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์ จึงเป็นเหตุผลเบื้องต้นที่ต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ การที่จะสอนทักษะดังกล่าวให้เกิดขึ้นกับนักเรียน ครูผู้สอนจึงต้องมีความรู้เกี่ยวกับลักษณะของปัญหาที่ดีเสียก่อนเพราะการสอนการแก้ปัญหาต้องอาศัยปัญหาที่ดี ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีควรมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. น่าสนใจ ท้าทายความสามารถของนักเรียน และเป็นเรื่องที่ใกล้ตัวผู้เรียน
2. ต้องใช้ทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณและทักษะการสังเกต
3. เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีการอภิปรายและมีปฏิสัมพันธ์กัน
4. เป็นเรื่องที่เกี่ยวกับความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และการนำทักษะทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา
5. เป็นปัญหาที่นำไปสู่หลักการและการสรุปนัยทั่วไปทางคณิตศาสตร์
6. มีวิธีการหาคำตอบมากกว่าหนึ่งวิธี และมีผลลัพธ์ได้หลายอย่างในขณะเดียวกัน

ครูคชางและเชฟเฟิลด์ (Cruikshank and Sheffield, 2000: 38) กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ สรุปได้ว่า ควรเป็นปัญหาที่ทำให้ผู้แก้ปัญหามีความสนใจและพยายามที่จะหาคำตอบ ปัญหาที่ดีไม่รวมถึงโจทย์ภาษาหรือโจทย์ที่เป็นเรื่องราวจากหนังสือแบบเรียนเท่านั้น เพราะนักเรียนมีความคุ้นเคย แก้ปัญหาได้และไม่เกิดความสนใจ

ประเสริฐ แสงสุมาตย์ (2533: 11) กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีสรุปได้ดังนี้

1. เป็นปัญหาที่สัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหาและชีวิตประจำวัน
2. เป็นปัญหาที่ใช้ภาษาในลักษณะที่เข้าใจง่าย
3. เป็นปัญหาที่เหมาะกับความรู้พื้นฐานของผู้เรียน
4. เป็นปัญหาที่มีความยากง่ายพอเหมาะกับผู้เรียน
5. เป็นปัญหาที่ให้โอกาสแก่ผู้แก้ปัญหาใช้ทักษะเบื้องต้นในการแก้ปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2538: 90) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่าสิ่งที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่ง ในการจัดกิจกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ตัวปัญหา ที่จะนำมาให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบ และกล่าวถึงปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ท้าทายความสามารถของผู้เรียน ต้องเป็นปัญหาที่ไม่ยากหรือง่ายเกินไป ถ้าง่ายเกินไป อาจไม่ดึงดูดความสนใจ ไม่ท้าทาย แต่ถ้ายากเกินไป ผู้เรียนอาจท้อถอยก่อนที่จะแก้ปัญหาได้สำเร็จ
2. สถานการณ์ของปัญหาเหมาะกับวัยของผู้เรียน สถานการณ์ของปัญหาควรเป็น

เรื่องที่ไม่ห่างไกลเกินไปกว่าที่ผู้เรียนจะทำความเข้าใจปัญหาและรับรู้ได้ และนอกจากนี้ถ้าเป็นสถานการณ์ที่สามารถเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันได้ก็จะดีไม่น้อย

3. แปลกใหม่ ไม่ธรรมดา และผู้เรียนไม่เคยมีประสบการณ์ในปัญหานั้นมาก่อน

4. มีวิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี เป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิดหาทางเลือกในการหาคำตอบได้หลายวิธี และได้พิจารณาเปรียบเทียบเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมที่สุด

5. ใช้ภาษาที่กระชับ รัดกุมถูกต้อง ปัญหาที่ดีไม่ควรทำให้ผู้เรียนต้องมีปัญหากับภาษาที่ใช้ ควรเน้นอยู่ที่ความเป็นปัญหาที่ต้องการหาคำตอบของตัวปัญหามากกว่า

กรมวิชาการ (2544: 18) กล่าวถึงลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี สรุปได้ดังนี้

1. ใช้ภาษาที่กระชับ รัดกุม ถูกต้อง เข้าใจง่าย
2. แปลกใหม่สำหรับนักเรียน ช่วยกระตุ้นและพัฒนาความคิด ท้าทายความสามารถ
3. ไม่สั้นหรือยาวเกินไป
4. ไม่ยากหรือง่ายเกินไปสำหรับวัยของนักเรียน
5. สถานการณ์ของปัญหาเหมาะสมกับวัยของนักเรียน
6. ให้ข้อมูลอย่างเพียงพอที่จะนำไปประกอบพิจารณาแก้ปัญหาได้
7. เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน
8. ข้อมูลที่มีอยู่จะต้องทันสมัยและเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จริง
9. มีวิธีการหาคำตอบได้มากกว่า 1 วิธี
10. นักเรียนสามารถใช้การวาดภาพ ลายเส้น ไดอะแกรม ในการช่วยแก้ปัญหา

รสอุบล ธรรมพานิชวงค์ (2545: 18) สรุปลักษณะของปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ ดังนี้

1. ปัญหาควรเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันและน่าสนใจสำหรับนักเรียน
2. ปัญหาควรใช้ภาษาที่ง่ายต่อความเข้าใจ
3. ปัญหาที่เหมาะสมกับความรู้พื้นฐานของนักเรียน
4. ปัญหาที่ทำให้นักเรียนสามารถแสดงวิธีการที่แตกต่างกันได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 79) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่าปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีควรมีลักษณะดังนี้

1. สถานการณ์ของปัญหาและความยากง่ายต้องเหมาะสมกับวัยของผู้เรียน
2. ให้ข้อมูลอย่างเพียงพอที่จะใช้ในการพิจารณาแก้ปัญหาได้
3. ข้อมูลมีความทันสมัยและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของผู้เรียนหรือเป็นเหตุการณ์ที่เป็นไปได้จริง

สุรัช อินทสังข์ (2545: 53) มีคำแนะนำว่าโจทย์ปัญหาประเภทหนึ่งที่ครูควรจัดให้นักเรียนได้คิดแก้น่าจะเป็นปัญหาที่อยู่ในบริบทที่นักเรียนคุ้นเคย กล่าวคือปัญหานั้นเป็นเรื่องใกล้ตัวของนักเรียนแต่ละคน นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ดีขึ้นถ้าโจทย์ปัญหานั้นมีเนื้อหาที่สอดคล้องกับประสบการณ์เดิมและสัมพันธ์กับสิ่งที่เป็นอยู่จริงรอบ ๆ ตัวของนักเรียน คุณลักษณะที่ดีของโจทย์ปัญหา คือ ต้องกระตุ้นให้นักเรียนกระหายที่จะคิด ต้องท้าทายให้นักเรียนเกิดความพยายามที่จะแก้เพื่อหาคำตอบ

นุตริยา จิตตารมย์ (2548: 29) โจทย์ปัญหาที่น่าสนใจควรจะเป็นเรื่องใกล้ตัวของผู้แก้ปัญหาเพื่อผู้แก้ปัญหาเกิดความสนใจที่จะหาคำตอบ และควรพิจารณาให้เหมาะสมกับระดับความสามารถสติปัญญาของผู้แก้ปัญหา สามารถใช้ความรู้และประสบการณ์ได้หลากหลายในการหาคำตอบ

เบจมาศ ฉิมมาลี (2550: 75) ได้สรุปว่า ปัญหาที่ดีนั้นควรมีลักษณะเป็นปัญหาที่ท้าทาย เร้าความสนใจต่อผู้เรียน ไม่ยากหรือง่ายเกินไป เหมาะกับระดับของผู้เรียน ภาษาที่ใช้ต้องเข้าใจง่าย มีเงื่อนไขเพียงพอในการหาคำตอบ มีวิธีการที่หลากหลายในการหาคำตอบ นำไปสู่ความเข้าใจ และการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์

กษมา วุฒิสารวัฒนา (2548: 45) สรุปว่าลักษณะของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีควรมีลักษณะดังนี้ ภาษาที่ใช้กระชับ ถูกต้องและเข้าใจได้ง่าย สถานการณ์ของปัญหาเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน หรือสามารถประยุกต์ใช้ในชีวิตจริงได้ มีวิธีการที่แตกต่างในการแก้ปัญหา และเป็นปัญหาที่พบไม่บ่อยในห้องเรียน

สุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552: 41) ได้สรุปว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีนั้นควรมีลักษณะดังนี้

1. เป็นปัญหาที่น่าสนใจ ท้าทายความสามารถของผู้เรียน
2. ใช้ภาษาที่เข้าใจง่ายเหมาะสมกับวัยและความรู้พื้นฐานของผู้เรียน
3. มีวิธีการหาคำตอบที่หลากหลาย นำไปสู่การอภิปรายและการมีปฏิสัมพันธ์กัน

สรุปได้ว่า ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดี ควรมีลักษณะตรงตามจุดประสงค์กับความต้องการของผู้สร้างปัญหาว่าต้องการให้ปัญหาเป็นอย่างไร เพื่อให้ตรงกับสิ่งที่จะวัดและประเมินจากผู้เรียน ทั้งนี้ปัญหานั้นควรเป็นปัญหาที่ท้าทาย เร้าความสนใจต่อผู้เรียน ไม่ยากหรือง่ายเกินไป เหมาะกับระดับของผู้เรียน ภาษาที่ใช้ต้องเข้าใจง่าย มีเงื่อนไขเพียงพอในการหาคำตอบ มีวิธีการที่หลากหลายในการหาคำตอบ นำไปสู่ความเข้าใจ และการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

4.5 กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

การแก้ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จอย่างมีคุณภาพนั้น ผู้แก้ปัญหาต้องใช้กระบวนการต่างๆใน การแก้ปัญหา ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงกระบวนการในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

โพลยา (Polya, 1957: 5 - 40) กล่าวถึงกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 4 ขั้นตอน สรุปได้ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา เป็นขั้นการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจคำ ประโยคย่อยๆ สัญลักษณ์ต่าง ๆ ของปัญหา โดยนักเรียนต้องสามารถสรุปปัญหาเป็นภาษาหรือคำพูดของตนเองได้ สามารถบอกได้ว่าโจทย์กำหนดสิ่งใดมาให้และโจทย์ถามหาอะไร

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นตอนสำคัญที่จะต้องพิจารณาโดยอาศัยข้อมูลจากขั้นที่ 1 นำไปสู่การกำหนดว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการใด โดยพิจารณาว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ จะก่อให้เกิดผลอย่างไรได้บ้าง และต้องใช้ความรู้อะไรอีกบ้างที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น โดยการนำทฤษฎี หลักการ/กฎ สูตร นิยาม ที่เรียนมากำหนดเป็นวิธีการในการแก้ปัญหา

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ เป็นขั้นดำเนินการตามแผน/วิธีการที่เลือกไว้จนกระทั่งได้คำตอบ สำหรับปัญหาที่มีการคิดคำนวณขั้นนี้เป็นขั้นที่ ลงมือคิดคำนวณเพื่อหาคำตอบตามวิธีการทางคณิตศาสตร์

4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบ เป็นขั้นที่ต้องพิจารณาตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาของตนว่าเรียบร้อยครบทุกกรณีที่เป็นไปได้หรือไม่ ตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ

เฮลตัน (Helton, 1958: 203) กล่าวถึงกระบวนการในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจว่าโจทย์ต้องการอะไร และต้องการให้หาตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวหรือมากกว่านั้น

2. กำหนดสัญลักษณ์แทนตัวไม่ทราบค่า

3. หาความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆที่สอดคล้องกับโจทย์

4. เขียนสมการ

5. แก้สมการ

6. สรุปคำตอบและให้ความหมายของคำตอบ เช่น บอกหน่วย บอกคุณภาพ

7. ตรวจสอบคำตอบ

แอทกินสัน (Atkinson, 1961 อ้างถึงใน วงษ์สันติ แสงดอกไม้, 2540: 124) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาซึ่งมีทั้งหมด 9 ขั้นตอน สามารถสรุปได้ดังนี้

1. กำหนดปัญหา
2. พิจารณาและตรวจสอบการทดลองเดิมที่จะใช้ในการแก้ปัญหา
3. ค้นคว้าความคิดใหม่ ๆ หรือหาข้อเท็จจริงมาสนับสนุนการแก้ปัญหา
4. ศึกษาและประเมินผลการค้นคว้า
5. ตัดสินเลือกวิธีที่ดีที่สุดมาใช้
6. ขั้นทดลอง
7. ขั้นสรุปผล
8. สรุปผลและนำไปใช้กับสถานการณ์ที่คุ้นเคย
9. นำข้อสรุปไปใช้ในสถานการณ์หรือปัญหาใหม่

ทอร์เรนซ์ (Torrance, 1962: 135) กล่าวไว้ว่า ขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

ขั้นที่ 1 การนำสภาพการณ์อนาคตเข้าสู่ระบบการคิด เป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนคิด

ขั้นที่ 2 การระดมสมองเพื่อค้นหาปัญหา

ขั้นที่ 3 การสรุปปัญหา และจัดลำดับความสำคัญของปัญหา

ขั้นที่ 4 การระดมสมองหาวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 5 การเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่ดีที่สุด

ขั้นที่ 6 การนำเสนอวิธีการแก้ปัญหา

มาร์ค (Mark, 1965: 401 – 402) กล่าวถึงกระบวนการในการสอนแก้ปัญหา สรุปได้ดังนี้

1. ค้นหาว่าโจทย์ให้ข้อมูลอะไร และโจทย์ถามอะไร
2. ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มาเพื่อจะนำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการหา
3. วิเคราะห์ข้อมูลและหาความสัมพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์
4. ตรวจความถูกต้อง

คลายด์ (Clyde, 1967 : 109 - 112) ได้แบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้น คือ

ขั้นที่ 1 เข้าใจปัญหา คือ ความรู้เกี่ยวกับคำศัพท์ต่าง ๆ ที่ใช้ในปัญหานั้น

ขั้นที่ 2 การหาสิ่งที่ต้องการใช้หาคำตอบของปัญหา

ขั้นที่ 3 ดูความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่าง ๆ ที่จะให้หาคำตอบและความสัมพันธ์กับคำตอบ มองเห็นว่าต้องใช้การดำเนินการการใดจึงจะได้คำตอบ ขั้นนี้ถือว่าเป็นขั้นให้เหตุผลที่แท้จริง นักเรียนที่จะประสบความสำเร็จในขั้นนี้ต้องมีความสามารถ 3 ประการ คือ

1. มองเห็นเงื่อนไขอย่างชัดเจน

2. การวางแผนแก้ปัญหาและให้เหตุผล

3. ตัดสินคำตอบที่มีเหตุผล หรือสมเหตุสมผลเพียงใด

ขั้นที่ 4 การคำนวณ จะต้องมีทักษะพื้นฐานเป็นอย่างดี

กิลฟอร์ด (Guildford, 1971: 130) ได้กำหนดลำดับการแก้ปัญหาว่าควรประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นเตรียมการ คือ การกำหนดปัญหาหรือค้นหาปัญหาที่แท้จริงของเหตุการณ์ คืออะไร

2. ขั้นวิเคราะห์ปัญหา คือ การพิจารณาว่ามีสิ่งใดที่เป็นสาเหตุสำคัญของปัญหาหรือสิ่งใดไม่ใช่สาเหตุของปัญหา

3. ขั้นเสนอแนวทางในการแก้ปัญหา คือ การหาวิธีการแก้ปัญหา คือ การหาวิธีการแก้ปัญหาซึ่งตรงกับสาเหตุของปัญหาและแสดงออกมาในรูปแบบของวิธีการแก้ปัญหาและได้ผลลัพธ์ในขั้นสุดท้าย

4. ขั้นตรวจสอบผล คือ การเสนอเกณฑ์เพื่อตรวจสอบผลลัพธ์ที่มาจากการเสนอวิธีการแก้ปัญหา ถ้าผลลัพธ์ที่ได้ยังไม่ถูกต้อง ก็ต้องเสนอวิธีการแก้ปัญหาใหม่จนกว่าจะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

5. ขั้นประยุกต์ คือ การนำวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้องไปใช้ในโอกาสอื่นเมื่อพบกับสถานการณ์ที่เป็นปัญหาคล้ายกับปัญหาเดิม

แวร์ (Weir, 1974: 16 - 18) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเกี่ยวข้องกับความคิดและประสบการณ์การเรียนรู้ ซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องฝึกฝนนักเรียนให้มีความพยายามในการแก้ปัญหาและพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหา เพื่อช่วยให้นักเรียนมีเหตุผลที่จะนำความรู้ที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 ขั้นการตั้งปัญหา

ขั้นที่ 2 ขั้นการวิเคราะห์ปัญหา

ขั้นที่ 3 ขั้นเสนอวิธีการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 4 ขั้นการตรวจสอบผลลัพธ์

ครูลิค (Krulik, 1977: 650-651) ได้สรุปกระบวนการในการสอนแก้ปัญหาให้ได้ผลดีควรเป็นไปตามขั้นตอน ดังนี้

1. อ่านและทำความเข้าใจว่าโจทย์ถามอะไร ต้องการอะไร มีข้อมูลอะไรที่โจทย์บอกแล้วเขียนรูปหรือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2. หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่โจทย์บอก และข้อมูลที่โจทย์ต้องการทราบด้วยการคิดย้อนกลับว่าเราเคยพบปัญหาเช่นนี้มาก่อนหรือไม่ แล้วเริ่มตั้งสมมติฐานหลาย ๆ ข้อเพื่อหาทางทดสอบสมมติฐานนั้น ๆ

3. หาวิธีการที่ถูกต้องเพื่อทดสอบสมมติฐาน

4. ตรวจสอบผลลัพธ์ว่าสิ่งที่ค้นพบนั้น เป็นการตอบปัญหาที่ถูกต้องแน่นอนเพียงไร

เลอบลานซ์ (LeBlance, 1977: 17-25) ได้เสนอกระบวนการในการสอนแก้ปัญหา ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน สรุปได้ดังนี้

1. การเข้าใจปัญหา ในการที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจในปัญหาครูควรถามคำถามเพื่อให้นักเรียนหาว่าอะไรคือข้อมูลหรือเงื่อนไขที่ให้มา และในที่สุดจะต้องทราบว่าปัญหาถามอะไร

2. ครูนำอภิปรายในการแก้ปัญหา ครูเสนอแนะกลวิธีที่เป็นไปได้ให้นักเรียนดูจากนั้นให้นักเรียนตัดสินใจเลือกเอาวิธีใดวิธีหนึ่งเอง

3. ลงมือแก้ปัญหา กลวิธีที่คิดไว้ในขั้นที่ 2 จะถูกนำออกมาใช้ บางครั้งแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2 อาจจะนำไปสู่คำตอบได้ ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นนักเรียนจะต้องย้อนกลับไปสู่ขั้นที่ 2 อีก

4. ทบทวนปัญหาและคำตอบ ขั้นนี้เป็นขั้นที่สำคัญมากที่สุด โดยแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ ลักษณะแรกเป็นการมองขั้นตอนต่าง ๆ ย้อนกลับ และลักษณะที่สองเป็นการขยายสถานการณ์ปัญหาเพื่อจะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป

แวน ดาเลน (Van Dalen, 1979: 12 -13) ได้เสนอวิธีการคิดแก้ปัญหาที่ปัจจุบันถือว่าเป็นวิธีการแสวงหาความรู้ทางวิทยาศาสตร์ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นปัญหา
2. ขั้นทดสอบสมมติฐาน
3. ขั้นจำกัดขอบเขตของปัญหา
4. ขั้นอนุมานเหตุผลในการแก้ปัญหา
5. ขั้นเสนอแนะการแก้ปัญหา

ครูลิค และ เรย์ (Krulik and Rey, 1980: 280-281) เสนอกระบวนการในการปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4ขั้นตอน สรุปได้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นตอนที่พิจารณาว่าข้อมูลหรือเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้มีอะไรบ้าง เพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาหรือไม่ และโจทย์ถามหาว่าอะไร

2. วางแผนแก้ปัญหา เป็นข้อที่หาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์บอกกับสิ่งที่โจทย์ถาม ค้นหาทฤษฎี กฎ สูตร นิยามเพื่อนำมาใช้แก้ปัญหา

3. ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ลงมือดำเนินการตามแผนที่วางไว้

4. ตรวจสอบ เป็นขั้นที่ตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหาทั้งหมดว่าได้ผลเป็นไปตามที่ต้องการการครบถ้วนสมบูรณ์หรือไม่

โยตาและโฮสติคกา (Yotis and Hosticka, 1980: 561) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 8 ขั้นตอน ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. เลือกข้อมูลที่ได้ออกมาจากโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
2. จัดจำแนกข้อมูลออกเป็นข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้อง สำหรับการแก้ปัญหา
3. เรียงลำดับข้อมูลตามความจำเป็นในการใช้หาคำตอบของปัญหา
4. พิจารณาว่าข้อมูลที่จำเป็น ข้อมูลใดที่ได้มาแล้วและข้อมูลใดที่ยังต้องหาอีก
5. พิจารณาว่าจะเก็บรวบรวมข้อมูลที่ต้องการด้วยวิธีใด
6. เก็บรวบรวมข้อมูลที่ต้องการ
7. ใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องทั้งหมดในการแก้ปัญหา
8. ตรวจสอบความเชื่อถือได้ของคำตอบ

เบลล์ (Bell, 1981: 308 – 323) เสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอนดังนี้

1. เสนอปัญหาในรูปทั่วไป
2. เสนอปัญหาอีกครั้งในรูปแบบที่แสดงการแก้ปัญหา
3. ตั้งสมมติฐานและเลือกวิธีการดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา
4. ตรวจสอบสมมติฐานและดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นไปได้

เบรนสฟอร์ด และ สเทน (Bransford and Stein, 1984: 206 – 207) ได้เสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาที่คล้ายกับการแก้ปัญหาแบบฮิวริกติกส์ เรียกว่า IDEAL โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ขั้นระบุปัญหา
2. ขั้นกำหนดและอธิบายปัญหา
3. ขั้นสำรวจวิธีการที่เป็นไปได้
4. ขั้นดำเนินการตามวิธีการ
5. ขั้นมองย้อนกลับและประเมินผลจากกิจกรรม

ชาร์ล (Charles, 1985: 50) ได้เสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 5 ขั้นตอน

1. ทำความเข้าใจปัญหา
2. การเลือกและเก็บข้อมูลที่ต้องการใช้แก้ปัญหา

3. การเลือกวิธีการหาคำตอบ

4. การตอบปัญหา

5. การประเมินความสมเหตุสมผลของคำตอบ

คิก (Gick, 1986: 101) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การสร้างตัวแทนของปัญหา โดยใช้การสร้างสัญลักษณ์ วาดรูป ทำตาราง หรือแผนผัง เพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

2. การคิดวิธีการแก้ปัญหา เป็นการรวบรวมวิธีการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเพื่อนำไปสู่คำตอบ รวมไปถึงการวางแผน และจัดลำดับขั้นตอนที่กำหนดไว้

3. การดำเนินการแก้ปัญหา เป็นการปฏิบัติตามแผน และขั้นตอนที่กำหนดไว้ การประเมินผลการดำเนินการแก้ปัญหา ว่ามุ่งไปสู่คำตอบ หรือเป้าหมายที่วางไว้หรือไม่ ถ้าไม่อาจทบทวนวิธีการคิดตั้งแต่ต้นใหม่ ว่าผิดพลาดหรือบกพร่องในจุดใด เพื่อจะได้ปรับปรุงกระบวนการแก้ไขปัญหาให้บรรลุเป้าหมาย

ทอลทัน (Talton, 1988: 40) ได้ศึกษาและรวบรวมกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. อ่านโจทย์

2. กำหนดว่าโจทย์ถามหาอะไร

3. กำหนดว่าโจทย์กำหนดอะไร

4. เลือกวิธีการแก้ปัญหา

5. ลงมือแก้ปัญหา

ออสบอร์น (Osborn, 1989: 1995A) ได้สรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ ดังนี้

1. ขั้นค้นหาความจริง (Fact Finding)
2. ขั้นค้นหาปัญหา (Problem Finding)
3. ขั้นค้นหาความคิดในการแก้ปัญหา (Idea Finding)
4. ขั้นค้นหาวิธีที่ดีที่สุด (Solution Finding)
5. ขั้นยอมรับนำไปปฏิบัติ (Acceptance Finding or Implementation)

เรดีเซล (Riedesel, 1990: 90) กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาอย่างง่ายไว้ 6 ขั้นตอน คือ

1. การวางแผน

2. การได้มาซึ่งข้อมูล

3. การจัดระบบข้อมูล

4. การวิเคราะห์ข้อมูล
5. การสรุปอ้างอิงและ / หรือการสังเคราะห์จากข้อมูล
6. การตัดสินใจเลือกวิธีที่ดีที่สุด

ครูลิคและรุดนิค (Krulik and Rudnick, 1993: 5-6) เสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นการอ่านและคิด เป็นขั้นการวิเคราะห์ปัญหา การตรวจสอบข้อเท็จจริงและการประเมินผล การเชื่อมโยงทุกส่วนของปัญหา

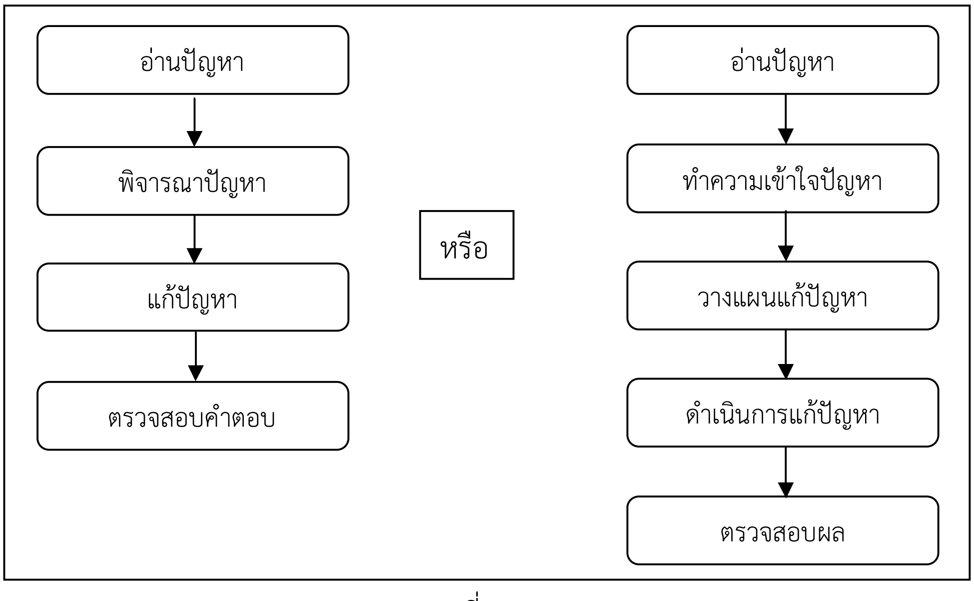
2. ขั้นการสำรวจและวางแผน เป็นการวางแผนเพื่อหาคำตอบโดยการจัดลำดับข้อมูลข่าวสาร พิจารณาถึงความพอเพียงของข้อมูล จัดข้อมูลในรูปตาราง การสร้างข้อสรุป สร้างรูปแบบ

3. ขั้นคัดเลือกยุทธวิธี เป็นขั้นที่คนส่วนใหญ่เห็นว่ามีความยากกว่าทุกขั้นตอน โดยการเลือกยุทธวิธีที่เหมาะสมกับปัญหา

4. ขั้นหาคำตอบ เป็นขั้นใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ เพื่อหาคำตอบ เช่น ใช้การประมาณค่าหรือใช้เครื่องคำนวณ

5. ขั้นการสะท้อนกลับและการขยายผล โดยการตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่ ได้ตอบคำถามของโจทย์ครบถ้วนหรือไม่และคำตอบที่ได้อธิบายเหตุผลอย่างเพียงพอหรือไม่

วิลสัน และ ฮาดแวย์ (Wilson and Hadway, 1993: 60 – 62) ได้เสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นขั้น ๆ ในลักษณะที่เป็นกรอบการแก้ปัญหาที่เป็นแนวตรง ดังนี้

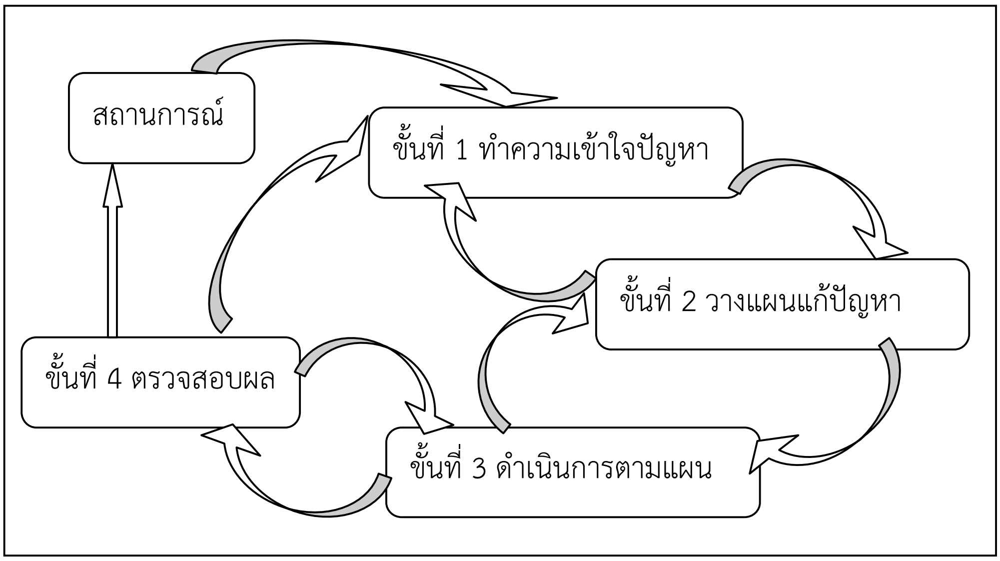


ภาพประกอบที่ 20
แสดงกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นแนวเส้นตรงตามแนวคิดของ Wilson และ Hadaway

แต่รูปแบบข้างต้น ทำให้ขาดการสืบสวนในการแก้ปัญหา ขาดการช่วยเหลือตนเอง ขาดการวางระบบความคิด และการวัดผลตนเอง ซึ่งมีข้อบกพร่องดังนี้

1. ทำให้เข้าใจได้ว่าการแก้ปัญหาเป็นเส้นตรงเป็นกระบวนการในแนวเส้นตรงเสมอ
2. การแก้ปัญหาเป็นชุดของขั้นตอน
3. ทำให้เข้าใจว่าการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่จำต้องฝึกและต้องกระทำซ้ำ ๆ
4. เป็นการเน้นการได้มาเพียงคำตอบ

จากข้อบกพร่องข้างต้น Wilson and Hadway (1993: 60 – 62) ได้ปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ของ Polya โดยนำเสนอรูปแบบที่เป็นการแก้ปัญหาซึ่งแสดงความเป็นพลวัต (Dynamic) แสดงดังแผนภาพที่ 21



ภาพประกอบที่ 21
แสดงกระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพลวัตตามแนวคิดของ
วิลสันและคณะ (Wilson et al., 1993: 60 - 62)

จากภาพประกอบที่ 21 อธิบายได้ดังนี้ เมื่อนำเสนอปัญหาต่อนักเรียน นักเรียนจะคิดและทำความเข้าใจกับปัญหา วางแผนกำหนดวิธีการแก้ปัญหา ในกระบวนการส่วนนี้จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจปัญหาดีขึ้น และอาจมีการปรับปรุงวางแผนใหม่ เมื่อวางแผนเสร็จเรียบร้อยแล้วนักเรียนต้องตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน และลงมือปฏิบัติดำเนินการตามแผน เมื่อพบว่าไม่สามารถทำตามแผนได้ นักเรียนจะย้อนกลับไปพยายามสร้างแผนใหม่ หรืออาจต้องกลับไปทำความเข้าใจปัญหาใหม่ หลังจากลงมือปฏิบัติดำเนินการตามแผนจนได้คำตอบที่คิดว่าเป็นคำตอบของปัญหาแล้วนักเรียนจะย้อนกลับไปพิจารณาว่า คำตอบที่ได้ถูกต้องหรือมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขต่าง ๆ ที่กำหนดในปัญหาหรือไม่ ซึ่งจะทำให้มีความเข้าใจปัญหามากยิ่งขึ้น การตรวจสอบย้อนกลับยังรวมถึงการพิจารณาหา

คำตอบของปัญหาใหม่ด้วยวิธีการอย่างอื่น ซึ่งจะต้องวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหาใหม่ การแก้ปัญหาหนึ่งด้วยวิธีการหลายอย่างจะทำให้มีโอกาสเปรียบเทียบวิธีการ ปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาให้ดียิ่งขึ้น

ทรูทแมนและลิชเทนเบิร์ก (Troutman and Lichtenberg, 1995: 4 – 7) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดพื้นฐานจากกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นของโพลยา ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ผู้แก้ปัญหาจะต้องมีความรู้ในสิ่งต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา สิ่งสำคัญในขั้นนี้คือ การตั้งคำถามตนเองเพื่อให้เข้าใจปัญหาอย่างลึกซึ้ง

2. กำหนดแผนในการแก้ปัญหา โดยกำหนดแผนอย่างน้อยหนึ่งแผน การกำหนดแผนไว้หลายแผน ทำให้สามารถเปรียบเทียบและเลือกใช้แผนที่คิดว่าน่าจะมีประสิทธิภาพมากที่สุด

3. ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่แก้ปัญหาลงมือทำตามแผนของตน ซึ่งแนะนำให้ทำงานเป็นกลุ่ม เพราะถ้าแต่ละคนดำเนินการตามแผนของตน คำตอบที่ได้สามารถนำมาตรวจสอบเปรียบเทียบกันและได้เรียนรู้สิ่งใหม่จากเพื่อน ๆ ในกลุ่ม หากทุกคนในกลุ่มใช้วิธีการแก้ปัญหาเดียวกัน ทั้งกลุ่มจะมีโอกาสช่วยเหลือกันในการแก้ปัญหาอย่างรอบคอบ ซึ่งจะทำให้งานเสร็จอย่างสมบูรณ์และรวดเร็ว

4. ประเมินผลและคำตอบ ซึ่งดำเนินการโดย

4.1 พิจารณาคำตอบมีความเป็นไปได้หรือไม่หรือสมเหตุสมผลหรือไม่

4.2 ตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้มีความสอดคล้องของปัญหาหรือไม่

4.3 ลองแก้ปัญหาใหม่ โดยวางแผนการอื่นแล้วเปรียบเทียบผลที่ได้

4.4 เปรียบเทียบคำตอบของตนเองกับคำตอบของเพื่อนคนอื่น ๆ

5. ขยายปัญหา ผู้แก้ปัญหาต้องค้นหารูปแบบทั่วไปของคำตอบของปัญหา ซึ่งต้องเข้าใจโครงสร้างของปัญหาอย่างชัดเจนจึงจะสามารถขยายปัญหาได้ การขยายปัญหาจะช่วยเสริมสร้างทักษะในการแก้ปัญหาซึ่งทำโดย

5.1 เขียนปัญหาที่คล้ายปัญหาเดิม

5.2 เสนอปัญหาใหม่ เพื่อที่ผู้แก้ปัญหาอาจค้นหารูปแบบทั่วไป กฎ หรือสูตรในการหาคำตอบ

6. บันทึกการแก้ปัญหา เพื่อสามารถรื้อฟื้นหรือทบทวนความพยายามของผู้แก้ปัญหาต่อไป สิ่งที่ควรจดบันทึก ได้แก่

6.1 แหล่งของปัญหา

6.2 ตัวปัญหาที่กำหนด

6.3 แนวคิดในการแก้ปัญหาหรือแบบแผนการคิดอย่างคร่าว ๆ

6.4 ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่นำมาใช้หรือสามารถนำมาใช้ได้

6.5 ข้อแนะนำเกี่ยวกับการขยายผลการแก้ปัญหา

สเติร์นเบอร์ก (Sternberg, 1999: 351-354) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาไว้ 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. การระบุปัญหา (Problem Identification) เพื่อกำหนดขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ควรระบุสาเหตุของปัญหาที่แท้จริงก่อน

2. การจำกัดความของปัญหา (Definition of Problem) เมื่อสามารถระบุปัญหาที่แท้จริงได้แล้ว จำเป็นต้องให้คำจำกัดความของปัญหา เพราะหากไม่มีการให้คำจำกัดความหรือคำจำกัดความของปัญหานั้นคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง โอกาสในการแก้ปัญหาได้สำเร็จจะลดน้อยลง

3. การสร้างกลยุทธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Constructing Strategy for Problem Solving) เป็นขั้นตอนในการวางแผนกลยุทธ์ต่าง ๆ และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาที่ซับซ้อนให้เห็นเป็นขั้นตอน หรือสังเคราะห์องค์ประกอบหลายชนิดที่มีความสัมพันธ์กันแล้วนำมาเชื่อมโยงกันเพื่อใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหา

4. การจัดระบบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Organizing Information about a Problem) เป็นการจัดระเบียบข้อมูลที่มีอยู่เพื่อนำมาใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จ หรือการสร้างภาพในใจ ที่ช่วยในการกำหนดลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาให้ชัดเจนยิ่งขึ้น

5. การจัดสรรทรัพยากรที่ใช้ในการแก้ปัญหา (Allocation of Resources) คนส่วนใหญ่จะเผชิญหน้ากับปัญหาโดยอยู่ในขอบเขตของทรัพยากรที่จำกัดในด้านต่าง ๆ การแก้ปัญหาแต่ละปัญหาต้องใช้ทรัพยากรในปริมาณที่แตกต่างกัน เช่น ปัญหาบางปัญหาต้องอาศัยระยะเวลานานในการแก้ปัญหา และต้องการเครื่องมือหลายชนิด ในขณะที่บางปัญหาอาศัยทรัพยากรเพียงเล็กน้อย ทั้งนี้ประสิทธิภาพของการจัดสรรทรัพยากรในการแก้ปัญหาจึงขึ้นอยู่กับความรู้ความชำนาญของแต่ละบุคคลด้วย

6. การตรวจสอบการแก้ปัญหา (Monitoring Problem Solving) การแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพจะต้องมีการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาอยู่ตลอดเวลา เพื่อให้รู้แน่ชัดว่าขั้นตอนต่าง ๆ ดำเนินไปอย่างถูกต้องและนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการหรือไม่ เพราะหากพบว่ามีข้อบกพร่องเกิดขึ้นแล้ว การตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาจะช่วยให้เราสามารถแก้ไขข้อบกพร่องได้ทันท่วงที

7. การประเมินผลการแก้ปัญหา (Evaluation Problem Solving)เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายหลังจากการแก้ปัญหาสิ้นสุดลง ซึ่งเป็นการประเมินความสำเร็จ และทบทวนการทำงาน

ในขั้นตอนต่าง ๆ บางครั้งการประเมินผลการแก้ปัญหานี้จะทำให้สามารถรู้ถึงกลยุทธ์ใหม่ที่จะนำไปปรับปรุงกระบวนการแก้ปัญหาในครั้งต่อไปให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

ดอสเซย์ (Dossey, 2005: 47) ได้เสนอกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา
2. จำแนกประเด็นปัญหาและวางแผนหาคำตอบ
3. จัดรูปแบบแสดงความหมายเงื่อนไขของโจทย์
4. เลือกกลวิธีการแก้โจทย์ปัญหา
5. ดำเนินการหาคำตอบ
6. ทบทวนคำตอบ
7. สื่อสารและขยายคำตอบ

ยุพิน พิพิธกุล (2530: 136) กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

เนื้อหา	....	โจทย์บอกอะไร
สร้างปัญหา	....	โจทย์ถามอะไร
ตอบปัญหา	....	แตกปัญหาออกเป็นข้อย่อย ๆ
สรุปปัญหา	....	นำข้อมูลที่แยกแยะมาหาข้อสรุปรวมขั้นสุดท้าย
ตรวจย้อน	....	ตรวจว่าทำตามที่โจทย์บอกครบถ้วนหรือไม่

ภาพประกอบที่ 22

แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของยุพิน พิพิธกุล (2530: 136)

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2547: 17) ได้สรุปกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งอาจจะใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ช่วย เช่น กราฟ แผนภูมิตาราง

2. แสวงหาความรู้เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ พิจารณาถึงเหตุและหาหนทางที่จะแก้ปัญหา

3. วางแผนในการแก้ปัญหาเป็นยุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา

4. แก้ปัญหา โดยดำเนินการตามแผนที่ได้วางไว้ ซึ่งอาจจะมีความจำเป็นต้องใช้การคำนวณช่วย

5. ตรวจสอบ เป็นการทบทวนเหตุผล ที่ได้ดำเนินการแก้ปัญหาไปแล้วนั้นว่า มีความเหมาะสมหรือไม่เพียงใด คำนวณถูกต้องหรือไม่ คำตอบมีความน่าเชื่อถือเพียงใด

รสอุบล ธรรมพานิชวงค์ (2545: 22) ได้สรุปขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ขั้นตอน คือ

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา โดยอาศัยทักษะการแปลความหมาย การวิเคราะห์ข้อมูล ว่าปัญหาถามอะไร กำหนดอะไรมาบ้าง จำแนกแยกแยะสิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหาและสิ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาให้แยกออกจากกัน

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา หาความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ทั้งที่เป็นสิ่งที่กำหนดให้และข้อมูลที่เป็นผลตามมาจากสิ่งที่กำหนดให้ หาวิธีการแก้ปัญหาโดยนำกฎเกณฑ์หลักการ ความคิดรวบยอด มาประกอบกับข้อมูลแล้วเสนอออกมาในรูปวิธีการ

3. ขั้นคำนวณคำตอบที่ถูกต้อง ตามแผนที่วางไว้ ต้องรู้จักวิธีคำนวณที่เหมาะสมตลอดจนตรวจสอบวิธีการและคำตอบที่ได้ ถ้าไม่พบคำตอบตามเงื่อนไขของปัญหาต้องกลับไปวางแผนแก้ปัญหาใหม่

กษมา วุฒิสารวัฒนา (2548: 50) ได้สรุปว่ากระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีขั้นตอนที่คล้ายกัน ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้ เริ่มต้นจากการทำความเข้าใจปัญหา การสร้างตัวแทนของปัญหา การคิดวิธีแก้ปัญหา การดำเนินการแก้ปัญหา และสุดท้ายคือการตรวจสอบการแก้ปัญหา

นุตริยา จิตตารมย์ (2548: 22 – 23) สรุปว่า กระบวนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จะประกอบด้วยขั้นตอนหลักคือ ศึกษาทำความเข้าใจโจทย์ปัญหา คิดวางแผนการแก้โจทย์ปัญหา ดำเนินการหาคำตอบตามแผนที่วางไว้ ตรวจสอบคำตอบที่ได้และขยายคำตอบเพื่อหาแนวทางอื่นในการแก้ปัญหาเดิม และสามารถเปรียบเทียบแต่ละแนวทางเพื่อให้ได้แนวทางที่ดีที่สุดและเหมาะสมในการหาคำตอบ

นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552: 100) จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

1. ขั้นทำความเข้าใจหรือวิเคราะห์ปัญหา เป็นขั้นที่ต้องวิเคราะห์โจทย์ว่าประเด็นปัญหาอยู่ตรงไหน โจทย์กำหนดอะไรมาให้และโจทย์ถามหาอะไร

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา เป็นขั้นที่พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่กำหนดให้กับสิ่งที่ต้องการหา โดยการนำทฤษฎี หลักการ/กฎ สูตร นิยาม ที่เรียนมากำหนดเป็นวิธีการ

ในการแก้ปัญหา

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ เป็นการดำเนินการตามวิธีการที่เลือกไว้จนกระทั่งได้คำตอบ สำหรับปัญหาที่มีการคิดคำนวณ ขั้นนี้เป็นขั้นที่ลงมือคิดคำนวณเพื่อหาคำตอบตามวิธีการทางคณิตศาสตร์

4. ขั้นตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบ โดยการพิจารณาตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาของตนตลอดจนตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ

ดังนั้นสรุปได้ว่า กระบวนการแก้ปัญหามีขั้นตอนหลัก ๆ 4 ขั้นตอน คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นแก้ปัญหา และขั้นตรวจสอบคำตอบและกระบวนการแก้ปัญหา

4.6 กลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ผู้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ดีควรเป็นผู้รู้เรื่องยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่พร้อมจะเลือกออกมาใช้ได้ทันทีทันใดที่เผชิญปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนั้น ผู้เรียนควรจะได้เรียนรู้หรือฝึกทักษะการใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ให้ชำนาญเพื่อจะได้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่อไป มีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งผู้วิจัยได้รวบรวมไว้ดังนี้

กรีน (Greenes, 1972 อ้างในยุพิน พิพิธกุล, 2530:134) ได้กล่าวถึงกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. วิธีการคาดคะเนหรือเดา เป็นการเสี่ยงคาดคะเน เพื่อจะได้หาสิ่งที่ต้องการอ้างอิงต่อไป

2. การทำให้เป็นอย่างง่าย เป็นการทำโจทย์ให้เป็นกรณีง่าย ๆ เท่าที่จะทำได้ แล้วค้นหารูปแบบและความสัมพันธ์ เพื่อขยายไปเรื่องที่ซับซ้อนต่อไป

3. การทดลองเพื่อแก้ปัญหา เช่น การโยนลูกเต๋า การสร้างรูป การวัด คำนวณ การสังเกตว่าผลการเปลี่ยนแปลงอย่างไร หรือการทดลองเพื่อเก็บข้อมูล

4. การสร้างแผนภาพ เช่น สอนเรื่องสมการโดยการเขียนภาพประกอบ ซึ่งช่วยให้โจทย์ปัญหาเป็นรูปธรรมที่เห็นได้ชัด มองเห็นแนวทางในการคิด

5. การทำตาราง เป็นการช่วยให้มองเห็นข้อที่เหมือนกัน หรือต่างกัน อันจะนำไปสู่การนำสรุป และการแก้ปัญหาได้

6. การเขียนกราฟ ซึ่งช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล เห็นแนวทางถึงสิ่งที่น่าจะเป็นไปได้

มัซเซอร์ และ ชวงเนซเซย์ (Musser and Shaughnessy (1980: 137-145) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาในโรงเรียนไว้ 5 ประการ ดังนี้

1. การทดสอบวิธีต่าง ๆ และตัดวิธีที่ผิดทิ้ง (Trial and error) เป็นวิธีการแก้ปัญหาที่ตรงที่สุด ประยุกต์ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลที่กำหนดให้ วิธีการนี้นำไปสู่เรื่องราวที่สัมพันธ์กับความรู้และความรู้ที่ใช้นั้นไม่กว้างมากนัก

2. การค้นหาแบบรูป (Patterns) เป็นการหาคำตอบโดยสังเกตจากตัวอย่างข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ คำตอบที่ได้จะเป็นรูปทั่วไปที่ได้จากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดให้นั้น

3. การแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า (Solving a simpler problem) เป็นการหาคำตอบโดยการทำปัญหาให้ง่ายลงจากปัญหาที่ซับซ้อน ทำให้สามารถกำหนดแนวคิดในการแก้ปัญหาและนำแนวคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหาที่กำหนดได้ วิธีการหนึ่งในการทำปัญหาให้ง่ายคือการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วน ๆ หรือเริ่มด้วยปัญหาที่มีระดับความซับซ้อนน้อยลง

4. การทำย้อนกลับ (Working backward) เป็นการหาคำตอบโดยเริ่มต้นพิจารณาจากสิ่งที่ปัญหาต้องการหรือสิ่งที่จะพิสูจน์แล้วเชื่อมโยงย้อนกลับไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

5. การสร้างสถานการณ์จำลอง (Simulation) เป็นการหาคำตอบโดยการทดลองแสดงสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อสามารถตัดสินใจบนฐานการวิเคราะห์ข้อมูล คำตอบที่ได้จากการทดลอง

ครูลิคและรุดนิค Krulik และ Rudnick (1982: 43) กล่าวว่า กลวิธีในการแก้ปัญหามีหลากหลายต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา กลวิธีหนึ่งอาจจะเหมาะสมกับปัญหาหนึ่งแต่บางปัญหาอาจไม่ใช่นอกจากนั้นบางปัญหาอาจจะจำเป็นต้องใช้หลายกลวิธีในการแก้ปัญหา และเสนอแนะกลวิธีในการแก้ปัญหาไว้ 8 ประการ ดังต่อไปนี้

1. การจำแนกแบบรูป (Pattern recognition)
2. การทำย้อนกลับ (Working backwards)
3. การเดาและตรวจสอบ (Guess and test)
4. การสร้างสถานการณ์จำลองหรือ ทดลอง (Simulation or experimentation)
5. การย่อความ (Reduction)
6. การแจกแจงรายการ (Exhaustive listing)
7. การใช้ตรรกศาสตร์เชิงอนุมาน (Logical deduction)
8. การแสดงความหมายข้อมูล (Representing data) โดยใช้
    8.1 กราฟ (Graph)
    8.2 สมการ (Equation)

8.3 นิพจน์เชิงพีชคณิต (Algebraic expression)

8.4 ตาราง (Table)

8.5 แผนภูมิ (Chart)

8.6 ไดอะแกรม (Diagram)

แมทลีน (Matlin, 1983: 225 – 229) ได้เสนอกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 5 วิธี

1. การใช้สัญลักษณ์ (Symbol) ถือเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากในการสร้างตัวแทนที่เป็นนามธรรมที่ไม่ซับซ้อนมากนัก

2. การเขียนรายงาน (List) สำหรับปัญหาที่ไม่สามารถแปลงข้อมูลให้เป็นสัญลักษณ์ได้ก็สามารถใช้การเขียนรายการแทนโดยเขียนเฉพาะข้อมูลสำคัญของปัญหา ซึ่งทำให้สามารถมองเห็นลักษณะของปัญหาได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

3. การใช้ตารางสัมพันธ์ (Matrices) เป็นตารางที่ชี้ให้เห็นถึงการเชื่อมโยงของข้อมูลของปัญหา ใช้ได้ดีกับปัญหาที่มีความซับซ้อน

4. การใช้กราฟ (Graphs) มีประโยชน์สำหรับปัญหาที่ไม่สามารถใช้สัญลักษณ์หรือการเขียนรายการ หรือการใช้ตารางสัมพันธ์ในการสร้างตัวแทนของปัญหา โดยที่การใช้กราฟยังสามารถแสดงการเคลื่อนไหวของสิ่งต่าง ๆ ได้ด้วย

5. การเขียนภาพ (Figure) เป็นการเขียนภาพประกอบ เพื่อสร้างความเข้าใจในปัญหา การเขียนภาพอาจเขียนจากการใช้จินตนาการ (Visual Imagery) ซึ่งมีประโยชน์ในการใช้เก็บข้อมูลที่ไม่มีกฎเกณฑ์ และช่วยขจัดรูปแบบเก่า ๆ ในการหาสิ่งที่เป็นตัวแทนของปัญหานอกจากนี้อาจเขียนภาพเป็นแผนภูมิหรือโครงร่างแทนความเข้าใจซึ่งในการสร้างตัวแทนของปัญหานั้นไม่อาจกล่าวได้ว่าวิธีใดเป็นวิธีที่ดีที่สุดเพราะบางวิธีไม่สามารถใช้กับบางปัญหาและบางปัญหาอาจต้องใช้หลายวิธีร่วมกัน

เคนเนดี้ (Kennedy (1984: 82), Hatfield, Edwards and Bitter (1993: 50 – 60) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ยุทธวิธีหาแบบรูป (Look for a Pattern) ยุทธวิธีนี้จะพิจารณาแบบรูปของส่วนแรกใน ลำดับของจำนวนหรือข้อมูลที่ให้มาก่อนแล้วจึงค้นหาไปอีก

2. ยุทธวิธีวิเคราะห์ให้เป็นปัญหาย่อย ๆ (Identify a Sub Goal) ในการวางแผนแก้ปัญหาบางปัญหา คำตอบของปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคำตอบของปัญหาที่คล้ายกันมาก ๆ หรือที่เคยพบมาแล้วอาจกลายเป็นเป้าหมายย่อย ๆ ของเป้าหมายพื้นฐานในการแก้ปัญหานั้นได้

3. ยุทธวิธีคิดย้อนหลัง (Work Backward) ปัญหาบางปัญหาอาจง่ายขึ้น ถ้าเริ่มต้นพิจารณาจากคำตอบหรือผลขั้นสุดท้าย และทำย้อนกลับ

4. ยุทธวิธีการสร้างแผนภาพ (Draw a Diagram) การวาดแผนภาพเป็นส่วนหนึ่งในการแก้ปัญหาในวิชาเรขาคณิต จะสร้างรูปเพื่อการเข้าใจซึ่งจำเป็นในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ปัญหาที่ไม่ใช่ปัญหาทางเรขาคณิตก็สามารถใช้การวาดรูปในการแก้ปัญหาได้ ยุทธวิธีนี้มีคุณค่าและประโยชน์ต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนเป็นวิธีการอันชาญฉลาดในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผล

5. การวาดภาพ กราฟและตาราง (Drawing Pictures, Graphs, and Table) ยุทธวิธีนี้จะช่วยให้ผู้เรียนมองเห็นภาพจากปัญหาที่ยุ่งยาก หรือปัญหาที่เป็นนามธรรม การวาดภาพ กราฟและตาราง เป็นการแสดงข้อมูลเชิงจำนวนให้ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ไม่ปรากฏโดยทันที ในการแก้ปัญหาจะใช้ยุทธวิธีสร้างตาราง เพื่อ

5.1 แจ้งกรณีที่เป็นไปไม่ได้ทั้งหมด

5.2 แจ้งกรณีบางกรณีที่จำเป็นและเพียงพอ

5.3 หาความสัมพันธ์ของข้อมูลตั้งแต่ 2 ข้อมูลขึ้นไป และ

5.4 หานัยทั่วไปของความสัมพันธ์

6. ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบ (Guess and Check) ในขั้นแรกจะเดาคำตอบและใช้เหตุผลดูความเป็นไปได้ แล้วตรวจคำตอบ ถ้าการเดาครั้งนั้นไม่ถูก ขั้นต่อไปคือการเรียนรู้เกี่ยวกับความเป็นไปได้ของคำตอบให้มากขึ้น แล้วเดาต่อไป

7. ตรวจสอบว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ (Insufficient Information) บางครั้งข้อมูลที่ให้มาไม่เพียงพอมีบางส่วนขาดหายไป

8. การตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวออก (Elimination of Extraneous Data) ปัญหาบางปัญหามีทั้งข้อมูลที่จำเป็นและไม่จำเป็น ผู้เรียนต้องตัดข้อมูลส่วนที่ไม่จำเป็นออกเพื่อที่จะให้ข้อมูลนั้นแคบลงแทนที่จะพยายามใช้ข้อมูลทั้งหมดที่ไม่มีความหมาย

9. พัฒนาสูตรและเขียนสมการ (Developing Formula and Writing Equations) สูตรที่สร้างขึ้นจะใช้ประโยชน์โดยการแทนจำนวนลงในสูตรเพื่อหาคำตอบ

10. เขียนแผนภูมิสายงาน (Flowcharting) การเขียนแผนภูมิสายงานจะช่วยให้เห็นกระบวนการของการแก้ปัญหา ซึ่งแผนภูมิสายงานหรือผังงานเป็นเค้าโครงที่แสดงรายละเอียดของขั้นตอน ที่ต้องดำเนินงานตามเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ต้องการก่อนที่จะไปแก้ปัญหา

11. ยุทธวิธีการพิจารณากรณีที่ง่ายกว่าหรือแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ (Simplifying the Problem) เป็นการพิจารณาสถานการณ์ที่ซับซ้อนโดยเริ่มพิจารณาจากกรณีง่าย ๆ ของปัญหานั้นก่อนหรือแบ่งปัญหาออกเป็นส่วน ๆ เพื่อลดระดับความซับซ้อนลงและแก้ปัญหาจากกรณีที่ง่าย ๆ นั้นก่อนแล้วนำความคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหาที่กำหนดให้

12. ยุทธวิธีแจงกรณีเป็นไปได้ (Account for all possibilities) ยุทธวิธีนี้ผู้เรียนจะ

ใช้ก่อนที่จะทราบคำตอบ ผู้เรียนอาจจะแจงความเป็นไปได้ทั้งหมด โดยนำมาเขียนเป็นรายการหรือสร้างตารางเหมาะสำหรับปัญหาที่มีจำนวนความเป็นไปได้ไม่มากนัก

13. เปลี่ยนมุมมองของปัญหา (Change your point of view) ปัญหาบางปัญหาต้องการเปลี่ยนสิ่งที่มีอยู่ในใจหรือหยุดความคิดนั้น ดังนั้น ต้องมองภาพสถานการณ์นั้นด้วยวิธีใหม่

ครูคชางค์และเชฟฟิลด์ (Cruikshank and Sheffield, 2000: 41 – 44) เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้

1. การเดาหรือตรวจสอบ (Guess and Check)

2. การหาแบบรูป (Look for a Pattern)

3. เขียนรายละเอียดของโจทย์ (Make a Systematic List)

4. สร้างและวาดรูปหรือแบบจำลอง (Make and Use a Drawing or Model)

5. กำจัดสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ (Eliminate Possibilities)

เรย์และคณะ (Reys et al, 2004: 124-130) ได้เสนอกลวิธีที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 10 ประการ คือ

1. ปฏิบัติเพื่อออกไปจากปัญหา (Act it out) เป็นกลวิธีนี้นักเรียนได้สัมผัสกับสถานการณ์ของโจทย์ปัญหา และนักเรียนได้เรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาจากสถานการณ์นั้น

2. ใช้ภาพหรือแผนภาพ (Make a drawing or diagram) เป็นการเขียนภาพหรือแผนภาพของข้อมูลตามที่โจทย์กำหนดให้

3. ค้นหาแบบรูป (Look for a pattern) เป็นการใช้แบบรูปของจำนวนหรือรูปภาพที่โจทย์กำหนดให้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

4. สร้างตาราง (Construct a table) เป็นการจัดระเบียบของข้อมูลในรูปแบบของตารางช่วยให้ผู้แก้โจทย์ปัญหามองเห็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้

5. จำแนกทุกกรณีที่เป็นไปได้ (Identify all possibilities) กลวิธีนี้มักใช้ร่วมกับกลวิธีสร้างตาราง และค้นหาแบบรูป ทำให้นักเรียนรู้ว่าคำตอบของโจทย์ปัญหาเป็นอะไรได้บ้าง

6. เดาและตรวจสอบ (Guess and check) เป็นการคาดเดาคำตอบและตรวจสอบคำตอบที่ได้ ผู้แก้ปัญหาจะมั่นใจว่าคำตอบที่ได้จากการเดาถูกต้องหรือไม่ จะต้องตรวจสอบคำตอบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดหรือไม่

7. ทำย้อนกลับ (Work backward) เป็นการหาคำตอบโดยพิจารณาจากข้อมูลสุดท้ายที่โจทย์กำหนดมาให้ ช่วยในการหาคำตอบที่โจทย์ถาม

8. เขียนประโยคเปิด (Write an open sentence) เป็นการฝึกหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคคำถาม ซึ่งมีลักษณะเหมือนคำทาย เพื่อใช้ในการหาคำตอบ

9. แก้ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือปัญหาที่คล้ายกัน (Solve a simpler or similar problem) เป็นการกำหนดปัญหาขึ้นมาใหม่ที่มีลักษณะที่ง่ายกว่า หรือคล้ายกัน โดยมีโครงสร้างของปัญหาเหมือนเดิม แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่ง่ายกว่าหรือคล้ายกันไปแก้โจทย์ปัญหาเดิม

10. เปลี่ยนจุดมุ่งหมายของปัญหา (Change your point of view) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาทีละตอน ทำให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหา

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2538: 21 – 71) ได้กล่าวถึงกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. กลยุทธ์เดาและตรวจสอบ เป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ปัญหากำหนดแล้วคาดเดาคำตอบของปัญหา หลังจากนั้นตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่โดยอาศัยพื้นฐานของเหตุผล จากการคาดเดาครั้งแรก

2. กลยุทธ์การวาดภาพ เป็นการแสดงสถานการณ์ ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ออกมาเป็นภาพเพื่อช่วยให้ผู้แก้ปัญหามีความเข้าใจปัญหาแจ่มชัดขึ้นทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ และสามารถกำหนดแนวในการแก้ปัญหาได้รวดเร็วขึ้น

3. กลยุทธ์สร้างตาราง เป็นการแจงแจงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ของสถานการณ์ที่ปัญหากำหนดโดยนำมาเขียนในรูปตาราง เป็นการจัดระบบข้อมูลทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลชัดเจน ซึ่งนำไปสู่การหาคำตอบของปัญหา

4. กลยุทธ์ใช้ตัวแปร แทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า ซึ่งจะเป็นโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับจำนวนหรือปริมาณ โดยสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่มีตัวแปรปรากฏอยู่ แล้วศึกษาหาคำตอบของปัญหาจากความสัมพันธ์นั้น

5. กลยุทธ์ค้นหารูปแบบ เป็นการศึกษาข้อมูลที่มีอยู่ แล้ววิเคราะห์ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านั้นแล้วคาดเดาคำตอบ และสรุปเป็นรูปแบบหรือกฎเกณฑ์ของข้อมูลเหล่านั้น ทำให้ได้คำตอบที่โจทย์ต้องการ

6. กลยุทธ์แบ่งกรณี เป็นการแบ่งปัญหาเป็นกรณีมากกว่า 1 กรณีทำให้แต่ละกรณีมีความชัดเจนมากขึ้น เมื่อหาคำตอบของทุกกรณีได้แล้วนำมาพิจารณาหาคำตอบของทุกกรณีร่วมกันจะได้ภาพรวมซึ่งเป็นคำตอบของปัญหา

7. กลยุทธ์การใช้เหตุผล เป็นการใช้ข้อมูลที่ปัญหากำหนดให้ เป็นเหตุบังคับให้เกิดผล ซึ่งต้องผสานกับความรู้ และประสบการณ์ต่าง ๆ ที่ผู้แก้ไขปัญหามีอยู่เพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการ

8. กลยุทธ์สร้างปัญหาขึ้นใหม่ เป็นการสร้างปัญหาที่มีโครงสร้างคล้ายกับปัญหาเดิม แต่มีความยุ่งยากน้อยกว่า ตลอดจนแบ่งเป็นปัญหาเดิมออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ที่สัมพันธ์กับปัญหาเดิม จะทำให้ผู้แก้ปัญหามองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาเดิม

9. กลยุทธ์สร้างแบบจำลอง เป็นการทำให้ปัญหามีความชัดเจนมากขึ้น เป็นการสื่อที่เป็นรูปธรรมมาแสดงสถานการณ์ของปัญหา และรวมไปถึงการใช้สื่อในการแก้ปัญหา

10. กลยุทธ์ทำย้อนกลับ ปัญหาบางชนิดสามารถแก้ไขง่ายกว่าถ้าเริ่มต้นแก้ปัญหาโดยพิจารณาจากผลลัพธ์สุดท้ายแล้วมองย้อนกลับมาสู่ตัวปัญหาอย่างมีขั้นตอน กลยุทธ์มองย้อนกลับใช้กระบวนการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุ ซึ่งจะต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่กำหนด

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2547: 18 – 20) ได้รวบรวมยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. มองภาพรวม ๆ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะของปัญหาทั้งหมด การมองภาพรวม ๆ เป็นการทบทวนภาพทั้งหมด ทำความเข้าใจเนื้อหา การทบทวนอาจทำได้โดยการอ่านหลาย ๆ รอบเพื่อที่จะได้ไม่หลงทาง มองภาพให้มุมกว้างจนกว่าจะเห็นหนทางแก้ไข ในกรณีที่คิดไม่ออกอาจจะเปลี่ยนมุมมองเสียใหม่

2. กำหนดหนทางไว้เลือกหลาย ทาง การหาทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดไว้หลาย ๆ ทาง เพื่อนำมาพิจารณาในรายละเอียดว่า ทางเลือกใดที่ดีและเป็นไปได้มากที่สุด การพิจารณาเพื่อตัดสินใจเลือกนั้นต้องกระทำอย่างรอบคอบ

3. กำจัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาทิ้งไป เหลือไว้แต่ข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยเฉพาะขีดเส้นใต้เนื้อหาหรือเรื่องราวที่สำคัญจากข้อมูลที่มีอยู่ พิจารณาทางเลือกที่เป็นไปได้โดยตัดหนทางที่เป็นไปไม่ได้หรือประโยคที่ไม่เกี่ยวข้องทิ้งไปเสียก่อน โดยใช้หลักตรรกศาสตร์แล้วค่อยพิจารณาตัดสินใจจากข้อมูลทั้งหมดที่มีอยู่ประกอบกัน

4. เลือกวิธีการในการคำนวณให้เหมาะ โดยวิเคราะห์จากข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาว่าจะใช้ข้อมูลข่าวสารใด กลวิธีที่สมควรนำมาใช้จึงจะได้ผล และควรจะใช้การคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร หาค่าราก ยกกำลัง หรือใช้ความรู้ทางสถิติ แคลคูลัส พีชคณิต กราฟ ฯลฯ อย่างใดมาช่วยในการคำนวณ

5. ใช้การเดาแล้วทดสอบ โดยใช้เหตุผลในการพิจารณาคำตอบควรจะเป็นเช่นใดการเดาจะต้องเดาอย่างมีหลักเกณฑ์ สมเหตุสมผล ไม่ลำเอียง เมื่อเดาแล้วต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบ การเดาจะมีประสิทธิภาพมากขึ้นถ้ามีเทคนิคบางอย่างช่วย เช่น การประมาณค่า การวิเคราะห์ข้อมูล การจำลองสถานการณ์ การพิจารณากรณีแวดล้อมมาประกอบการพิจารณา

6. การสร้างรูปแบบที่เป็นรูปธรรม ซึ่งจะช่วยให้มองเห็นปัญหาในลักษณะหลาย ๆ มิติ รูปแบบที่สร้างขึ้น จำลองขึ้นอาจจะเป็นคน วัตถุ สิ่งก่อสร้าง โครงสร้าง เครือข่าย เพื่อให้เกิดต้นแบบและสามารถนำไปหาความสัมพันธ์กับข้อมูลที่มีอยู่ หรือนำไปสู่คำตอบที่ต้องการได้

7. หาแบบรูปที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างมีระบบ ปัญหาบางปัญหาเรื่องราวบางเรื่องราว อาจจะมีลักษณะเป็นวงจร เป็นการเรียงลำดับ เป็นอนุกรมของตัวเลข เป็นรูปเรขาคณิต เป็นค่าของสัดส่วน เป็นลักษณะของการแปลงค่า เป็นคู่ลำดับ หรือเป็นฤดูกาล เป็นต้น การหาแบบรูปได้จะทำให้สามารถไขปัญหาได้

8. จัดระบบข้อมูลใหม่ หมายถึง การจัดระบบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นให้มีรูปที่ง่ายแก่การเข้าใจ เช่น ทำเป็นรายการ ทำเป็นตาราง ทำเป็นข้อสังเกต รวมข้อมูลเรื่องราวเดียวกันไว้ ตัดข้อมูลที่ฟุ่มเฟือยออกไป รวมทั้งให้บันทึกข้อมูลที่สูญหายไปซึ่งอาจจะเป็นเบาะแสให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9. สร้างภาพประกอบ เพื่อให้สามารถมองเห็นลักษณะของตัวปัญหาได้อย่างชัดเจน หากข้อมูลที่มีอยู่มีลักษณะที่เป็นการบรรยายความ เป็นตารางตัวเลขสามารจะทำให้ชัดเจนขึ้นได้โดยการสร้างภาพประกอบ โดยการเขียนกราฟประกอบคำอธิบาย เขียนรูปเรขาคณิตสเกตซ์ภาพลายเส้น เขียนเป็นไดอะแกรม จะทำให้มองเห็นปัญหาในลักษณะที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น

10. แยกปัญหาใหญ่ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ให้มีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาเดิม แต่อยู่ในรูปลักษณะที่ง่ายขึ้น เป็นการแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า มีตัวเลขที่ซับซ้อนน้อยกว่าแต่เป็นโจทย์ปัญหาลักษณะเดียวกัน เมื่อสามารถแก้ปัญหาที่เล็กกว่าได้จะมองเห็นแนวทางในการแก้ไขปัญหาที่เล็กกว่าได้จะมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาที่ยุ่งยากซับซ้อนมาขึ้นได้ ในทางพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เราใช้ Mathematical reduction อ้างอิงจากเรื่องย่อย ๆ มาสรุปเป็นเรื่องที่ใหญ่กว่าได้

11. ใช้ตรรกศาสตร์ในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาโดยใช้สามัญสำนึก ใช้หลักการและเหตุผล บ่อยครั้งที่พบว่าการแก้ปัญหาในบางครั้งที่ผู้ที่พยายามแก้ปัญหา อาจจะมองลึกซึ้งจนเกินไปและลืมนึกถึงความเป็นจริงตามธรรมชาติ ขาดการใช้สามัญสำนึกทำให้หาหนทางแก้ไขที่เหมาะสมไม่ได้ การถามว่า “ถ้าเป็นอย่างนี้แล้วจะเกิดอะไรขึ้นต่อไป” เป็นการโยงจากเหตุไปสู่ผลการใช้วิธีแบบอนุมานและอุปมาน เป็นวิธีการหนึ่งที่เป็นประโยชน์

12. คิดย้อนกลับ การแก้ไขปัญหาโดยเริ่มพิจารณาเหตุในบางครั้งไม่สามารถกระทำได้ง่ายนัก การสืบสาวจากผลย้อนหลังไปหาเหตุในบางครั้งสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าตัวอย่างการพิสูจน์เรขาคณิต ตรีโกณมิติ รวมทั้งการสืบสวนเรื่องราวต่าง ๆ เป็นต้น ในบางครั้งจะพบว่าสามารถเริ่มต้นจากผลลัพธ์ (ปลายทาง) เพื่อไปสู่เหตุ (ต้นทาง) ได้ง่ายและรวดเร็วมากขึ้น

13. ใช้สูตร ปัญหาหลายปัญหามีสูตรในการแก้ บางสูตรใช้ได้กับหลายปัญหาในการแก้ปัญหาจะต้องพิจารณาก่อนว่าสูตรใดบ้างที่มีความเกี่ยวข้อง และสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ ให้วิเคราะห์ปัญหาแล้วนำสูตรไปใช้ หลังจากนั้นจำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องของสูตรและการนำสูตรไปใช้อย่างถูกต้องกับเรื่องราวนั้น ๆ

14. ตั้งคำถามที่เหมาะสมโดยตนเองหรือโดยผู้อื่น สามารถใช้แง่คิดที่สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ คำถามที่เป็นประโยชน์ เช่น ทำไม เป็นไปได้อย่างไร ทำไมจึงเป็นเช่นนั้นจะช่วยให้เกิดความกระจ่างในปัญหามากขึ้น ช่วยให้สามารถจับใจความสำคัญของปัญหาได้ การตั้งคำถามและหาคำตอบจะสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้

15. คุย อภิปรายหรือระดมความคิด เป็นยุทธวิธีหนึ่งซึ่งทำให้ได้ความคิดหรือเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา เนื่องจากการคุยหรือการอภิปราย ทำให้เกิดการมองเห็นปัญหาจากมุมมองที่ต่างกันออกไป เกิดแนวทางในการแก้ปัญหาได้หลายจุด มีการเติมหรือแก้ไขในจุดบกพร่องที่มองจากบางมุมไม่เห็น นอกจากนั้นยังจะพบว่า คำพูดบางคำทำให้สะกดใจหรือเป็นกุญแจให้สามารถหาหนทางแก้ปัญหาได้

สมเดช บุญประจักษ์ (2550: 73 – 77) ได้รวบรวมยุทธวิธีที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การหารูปแบบ เป็นยุทธวิธีการแก้ปัญหาได้ดีแบบหนึ่ง ที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องวิเคราะห์และหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ แล้วคาดเดาคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย คำตอบที่ได้จะยอมรับว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องจะต้องผ่านการตรวจสอบยืนยันโดยใช้การพิสูจน์หรือการใช้เหตุผลแบบนิรนัย การแก้ปัญหาที่ใช้ยุทธวิธีการหาแบบรูป นิยมเขียนคำตอบของปัญหาในรูปแบบทั่วไป ซึ่งอาจจะเป็นแบบรูปของจำนวนหรือแบบรูปของรูปเรขาคณิต

2. การเขียนแผนผังหรือภาพประกอบ เป็นการเขียนผังหรือภาพต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหา เพื่อช่วยให้เห็นถึงความสัมพันธ์และแนวทางในการหาคำตอบ

3. สร้างรูปแบบหรือแบบจำลอง เป็นกลวิธีการแก้ปัญหาที่คล้ายกับการเขียนแผนภาพ แต่มีประโยชน์ที่ดีกว่าตรงที่นักเรียนสามารถเคลื่อนสิ่งที่นำมาจัดรูปแบบได้

4. สร้างตารางหรือกราฟ เป็นการจัดกระทำกับข้อมูลเพื่อให้ดูง่าย สะดวกต่อการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์อันจะนำไปสู่การพบรูปแบบหรือข้อชี้แนะอื่น ๆ ตารางอาจช่วยแสดงกรณีที่เป็นไปได้ของการแก้ปัญหานั้น ๆ

5. แจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด เป็นการแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหา ใช้ได้ดีกรณีที่มีจำนวนกรณีที่แน่นอน มักจะใช้ตารางช่วยในการแจกแจงกรณี

6. เขียนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ การเขียนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงสถานการณ์ทางปัญหา มีเป้าหมาย 2 ประการคือ เป็นการแสดงความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาและเป็นการแสดงให้รู้ว่าต้องคิดคำนวณอย่างไรในการแก้ปัญหา นักเรียนที่เขียนประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แสดงว่าเขาเข้าใจปัญหานั้นและนำไปสู่การดำเนินการหาคำตอบได้ถูกต้อง

7. การดำเนินการแบบย้อนกลับยุทธวิธีนี้เริ่มจากข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนสุดท้ายแล้วทำย้อนขั้นตอนกลับมาสู่ข้อความที่กำหนดเริ่มต้น เป็นการใช้กระบวนการเรื่องของการวิเคราะห์ที่พิจารณาจากผลย้อนกลับไปสู่เหตุ โดยพิจารณาจากเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับข้อมูลที่กำหนด การดำเนินการย้อนกลับใช้ได้ดีกับการแก้ปัญหาที่ต้องการอธิบายถึงขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบ เช่น การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

8. แบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ หรือเปลี่ยนมุมมองปัญหา บางปัญหามีความซับซ้อนหรือมีหลายขั้นตอน เพื่อความสะดวกอาจแบ่งปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ๆ เพื่อง่ายต่อการหาคำตอบแล้วนำผลการแก้ปัญหาย่อย ๆ นี้ไปตอบปัญหาที่กำหนด หรือบางปัญหาอาจต้องใช้การคิดและเปลี่ยนมุมมองที่ต่างไปจากที่คุ้นเคยที่ต้องทำตามขั้นตอนทีละขั้น

จากแนวคิดเกี่ยวกับกลวิธีการแก้ปัญหาที่นักการศึกษาได้กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กลวิธีในการแก้ปัญหานั้นมีกลวิธีที่หลากหลาย เช่น การใช้ภาพหรือแผนภาพ การค้นหาแบบรูป การสร้างตาราง การคาดเดาและตรวจสอบ ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องเลือกใช้กลวิธีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แต่ละกลวิธีให้เหมาะสมกับลักษณะของแต่ละปัญหา จึงจะทำให้การแก้ปัญหานั้นสำเร็จได้อย่างมีประสิทธิภาพ

4.7 ปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สิ่งที่มีความสำคัญประการหนึ่งในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ คือ ปัจจัยที่จะทำให้การแก้ปัญหาประสบความสำเร็จ ซึ่งได้มีผู้กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

คลายด์ (Clyde, 1967: 112) กล่าวเกี่ยวกับปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยสรุปได้แก่ วุฒิภาวะ ประสบการณ์และความสามารถในการอ่านของนักเรียน

เฮนนี (Henny, 1971: 223 – 224) ได้ศึกษาเกี่ยวกับปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่ามีปัจจัยต่าง ๆ ดังนี้

1. ความสามารถในการเข้าใจคำพูด
2. ความเข้าใจแนวคิดของปัญหา
3. การตีความของปัญหาอย่างมีเหตุผล
4. การคิดคำนวณที่ถูกต้อง

อดัมส์ เอลลิสและบีสัน (Adams, Ellis and Beeson, 1977: 174-175) กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. สติปัญญา

2. การอ่าน

3. ทักษะพื้นฐาน

ไฮเมอร์และทรูบลัด (Heimer and Trueblood, 1977: 30-32) กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ความรู้เกี่ยวกับศัพท์เฉพาะ การรู้คำศัพท์ในโจทย์จะช่วยให้นักเรียนเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา

2. ทักษะการคำนวณ

3. การแยกแยะข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้อง

4. การหาความสัมพันธ์ของข้อมูล

5. การคาดคะเนคำตอบ

6. การเลือกใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

7. ความสามารถในการค้นหาข้อมูลที่ขาดหายไป

8. ความสามารถในการเปลี่ยนปัญหาที่เป็นประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

ซาลิวสกี (Zalewski, 1978: 2804-A) กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ให้ประสบผลสำเร็จ สรุปได้ว่ามีปัจจัยต่าง ๆ ดังนี้

1. ความเข้าใจในการอ่านศัพท์ การตีความจากกราฟและตาราง

2. ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

3. ความสามารถในการใช้สัญลักษณ์

4. ความสามารถในการจัดกระทำ

5. การมีทักษะในการคำนวณ

สมาคมครูคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1991: 57) กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อความสามารถด้านนี้ คือ ทักษะการอ่านและการฟัง เนื่องจากผู้เรียนจะรับรู้ปัญหาได้จากการอ่านและการฟัง ผู้เรียนต้องอ่านอย่างรอบคอบ วิเคราะห์และทำความเข้าใจปัญหา โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับศัพท์นิยาม มโนมติและข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา เพื่อที่จะได้ตัดสินใจว่าควรทำอะไรและอย่างไร เป็นการแสดงออกถึงศักยภาพทางสมองของผู้เรียนในการนำมาเชื่อมโยงกับปัญหาที่เผชิญอยู่

2. ทักษะในการแก้ปัญหา เมื่อผู้เรียนได้ฝึกการแก้ปัญหาอยู่เสมอ ย่อมมีโอกาสที่จะพบปัญหาต่าง ๆ หลายรูปแบบ ทั้งที่มีโครงสร้างของปัญหาที่คล้ายคลึง หรือแตกต่างกัน การเผชิญกับปัญหาที่แปลกใหม่ การเลือกใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสมจะเป็นการสั่งสมประสบการณ์ในการแก้ปัญหา ทำให้สามารถวางแผนเพื่อกำหนดยุทธวิธีในการแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสม

3. ความสามารถในการคิดคำนวณและความสามารถในการใช้เหตุผล เมื่อทำความเข้าใจกับปัญหา และวางแผนการปัญหาเรียบร้อยแล้ว ก็ต้องลงมือปฏิบัติตาม แผนที่วางไว้ ซึ่งบางปัญหาต้องใช้การคิดคำนวณ บางปัญหาต้องใช้กระบวนการใช้เหตุผล ผู้เรียนต้องมีความเข้าใจในกระบวนการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เท่าที่จำเป็น และเพียงพอในระดับของตน

4. แรงขับ ในการแก้ปัญหาผู้เรียนจะพบปัญหาที่แปลกใหม่หรือที่ไม่เคยพบเจอมาก่อน ปัญหาที่ไม่สามารถหาคำตอบในทันทีทันใด ต้องคิดวิเคราะห์อย่างเต็มที่เพื่อจะหาคำตอบให้ได้ จึงจำเป็นที่ผู้เรียนต้องมีแรงขับที่จะสร้างพลังในการคิด ซึ่งแรงขับนี้มาจากความสนใจ เจตคติ แรงจูงใจ ใฝ่สัมฤทธิ์ ความสำเร็จ ตลอดจนความซาบซึ้งในการแก้ปัญหา ซึ่งแรงขับนี้ผู้เรียนต้องใช้เวลาในการบ่มเพาะมายาวนาน

5. ความยืดหยุ่น การจะเป็นนักแก้ปัญหาที่ดี ผู้เรียนต้องมีความยืดหยุ่นในการคิด คือ ไม่ยึดติดกับรูปแบบ การแก้ปัญหาแบบใดแบบหนึ่ง หรือยึดติดรูปแบบที่ตนเองคุ้นเคย แต่ต้องยอมรับรูปแบบและวิธีการใหม่ ๆ อยู่เสมอ ความยืดหยุ่นเป็นความสามารถในการปรับกระบวนการแก้ปัญหา โดยบูรณาการ ความเข้าใจ ทักษะและความสามารถในการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพ

6. ความรู้พื้นฐาน ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีความเชื่อมโยงกับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ผู้เรียนต้องมี ความรู้พื้นฐานที่ดีพอ สามารถนำมาใช้ได้อย่างเหมาะสมสอดคล้องกับสาระของปัญหาระดับสติปัญญา การแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูง สติปัญญาจึงเป็นสิ่งสำคัญยิ่งประการหนึ่งใน การแก้ปัญหา ซึ่งมีส่วนสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหา ผู้ที่มีสติปัญญาดี จะมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้ดีกว่าผู้ที่มีสติปัญญาที่ด้อยกว่า

7. การอบรมเลี้ยงดู ผู้เรียนที่มาจากครอบครัวที่มีการเลี้ยงดูแบบประชาธิปไตย ให้โอกาสแสดงความคิดเห็น คิดและตัดสินใจได้ด้วยตนเอง มีแนวโน้มที่จะมีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงกว่า ผู้เรียนที่มาจากครอบครัวที่เลี้ยงแบบปล่อยปละละเลย หรือเข้มงวดเกินไป

8. วิธีสอนของผู้สอน การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิดอย่างอิสระ มีเหตุผล ให้ ความสำคัญกับการคิดของผู้เรียน ย่อมส่งเสริมให้ผู้เรียน มีความสามารถในการแก้ปัญหาดีกว่า แบบที่บทบาทการเรียนการสอนตกอยู่ที่ผู้สอนแต่เพียงฝ่ายเดียว นอกจากนี้ การจัดสภาพแวดล้อม ก็มีผลที่เอื้อต่อการพัฒนาความสามารถของผู้เรียน เช่นกัน

เฮดเดนส์และสเปียร์ (Heddens and Speer, 1992: 34-35) กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. รูปแบบการรับรู้
2. ความสามารถภายในตัวบุคคล
3. เทคนิคการประมวลผลข้อมูล
4. พื้นฐานทางคณิตศาสตร์
5. ความต้องการที่จะหาคำตอบ
6. ความมั่นใจในความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหา

บารูดี (Baroody, 1993: 2-10) กล่าวเกี่ยวกับปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. องค์ประกอบด้านความรู้ความคิด ซึ่งประกอบด้วยความรู้เกี่ยวกับมโนมติและยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

2. องค์ประกอบด้านความรู้สึก เป็นแรงขับในการแก้ปัญหาและแรงขับนี้มากจากความสนใจ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความพยายามหรือความตั้งใจและความเชื่อของนักเรียน

3. องค์ประกอบด้านการสังเคราะห์ความคิด เป็นความสามารถในการสังเคราะห์ความคิดของตนเองในการแก้ปัญหาซึ่งนักเรียนจะตอบตนเองได้ว่าทรัพยากรอะไรบ้างที่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาและจะติดตาม ควบคุมทรัพยากรเหล่านั้นได้อย่างไร

ครูคชางและเชฟเฟิลด์ (Cruikshank and Sheffield, 2000: 40) กล่าวถึงปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์
2. ความเชื่อของนักเรียนเกี่ยวกับธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์
3. ความเชื่อของนักเรียนเกี่ยวกับความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์ของตนเอง
4. ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน
5. ความสามารถทางสมองของนักเรียน

วินัย ดำสุวรรณ (2529: 28) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาของบุคคลจะสูงหรือต่ำขึ้นอยู่กับปัญหาที่บุคคลนั้นได้รับและตัวของผู้แก้ปัญหาเองว่ามีพื้นฐานความรู้ประสบการณ์เดิมและวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมมากน้อยเพียงไร

กำจร มุนีแก้ว (2539: 19) สรุปปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ 5 ประการ ดังนี้

1. ความสามารถในการรวบรวมข้อมูล

2. ความสามารถในการเปลี่ยนปัญหาที่เป็นประโยคสัญลักษณ์

3. ความสามารถในการหาความสัมพันธ์ของข้อมูล

4. ความสามารถในการคำนวณ

5. ความสามารถในด้านความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

6. ความเข้าใจในการอ่านคำศัพท์ การตีความจากกราฟและตาราง

7. ความสามารถในการคาดคะเนคำตอบ

8. ความสามารถค้นหาข้อมูลที่ขาดหายไป

กรมวิชาการ (2544: 106-107) กล่าวถึงปัจจัยสำคัญที่มีอิทธิพลต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ความซับซ้อนของโจทย์ปัญหา ข้อมูลที่กำหนดให้มีจำนวนมาก

2. ความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหา

3. การใช้วิธีการแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง

4. การเริ่มต้นแก้ปัญหา นักเรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นอย่างไร จะต้องทำอะไรก่อน

5. ข้อมูลที่กำหนดให้ไม่เพียงพอ

6. เจตคติของนักเรียนที่มีต่อการแก้ปัญหา เมื่อนักเรียนประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหา นักเรียนจะมีกำลังใจที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ

7. ประสบการณ์ในการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละคนแตกต่างกัน การที่จะเป็นนักแก้ปัญหาที่ดีจะต้องได้รับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งคล้ายกับการที่จะเป็นนักศิลปะที่เก่ง นักเล่นกอล์ฟฝีมือเยี่ยมก็ต้องฝึกฝนฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอ

จากที่กล่าวมา สรุปปัจจัยที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

1. การสอนของครู

2. ความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน รวมถึงความรู้พื้นฐานประสบการณ์

3. ความสามารถในการเลือกวิธีแก้ปัญหาที่เหมาะสมของนักเรียน

4. ความสามารถในการอ่านของนักเรียน

5. เจตคติของนักเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์

4.8 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและผู้ที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงแนวทางในการจัดการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

บิทเทอร์ (Bitter, 1990: 43-44) เสนอวิธีการสอนของครูเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. ควรเลือกปัญหาที่น่าสนใจและไม่ยากหรือง่ายจนเกินไปมาสอนนักเรียน

2. ควรแบ่งนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยๆเพื่อให้ร่วมกันแก้ปัญหาซึ่งเป็นการฝึกให้นักเรียนรู้จักการทำงานร่วมกัน

3. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่าโจทย์กำหนดข้อมูลอะไรมาให้ ซึ่งสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาและต้องใช้ข้อมูลอื่นใดบ้างในการแก้ปัญหานั้น ๆ

4. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่าปัญหาถามอะไร ถ้าไม่สามารถบอกได้ให้อ่านปัญหาข้อนั้นใหม่ และหากจำเป็นจริงๆให้ครูอธิบายความหมายของคำที่ใช้ในปัญหาข้อนั้นให้นักเรียนทราบ

5. ควรให้ฝึกการแก้ปัญหาหลาย ๆ รูปแบบ เพื่อไม่ให้รู้สึกเบื่อกับการแก้ปัญหาที่ซ้ำซากและไม่ท้าทายความสามารถ

6. ควรให้นักเรียนฝึกแก้ปัญหาบ่อย ๆ จนเคยชินว่าเป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการเรียนการสอน

7. ควรส่งเสริมให้นักเรียนแก้ปัญหาหลายๆข้อ โดยใช้วิธีการเดียวกัน เพื่อเป็นการฝึกทักษะและส่งเสริมให้ใช้การแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธีในข้อเดียวกัน เพื่อให้เห็นว่ายังมีวิธีการอื่น ๆ อีกที่จะใช้แก้ปัญหาในข้อนั้นได้

8. ควรช่วยเหลือนักเรียนในการเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสมในข้อนั้น ๆ

9. ควรให้นักเรียนพิจารณาว่าปัญหาในข้อนั้นคล้ายกับปัญหาที่เคยพบมาก่อนหรือไม่

10. ควรให้เวลานักเรียนในการแก้ปัญหา อภิปรายผลการแก้ปัญหาและวิธีดำเนินการแก้ปัญหา

11. ควรให้นักเรียนฝึกการคาดคะเนคำตอบและทดสอบคำตอบที่ได้เพื่อประหยัดเวลาในการแก้ปัญหา

สมาคมครูคณิตศาสตร์ในสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1991: 57) เสนอแนวทางการจัดสภาพแวดล้อมที่จะเอื้อให้เกิดการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. เป็นบรรยากาศที่ยอมรับและเห็นคุณค่าของแนวคิด วิธีการคิดและความรู้สึกของนักเรียน

2. ให้เวลาสำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์

3. ส่งเสริมให้นักเรียนทำงานเป็นรายบุคคลและร่วมมือกัน

4. ส่งเสริมให้นักเรียนใช้ความสามารถในการกำหนดปัญหาและสร้างข้อคาดเดา

5. ให้นักเรียนให้เหตุผลและสนับสนุนแนวคิดด้วยข้อความทางคณิตศาสตร์

กอนซาเลส (Gonzales, 1994: 74) ให้แนวคิดโดยสรุปได้ว่า บรรยากาศที่ส่งเสริมการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ต้องเป็นบรรยากาศที่ทำให้ผู้เรียนรู้สึกสะดวกสบายในการแสดงแนวคิด ไม่เข้มงวด เอาจริงเอาจังจนเกิดความตึงเครียด เพราะถ้าผู้เรียนเกิดความรู้สึกกลัวในสิ่งที่ทำผิดพลาด หรือกลัวถูกหัวเราะเยาะจากเพื่อน ผู้เรียนจะไม่กล้าซักถาม ไม่กล้าแสดงความคิดเห็น ฉะนั้น ผู้สอนจะต้องจัดบรรยากาศของชั้นเรียนที่ทำให้ผู้เรียนมีความรู้สึกเป็นอิสระเป็นบรรยากาศที่ส่งเสริมให้มีการสำรวจ สืบค้น ให้เหตุผลและสื่อสารกัน

ประกาย วิโรจน์กุล (2532: 17) กล่าวถึงแนวการสอนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา สรุปได้ดังนี้

1. ผู้เรียนต้องมีส่วนร่วมให้มากที่สุด ไม่ใช่เป็นเพียงผู้ฟังเท่านั้น

2. บรรยากาศการเรียนต้องเป็นอิสระ เปิดโอกาสและกระตุ้นให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็น

3. มีการสอนอภิปรายหรือค้นคว้าด้วยตนเองมากขึ้น

สิริพร ทิพย์คง (2536) เสนอแนะกิจกรรมเสริมสร้างทักษะการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

1. เลือกปัญหาที่ช่วยกระตุ้นความสนใจของนักเรียน ซึ่งเป็นโจทย์ที่นักเรียนมีประสบการณ์ในเรื่องเหล่านี้

2. ทดสอบความรู้พื้นฐานและทบทวนทักษะที่ขาดไปก่อนลงมือสอนการแก้ปัญหา

3. ให้อิสระในการคิดแก่นักเรียนและกระตุ้นให้นักเรียนคิดว่าจะสามารถใช่ความคิดรวบยอด ทักษะและหลักการใดในการแก้โจทย์ปัญหานั้นๆ

4. สอนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล โดยให้มีแบบฝึกหัดหลายระดับ ทั้งยาก ปานกลาง และง่าย เพื่อให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเป็นการเสริมกำลังใจให้กับนักเรียน

5. ทดสอบว่านักเรียนเข้าใจโจทย์ปัญหานั้น ๆ โดยการถามถึงสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการ

6. ฝึกให้นักเรียนรู้จักหาคำตอบโดยการประมาณก่อนการคิดคำนวณ

7. แนะให้นักเรียนคิดหาความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหาโดยการวาดรูปหรือแผนภาพ

8. ช่วยนักเรียนในการหาข้อมูลจากการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และเทียบเคียงกับโจทย์ที่นักเรียนเคยพบมาก่อน

9. สนับสนุนให้นักเรียนคิดวิธีการแก้ปัญหาด้วยวิธีของนักเรียนเอง แล้วอภิปรายหาวิธีการที่ถูกต้องเหมาะสม

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2538: 66 -67) ได้เสนอวีการสอนของครูโดยพิจารณาตามกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา เพื่อนำมาเป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1 ควรพัฒนาทักษะการอ่าน โดยให้นักเรียนฝึกอ่านและทำความเข้าใจข้อความในปัญหาที่ครูยกมาเป็นตัวอย่างในการสอนก่อนที่จะมุ่งไปที่วิธีทำเพื่อหาคำตอบ โดยอาจมีการฝึกเป็นรายบุคคลหรือฝึกเป็นกลุ่ม อภิปรายร่วมกันถึงสาระสำคัญของโจทย์ปัญหา ความเป็นไปได้ของคำตอบที่ต้องการ ความพอเพียง หรือความมากเกินไปของข้อมูลที่กำหนดให้

1.2 ควรใช้กลวิธีช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจ เช่น การเขียนภาพ เขียนแผนภาพ หรือสร้างแบบจำลอง เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหา จะทำให้มีความเป็นรูปธรรมมากขึ้น สามารถเข้าใจได้ง่ายขึ้น

1.3 ควรใช้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน มาให้นักเรียนฝึกทำเพื่อความเข้าใจ เช่น การนำปัญหาที่กำหนดข้อมูลให้เกินความจำเป็น หรือกำหนดข้อมูลให้ไม่เพียงพอมาให้ นักเรียนฝึกวิเคราะห์ข้อมูลว่า ข้อมูลที่กำหนดให้ข้อมูลใดใช้ได้บ้าง หรือหาว่าข้อมูลที่กำหนดให้เพียงพอหรือไม่

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา

2.1 ต้องไม่บอกวิธีการแก้ปัญหากับนักเรียนโดยตรง แต่ควรใช้วิธีการกระตุ้นให้คิดด้วยตนเอง เช่น การใช้คำถามนำ โดยอาศัยข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ หยุดใช้คำถามเมื่อนักเรียนมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา

2.2 ควรส่งเสริมให้นักเรียนคิดออกมาดัง ๆ คือ สามารถบอกให้คนอื่นๆ ทราบว่าตนเองคิดอะไร การคิดออกมาดัง ๆ อาจอยู่ในรูปการบอกหรือเขียนแผนภาพ และแบบแผนแสดงลำดับขั้นตอน การคิดออกมาให้ผู้อื่นทราบ ทำให้เกิดการอภิปรายเพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

2.3 ควรสร้างลักษณะนิสัยของนักเรียนให้รู้จักคิดวางแผนก่อนลงมือทำสิ่งใดเสมอ ๆ เพราะจะทำให้สามารถจัดหาปัญหามาให้นักเรียนฝึกคิดบ่อย ๆ ซึ่งต้องเป็นปัญหาที่ท้าทายและน่าสนใจ

2.4 ควรส่งเสริมให้รู้จักใช้กลวิธีในการแก้ปัญหา แต่ละข้อให้มากกว่าหนึ่งวิธี เพื่อให้นักเรียนมีความยืดหยุ่นในการคิดและจะมีโอกาสได้ฝึกการวางแผนมากขึ้น

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน

ควรฝึกให้นักเรียนลงมือแก้ปัญหา ดำเนินการตามแผนที่วางไว้และควรให้นักเรียนฝึกการตรวจสอบการวางแผนก่อนที่จะลงมือทำตามแผน โดยพิจารณาความเป็นไปได้ ความถูกต้องของแผนที่วางไว้และพิจารณาว่าวิธีการเหมาะสมถูกต้องกับการแก้ปัญหานั้นๆ หรือไม่

4. การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบผล / คำตอบ

4.1 ควรกระตุ้นให้เห็นความสำคัญของการตรวจสอบวิธีทำและคำตอบให้เคยชินโดยครูอาจสร้างกิจกรรมให้นักเรียนได้ฝึกการตรวจสอบความถูกต้อง หาข้อบกพร่องจากการแสดงการแก้ปัญหาที่ครูยกตัวอย่างมาให้

4.2 ควรกระตุ้นให้รู้จักตีความหมายของคำตอบที่ได้ว่ามีความหมายสอดคล้องกับปัญหาหรือไม่

4.3 ควรสนับสนุนให้ทำแบบฝึกหัด โดยใช้วิธีการหาคำตอบได้มากกว่าหนึ่งวิธี เพื่อเป็นการตรวจสอบวิธีการที่ใช้นั้นกับวิธีการอื่นที่สามารถใช้หาคำตอบในปัญหานั้นได้อีก

4.4 ควรให้นักเรียนฝึกหัดสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียน เพื่อช่วยทำให้มีความเข้าใจในโครงสร้างของปัญหา ทำให้สามารถมองเห็นแนวทางในการคิดแก้ปัญหาด้วยวิธีอื่น ๆ ได้

อัมพร ม้าคนอง (2547: 67) ได้กล่าวถึงนักการศึกษาที่ได้เสนอแนวทางที่คล้ายคลึงกันในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาให้ผู้เรียน ซึ่งสามารถสรุปเป็น 3 แนวทาง (Baroody: 1993; Kilpatrick: 1989) ดังนี้

1. การสอนผ่านการแก้ปัญหา (Teaching via problem solving) เป็นการสอนความรู้หรือพัฒนาทักษะใด ๆ โดยใช้ปัญหาเป็นสื่อหรือเครื่องมือในการเรียนรู้ เช่น การให้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนวิเคราะห์ แก้ปัญหา และเรียนรู้สิ่งใหม่

2. การสอนให้แก้ปัญหา (Teaching for problem solving) เป็นการสอนที่เน้นการฝึกให้ผู้เรียนใช้กระบวนการแก้ปัญหาที่หลากหลายและมีโครงสร้างแตกต่างกัน เพื่อให้เกิดประสบการณ์ในการแก้ปัญหามากพอที่จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้

3. การสอนกระบวนการแก้ปัญหา (Teaching about problem solving) เป็นการสอนให้ผู้เรียนเข้าใจและเรียนรู้เกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา เทคนิค และกลวิธีการแก้ปัญหา เช่น การสอนกระบวนการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์

สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 64) กล่าวไว้โดยสรุปได้ว่า เป้าหมายของการพัฒนาคือ เมื่อกำหนดสถานการณ์ปัญหามาให้ผู้เรียนคิดหาคำตอบ โดยทำความเข้าใจปัญหาวางแผนแก้ปัญหา ดำเนินแก้ปัญหา และตรวจสอบผล โดยฝึกตามขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ฝึกให้ผู้เรียนอ่านโจทย์อย่างละเอียด แล้วทำความเข้าใจ จำแนกสถานการณ์หรือข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ โดยมุ่งให้ผู้เรียนสามารถตอบคำถาม ต่อไปนี้ โจทย์ให้ข้อมูลอะไร มีเงื่อนไขอย่างไร โจทย์ต้องการหาอะไร โดยอาจเริ่มจากการตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบ ต่อไปจึงให้ผู้เรียนฝึกทำความเข้าใจเอาเอง

2. การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา ฝึกให้ผู้เรียนเชื่อมโยงหรือมองหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่จำเป็นกับสิ่งที่โจทย์ต้องการให้ผู้เรียนบอกความหมายอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล และแทนข้อมูลโดยใช้วิธีต่าง ๆ เช่น ใช้แผนภาพ ตาราง หรือเทคนิคอื่น ๆ เพื่อสร้างความกระจ่างชัด และเห็นเป็นรูปธรรม แล้วจึงแปลงเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ หรืออาจแปลความในโจทย์ปัญหา ให้อยู่ในรูปประโยคทางคณิตศาสตร์เลย หากเข้าใจโจทย์ปัญหาดีแล้ว

3. การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน ฝึกให้ผู้เรียนรู้จักประมาณคำตอบ โดยการคิดในใจ แล้วดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ความรู้ และทักษะที่มีอยู่ก่อนแล้ว การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบผล ฝึกให้ผู้เรียนรู้จักการตรวจสอบคำตอบของปัญหา คือตรวจสอบคำตอบที่ได้กับคำตอบที่ประมาณในใจ ตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีที่แตกต่างกัน ตรวจสอบความถูกต้องในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา

บุญเพ็ญ บุบผามาตะนัง (2542: 40-43) เสนอบัญญัติ 9 ประการในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การวิเคราะห์ผู้เรียนเพื่อศึกษาว่านักเรียนแต่ละคนมีความสามารถอยู่ในระดับใดแตกต่างกันขนาดไหน มีจุดเด่นจุดด้อยตรงไหน

2. การเลือก-สร้างโจทย์ปัญหา ควรเป็นเนื้อเรื่องที่นักเรียนสนใจ สอดคล้องกับเรื่องที่กำลังเรียนและเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน สถานการณ์ในโจทย์ควรเป็นเรื่องที่สามารถใช้สื่อที่เป็นของจริงหรือของจำลองประกอบการสอนได้ ภาษาที่ใช้ควรเหมาะสมกับวัย ไม่ใช้ถ้อยคำฟุ่มเฟือยซับซ้อน

3. การวิเคราะห์โจทย์ เป็นขั้นตอนสำคัญในการเรียนการสอนโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เพราะหากผู้เรียนสามารถแยกแยะได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้ โจทย์ต้องการทราบอะไร สิ่งที่โจทย์กำหนดให้นั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไร มีข้อมูลส่วนใดที่ไม่จำเป็นก็จำทำให้ผู้เรียนมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน

4. การเขียนประโยคสัญลักษณ์ ประโยคสัญลักษณ์ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์

อันประกอบด้วยตัวเลข เครื่องหมายแทนจำนวนและข้อความก่อนที่นักเรียนจะสามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ควรจะได้ทราบความหมายและสัญลักษณ์ของคำต่าง ๆ เช่นบวก ลบ คูณ หาร เท่ากับ ไม่เท่ากับ มากกว่า น้อยกว่า หลังจากนั้นจึงเริ่มการฝึกเขียนประโยคสัญลักษณ์ โดยอาจดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

4.1 ครูเขียนโจทย์บนกระดานดำแล้วให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์

4.2 ครูอ่านโจทย์ให้นักเรียนฟัง แล้วให้นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์

4.3 ครูเขียนประโยคสัญลักษณ์บนกระดานแล้วให้นักเรียนเขียนโจทย์ตาม เป็นต้น

5. การประมาณคำตอบ การประมาณคำตอบ คือ กระบวนการหาค่าโดยประมาณ เพื่อนำไปสู่การตัดสินใจ หรือพิจารณาความเป็นไปได้ของผลลัพธ์ การประมาณคำตอบจึงเป็นทักษะอย่างหนึ่งที่ครูควรฝึกให้นักเรียนฝึกปฏิบัติจนเกิดเป็นนิสัยก่อนลงมือแก้ปัญหาทุกครั้ง โดยอาจเริ่มจากการนำโจทย์ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันหรือเรื่องราวที่กำลังอยู่ในความสนใจมาให้นักเรียนฝึกคิดหาคำตอบโดยไม่ต้องเขียน มีการเสริมแรงเพื่อกระตุ้นให้คิดแก้ปัญหาที่ยากขึ้น

6. การเสริมสร้างทักษะการคิดคำนวณ ทักษะการคิดคำนวณ คือ การที่นักเรียนสามารถบวก ลบ คูณ หาร ได้อย่างถูกต้องแม่นยำและรวดเร็ว ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การฝึกทักษะการคำนวณเป็นส่วนสำคัญที่ควรฝึกให้เกิดขึ้นกับนักเรียน โดยการจัดกิจกรรมหลาย ๆ อย่างที่จะส่งเสริมให้นักเรียนคิดและลงมือปฏิบัติ โดยเริ่มจากปัญหาที่ง่ายและใกล้ตัว ให้การเสริมแรงเป็นระยะ ๆ จนเกิดเป็นนิสัย สามารถคิดคำนวณได้อย่างถูกต้อง แม่นยำและรวดเร็ว

7. ฝึกการแก้ปัญหาหลาย ๆ วิธี โจทย์เดียวกันอาจมีวิธีการคิดหาคำตอบได้หลายวิธี ดังนั้น ครูไม่ควรจำกัดขอบเขตของการคิดว่าจะต้องทำตามวิธีการและขั้นตอนที่ครูสอนเท่านั้นเพราะการทำตามตัวอย่างหรือเลียนแบบโดยขาดความเข้าใจ นักเรียนจะไม่สามารถแก้ปัญหาที่มีข้อความแตกต่างจากที่เคยพบในห้องเรียนได้ ในทางกลับกัน ควรส่งเสริมนักเรียนที่มีแนวคิดแตกต่างออกไปจากที่ครูสอน แต่สามารถหาคำตอบได้ถูกต้องตรงกันกับวิธีที่ครูสอน

8. การพัฒนาความสามารถทางภาษา เนื่องจากโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ประกอบด้วยข้อความและตัวเลข สาเหตุหนึ่งที่นักเรียนไม่สามารถทำโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้นั้น เนื่องจากขาดความเข้าใจภาษา ขาดทักษะในการอ่าน การเก็บใจความ และความหมายของคำต่าง ๆ เช่น คำว่า รวม ผลต่าง หักออก ใช้ไป หามาเพิ่ม มากกว่า น้อยกว่า หรือแม้กระทั่งความเข้าใจหน่วยในการชั่งตวง วัด ตลอดจนคำย่อต่าง ๆ ซึ่งครูต้องนำไปสอนให้เกิดความสัมพันธ์กันระหว่างวิชาภาษาไทยกับคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ ความสามารถทางภาษาไทยมาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

9. การใช้สื่อประกอบการเรียนการสอน เป็นสิ่งจำเป็นที่ครูควรใช้ประกอบการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เพราะจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมมากขึ้นช่วยในการจินตนาการและการคิดค้นหาคำตอบ สื่อการสอนอาจเป็นของจริง เช่น ไม้ไอศกรีม ฝาน้ำอัดลม ก้อนหิน เป็นต้น ส่วนสื่อที่เป็นรูปภาพอาจตัดจากหนังสือพิมพ์ ปฏิทิน วาดขึ้นเอง เป็นต้น หลังจากเห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจและสามารถหาคำตอบได้อย่างถูกต้องแล้วก็ฝึกให้นักเรียนคิดแก้ปัญหาในใจเพื่อเป็นพื้นฐานในการนำไปใช้ในชีวิตประจำวันต่อไป

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2543:48) ได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น จะต้องพัฒนาทักษะในด้านต่าง ๆ คือ

1. ทักษะในการทำความเข้าใจปัญหา
2. ทักษะในด้านการอ่าน เพื่อการสื่อความหมายที่ถูกต้อง
3. ทักษะในด้านการคิดคำนวณ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า แนวทางควรนำมาพิจารณาเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา ได้แก่ ปัญหาที่นำมาใช้ บรรยากาศในชั้นเรียน การเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิด เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหา การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของผู้สอน ซึ่งทุกอย่างล้วนมีผลต่อการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทั้งสิ้น

4.9 การวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ในการวัดผลทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการตรวจข้อสอบแบบอัตนัยควรให้คะแนนตามความสามารถของนักเรียนทุกขั้นตอน ซึ่งความสามารถในการแก้ปัญหาจำเป็นต้องให้นักเรียนแสดงขั้นตอนของการคิดคำนวณ ดังนั้นการให้คะแนนตามความสามารถ จึงต้องให้คะแนนทุกขั้นตอน การที่นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้แม้จะได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง 100% ย่อมสมควรได้คะแนนตามความถูกต้องลดหลั่นกันตามความเหมาะสม ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้มีนักการศึกษาคณิตศาสตร์และหน่วยงานที่เกี่ยวข้องได้กล่าวถึงแนวทางในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

โพลยา (Polya, 1973) ได้เสนอรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนและรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 5 แสดงรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Polya

ขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya	พฤติกรรมชี้วัดความสามารถ
ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	หลังจากอ่านโจทย์แล้วจะต้องบอกได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรมาให้ต้องการทราบอะไร และข้อเท็จจริงเป็นอย่างไร
ขั้นวางแผนแก้ปัญหา	ใช้เงื่อนไขความเป็นจริงในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ถูกต้อง
ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา	ความสามารถในการสร้างตาราง เขียนไดอะแกรม เขียนสมการหรือประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และทักษะการคำนวณ
ขั้นตรวจสอบคำตอบ	การพิจารณาความสมเหตุสมผลและการสรุปความหมายของคำตอบ

ชาร์ล (Charles et al., 1987) แบ่งสัดส่วนของการให้คะแนนออกเป็น 3 ส่วน คือ ความเข้าใจในการแก้ปัญหา วิธีการแก้ปัญหา และผลลัพธ์ที่ได้ ซึ่งสามารถวิเคราะห์สัดส่วนและสร้างเป็นเกณฑ์ให้คะแนนได้ดังนี้

ตารางที่ 6 แสดงรูปแบบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามรูปแบบของ Charles et al.

ส่วนที่พิจารณา	พฤติกรรมที่แสดง	คะแนนที่ได้
ความเข้าใจในการแก้ปัญหา	ไม่แสดงอะไรเลย	0
	แปลความหมายผิดทั้งหมด	1
	แปลความหมายผิดเป็นส่วนมาก	2
	แปลความหมายผิดเป็นส่วนน้อย	3
	แปลความหมายได้ถูกต้องสมบูรณ์	4
วิธีการแก้ปัญหา	ไม่แสดงอะไรเลย	0
	วางแผนการทำงานไม่ถูกต้อง	1
	แก้ปัญหาถูกต้องเป็นส่วนน้อย	2
	แก้ปัญหาถูกต้องเป็นส่วนใหญ่	3
	วางแผนเหมาะสมมีแนวทางที่จะนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง	4
ผลลัพธ์ที่ได้	ไม่แสดงอะไร	0
	เขียนผิด คำนวณผิด	1
	คำตอบถูกต้อง	2

เรย์ (Reys, 1992) ได้กำหนด Rubric ของความสามารถในการแก้ปัญหาโดยที่ขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหา จะให้คะแนนตั้งแต่ 0 – 2 คะแนน ตามรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1. ความเข้าใจในปัญหา

    0 หมายถึง ไม่เข้าใจในปัญหาเลย

    1 หมายถึง เข้าใจปัญหาบางส่วนหรือแปลความหมายบางส่วนคลาดเคลื่อน

    2 หมายถึง เข้าใจปัญหาได้ดี ครบถ้วนสมบูรณ์

2. การวางแผนแก้ปัญหา

    0 หมายถึง ไม่พยายาม หรือ วางแผนได้ไม่เหมาะสมทั้งหมด

    1 หมายถึง วางแผนถูกต้องบางส่วน

    2 หมายถึง วางแผนเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด

3. คำตอบ

    0 หมายถึง ไม่ตอบ หรือตอบผิดในส่วนที่วางแผนไม่เหมาะสม

    1 หมายถึง คัดลอกผิดพลาด คำนวณผิด ตอบบางส่วนสำหรับปัญหาที่มีหลายคำตอบ

    2 หมายถึง ตอบได้ถูกต้องและใช้ภาษาได้ถูกต้อง

กรมวิชาการ (2546, 123) เสนอเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ตารางที่ 7 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกรมวิชาการ

คะแนน	ความหมาย	ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ปรากฏให้เห็น
4	ดีมาก	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ อธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้เข้าใจชัดเจน
3	ดี	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ แต่น่าจะอธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้ดีกว่านี้
2	พอใช้	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จเพียงบางส่วน อธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้บางส่วน
1	ต้องปรับปรุง	มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหาบางส่วน เริ่มคิดว่าทำไมจึงต้องใช้วิธีการนั้นแล้วหยุด อธิบายต่อไม่ได้ แก้ปัญหาไม่สำเร็จ
0	ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ข้างต้น หรือไม่มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหา

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546, 104 -106) เสนอแนวคิดว่าครูและนักเรียนอาจร่วมกันประเมินผลการแก้ปัญหาได้ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีขั้นตอนในการดำเนินการ 4 ขั้นตอน คือ การทำความเข้าใจปัญหา การวางแผน การดำเนินการแก้ปัญหา การตรวจสอบความถูกต้อง

การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรมีรายการประเมินที่แสดงถึง ความเข้าใจปัญหา การวางแผนในการแก้ปัญหา การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา การตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบและมองย้อนกลับไปยังขั้นตอนต่างๆ เพื่อหาวิธีการแก้ปัญหาแบบอื่นๆ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้เสนอเกณฑ์การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยกำหนดเกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ที่แบ่งเป็นระดับคุณภาพเป็น 3 ระดับ คือ 1, 2 และ 3 นอกจากนี้ครูอาจกำหนดน้ำหนักคะแนนของแต่ละปัญหาให้แตกต่างกันตามน้ำหนักของเนื้อหาหรือความเหมาะสมได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตารางที่ 8 ตัวอย่างเกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

รายการประเมิน	คะแนน	ระดับคุณภาพ	เกณฑ์การพิจารณา
1. ความเข้าใจปัญหา	3	ดี	เข้าใจปัญหาได้ถูกต้อง
	2	พอใช้	เข้าใจปัญหาบางส่วนไม่ถูกต้อง
	1	ต้องปรับปรุง	เข้าใจปัญหาน้อยมากหรือไม่เข้าใจปัญหา
2. การเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา	3	ดี	เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้เหมาะสมและเขียนประโยคคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง
	2	พอใช้	เลือกวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งอาจนำไปสู่คำตอบที่ถูกแต่ยังมีบางส่วนผิดโดยอาจเขียนประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง
	1	ต้องปรับปรุง	เลือกวิธีการแก้ปัญหาส่วนใหญ่ไม่ถูกต้อง
3. การใช้วิธีการแก้ปัญหา	3	ดี	นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้อย่างถูกต้อง
	2	พอใช้	นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้องเป็นบางครั้ง
	1	ต้องปรับปรุง	นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง
4. การสรุปคำตอบ	3	ดี	สรุปคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
	2	พอใช้	สรุปคำตอบไม่สมบูรณ์หรือใช้สัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง
	1	ต้องปรับปรุง	ไม่มีการสรุปคำตอบ

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2547: 22-25) ได้รวบรวมแนวทางการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ ซึ่งนำเสนอเกณฑ์การให้คะแนนไว้ 3 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 การให้คะแนนตามรูปแบบของ Walter Szetele

Walter Szetele เสนอการประเมินผลการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ว่า ครูควรประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ของเด็กโดยใช้เกณฑ์คะแนนง่าย ๆ ดังนี้

ให้ 0 คะแนน ถ้าเด็กไม่ได้แสดงว่าคิดแก้ปัญหาได้เลย กระดาษคำตอบอาจจะว่างเปล่า ไม่มีการตอบคำถาม หรือแสดงวิธีแก้ปัญหาเอาไว้เลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าเด็กได้พยายามตอบคำถาม แต่คำตอบที่ให้ไม่มีเหตุผล หรือตอบไม่ตรงคำถาม

ให้ 2 คะแนน ถ้าเด็กแสดงให้เห็นว่ามีความเข้าใจในตัวคำถาม สามารถตอบคำถามได้บ้างแต่ไม่สมบูรณ์ มีวิธีทำที่ยังมีความสับสนอยู่

ให้ 3 คะแนน ถ้าเด็กเข้าใจคำถามได้ดี สามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง มีเหตุผลพอสมควร การอ้างอิงถูกต้อง แต่วิธีทำยังขาดความสมบูรณ์ ขาดความสัมพันธ์ระหว่างขั้นตอนต่างๆ หรือมีข้อผิดพลาดบกพร่องบ้าง

ให้ 4 คะแนน ถ้าเด็กเข้าใจคำถามดี ตอบคำถามและแสดงวิธีทำในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องสมบูรณ์ มีเหตุมีผลและอ้างอิงถูกต้อง

แบบที่ 2 การให้คะแนนตามรูปแบบของ Randall Charles

Randall Charles ได้เสนอเกณฑ์การให้คะแนนอีกวิธีหนึ่ง ที่เรียกว่าการให้คะแนนแบบแยกส่วน (analytic Scoring Scale) ในแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 6 คะแนน ซึ่งแบ่งให้คะแนนออกเป็น 3 ตอน แต่ละตอนมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ดังนี้

ตอนที่ 1 การประเมินความเข้าใจปัญหา

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่เข้าใจปัญหาเลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าเข้าใจปัญหาเพียงบางส่วนหรือเข้าใจไม่ถูกต้อง หรือแปลความหมายตัวปัญหาบางส่วนผิดพลาด

ให้ 2 คะแนน ถ้าเข้าใจตัวปัญหาอย่างถูกต้องสมบูรณ์

ตอนที่ 2 การวางแผนปัญหา

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่ได้มีความพยายามในการวางแผน หรือวางแผนไม่ถูกต้อง ไม่ได้มีแนวทางในการแก้ปัญหาได้เลย

ให้ 1 คะแนน ถ้าการวางแผนมีส่วนถูกต้องอยู่บ้าง สามารถนำปัญหาบางส่วนมากำหนดเป็นขั้นตอน เพื่อใช้วิธีแก้ปัญหาได้

ให้ 2 คะแนน ถ้าสามารถวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม นำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างสมบูรณ์

ตอนที่ 3 การได้คำตอบ

ให้ 0 คะแนน ถ้าไม่มีคำตอบ หรือมีคำตอบที่ผิดๆ หลงทาง เนื่องจากการวางแผนที่ผิดพลาดตั้งแต่แรก

ให้ 1 คะแนน ถ้ามีการเขียนคำตอบหรือวิธีทำที่ผิด เนื่องจากการลอกโจทย์ผิด คำนวณผิด ทำให้ได้คำตอบผิด แต่มีความเข้าใจถูกต้องอยู่บ้าง คำตอบบางส่วนถูกต้อง

ให้ 2 คะแนน ถ้าคำตอบถูกต้อง เขียนอธิบายวิธีทำถูกต้องสมบูรณ์

แบบที่ 3 การให้คะแนนตามรูปแบบของ Randall Charles, Frank Lester and Phares O ' Deffer

Randall Charles, Frank Lester and Phares O ' Deffer ได้เสนอวิธีการให้คะแนนที่เรียกว่า การให้คะแนนแบบภาพรวม (Holistic Scoring Scale) โดยกำหนดให้คะแนนเต็ม 4 คะแนน ถ้าสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องมากน้อยต่างๆ กัน จะได้คะแนนลดหลั่นกันตามส่วนดังนี้

คะแนนที่ให้ ลักษณะของวิธีการแก้ปัญหาและคำตอบ

ให้ 0 คะแนน ถ้านักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้เลย แม้จะมีรอยขีดเขียนอยู่บ้าง ก็ไม่ได้ใกล้เคียง หรือลู่ทางว่าจะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้

ให้ 1 คะแนน ถ้าผู้เรียนมีความเข้าใจในปัญหาโจทย์ได้ถูกต้อง ได้แสดงการคิดคำนวณที่ถูกต้องบ้างเล็กน้อย แสดงให้เห็นว่าเขารู้วิธีทำที่ถูกต้อง แต่ไม่สามารถทำจนสำเร็จได้

ให้ 2 คะแนน ถ้ามีวิธีการคำนวณที่ถูกต้อง ได้แสดงวิธีทำอย่างมีเหตุผล แต่รายละเอียดของการคิดคำนวณยังผิดอยู่ ส่วนใหญ่เป็นความผิดจากการเข้าใจผิดหรือมีความบกพร่องในขั้นตอนการคำนวณ

ให้ 3 คะแนน ถ้าสามารถแก้โจทย์ปัญหาได้เกือบถูกต้องสมบูรณ์ วิธีการถูกต้องตามขั้นตอนต่างๆ แต่มีข้อผิดพลาดบกพร่องในรายละเอียดบางประการ เช่น ไม่ได้ระบุเงื่อนไขที่จะใช้ประกอบคำอธิบาย หรือวิธีทำถูกต้องตลอดทาง แต่วิเคราะห์หรือตอบในขั้นสุดท้ายผิดพลาด

ให้ 4 คะแนน ถ้ามีความถูกต้องทั้งวิธีทำและรายละเอียดของการคิดคำนวณ มีเหตุผลประกอบได้ถูกต้องและเหมาะสม

จากเกณฑ์การให้คะแนนข้างต้น จะพบว่าหากครูผู้สอนนำไปใช้เป็นเกณฑ์ในการพิจารณาประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูเองก็จะมีมาตรฐานในการให้คะแนน มีเกณฑ์การให้คะแนนที่เป็นรูปธรรมมากขึ้นและนักเรียนก็จะได้รับความเป็นธรรมมากขึ้น

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ มีดังนี้

งานวิจัยในประเทศ

อรุณี ระย้าแก้ว (2539: 45-64) ได้ศึกษาการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นทักษะการคิดแบบฮิวริสติกส์ในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง สมการ อัตราส่วนร้อยละ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 78 คน เป็นชาย 40 คน เป็นหญิง 38 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 39 คน ได้รับการสอนด้วยวิธีสอนที่เน้นทักษะการคิดแบบฮิวริสติกส์ และกลุ่มควบคุม39 คน ได้รับการสอนการสอนแบบปกติ ใช้เวลาทั้งหมด 34 คาบ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยเน้นทักษะการคิดแบบ ฮิวริสติกส์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ

นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552) ที่ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปี ที่ 1 ผลการวิจัยพบว่า ความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้นกว่ากลุ่มนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ขอบใจ สาสิทธ์ (2545: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่เรียนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

งานวิจัยต่างประเทศ

การ์เนต (Garnett, 1984: 102-103A) ที่ได้พัฒนาวิธีการคิดแบบฮิวริสติกส์ในการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างไม่มีโครงสร้างในการทดลอง โดยใช้เทคนิคการสอนหลายๆ อย่างรวมกัน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียน เกรด 6 จำนวน 60 คน ใช้เวลาการทดลอง

ทั้งหมด 5 เดือน การประเมินผลการสอนใช้วิธีหาข้อมูลเชิงคุณภาพและข้อมูลเชิงอุปนัยผลการทดลองพบว่า หากไม่คำนึงถึงระดับความสามารถพื้นฐานเดิมของนักเรียน การพัฒนาการสอนโดยใช้ฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถแยกแยะสิ่งต่าง ๆ ได้สามารถแสดงโครงเรื่องที่ศึกษาได้และช่วยให้นักเรียนมีขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบมากขึ้น

ดันแคน (Duncan, 1985: 1) ได้ศึกษาการจัดการกระบวนการสอนฮิวริสติกส์ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยจัดเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองคือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โดยแบ่งเป็น 4 กลุ่มย่อย และเลือกนักเรียนในแต่ละกลุ่มย่อยมา 3 กลุ่มและให้นักเรียนตอบคำถามที่แต่ละกลุ่มได้รับ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จะสามรถที่จะตอบคำถามได้มากขึ้นเมื่อเปลี่ยนข้อมูลที่ถามให้อยู่ในรูปแบบ (Model) ตาราง สื่อต่าง ๆ ที่สามารถสื่อถึงปัญหาได้ชัดเจน

เจมส์ (James, 1981: 1) ได้ศึกษาพฤติกรรม และทัศนคติของครูฝึกสอนที่มีต่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีฮิวริสติกส์ (Heuristics) และวิธีการอภิปราย (Discussion) ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยนักศึกษาปีที่ 1 จำนวน 64 คน โดยแบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 16 คน แล้วเลือกมา 1 กลุ่ม ใช้เวลาในการทดลองทั้งหมด 10 สัปดาห์ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มนักศึกษาที่คิดแก้ปัญหาเพียงคนหนึ่งโดยวิธีการคิดแบบฮิวริสติกส์ (Heuristic) สามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่านักศึกษาที่รวมกลุ่มกันโดยวิธการอภิปรายกลุ่มย่อย (Small discussion groups) ในการแก้ปัญหา เนื่องจากกลุ่มที่ใช้วิธีทางฮิวริสติกส์ (Heuristics) ส่งผลต่อผลสำเร็จในการแก้ปัญหาพอควร โดยจากการทดลองเห็นว่า กลุ่มที่ใช้ฮิวริสติกส์ (Heuristics) นั้นมีการเก็บรวบรวมข้อมูลและหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้

เยน (Yen, 1985:1) ได้ศึกษาในเรื่องการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา โดยการใช้ฮิวริสติกส์ (Heuristics) การแนะนำการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการวัดระดับความสามารถของตนเอง ตัวอย่างประชากรที่ใช้ในการศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 ตัวอย่างประชากรจำนวน 18 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบประเมินความสามารถในการเรียนรู้ของตนเอง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยฮิวริสติกส์มีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงขึ้น และมีทัศนคติต่อการเรียนดีขึ้น เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยในการช่วยพัฒนาระดับการเรียนรู้และค้นหาข้อมูลในการศึกษาหาความรู้ใหม่ ๆ ได้ด้วยของตนเอง

ริทท์ (Ritt, 1987: 1) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างวิธีการทั่วไปกับวิธีคิดแบบฮิวริสติกส์ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษา คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย 75 คน และนักเรียนชั้นมัธยมต้นบางส่วน เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ รูปแบบโมเดลการสอน

แก้ปัญหาของโพลยา 4 ขั้นตอน การทำความเข้าใจปัญหา แบ่งเป็นแผนการย่อย ดำเนินการตามแผนที่วางไว้ และตรวจสอบโดยมองจากผลไปหาเหตุ ผลการวิจัยพบว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยวิธีการทั่วไปกับวิธีการคิดแบบฮิวริสติกส์ทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้เหมือนกันโดยจะแตกต่างกันที่ขั้นการดำเนินการตามแผนการที่วางไว้

เคย์ (Kay, 1991: 1) ได้เปรียบเทียบนักเรียนกลุ่มที่สอนวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้ฮิวริสติกส์ (Heuristics) กับกลุ่มที่ไม่ได้รับการสอนแบบฮิวริสติกส์ ตัวอย่างที่ใช้ในการทดลองเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 จำนวนทั้งหมด 377 คน โดยแบ่งตามระดับความสามารถสูง, กลาง และต่ำ ใช้เวลาในการทดลองทั้งหมด 8 เดือน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบทดสอบวัดข้อมูลทั้งหมดได้มาจากการเก็บผลจากการทดสอบผ่านระบบ CTBS ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนฮิวริสติกส์ สามารถทำคะแนนได้ดีกว่ากลุ่มที่ไม่ได้รับการสอนด้วยวิธีฮิวริสติกส์ เมื่อพิจารณาจากความสามารถในการเรียนระดับเดียวกัน

โครวลี่ (Crowley, 1991: 1-2) ได้ศึกษาการใช้ฮิวริสติกส์สำหรับแก้ปัญหาทางพีชคณิตกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนจำนวนทั้งหมด 128 คน โดยแบ่งเป็นนักเรียนสองกลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง58 คน ได้รับการสอนด้วยขั้นตอนของฮิวริสติกส์โดยวิธีการมองจากผลสู่เหตุ การเขียนไดแกรม เขียนแผนภาพเวน การเดาและตรวจสอบ การสร้างข้อมูลเป็นลำดับขั้นตอน การให้เหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ และการแปลความหมายที่มีซับซ้อน และกลุ่มควบคุม จำนวน 70 คนได้รับการสอนแบบปกติ ใช้เวลาทั้งหมด 11 สัปดาห์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบฮิวริสติกส์มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางพีชคณิตไม่แตกต่างกับนักเรียนที่ได้รับการเรียนแบบปกติ

5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวกับแนวคิดโมเดลเมธอด (The Model Method Approach)

งานวิจัยในประเทศ

พรทิพา โสกัณทัต (2552) ซึ่งศึกษาเรื่อง การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวด้วยกลวิธีที่หลากหลาย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันทรายวิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่ พบว่า นักเรียนใช้กลวิธีการวาดภาพจำลองมากที่สุด ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเกี่ยวกับจำนวน โดยนักเรียนจะวาดภาพสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อใช้แสดงความสามารถของข้อมูลต่าง ๆ ในโจทย์ปัญหา ซึ่งนักเรียนให้เหตุผลว่าการวาดภาพจำลองทำให้เห็นภาพชัดเจนโดยเฉพาะโจทย์ที่เกี่ยวกับเศษส่วนเพราะสามารถหาคำตอบได้เลย

จิตติมา คงเมือง (2554: บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัย เรื่อง การส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยแนวคิดการใช้แบบจำลองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงขึ้น และผลจากข้อมูลเชิงคุณภาพสรุปได้ว่า กระบวนการคิดในการวาดแบบจำลองเพื่อแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเริ่มต้นจากการวาดแบบจำลองเพื่อทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และใช้แบบจำลองที่วาดขึ้นช่วยในการพิจารณาเลือกตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์และเขียนประโยคสัญลักษณ์ให้เหมาะสมกับโจทย์ปัญหานั้น ๆ ตลอดจนใช้แบบจำลองช่วยในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

งานวิจัยต่างประเทศ

บานฮา และคณะ (BanHar et al., 2008) ได้ทำการศึกษาเรื่อง แนวคิดโมเดลเมธอด (The Model Method Approach) เพื่อส่งเสริมการคิดทางพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษา ซึ่งกล่าวถึง การนำแนวคิดการใช้แบบจำลองในการสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนในระดับประถมศึกษาที่ประเทศสิงคโปร์ ผลการศึกษาพบว่า การสร้างและใช้แบบจำลองช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการคิดทางพีชคณิตของนักเรียนได้เป็นอย่างดี เนื่องจากเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปธรรมอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่เป็นนามธรรม โดยนำเสนอผ่านแบบจำลองที่เป็นแบบจำลองที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพและเข้าใจความสัมพันธ์ของสิ่งโจทย์กำหนดให้ได้ดียิ่งขึ้น นอกจากนี้วิธีการดังกล่าวยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ปัญหาชนิดต่าง ๆ ที่อยู่ในหลักสูตรของโรงเรียนและเป็นวิธีที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาองค์ความรู้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงด้วย ซึ่งแนวคิดการใช้แบบจำลองนี้เป็นวิธีการที่เหมาะสำหรับครูในระดับประถมศึกษาที่จะนำไปใช้ในการสนับสนุนการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพราะเป็นวิธีที่ใช้เพื่อเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนในการเรียนพีชคณิตที่เป็นทางการในระดับที่สูงขึ้น และพบว่า นักเรียนที่ประสบความสำเร็จมาอย่างต่อเนื่องก็จะมีพื้นฐานที่ดีในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้นไป

ฟง (Ng Swee Fong, 2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพีชคณิต ด้วยแนวคิดการใช้แบบจำลองของนักเรียนระดับมัธยมศึกษา ผลของการใช้แนวคิดการใช้แบบจำลองพบว่านักเรียนสามารถสร้างแนวทางหรือรูปแบบในการแก้ปัญหาและสามารถแก้ปัญหาได้รวดเร็วขึ้นนักเรียนสามารถระบุ ถึงเงื่อนไข หรือข้อจำกัดของวิธีการแก้ปัญหาได้ นักเรียนมีเจตคติที่ดีเกี่ยวกับวิธีการจัดการเรียนรู้โดยใช้แนวคิดการใช้แบบจำลอง

ฟง และ เคอรี่ (Ng Swee Fong and Kerry Lee, 2005) ได้ศึกษาผลจากการใช้วิธีการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการใช้แบบจำลองเพื่อช่วยในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนของเนื้อหาพีชคณิต

สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ผลพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ประสบผลสำเร็จในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อน ซึ่งนักเรียนมีความสามารถในการนำแนวคิดการใช้แบบจำลองช่วยในการสร้างแบบจำลองและสังเกตเห็นรูปแบบ หรือ กฎ รวมถึงการที่นักเรียนสามารถเห็นโครงสร้างในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ

ลิซ่า อิงลาร์ด (Lisa Englard, 2010) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้แนวคิดการใช้แบบจำลองในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยได้เปรียบเทียบผลการทดสอบของนักเรียน 3 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองที่จัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการใช้แบบจำลองกลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และ กลุ่มนักเรียนอื่น ๆ ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีการพัฒนาการเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสูงกว่า นักเรียนที่เหลืออีก 2 กลุ่ม

5.3 งานวิจัยที่เกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิต

งานวิจัยในประเทศ

ณัชชา กมล (2548) ได้พัฒนากรอบแนวคิดในการจำแนกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ผลการศึกษาพบว่า ความคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเกี่ยวกับแบบรูปสามารถจำแนกได้ 4 ระดับ คือ ระดับ 1 นักเรียนไม่เข้าใจหรือเข้าใจสับสนเกี่ยวกับแบบรูปที่กำหนดให้ เดาคำตอบหรือตอบแบบไม่ตรงประเด็น หรือใช้ข้อมูลเพียงประเด็นเดียวในแบบรูปเพื่อหาค่าของแต่ละเทอมในแบบรูป ระดับ 2 นักเรียนสามารถหาค่าของพจน์ถัดไปจากแบบรูปที่กำหนดได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของเทอมที่อยู่ไกล ๆ ได้ พยายามที่จะหากรณีทั่วไปของแบบรูปจากข้อมูลที่กำหนดให้ในแบบรูปเพียงประเด็นเดียวซึ่งทำให้ผลที่ได้ไม่ถูกต้อง ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์หาค่าของพจน์ถัดไปจากพจน์ที่อยู่ก่อนหน้า โดยใช้การวาดรูป หรือการนับ ระดับ 3 นักเรียนเข้าใจเฉพาะความสัมพันธ์ระหว่างค่าของพจน์ที่กำหนดให้และใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาค่าพจน์ที่อยู่ไกล ๆ ได้ด้วยวิธีการที่เป็นระบบ แต่ไม่เข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ ระดับ 4 นักเรียนเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์และสามารถอธิบายออกมาในรูปของคำพูดได้ สร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปในรูปของสูตรทางพีชคณิตได้

งานวิจัยต่างประเทศ

ไค, ฟง และ เมอเยอ (Jinfa Cai, Swee Fong Ng, and John C. Moyer, 2011) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ภายใต้การจัดการเรียนการสอนของหลักสูตรคณิตศาสตร์ประเทศจีนและประเทศสิงคโปร์ ผลการศึกษาพบว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์ของจีนและสิงคโปร์ มีลักษณะของหลักสูตรที่มีความหลากหลาย ภายใต้บริบทที่แตกต่าง แต่ลักษณะแนวทางการ

จัดการเรียนการสอนทั้งสองประเทศมีความสอดคล้องกับแนวคิดโมเดลเมธอดซึ่งมีความเอื้อต่อการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

ฟง (Ng Swee Fong, 2004) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาของหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศสิงคโปร์ ผลการศึกษาพบว่าแนวทางการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนมีสามวิธีการ คือการใช้แนวคิดการใช้แบบจำลอง, การวางนัยทั่วไป และ การกำกับการคิด โดยนำแนวทางดังกล่าวผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิต จะทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตได้

หลิว (Hee-Chan Lew, 2004) ได้ศึกษากรณีศึกษาหลักสูตรคณิตศาสตร์ของเกาหลี เกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิต ผลการศึกษาสามารถระบุชนิดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตได้ 6 แบบ คือ การคิดหากรณีทั่วไป การคิดเชิงนามธรรม การคิดวิเคราะห์ การคิดสร้างสรรค์ การคิดหาแบบจำลอง และการจัดระบบ ซึ่งการศึกษาครั้งนี้สามารถชี้ให้เห็นทิศทางใหม่ในการส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนได้

สติล และ โจฮันนิง (Dianaf Steele and Debra I. Johanning , 2004) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตโดยผ่านกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนเกรด 7 ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนสามารถเชื่อมโยงระหว่างลักษณะของรูปแบบทั่วไปที่นักเรียนสร้างขึ้นเอง กับแผนผังตามแบบที่มีอยู่แล้ว โดยใช้ข้อมูลที่มี แสดง ขยาย และสรุปรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง และ สร้างความสัมพันธ์ เชิงปริมาณ ผ่านการพูดและสื่อสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

วิล วินเซอร์ (Will Windsor, 2011) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตโดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้เน้นถึงกระบวนการวิเคราะห์เชิงลึกของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่หลากหลาย ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนสามารถใช้กลยุทธ์ที่เฉพาะเจาะจงหรือกระบวนการ ผ่านการสนทนาระหว่างขั้นตอนการแก้ปัญหา เกี่ยวกับพีชคณิต นักเรียนสามารถสะท้อนความคิดของพวกเขาและแบ่งปันประสบการณ์หรือแนวทาง กลวิธี ในการแก้ปัญหา ที่แตกต่าง และนักเรียนสามารถวิเคราะห์วิธีการแก้ปัญหาที่มีความเหมาะสมที่สุดได้

5.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีดังนี้

งานวิจัยในประเทศ

สุพัตรา ผาติวิสันติ์ (2534 : 70 -72) ได้เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความสามารถทางการคำนวณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีแบบการเรียนต่างกัน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2534 จำนวน 378 คน ซึ่งได้จาก

การสุ่มแบบหลายขั้นตอนจากโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดกรมสามัญศึกษา กรุงเทพมหานคร เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ แบบทดสอบความสามารถทางการคำนวณและแบบสำรวจแบบการเรียนที่ดัดแปลงจากแบบสำรวจของคอล์บ (Kolb) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่มีแบบการเรียนแบบคิดอเนกนัย แบบดูดซึม แบบเอกนัยและแบบปรับปรุง มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

งามตา กมลวรเดช (2536: ง) ได้ศึกษาผลของการฝึกกลวิธีคำถามที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 พบว่าคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการฝึกกลวิธีคำถามนำ สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้รับการฝึกกลวิธีคำถามนำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการฝึกกลวิธีคำถามนำหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง

สมบัติ โพธิ์ทอง (2539: 69) ได้ทำการวิจัยเรื่องการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงโดยใช้เมตาคอคนิชันกับนักเรียน 1 กลุ่ม จำนวน 30 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบทดสอบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นชนิดอัตนัย ใช้แบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ดำเนินการวิจัยตามกรอบแนวคิดของ เบเยอร์ (Beyer , 1987) ซึ่งประกอบด้วย 3 ขั้นตอน คือ การวางแผน การกำกับและการประเมิน การฝึกโดยสอนการใช้กลวิธีต่างๆ ในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ร่วมกับการฝึกการใช้เมตาคอคนิชัน ใช้เวลาในการฝึก 18 วัน วันละ 40 นาที ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการสอนแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ร่วมกับการใช้เมตาคอคนิชันสูงกว่าก่อนการได้รับการสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อนันต์ โพธิกุล (2543: 77 – 84) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนแบบบูรณาการเชิงวิธีการกับการสอนตามคู่มือครู กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและควบคุม กลุ่มละ 50 คน ได้รับการสอนกลุ่มละ15 คาบ คาบละ 50 นาที ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 89) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิดสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยแบ่งขั้นตอนการจัดกิจกรรมเป็น 4 ขั้นตอน คือ ขั้นการแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มใหญ่ ขั้นการแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มย่อย ขั้นนำเสนอผลการปฏิบัติของกลุ่มย่อยต่อกลุ่มใหญ่ ขั้นปฏิบัติรายบุคคลผลการวิจัยพบว่า

1. กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ที่ตั้งไว้ ผลการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียน นักเรียนส่วนใหญ่ในกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาค่อนข้างต่ำ ในระหว่างเรียนความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนค่อย ๆ พัฒนาขึ้นจากการแก้ปัญหาที่ต้องใช้การถามกระตุ้นแนวทางในการแก้ปัญหาอย่างละเอียด

2. ผลการประเมินพฤติกรรมการคิดแก้ปัญหา พบว่า พฤติกรรมการคิดแก้ปัญหาก่อนเรียนในทุกด้าน ได้แก่ การสำรวจศึกษา การใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหา ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ ความคิดยืดหยุ่น ความคิดริเริ่มและการสื่อความคิดในการแก้ปัญหาของนักเรียนทุกคนในกลุ่มทดลองอยู่ในระดับ “ต้องแก้ไข” พฤติกรรมการคิดแก้ปัญหาระหว่างเรียนในทุกด้านของนักเรียนส่วนใหญ่พัฒนาขึ้นไปอยู่ในระดับ “ดี” และ “ดีมาก” และในการทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียน พบว่าพฤติกรรมการคิดแก้ปัญหาในทุกด้านของนักเรียนอยู่ในระดับ “ดี”

3. ผลการประเมินเจตคติหลังเรียนต่อวิชาคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

4. ผลการเปรียบเทียบคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชา ค 101 คณิตศาสตร์ของนักเรียนในกลุ่มทดลองกับเกณฑ์ปกติของโรงเรียน โดยการทดสอบค่า Z พบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามเกณฑ์ปกติของโรงเรียน

นวลจันทร์ ผมอุดทา (2545: 58 -59) ศึกษาผลของการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบ SSCS ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 82 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองจำนวน 42 คน ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบ SSCS และกลุ่มควบคุมจำนวน 40 คน ได้รับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบ SSCS มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

นุตริยา จิตารมย์ (2548 : 93 -94) ศึกษาผลของการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จังหวัดสุราษฎร์ธานี กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนบ้านนาสาร จังหวัดสุราษฎร์ธานี จำนวน 86 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง

และกลุ่มควบคุม แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองได้รับการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR และกลุ่มควบคุม ได้รับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

มูราสกี้ (Muraski, 1979: 4104 - A) ได้ทำการศึกษาผลของการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์กับความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ไม่ได้รับการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คลาร์คสัน (Clarkson, 1979 : 4104 - A) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทักษะการแปลความหมายโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้ปัญหากับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 โดยทำการทดสอบความสามารถในการแปลโจทย์ปัญหา 3 แบบ คือ สัญลักษณ์ที่เป็นภาษา สัญลักษณ์ที่เป็นสัญลักษณ์ และสัญลักษณ์ที่เป็นรูปภาพ พบว่าการแปลความหมายโจทย์คณิตศาสตร์ทั้งสามแบบมีความ สัมพันธ์กับการแก้ปัญหา และนักเรียนที่มีความสามารถในการแปลความหมายต่างกัน จะมีความสามารถ ในการแก้ปัญหาต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ฮอล (Hall, 1979 : 6324 – A) ศึกษาผลของการวิเคราะห์การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 60 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 30 คน แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่คาดคะเนเก่งและไม่เก่งกลุ่มละ 15 คน กลุ่มทดลองเรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์เป็นเวลา 8.5 ชั่วโมง แล้วทดสอบการวิเคราะห์และการแก้ ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์สูง มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ต่ำ และนักเรียนที่เรียนการวิเคราะห์ มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนการวิเคราะห์

ปุต (Putt, 1979 : 5382A) ศึกษาปัจจัยที่ส่งผลต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เมื่อมีกระบวนการแก้ปัญหาต่างกัน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องแรกได้รับการสอนวิธีแก้ปัญหา ส่วนอีกห้องพยายามให้รับประสบการณ์ตรงจากการพยายามให้แก้ปัญหาต่าง ๆ เอง ระยะเวลาในการทดลอง 4 สัปดาห์ แล้ววัดผลสัมฤทธิ์ในการแก้ปัญหาของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม พบว่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีความสามารถในการแก้ปัญหาไม่แตกต่างกัน

ลานน์ (Lynn, 1993: 167 - 169) ได้ทำการศึกษาปัจจัยต่าง ๆ ที่เป็นอุปสรรคและที่ส่งผลต่อการแสดงพฤติกรรมการแก้ปัญหาของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 12 คน ซึ่งได้รับการสอนแบบเป็นกลุ่มย่อย กลุ่มละ 3 คน แต่ละกลุ่มจะถูกบันทึกวิดีโอขณะร่วมกันแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่าปัจจัยที่เป็นอุปสรรคต่อการแสดงพฤติกรรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1. การขาดประสบการณ์เกี่ยวกับกรอบของปัญหานั้นๆ
2. การกำหนดข้อจำกัดที่มากเกินความจำเป็น
3. การขาดการกำกับความสามารถด้านสติปัญญาของตนเอง
4. การขาดความเชื่อ

นอกจากนี้ยังพบว่าปัจจัยที่ส่งผลและสนับสนุนการแสดงพฤติกรรม การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1. ความร่วมมือช่วยกันภายในกลุ่ม
2. การกำกับภายในกลุ่ม
3. แนวปฏิบัติ / บรรทัดฐานของสังคมในการแก้ปัญหาเป็นกลุ่มย่อย

ทองกาว (Tougaw, 1994: 2934 – A) ศึกษาเจตคติและพฤติกรรมการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาโดยใช้การแก้ปัญหาแบบเปิด (Open approach) ในการสอนคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้การแก้ปัญหาแบบเปิดมีเจตคติทางบวกต่อการเรียนและไม่มีความแตกต่างระหว่างเพศในพฤติกรรมการแก้ปัญหา

โอลาดันนี (Oladunni , 1998: 867 - 874) ได้ศึกษาทดลองเกี่ยวกับผลของการใช้กลวิธีการรู้คิดและฮิวริสติกส์ (Heuristics) ของการแก้ปัญหาที่มีต่อความสามารถทางการคิดด้านคำนวณทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยการสุ่มเลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นการวิจัยแบบกึ่งทดลองใช้เวลาสอน 8 สัปดาห์ แบ่งเป็นกลุ่มทดลองโดยใช้กลวิธีการรู้คิดและฮิวริสติกส์ กับกลุ่มควบคุมโดยการสอนแบบปกติ ผลปรากฏว่า กลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความสามารถในการคิดด้านคำนวณทางคณิตศาสตร์ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

แจ็คสัน (Jackson, 2000: i) ได้พัฒนาทักษะการคิดอย่างมีวิจารณญาณเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ในตอนเหนือของรัฐอิลินอยส์ กลุ่มตัวอย่างได้รับการฝึกทักษะการคิดขั้นสูง ได้แก่การคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์และประเมินค่า โดยใช้เทคนิคการคิดที่หลากหลายและสอนกลยุทธ์การแก้ปัญหา ใช้ระยะเวลาในการทดลอง 20 สัปดาห์ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมีความมั่นใจในความสามารถในการแก้ปัญหาของตนเองมากขึ้นและมีคะแนนทดสอบหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

จากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น จะพบว่ามีการศึกษาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวาง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการแก้ปัญหาเป็นหัวใจสำคัญของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จึงมีการส่งเสริมและพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น และจากงานวิจัยที่กล่าวมาข้างต้น แสดงให้เห็นว่าการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สามารถกระทำได้หลายวิธี เช่น การใช้กิจกรรมแก้ปัญหาปลายเปิด การสอนโดยใช้ปัญหาเป็นหลัก การสอนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยกลวิธี STAR การสอนโดยใช้รูปแบบ SSCS เป็นต้น

กรอบแนวคิดของการวิจัย

การจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์

ขั้นที่ 1 สร้างความสัมพันธ์ (Relate)
ขั้นที่ 2 สำรวจตรวจค้น (Investigate)
ขั้นที่ 3 สื่อสาร (Communicate)
ขั้นที่ 4 ประเมิน (Evaluate)
ขั้นที่ 5 สร้างคำถาม (Create)

แนวคิดโมเดลเมธอด

แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่เป็นเครื่องมือในการตีความโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้เข้าใจมากขึ้น โดย

1. การสร้างแบบจำลองด้วยการแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ เพื่อพิจารณาส่วนรวมและส่วนย่อย
2. การสร้างความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณตั้งแต่ 2 ปริมาณเพื่อการเปรียบเทียบ
3. การแสดงความสัมพันธ์ของปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปตามสถานการณ์ที่กำหนด

เพื่อให้นักเรียนได้มองเห็นถึงความสัมพันธ์ ของข้อมูล สามารถออกแบบ และใช้สื่อสัญลักษณ์ทางพีชคณิตแทนแบบจำลองสู่การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

1. **ขั้นสร้างความสัมพันธ์ (Relate)** เป็นขั้นที่ครูให้สถานการณ์ปัญหาแก่นักเรียน นักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยนักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์จากการเชื่อมโยงข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา หรือ การเชื่อมโยงข้อมูลจากความรู้เดิมที่มีกับความรู้ใหม่ที่เรียน หรือ การเชื่อมโยงปัญหาที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนกับปัญหาใหม่ ว่ามีลักษณะที่เหมือนคล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร และต้องใช้ความรู้อะไรบ้างในการแก้ปัญหา

2. **ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นปัญหา เพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสร้างแบบจำลองที่เหมาะสม ในการแสดงตัวแทนความคิดของนักเรียน และใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ในการหาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ สู่แนวทางการแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ

3. **ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ว่ามีความเหมือน คล้ายคลึง หรือ แตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัด ของการใช้แบบจำลองในแต่ละแบบอย่างไร

4. **ขั้นประเมิน (Evaluate)** เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสิทธิภาพของการใช้แบบจำลอง ว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา ตลอดจนร่วมกันประเมินถึงผลลัพธ์ว่ามีความถูกต้องหรือไม่

5. **ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create)** เป็นขั้นที่ครูสร้างคำถามใหม่ หรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่จากสถานการณ์ปัญหาเดิมแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนหาแนวทางการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองในการสำรวจตรวจค้นเกี่ยวกับประเด็นที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมหรือข้อค้นพบใหม่

ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

การพัฒนากรอบแนวคิดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และแนวคิดโมเดลเมธอดสู่กรอบกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

กรอบแนวคิดการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และแนวคิดโมเดลเมธอด

1. ขั้นสร้างความสัมพันธ์ (Relate) เป็นขั้นที่ครูให้สถานการณ์ปัญหาแก่นักเรียน นักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยนักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์จากการเชื่อมโยงข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา หรือ การเชื่อมโยงข้อมูลจากความรู้เดิมที่มีกับความรู้ใหม่ที่เรียน หรือ การเชื่อมโยงปัญหาที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนกับปัญหาใหม่ ว่ามีลักษณะที่เหมือนคล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร และต้องใช้ความรู้อะไรบ้างในการแก้ปัญหา

2. ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate) เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นปัญหา เพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสร้างแบบจำลองที่เหมาะสม ในการแสดงตัวแทนความคิดของนักเรียน และใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ในการหาตัวแบบทางคณิตศาสตร์สู่แนวทางการแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ

3. ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate) เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ว่ามีความเหมือน คล้ายคลึง หรือ แตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัด ของการใช้แบบจำลองในแต่ละแบบอย่างไร

4. ขั้นประเมิน (Evaluate) เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสิทธิภาพของการใช้แบบจำลองว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา ตลอดจนร่วมกันประเมินถึงผลลัพธ์ว่ามีความถูกต้องหรือไม่

5. ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create) เป็นขั้นที่ครูสร้างคำถามใหม่ หรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่จากสถานการณ์ปัญหาเดิมแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนหาแนวทางการแก้ปัญหา ด้วยการสร้างแบบจำลองในการสำรวจตรวจค้นเกี่ยวกับประเด็นที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมหรือข้อค้นพบใหม่

กรอบกิจกรรมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน

1. ขั้นเตรียมความพร้อม

เป็นขั้นที่ครูเตรียมความพร้อมในการเรียนของนักเรียน โดยครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนความรู้พื้นฐาน ความรู้เดิมที่เรียนไปแล้ว หรือ สอนเนื้อหาที่เป็นสมบัติ กฎ สูตร หรือ นิยาม เพื่อเป็นความรู้เบื้องต้นในการเตรียมความพร้อมก่อนให้นักเรียนพบกับสถานการณ์ปัญหา

2. ขั้นจัดกิจกรรม

2.1 **ขั้นสร้างความสัมพันธ์ (Relate)** เป็นขั้นที่ครูให้สถานการณ์ปัญหาแก่นักเรียน นักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยนักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์จากการเชื่อมโยงข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา หรือ การเชื่อมโยงข้อมูลจากความรู้เดิมที่มีกับความรู้ใหม่ที่เรียน หรือ การเชื่อมโยงปัญหาที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนกับปัญหาใหม่ ว่ามีลักษณะที่เหมือน คล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร และต้องใช้ความรู้อะไรบ้างในการแก้ปัญหา

2.2 **ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นปัญหา เพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสร้างแบบจำลองที่เหมาะสม ในการแสดงตัวแทนความคิดของนักเรียน และใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ในการหาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ สู่แนวทางการแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ

2.3 **ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ว่ามีความเหมือน คล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัดของการใช้แบบจำลองในแต่ละแบบอย่างไร

2.4 **ขั้นประเมิน (Evaluate)** เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสิทธิภาพของการใช้แบบจำลองว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา ตลอดจนร่วมกันประเมินถึงผลลัพธ์ว่ามีความถูกต้องหรือไม่

2.5 **ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create)** เป็นขั้นที่ครูสร้างคำถามใหม่ หรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่จากสถานการณ์ปัญหาเดิมแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนหาแนวทางการแก้ปัญหา ด้วยการสร้างแบบจำลองในการสำรวจตรวจค้นเกี่ยวกับประเด็นที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมหรือข้อค้นพบใหม่

3. ขั้นสรุปและสะท้อนความคิด

เป็นขั้นสรุปและสะท้อนความคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา นั่นคือนักเรียนสามารถสรุปถึงแนวทางในการสร้างแบบจำลองที่นำไปสู่การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบ ที่มีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมในแต่ละปัญหาได้

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
    4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
    4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

แต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศเพื่อเป็นข้อมูลและแนวทางในการทำวิจัย ดังนี้

1. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูล งานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและต่างประเทศเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และแนวคิดแบบฮิวริสติกส์ และแนวคิดโมเดลเมธอด เพื่อนำมาเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2. ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

3. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูลจากอินเตอร์เน็ต เกี่ยวกับวิธีวิจัย การวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เพื่อนำมาเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Research) แบบสองกลุ่มวัดสองครั้งคือก่อนการทดลองและหลังการทดลอง (Two – group pretest posttest design) ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม

ตารางที่ 9 รูปแบบการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
E	- ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต - ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	X	- ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต - ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
C	- ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต - ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	~X	- ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต - ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง

C แทน กลุ่มควบคุม

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

~X แทน การเรียนแบบปกติ

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานมัธยมศึกษา เขต 11 จังหวัดสุราษฎร์ธานี

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานมัธยมศึกษา เขต 11 จังหวัดสุราษฎร์ธานี กระทรวงศึกษาธิการ เป็นโรงเรียนที่มีการจัดห้องเรียนแบบคละความสามารถ คือมีทั้งนักเรียนที่มีความสามารถทางการเรียนระดับสูง ปานกลาง และต่ำอยู่ในห้องเดียวกัน ทางผู้บริหารโรงเรียน หัวหน้ากลุ่มสาระคณิตศาสตร์ และคณะครูในโรงเรียนในความ

ร่วมมือและสนับสนุนในการทำวิจัยเป็นอย่างดี จากการสำรวจพบว่าในปีการศึกษา 2555 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยามีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 5 ห้องเรียนรวมทั้งสิ้น 182 คนโดยผู้วิจัยเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องเรียน ผู้วิจัยจัดนักเรียนเข้ากลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมตามขั้นตอนดังนี้

1. ผู้วิจัยนำคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2555 ของนักเรียนทั้ง 5 ห้อง มาหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\overline{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)

2. ผู้วิจัยเลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 2 ห้องเรียน ที่มีค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\overline{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ใกล้เคียงกัน ได้แก่ ห้อง ม.1/1 จำนวน 33 คน และห้อง ม.1/2 จำนวน 35 คน ซึ่งมีค่ามัชฌิมเลขคณิต เท่ากับ 64.23 และ 62.78 ตามลำดับ

3. จากนั้น ผู้วิจัยนำค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\overline{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1/1 และ 1/2 มาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F – test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่าความแปรปรวนของคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ด้วยค่าที (t – test) พบว่าคะแนนสอบปลายภาคเรียนที่ 1 รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานไม่แตกต่างกัน

4. ผู้วิจัยทำการสุ่มอย่างง่าย โดยการจับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1/1 เป็นกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1/2 เป็นกลุ่มทดลอง ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองในครั้งนี้ คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดประกอบแนวทางพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สำหรับกลุ่มทดลอง และ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 11 แผน ใช้เวลา 18 ชั่วโมง ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นตามขั้นตอนดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ศึกษาหลักการ เป้าหมายของการจัดการศึกษาในแผนการศึกษาแห่งชาติ ฉบับที่ 10 และพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542

2. ศึกษาหลักการ จุดมุ่งหมายของหลักสูตรการศึกษาแกนกลาง พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

3. ศึกษากรอบแนวคิดเกี่ยวกับแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และแนวคิดโมเดลเมธอด จากหนังสือ เอกสาร วารสาร และงานวิจัยต่าง ๆ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยใช้แนวคิดแบบฮิวริสติกส์ตามแนวคิดการสร้างแบบจำลองของเชฟฟิลด์ ที่ประกอบด้วย 5 ขั้นตอน คือ สร้างความสัมพันธ์ (Relate) สำรวจ (Investigate) ติดต่อสื่อสาร (Communicate) ประเมิน (Evaluate) และ สร้างคำถามหรือปัญหา (Create) โดยขั้นการจัดกิจกรรมอาจเริ่มต้นจากจุดใดก็ได้ในแบบจำลองความคิดนี้และดำเนินต่อไปยังจุดใดก็ได้เช่นกันเพื่อตรวจสอบปัญหาทางคณิตศาสตร์ และขณะเดียวกันผู้วิจัยได้ศึกษากรอบแนวคิดเกี่ยวกับแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด ซึ่งจากการศึกษาทำความเข้าใจทั้งสองแนวคิดนี้ ผู้วิจัยได้พิจารณาการสร้างกิจกรรมจากแนวคิดทั้งสองตามธรรมชาติการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 5 ขั้น ดังนี้

1) **ขั้นสร้างความสัมพันธ์ (Relate)** เป็นขั้นที่ครูให้สถานการณ์ปัญหาแก่นักเรียน นักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยนักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์จากการเชื่อมโยงข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา หรือ การเชื่อมโยงข้อมูลจากความรู้เดิมที่มีกับความรู้ใหม่ที่เรียน หรือ การเชื่อมโยงปัญหาที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนกับปัญหาใหม่ ว่ามีลักษณะที่เหมือน คล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร และต้องใช้ความรู้อะไรบ้างในการแก้ปัญหา

2) **ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นปัญหาเพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสร้างแบบจำลองที่เหมาะสม ในการแสดงตัวแทนความคิดของนักเรียน และใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ในการหาตัวแบบทางคณิตศาสตร์สู่แนวทางการแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ

3) **ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ว่ามีความเหมือน คล้ายคลึง หรือ แตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัด ของการใช้แบบจำลองในแต่ละแบบอย่างไร

4) **ขั้นประเมิน (Evaluate)** เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสิทธิภาพของการใช้แบบจำลองว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา ตลอดจนร่วมกันประเมินถึงผลลัพธ์ว่ามีความถูกต้องหรือไม่

5) **ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create)** เป็นขั้นที่ครูสร้างคำถามใหม่ หรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่จากสถานการณ์ปัญหาเดิมแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนหาแนวทางการแก้ปัญหา ด้วยการสร้างแบบจำลองในการสำรวจตรวจค้นเกี่ยวกับประเด็นที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมหรือข้อค้นพบใหม่

สำหรับกลุ่มควบคุมซึ่งได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ตามคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มีขั้นตอนการจัดกิจกรรม 3 ขั้นตอน คือ ขั้นนำ ขั้นสอนและปฏิบัติกิจกรรม และขั้นสรุปสำหรับกรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมผู้วิจัยเสนอไว้ในตารางที่ 10 ดังนี้

ตารางที่ 10 กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ขั้นเตรียมความพร้อม เป็นขั้นที่ครูเตรียมความพร้อมในการเรียนของนักเรียน โดยครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนความรู้พื้นฐาน ความรู้เดิมที่เรียนไปแล้ว หรือ สอนเนื้อหาที่เป็นสมบัติ กฎ สูตร หรือ นิยาม เพื่อเป็นความรู้เบื้องต้นในการเตรียมความพร้อมก่อนให้นักเรียนพบกับสถานการณ์ปัญหา ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบความรู้เดิม หรือ พื้นฐานเดิมของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อหรือประเด็นที่จะศึกษา โดยให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายคน หรือ รายกลุ่ม ครูสังเกตการตอบคำถามและการมีส่วนร่วมของนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้เดิม หรือความรู้พื้นฐานเพียงพอเพื่อนำไปใช้ต่อหรือไม่ ถ้าพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ขาดความรู้พื้นฐาน ครูต้องทบทวนเนื้อหาให้นักเรียนทั้งห้องก่อน แต่ถ้าพบว่ามีนักเรียนบางคนที่ขาดความรู้พื้นฐานครูอาจสอนเพิ่มเป็นรายคนเฉพาะคนที่มีปัญหาในระหว่างให้ทำกิจกรรม หรือนัดเวลาซ่อมเสริม	1. **ขั้นนำ** เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนแล้ว เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนเนื้อหาใหม่ โดยครูจัดประสบการณ์หรือสถานการณ์ที่หลากหลายในการเชื่อมโยงเนื้อหาใหม่ที่เป็นประเด็นปัญหาน่าสนใจใคร่รู้ โดยครูใช้คำถามประกอบ ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบความรู้เดิม หรือพื้นฐานเดิมของนักเรียนที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อหรือประเด็นที่จะศึกษา โดยให้นักเรียนตอบคำถามเป็นรายคน หรือรายกลุ่ม ครูสังเกตการตอบคำถามของนักเรียนแต่ละคนว่ามีความรู้พื้นฐานเพียงพอเพื่อในไปใช้ต่อหรือไม่ ถ้าพบว่านักเรียนส่วนใหญ่ขาดความรู้พื้นฐาน ครูต้องทบทวนเนื้อหาให้นักเรียนทั้งห้องก่อน แต่ถ้าพบว่ามีนักเรียนบางคนที่ขาดความรู้พื้นฐานครูอาจสอนเพิ่มเป็นรายคนเฉพาะคนที่มีปัญหาในระหว่างให้ทำกิจกรรม หรือนัดเวลาซ่อมเสริม

ตารางที่ 10(ต่อ) กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
2. ขั้นจัดกิจกรรม **2.1 ขั้นสร้างความสัมพันธ์ (Relate)** เป็นขั้นที่ครูให้สถานการณ์ปัญหาแก่นักเรียน นักเรียนวิเคราะห์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล จากการเชื่อมโยงความรู้เดิมที่มีกับความรู้ใหม่ที่เรียน หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลจากปัญหาที่เคยมีประสบการณ์มาก่อนกับปัญหาใหม่ ว่ามีลักษณะที่เหมือนคล้ายคลึง หรือ แตกต่างกันอย่างไร ต้องใช้ความรู้อะไรในการแก้ปัญหา โดยครูใช้คำถามกระตุ้นแก่นักเรียน เช่น สถานการณ์ปัญหานี้คล้ายคลึงหรือแตกต่างจากโจทย์ปัญหาที่เคยเจอหรือไม่ ถ้าคล้ายคลึงมีความคล้ายคลึงอย่างไร จะใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องอะไรเพื่อใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหา **2.2 ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นปัญหาเพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา โดยสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมในการแสดงตัวแทนความคิดของนักเรียน และใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ในการหาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ สู่แนวทางการแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์ของปัญหานั้น ๆ ครูให้นักเรียนสำรวจตรวจค้นหาแนวทางการแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล เป็นคู่หรือเป็นรายกลุ่ม แล้วแต่ลักษณะของกิจกรรมที่จัดขึ้น ครูให้เวลากับนักเรียนในการแก้สถานการณ์ปัญหาหรือทำกิจกรรมสำรวจตรวจค้น ซึ่งระหว่างนั้นครูสังเกตพฤติกรรมการแก้ปัญหาของนักเรียน ระหว่างที่นักเรียนแก้ปัญหานั้น ครูอาจใช้คำถามเพื่อ	2. **ขั้นสอนและปฏิบัติกิจกรรม** 2.1 ครูดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ของการเรียนในแต่ละคาบโดย สอนให้นักเรียนเข้าใจในกฎ สูตร สัจพจน์ ทฤษฎีบท ครูอธิบายประกอบการยกตัวอย่าง ซึ่งดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ 2.2 ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้/ ฝึกประสบการณ์/ ทดลอง/ ค้นคว้า เพื่อให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาที่เรียนและมีทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาด้วยตนเอง โดยครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามสิ่งที่ไม่เข้าใจและคอยควบคุมการทำงานของนักเรียนอย่างใกล้ชิด ในการทำกิจกรรม ครูผู้สอนควรให้นักเรียนได้ทำงานร่วมกันกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน โดยจัดกิจกรรมให้มีความเหมาะสมเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ร่วมกัน พร้อมแสดงแนวคิดของแต่ละคนเพื่อหาแนวทางในการหาข้อสรุปได้อย่างสมเหตุสมผล 2.3 ระหว่างสอนและทำกิจกรรมครูเน้นให้นักเรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนรู้ โดยที่ครูให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติจริง

ตารางที่ 10(ต่อ) กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
กระตุ้นให้นักเรียนได้ตรวจสอบวิธีแก้ปัญหา และคำตอบ เช่น นักเรียนตรวจสอบวิธีแก้ปัญหา และหาคำตอบซ้ำหรือยังว่าถูกต้องหรือไม่ มีแบบจำลองแบบอื่นในการแก้สถานการณ์ปัญหานี้หรือไม่ เป็นต้น **2.3 ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate)** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาด้วยการสร้างแบบจำลองหรือกลวิธีอื่น ๆ และการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน จากนั้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับแบบจำลองหรือกลวิธีและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของตนเอง ว่ามีความเหมือนคล้ายคลึง หรือ แตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัด ของการใช้แบบจำลองในแต่ละแบบอย่างไร เน้นให้นักเรียนได้แสดงแนวคิดอย่างอิสระในวิธีการสร้างแบบจำลองของแต่ละคน โดยครูคอยให้กำลังใจ และเสริมแรง แก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนกล้าแสดงออกมากที่สุด ครูให้นักเรียนร่วมอภิปรายถึงลักษณะแบบจำลองและการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของเพื่อนว่ามีความยากง่าย ต่อการสร้างและการนำไปใช้มากน้อยแค่ไหน แต่ละแบบคล้ายคลึงหรือแตกต่างกันอย่างไร โดยครูคอยให้คำแนะนำ และชี้แนะ แก่นักเรียน **2.4 ขั้นประเมิน (Evaluate)** เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาและประสิทธิภาพของการใช้แบบจำลองว่าแบบจำลองใดมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา ตลอดจนร่วมกันประเมินถึงผลลัพธ์ว่ามีความถูกต้องหรือไม่ โดยครูจะใช้คำถามประกอบแก่	ครูให้มีการอภิปรายร่วมกันภายในกลุ่มเพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปร่วมกัน ครูยกตัวอย่างเพิ่มเติม หรือให้นักเรียนยกสถานการณ์แล้วอภิปรายร่วมกัน ครูใช้การถามเพื่อกระตุ้นความคิดให้นักเรียน จากนั้นครูสุ่มนักเรียนออกมานำเสนอหน้าชั้น โดยครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้อง 2.4 ครูจะใช้แนวทางจัดการเรียนรู้ที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจในโครงสร้างความรู้มากขึ้น เช่น ครูใช้การสาธิตหรือการถามตอบประกอบ การอธิบายเพื่อให้นักเรียนเห็นความสำคัญของสิ่งที่เรียนรู้ ครูเชื่อมโยงความรู้ในสิ่งที่เรียนกับสิ่งที่นักเรียนพบเห็นในชีวิตจริง ครูให้นักเรียนที่มีวิธีหาคำตอบที่ต่างจากเพื่อนออกมานำเสนอเพื่อแสดงวิธีของตนเอง ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมเพื่อเสริมทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ตารางที่ 10(ต่อ) กรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
นักเรียน เช่น นักเรียนลองพิจารณาดูซิว่าแบบจำลองแบบใดมีความเหมาะสมกับโจทย์ปัญหานี้มากที่สุด เพราะเหตุใดแบบจำลองที่เลือกถึงมีความเหมาะสมหรือมีประสิทธิภาพมากที่สุด การสร้างสมการมีความเหมาะสมหรือไม่ คำตอบที่ได้ถูกต้องหรือไม่ ตรวจสอบได้อย่างไร เป็นต้น **2.5 ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create)** เป็นขั้นที่ครูสร้างคำถามใหม่ หรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่จากสถานการณ์ปัญหาเดิมแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนหาแนวทางการแก้ปัญหา ด้วยการสร้างแบบจำลองในการสำรวจตรวจค้นเกี่ยวกับประเด็นที่ต้องการศึกษาเพิ่มเติมหรือข้อค้นพบใหม่ ครูจะสร้างคำถามใหม่แก่นักเรียนที่มีความประยุกต์เพิ่มขึ้นหรือเพิ่มเงื่อนไขใหม่ในสถานการณ์ปัญหาเดิม ซึ่งครูอาจให้คำถามแก่นักเรียนขณะที่นักเรียนสำรวจตรวจค้น เช่นโจทย์ใหม่หรือเงื่อนไขใหม่ต้องใช้ความรู้อะไรบ้าง หรือต้องใช้ความรู้ใหม่เพิ่มเติมหรือไม่ กลวิธีที่ใช้เหมือนเดิมหรือไม่ หรือเปลี่ยนไปอย่างไร ครูให้เวลากับนักเรียนได้คิดแก้ปัญหาเอง โดยครูคอยให้คำชี้แนะ และตอบคำถามเมื่อนักเรียนสงสัย	**3. ขั้นสรุป** เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนร่วมกันสรุปประเด็นเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหา ครูเพิ่มเติมข้อสรุปประกอบแก่นักเรียนในการสร้างความเข้าใจร่วมกัน ครูให้นักเรียนประเมินตนเองถึงสิ่งที่ได้เรียนรู้ ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย ครูมอบหมายการบ้านหรือชิ้นงานเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่มเพื่อนำส่งในครั้งต่อไป
3. ขั้นสรุปและสะท้อนความคิด เป็นขั้นสรุปและสะท้อนความคิดเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา คือนักเรียนสามารถสรุปถึงแนวทางในการสร้างแบบจำลองที่นำไปสู่การสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบ ที่มีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสม ในแต่ละปัญหา พร้อมทั้งประเด็นความรู้เพิ่มเติมร่วมกัน ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย ครูมอบหมายการบ้านหรือชิ้นงานเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่มเพื่อนำส่งในครั้งต่อไป	

4. เลือกเนื้อหาจากหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 คือ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เนื่องจากเป็นเนื้อหาพีชคณิต ต้องอาศัยการพิจารณา ไตร่ตรอง วิเคราะห์ คิดอย่างรอบคอบ โดยใช้ข้อมูล ความรู้ สร้างความสัมพันธ์ และประสบการณ์ จึงน่าจะเหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด เพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนและพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

5. ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด รายละเอียดของสาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล และการแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

6. เขียนแผนการจัดการเรียนรู้รายชั่วโมงที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ซึ่งแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วยหัวข้อดังนี้ มาตรฐานการเรียนรู้ สาระสำคัญ ตัวชี้วัด สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล บันทึกหลังสอน โดยมีรายละเอียดของเนื้อหาในแต่ละแผน ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 11 แสดงรายละเอียดของเนื้อหาย่อยของแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่	**เนื้อหาย่อย**	**จำนวนชั่วโมง**	**จุดประสงค์การเรียนรู้**
1 – 2	แบบรูปและความสัมพันธ์	3	- วิเคราะห์แบบรูปที่กำหนดให้ได้ - เขียนความสัมพันธ์จากแบบรูปที่กำหนดให้โดยใช้ตัวแปรได้
3	คำตอบของสมการ	1	- หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยวิธีลองแทนค่าตัวแปรได้
4 – 7	การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	7	- บอกสมบัติของการเท่ากันได้ - แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายโดยใช้สมบัติการเท่ากันได้
8 – 11	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	7	- เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากโจทย์สมการที่กำหนดให้ - หาคำตอบของสมการจากโจทย์สมการได้

7. นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 11 แผน ไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา การใช้ภาษา ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะ ดังนี้

7.1 ให้เขียนรายละเอียดของแต่ละขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ชัดว่าครูต้องการทำอะไร อย่างไร เพราะอะไร นักเรียนต้องทำอะไร อย่างไร เพราะอะไร และได้อะไรจากการจัดกิจกรรมในแต่ละขั้น

7.2 ให้เขียนขั้นของกิจกรรมการเรียนรู้ที่สื่อให้เห็นความสอดคล้องของลักษณะของกิจกรรมที่พัฒนาขึ้นส่งผลถึงตัวแปรตาม นั่นคือ ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ว่าส่งผลได้อย่างไร

7.3 ให้เน้น และเพิ่มเติม ลักษณะความเป็นเฉพาะของคณิตศาสตร์ มีกระบวนการและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์สอดแทรกในแผนการจัดการเรียนรู้ ไม่ควรเป็นตัวหนังสือความเรียงทั้งแผน

7.4 ในแผนการจัดการเรียนรู้ของกลุ่มทดลอง ไม่ควรเน้นกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอดอย่างเดียว แต่เขียนในลักษณะที่ครอบคลุมการสอนและฝึกฝนนักเรียนด้วยวิธีการที่หลากหลาย

7.5 ปัญหาที่ยกตัวอย่างไม่ควรเริ่มด้วยตัวอย่างที่ยากเกินไป ควรเริ่มจากปัญหาที่ง่ายแล้วค่อย ๆ ปรับให้เป็นปัญหาที่ยากขึ้น ตามลำดับ

8. ผู้วิจัยนำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาเรียบร้อยแล้วไปใช้จริงกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และแบบสัมภาษณ์การคิดเชิงพีชคณิต ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง โดยมีรายละเอียดของขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาเครื่องมือดังต่อไปนี้

การสร้างและพัฒนาแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

ขั้นตอนการสร้างและพัฒนาแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต มีดังนี้

1. ศึกษาความหมาย นิยามเชิงปฏิบัติการและวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต จากเอกสาร ตำรา งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และข้อมูลทางอินเตอร์เน็ต

2. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตจากเอกสาร ตำรา งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และข้อมูลจากอินเตอร์เน็ต

3. ศึกษาเนื้อหาของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตร

สถานศึกษาโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

4. สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหา และพฤติกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับตัวชี้วัด เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

5. สร้างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ตามแนวคิดของสมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 37) เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 32 ข้อ โดยพิจารณาลักษณะที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตใน 4 ลักษณะ คือ 1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และ 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาและตัวชี้วัดตามตารางวิเคราะห์หลักสูตรที่ได้สร้างขึ้น

6. สร้างเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ซึ่งเป็นแบบอัตนัย จำนวน 32 ข้อ ผู้วิจัยได้สร้างเกณฑ์การให้คะแนน จากการสังเคราะห์แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักการศึกษาคณิตศาสตร์และปรับเพื่อความชัดเจนในการตรวจให้คะแนน ลักษณะของแบบวัดจะพิจารณาลักษณะที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตใน 4 ลักษณะ คือ

1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป จำนวน 8 ข้อ

2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต จำนวน 8 ข้อ

3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณจำนวน 8 ข้อ

4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย จำนวน 8 ข้อ

ซึ่งในแต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน รวมคะแนนทั้งหมดเป็น 64 คะแนน

ตารางที่ 12 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

1. ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปเพื่อขยายแบบรูป และสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ได้ถูกต้องเหมาะสม
1	นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปเพื่อขยายแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ได้ หรือ สร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ไม่สมบูรณ์

1. ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป(ต่อ)	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
0	นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแบบรูปเพื่อขยายแบบรูป และไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ได้ หรือ ไม่มีร่องรอยการดำเนินการเลย
2. ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องครบถ้วน
1	นักเรียนสามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องบางส่วน
0	นักเรียนไม่สามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ หรือไม่มีร่องรอยการดำเนินการเลย
3. ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนสามารถใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ตาราง กราฟ นิพจน์ สมการ) ในการแก้สถานการณ์ปัญหาและหาคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
1	นักเรียนสามารถใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ตาราง กราฟ นิพจน์ สมการ) ในการแก้สถานการณ์ปัญหาได้แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์
0	นักเรียนไม่สามารถใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ตาราง กราฟ นิพจน์ สมการ) ในการแก้สถานการณ์ปัญหาและหาคำตอบได้ หรือ ไม่มีร่องรอยการดำเนินการเลย
4. ความสามารถในการวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องและอธิบายการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้เพื่อยืนยันคำตอบได้ถูกต้องสมเหตุสมผล
1	นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ถูกต้องหรืออธิบายการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ถูกต้องสมเหตุสมผล อย่างใดอย่างหนึ่ง
0	นักเรียนไม่สามารถตอบคำถามได้ถูกต้องและไม่สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้เพื่อยืนยันคำตอบได้หรือไม่ร่องรอยการดำเนินการเลย

7. ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความถูกต้องของเนื้อหา ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง ความชัดเจนของภาษา เพื่อให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุง ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้ข้อเสนอแนะดังนี้

7.1 ให้ลดจำนวนข้อของแบบวัดลง จากครั้งแรกที่ผู้วิจัยออกข้อสอบ ลักษณะการคิดละ 12 ข้อ ใช้จริง 8 ข้อ เพื่อให้นักเรียนได้มีกำลังใจในการทำแบบวัดมากขึ้น โดยลดให้เหลือลักษณะของการคิดละ 8 ข้อ ใช้จริง 5 ข้อ

7.2 แก้ไขโจทย์บางข้อที่ยาวเกินไปให้สั้นและกระชับมากขึ้น เพื่อให้นักเรียนอ่านแล้วเข้าใจโจทย์ปัญหา และจับใจความ วิเคราะห์โจทย์ได้ง่ายขึ้น

7.3 ในลักษณะการคิดที่ 2 เกี่ยวกับ การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต ลักษณะของข้อสอบยังไม่ชัดถึงลักษณะทางพฤติกรรมที่ต้องการให้นักเรียนแสดงออก และไม่ควรชี้ทางให้นักเรียนเกี่ยวกับการใช้ตัวแปรแสดงสถานการณ์ หรือความสัมพันธ์ ควรให้นักเรียนได้แสดงการคิดของนักเรียนเอง และสื่อออกมาในขอบเขตที่ผู้วิจัยต้องการ

7.4 ควรมีคำถามย่อยช่วยคิดแก่นักเรียนในข้อสอบแบบวัด เพื่อให้นักเรียนแสดงการคิดและสื่อพฤติกรรมบ่งชี้ตามที่ผู้วิจัยต้องการได้ชัดเจนมากขึ้น

8. ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปให้ผู้ ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน ตรวจความสอดคล้องกับกรอบการประเมินความสามารถในคิดเชิงพีชคณิต ตรวจความตรงตามเนื้อหา ความสอดคล้องตามโครงสร้างตัวชี้วัด ความถูกต้องชัดเจนของสำนวนภาษาที่ใช้ พร้อมทั้งเกณฑ์ในการตรวจให้คะแนนและข้อเสนอแนะในการปรับปรุง โดยผู้ทรงคุณวุฒิมีความเห็นให้ปรับปรุงและให้ข้อเสนอแนะ มีดังนี้

8.1 *การคิดเชิงพีชคณิตลักษณะที่ 1 ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป*

1) คำถามย่อยข้อที่ 1 ผู้เชี่ยวชาญแนะนำให้เพิ่มคำถามย่อย จากผู้วิจัยใช้แนวคำถาม คือ “แบบรูปถัดไปมีจำนวนเท่าไร เพราะอะไร” ควรเพิ่มคำถามย่อย เป็น “แบบรูปที่กำหนดมีลักษณะอย่างไร” และ “แบบรูปถัดไปมีจำนวนเท่าไร เพราะอะไร” เพื่อเป็นแนวทางให้นักเรียนได้คิดอย่างมีระบบ

2) ปรับปรุงแนวคำถามย่อยข้อที่2 ที่ให้หากรณีทั่วไปซึ่งผู้วิจัยใช้คำว่า“ n ” ผู้เชี่ยวชาญแนะนำว่า นักเรียนมักจะมีปัญหากับคำว่า“ n ”ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรมมาก ดังนั้นควรกำหนดให้ “ n ” เป็นจำนวนที่มาก ๆ ซึ่งนักเรียนจะแสดงวิธีคิดในรูปของสูตรหรือกรณีทั่วไปอยู่แล้ว

3) ปรับปรุงแนวการพิจารณาแบบวัดข้อที่ 4 และ 5 ซึ่งเป็นลักษณะโจทย์ปัญหาการสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา ซึ่งโจทย์ปัญหาจะบอกเป็นกรณีทั่วไปมาให้อยู่แล้ว ไม่ควรให้พิจารณาในเชิงของแบบรูปและหากรณีทั่วไปอีก แต่ควรพิจารณาในเชิงของการสร้างความสัมพันธ์ของสมการ และสถานการณ์ปัญหาเพื่อหาคำตอบมากกว่า

4) ควรปรับโจทย์ข้อที่ 3 ในแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียนให้คล้ายและขนานกับฉบับก่อนเรียน

8.2 การคิดเชิงพีชคณิตลักษณะที่ 2 การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

1) ควรปรับปรุงแนวคำถามของทุกข้อ จาก “จงใช้ตัวแปรแสดงความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา” เป็น “จงเขียนสัญลักษณ์หรือตัวแปรแสดงความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา” เนื่องจากนักเรียนบางส่วนอาจสับสนกับการใช้คำว่า “ตัวแปร” ได้

2) ควรปรับปรุงข้อสอบแบบวัดบางข้อ เนื่องจาก มีตัวแปรซับซ้อน ยากเกินไป ควรปรับให้ง่ายขึ้น

8.3 การคิดเชิงพีชคณิตลักษณะที่ 3 การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

1) ปรับปรุงโจทย์บางข้อให้ชัดเจนมากขึ้น จากสถานการณ์ อัตราค่าโทรศัพท์มือถือของเครือข่ายหนึ่ง เป็นดังนี้ “โทร 2 นาทีแรก คิดค่าบริการ 5 บาท นาทีต่อไปคิดค่าบริการนาทีละ 3 บาท” ผู้เชี่ยวชาญให้ข้อสังเกตว่า 2 นาทีแรก นาทีละ 5 บาท หรือ 2 นาทีแรกคิด 5 บาทเฉย ๆ ดังนั้นควรให้ใช้คำให้ชัดเจน เพื่อไม่ให้นักเรียนสับสนได้

2) เมื่อพิจารณาแบบวัดทุกข้อแล้ว นักเรียนสามารถเลือกใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือ การใช้ตาราง การใช้นิพจน์ การใช้สมการ นอกจากนี้ยังพบว่า โจทย์บางข้อนักเรียนอาจใช้วิธีการลองผิดลองถูกได้อีกด้วย แต่ยังไม่มีกรณีการใช้กราฟ ดังนั้นควรปรับปรุงโจทย์ให้มีการใช้กราฟมาเป็นตัวช่วยในการหาคำตอบ แต่ต้องสอดคล้องกับโครงสร้างของเนื้อหาและหลักสูตร

3) ควรปรับปรุงโจทย์บางข้อที่มีการใช้ชื่อคนคล้ายคลึงกันหลายคนในสถานการณ์ปัญหา เช่น ในแบบวัด ใช้ “เหมียว” “หมิว” “หมวย” ควรปรับให้ชื่อมีความแตกต่างกัน

8.4 การคิดเชิงพีชคณิตลักษณะที่ 4 การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

1) ปรับปรุงโจทย์ให้ง่ายขึ้น เช่น ในสถานการณ์เพิ่มขึ้นหรือลดลง ที่ “กำหนดกรณีที่ n ของจำนวนชุดหนึ่งเป็น $\frac{2n^2}{n^3+1}$ ” เมื่อพิจารณาแล้วมีความยากเกินไป ควรปรับ

ให้มีจำนวนเลขยกกำลังน้อยลง ดังนั้นผู้วิจัยจึงปรับเป็น $\dfrac{2n}{n(n+1)}$ แทน

2) ปรับปรุงโจทย์เรื่องการใช้ภาษาในสถานการณ์ แท็กซี่ พลเมืองดี ควรใช้คำให้คงที่ เสมอต้นเสมอปลาย คือ ปรับจาก “การรับทองคำ” เป็น “การรับเงิน” ให้สอดคล้องกับโจทย์ปัญหา

3) ปรับปรุงการใช้ภาษา ในสถานการณ์ BEST Promotion ควรเปลี่ยนจากคำว่า “จ่ายรายเดือน 399 บาท ส่งข้อความครั้งละ 2 บาท” เป็น “เหมาจ่ายรายเดือน 399 บาท ส่งข้อความได้ 20 ครั้ง” แทน

9. ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิทั้งฉบับก่อนเรียน และหลังเรียน ไปทดลองใช้กับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง และเป็นนักเรียนที่เรียนเนื้อหาเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวผ่านมาแล้ว โดยผู้วิจัยดำเนินการทดสอบรวม 2 ครั้ง

การทดสอบครั้งที่ 1

ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่ปรับปรุงแก้ไขไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/2 และ 2/3 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุนวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี จำนวน 68 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จากนั้นนำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ของนักเรียนดังกล่าวมาตรวจให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์ที่ปรับปรุงแล้ว และนำผลคะแนนมาวิเคราะห์หาค่าความเที่ยง (Reliability) โดยมีเกณฑ์คือ มีค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป แล้วนำมาหาค่าความยาก (Difficulty) และหาค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) เป็นรายข้อ โดยมีเกณฑ์คือ ค่าความยากมีค่า 0.2 – 0.8 และ ค่าอำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับก่อนเรียน

ค่าความเที่ยง	0.73
ค่าความยาก (P)	0.14 – 0.73
ค่าอำนาจจำแนก (r)	- 0.05 – 0.73

แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับหลังเรียน

ค่าความเที่ยง	0.79
ค่าความยาก (P)	0.18 – 0.64
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.00 – 0.70

จากการทดลองใช้ครั้งที่ 1 พบว่า ได้ข้อสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับก่อนเรียน ที่ผ่านเกณฑ์คุณภาพตามที่กำหนด 25 ข้อ และ ข้อสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับหลังเรียน ที่ผ่านเกณฑ์คุณภาพตามที่กำหนด 27 ข้อ

การทดสอบครั้งที่ 2

ผู้วิจัยเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพไม่เป็นไปตามเกณฑ์ที่กำหนด และยังไม่มีคุณภาพพอของข้อสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับก่อนเรียน และ ฉบับหลังเรียน ฉบับละ 8 ข้อ โดยให้ครอบคลุมโครงสร้างของเนื้อหาและตัวชี้วัดตามตารางวิเคราะห์หลักสูตร มาปรับปรุงแก้ไข แล้วนำข้อสอบดังกล่าวไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 และ 2/4 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี จำนวน 64 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จากนั้นนำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 2 ฉบับ ของนักเรียนดังกล่าวมาตรวจให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์ที่ปรับปรุงแล้ว และนำผลคะแนนมาวิเคราะห์หาค่าความเที่ยง ค่าความยากและอำนาจจำแนก ซึ่งผลการวิเคราะห์ เป็นดังนี้

แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับก่อนเรียน

ค่าความเที่ยง	0.75
ค่าความยาก (P)	0.32 – 0.70
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.23 – 0.73

แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับหลังเรียน

ค่าความเที่ยง	0.82
ค่าความยาก (P)	0.25 – 0.61
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.23 – 0.68

10. นำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดจำนวนลักษณะการคิดละ5 ข้อ รวมทั้งหมด 20 ข้อ ไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง

การสร้างและพัฒนาแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ขั้นตอนการสร้างและพัฒนาแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ศึกษาความหมาย นิยามเชิงปฏิบัติการ และวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ จากเอกสาร ตำราและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จากเอกสาร ตำราและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3. ศึกษาเนื้อหาของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และ หลักสูตรสถานศึกษาโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี ในกลุ่มสาระการเรียนรู้

คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

4. สร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตรตามเนื้อหา และพฤติกรรมการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับตัวชี้วัด เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

5. สร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ตามกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของโพลยา (Polya, 1957: 4 – 40) เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ ซึ่งในแต่ละข้อจะประกอบด้วย 4 ข้อย่อย คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ และขั้นตรวจสอบคำตอบ โดยให้ครอบคลุมเนื้อหาและตัวชี้วัดตามตารางวิเคราะห์โครงสร้างของข้อสอบตามหลักสูตร

6. สร้างเกณฑ์การตรวจแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ แต่ละข้อจะมีข้อย่อย 4 ข้อ โดยผู้วิจัยได้สร้างเกณฑ์จากการสังเคราะห์แนวทางการวัดและการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากนักการศึกษาคณิตศาสตร์และปรับเพื่อความชัดเจนในการตรวจให้คะแนน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

6.1 การให้คะแนนในแต่ละข้อย่อยเป็นอิสระต่อกัน

6.2 แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 9 คะแนน แบ่งเป็น 4 ข้อย่อย โดยที่ ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา ขั้นวางแผนแก้ปัญหา และขั้นตรวจสอบคำตอบ มีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ส่วน ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ แบ่งการให้คะแนนเป็น 2 ตอน คือ ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา มีคะแนนเต็ม 2 คะแนน และขั้นสรุปคำตอบ มีคะแนนเต็ม 1 คะแนน

ตารางที่ 13 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และบอกสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องและครบถ้วน
1	นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องบางส่วน หรือไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง หรือไม่ทำเลย
2. ความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม เช่น แสดงขั้นตอนการดำเนินการแก้ปัญหาตามลำดับก่อนหลังหรือเขียนในรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง

2. ความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
1	นักเรียนแสดงวิธีการวารแผนแก้ปัญหาซึ่งอาจนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง แต่มีบางส่วนผิดโดยอาจแสดงลำดับการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือเขียนในรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง
0	นักเรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ทำเลย
3. ความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ	
3.1 การดำเนินการแก้ปัญหา	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้ หรือคิดคำนวณ/แก้สมการได้อย่างถูกต้อง
1	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วนหรือมีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหาได้พอสมควรแต่ไม่สำเร็จ
0	นักเรียนดำเนินการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่มีร่อยรอยการดำเนินการแก้ปัญหาเลย
3. ความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ(ต่อ)	
3.2 การสรุปคำตอบ	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
1	นักเรียนสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง และครบถ้วน
0.5	นักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้องแต่ไม่ครบถ้วน
0	นักเรียนสรุปคำตอบไม่ถูกต้องและไม่ครบถ้วน หรือไม่สรุปคำตอบ
4. ความสามารถในการตรวจสอบคำตอบ	
ระดับคะแนน	**คำอธิบาย**
2	นักเรียนตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์
1	นักเรียนตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่สมบูรณ์
0	นักเรียนตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการตรวจสอบเลย

7. ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจความสอดคล้องของกรอบการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความถูกต้องของเนื้อหา ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับตัวชี้วัด และความถูกต้องชัดเจนของสำนวนภาษาที่ใช้ของข้อสอบแต่ละข้อ เพื่อให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุง ซึ่งอาจารย์ที่ปรึกษาได้ให้ข้อเสนอแนะ ดังนี้

7.1 ข้อสอบแบบวัดแต่ละข้อ ในขั้นวางแผนแก้ปัญหา ควรเพิ่มคำถามย่อยเพื่อชี้แนะแนวทางการตอบคำถามของนักเรียน เนื่องจากนักเรียนอาจไม่คุ้นกับการเขียนอธิบายวิธีการวางแผน ซึ่งในที่นี้ อาจารย์ที่ปรึกษาให้เพิ่มคำถามย่อยในขั้นวางแผนแก้ปัญหา 2 คำถาม คือ “ลำดับแรกที่ต้องทำ คืออะไร” และ “วิธีการหรือแนวทางที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาคืออะไร”

7.2 การเว้นช่องว่างที่จะให้นักเรียนเขียนอธิบายและแสดงวิธีทำหรือคำตอบ คือไม่ควรเว้นช่องว่างไว้เยอะเกินไป จะเป็นการทำให้กำลังใจในการทำข้อสอบแบบวัดของนักเรียนน้อยลง

7.3 แก้ไขโจทย์บางข้อที่ยาวเกินไป ให้สั้นและกระชับมากขึ้น

8. ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน ตรวจความสอดคล้องของกรอบการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ความถูกต้องของเนื้อหา ความสอดคล้องระหว่างเนื้อหากับตัวชี้วัด ความถูกต้องชัดเจนของสำนวนภาษาที่ใช้ของข้อสอบแต่ละข้อ และเกณฑ์การให้คะแนน และข้อเสนอแนะในการปรับปรุง โดยผู้ทรงคุณวุฒิมีความเห็นให้ปรับปรุงและให้ข้อเสนอแนะ ดังนี้

8.1 ปรับปรุงโจทย์ข้อ 2 ของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน ซึ่งไม่สอดคล้องกับความเป็นจริงเท่าที่ควร

8.2 ปรับปรุงการใช้ภาษาของโจทย์ข้อที่ 7 ของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ฉบับก่อนเรียน คือ จากคำว่า “แผ่นยาง” เป็น “ยางแผ่น”

8.3 ข้อเสนอแนะคือ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ทั้งสองฉบับ ค่อนไปทางยาก ควรปรับให้มีความง่ายมากขึ้น

9. ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ที่ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิทั้ง 8 ข้อ ไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง โดยผู้วิจัยดำเนินการทดสอบรวม 2 ครั้ง ดังนี้

การทดสอบครั้งที่ 1

ผู้วิจัยนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน และ หลังเรียน ที่ปรับปรุงแก้ไขไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/2 และ 3/3 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี จำนวน 68 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จากนั้นนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียน

ดังกล่าวมาตรวจให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์ที่ปรับปรุงแล้ว และนำผลคะแนนมาวิเคราะห์หาค่าความเที่ยง (Reliability) โดยมีเกณฑ์คือ มีค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป แล้วนำมาหาค่าความยาก (Difficulty) และหาค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) เป็นรายข้อ โดยมีเกณฑ์คือ ค่าความยากมีค่า 0.2 – 0.8 และ ค่าอำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ค่าความเที่ยง	0.82
ค่าความยาก (P)	0.27 – 0.64
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.12 – 0.63

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ค่าความเที่ยง	0.78
ค่าความยาก (P)	0.30 – 0.63
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.14 – 0.42

จากการทดลองใช้ครั้งที่ 1 พบว่า ได้ข้อสอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน ที่ผ่านเกณฑ์คุณภาพตามที่กำหนด 7 ข้อ และ ข้อสอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน ที่ผ่านเกณฑ์คุณภาพตามที่กำหนด 6 ข้อ

การทดสอบครั้งที่ 2

ผู้วิจัยเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพสูงสุดตามเกณฑ์ ของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหา ฉบับก่อนเรียน และหลังเรียน จำนวนฉบับละ 4 ข้อ โดยให้ครอบคลุมเนื้อหาและตัวชี้วัดตามโครงสร้างข้อสอบตามหลักสูตร มาปรับปรุงแก้ไข แล้วนำจำนวนข้อสอบดังกล่าวไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 และ 2/4 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี จำนวน 64 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จากนั้นนำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนดังกล่าวมาตรวจให้คะแนนโดยใช้เกณฑ์ในข้อ 6 และนำผลคะแนนมาวิเคราะห์หาค่าความเที่ยง ค่าความยาก และอำนาจจำแนก ซึ่งผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ค่าความเที่ยง	0.84
ค่าความยาก (P)	0.41 – 0.64
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.33 – 0.63

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ค่าความเที่ยง	0.86
ค่าความยาก (P)	0.39 – 0.63
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.28 – 0.60

10. นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดจำนวน 5 ข้อไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง

การสร้างและพัฒนาแบบสัมภาษณ์ในการคิดเชิงพีชคณิต

1. ศึกษาโจทย์ปัญหาจากแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับหลังเรียน ที่ผ่านการหาคุณภาพแล้วอย่างเอียดเพื่อสร้างประเด็นหรือข้อคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ให้สอดคล้องกับโจทย์ปัญหาแต่ละปัญหา

2. สร้างแบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างและแบบบันทึกการสัมภาษณ์ซึ่งแบบสัมภาษณ์มีประเด็นที่จะถาม (แนวคำถาม) ชัดเจน เพื่อทำให้ทราบถึงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนจากการตอบปัญหาในแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตพีชคณิต ซึ่งแนวคำถามแบ่งเป็น 4 แนวคำถามที่แตกต่างกัน ตามลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต 4 ลักษณะ คือ

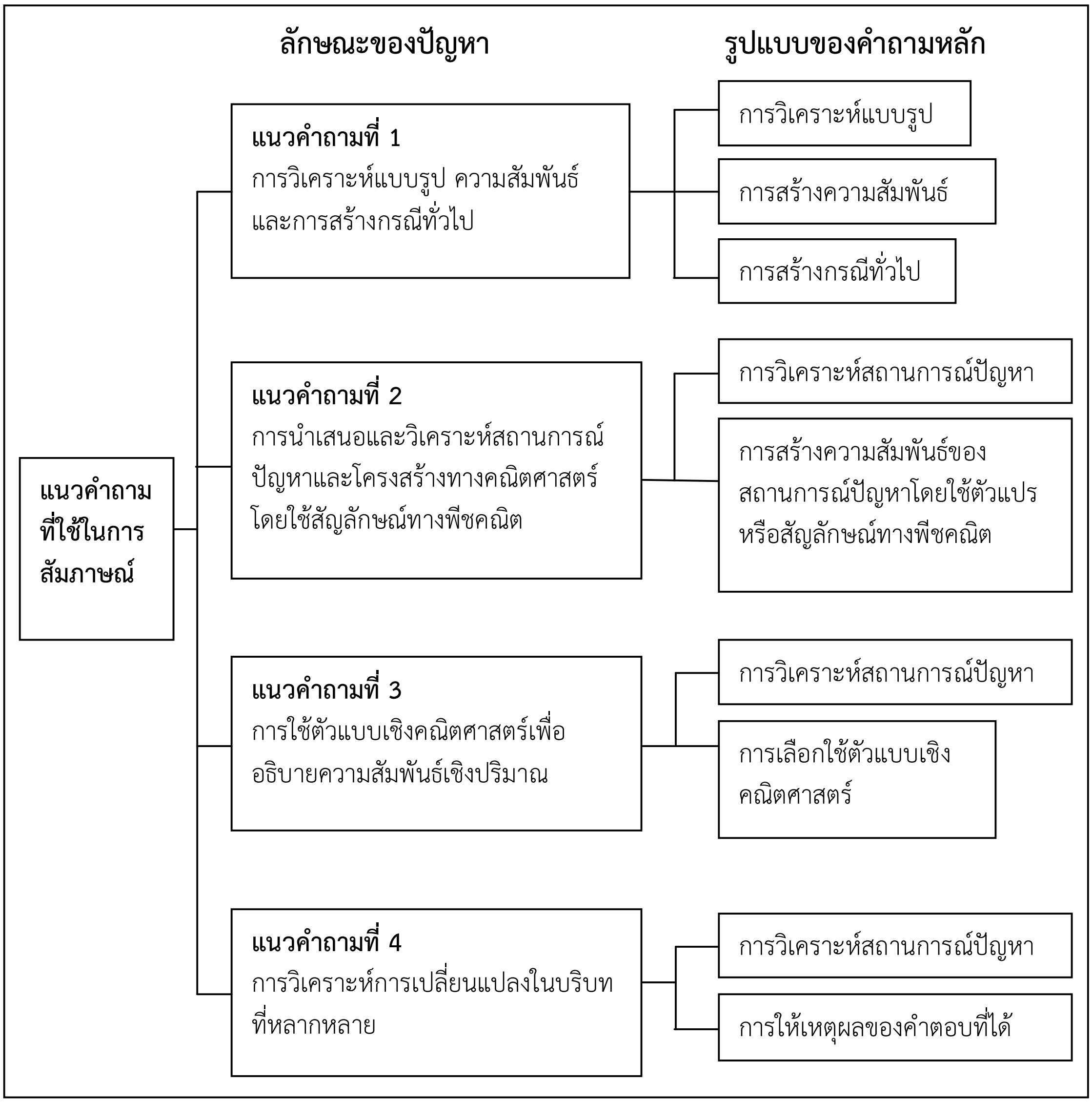
1) แนวคำถามสำหรับการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป

2) แนวคำถามสำหรับการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

3) แนวคำถามสำหรับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

4) แนวคำถามสำหรับการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

ซึ่งนักเรียนที่ได้รับการคัดเลือกให้ได้รับการสัมภาษณ์ของแต่ละแนวคำถาม คำถามเริ่มต้นของการสัมภาษณ์และคำถามหลักจะเหมือนกัน ส่วนการตอบคำถามอื่น ๆ จะแตกต่างกันตามลักษณะการตอบคำถาม เพื่อแสดงแนวคิดของนักเรียนเอง ซึ่งการออกแบบชุดคำถามจะจำแนกตามลักษณะและรูปแบบคำถามหลัก ดังนี้



ภาพประกอบที่ 23 กรอบแนวคำถามในการสัมภาษณ์การคิดเชิงพีชคณิต

3. นำแนวคำถามในการสัมภาษณ์ที่สร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาพิจารณาความถูกต้องเหมาะสม ความชัดเจนของสำนวนภาษาที่ใช้ และความเหมาะสมของโจทย์ปัญหากับความรู้และวัยของผู้เรียน จากนั้นปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาอีกครั้งหนึ่ง

4. นำแบบแนวคำถามของแบบสัมภาษณ์การคิดเชิงพีชคณิตไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1/3 ของโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความชัดเจนของสำนวนภาษาที่ใช้ ว่านักเรียนมีความเข้าใจกับชุดคำถามมากน้อยเพียงไร เพื่อตอบคำถามนั้น ๆ จากนั้นนำผลที่ได้จากการทดลองตอบคำถามของนักเรียนมาวิเคราะห์ เพื่อปรับปรุงแก้ไขแนวคำถามเพื่อนำไปทดลองใช้กับผู้ให้ข้อมูลหลักต่อไป

5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเองกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม โดยมีขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้

1. ขั้นเตรียมการ

1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว รายวิชาพื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

1.2 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

1.3 ผู้วิจัยทำหนังสือขอความร่วมมือในการทำวิจัยจากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพื่อขอความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลถึงผู้อำนวยการโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุนวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี

2. ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

2.1 ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน กับกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม จากนั้นนำคะแนนไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F – test) ซึ่งผลการทดสอบ พบว่าความแปรปรวนของทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 แล้วนำไปทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิต ด้วยค่าที (t – test) พบว่า ค่ามัชฌิมเลขคณิตไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตไม่แตกต่างกัน

2.2 ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่เตรียมไว้ โดยผู้วิจัยทำการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 4 คาบต่อสัปดาห์ เป็นเวลา 4 สัปดาห์ กับ 4 วัน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 โดยสอนตามชั่วโมงปกติที่ทางโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยาได้จัดไว้สำหรับการเรียนการสอนในเนื้อหา เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3 คาบต่อสัปดาห์ และได้ขออนุญาตใช้ชั่วโมงค้นคว้าของนักเรียนเพิ่มอีก 1 คาบต่อสัปดาห์ โดยเริ่มทดลองสอนตั้งแต่วันที่ 3 มกราคม 2556 ถึงวันที่ 8 กุมภาพันธ์ 2556

2.3 เมื่อดำเนินการทดลองสอนตามเนื้อหาที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ ครบ 18 คาบแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียน และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กับกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูล จากนั้น จำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนเขียนแสดงในแบบวัดความสามารถในการคิดเชิง

พีชคณิตหลังเรียน แล้วเลือกนักเรียนจำนวนหนึ่งที่ผู้วิจัยวิเคราะห์จากการเขียนตอบของนักเรียนแล้วเห็นว่ามีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนของแต่ละกลุ่มที่จำแนกไว้มาสัมภาษณ์เพื่อหาข้อมูลเชิงเจาะลึกถึงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำผลการทดสอบจากแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนมาตรวจให้คะแนน และทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Science: SPSS) โดยวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. วิเคราะห์ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้คะแนนสอบจากแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน และหลังเรียน ของทั้งสองแบบวัด โดยคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละ

2. เปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง และเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3. วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพเพิ่มเติม โดยนำการเขียนแสดงขั้นตอนการคิดหาคำตอบของนักเรียน หลักฐาน ร่องรอย จากการทำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนและผลจากการถอดเทปบทสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายมาวิเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่เรียนผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด ซึ่งในส่วนของการวิเคราะห์บทสัมภาษณ์ของนักเรียน

7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยใช้สถิติในการคำนวณหาคุณภาพของแบบวัดและวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

2.1 สถิติที่ใช้ในการคำนวณหาคุณภาพของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ใช้สูตรดังนี้

2.1.1 หาความเที่ยง (Reliability) ของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ดังนี้

$$\alpha = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{\sum s_i^{\,2}}{s_t^{\,2}}\right)$$

เมื่อ α แทน ค่าความเที่ยงของแบบวัด

k แทน จำนวนข้อในแบบวัด

$s_i^{\,2}$ แทน ความแปรปรวนของข้อสอบในแต่ละข้อ

$s_t^{\,2}$ แทน ความแปรปรวนของข้อสอบทั้งหมด

2.1.2 หาค่าความยาก (p) ของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรของวิทเนย์และชาเบอร์ (Whitnet & Sabers) ดังนี้

$$\rho = \frac{s_h + s_l - (n_l)(x_{\min})}{(n_t)(x_{\max} - x_{\min})}$$

เมื่อ ρ แทน ค่าความยาก

s_h แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มสูง

s_l แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มต่ำ

$x_{\max}$ แทน คะแนนสูงสุดที่ได้

$x_{\min}$ แทน คะแนนต่ำสุดที่ได้

n_t แทน จำนวนคนกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำรวมกัน

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 147)

2.1.3 หาค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สูตรของวิทเนย์ และชาเบอร์ (Whitnet and Sabers) ดังนี้

$$r = \frac{s_h - s_l}{(n_h)(x_{\max} - x_{\min})}$$

เมื่อ r แทน ค่าอำนาจจำแนก

s_h แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มสูง

s_l แทน ผลรวมของคะแนนกลุ่มต่ำ

$x_{\max}$ แทน คะแนนสูงสุดที่ได้

$x_{\min}$ แทน คะแนนต่ำสุดที่ได้

n_t แทน จำนวนคนกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำรวมกัน

(พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2544: 147)

2.1.4 สถิติที่ใช้ในการหาค่าความเชื่อมั่นเพื่อวิเคราะห์บทสัมภาษณ์ของนักเรียนใช้สูตรการหาค่าความเชื่อมั่นของไมล์สและฮูเบอร์แมน มีสูตรดังนี้

$$r = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

เมื่อ r คือ ค่าความเชื่อมั่น

n_1 คือ จำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความเห็นเหมือนกัน

n_2 คือ จำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความเห็นแตกต่างกัน

2.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

วิเคราะห์ข้อมูลโดยการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ความแปรปรวน วิเคราะห์ค่าที (t – test) และวิเคราะห์ค่าเอฟ (F – test) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for Social Science : SPSS)

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลโดยแบ่งเป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ และการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ดังนี้

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผลการศึกษาวิจัยนำเสนอดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการศึกษาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลในตารางที่ 14

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลในตารางที่ 15

ตอนที่ 3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิดระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลในตารางที่ 16 – 19

ตอนที่ 4 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม นำเสนอผลในตารางที่ 20

ตอนที่ 5 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิดระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม นำเสนอผลในตารางที่ 21 – 24

ตอนที่ 6 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลในตารางที่ 25

ตอนที่ 7 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม นำเสนอผลในตารางที่ 26

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผลการศึกษาวิจัยนำเสนอ ดังนี้

ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

ตอนที่ 2 พฤติกรรมการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตอนที่ 3 พฤติกรรมที่แสดงถึงพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตอนที่ 4 ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละตอนมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ตอนที่ 1 ผลการศึกษาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลในตารางที่ 14

ตารางที่ 14 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละ ($\bar{x}$ ร้อยละ) ของคะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ความสามารถ	กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	$\bar{x}$ ร้อยละ
ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต	กลุ่มทดลอง	35	20.8000	4.6703	52.0000
ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์	กลุ่มทดลอง	35	24.0571	5.4446	53.4602

จากตารางที่ 14 ผลปรากฏว่า ค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละของคะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง มีค่า เท่ากับ 52 และ 53.4602 ตามลำดับ ดังนั้น นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำร้อยละ 50 ของคะแนนสอบทั้งฉบับ

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลในตารางที่ 15

ตารางที่ 15 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	$\bar{x}$	s	t
ก่อนเรียน	35	16.9714	4.3147	5.451^{*}
หลังเรียน	35	20.8000	4.6703	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 15 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลอง มีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียน เท่ากับ 16.9714 และ 20.8 ตามลำดับ การทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิด ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลดังต่อไปนี้

ตารางที่ 16 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	$\bar{x}$	s	t
ก่อนเรียน	35	5.2571	1.6688	0.412*
หลังเรียน	35	5.3714	1.5734	

$^{*}p > .05$

จากตารางที่ 16 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลอง มีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียน เท่ากับ 5.2571และ 5.3714 ตามลำดับ จากการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 17 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	$\bar{x}$	s	t
ก่อนเรียน	35	3.7143	2.0490	2.424*
หลังเรียน	35	4.9143	2.3834	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 17 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนเท่ากับ 3.7143 และ 4.9143 ตามลำดับจากการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 18 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	$\bar{x}$	s	t
ก่อนเรียน	35	2.9143	1.6337	8.461*
หลังเรียน	35	5.1714	1.6713	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 18 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนเท่ากับ 2.9143 และ 5.1714 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 19 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	$\bar{x}$	s	t
ก่อนเรียน	35	5.0857	1.2455	0.727*
หลังเรียน	35	5.3429	2.0138	

$^{*}p > .05$

จากตารางที่ 19 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียน เท่ากับ 5.0857 และ 5.3429 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลายระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 4 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม นำเสนอผลดังต่อไปนี้

ตารางที่ 20 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	t
กลุ่มทดลอง	35	20.8000	4.6703	2.328^{*}
กลุ่มควบคุม	33	18.3939	3.8319	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 20 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต เท่ากับ 20.8 และ18.3939 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 5 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิดระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม นำเสนอผลดังต่อไปนี้

ตารางที่ 21 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	t
กลุ่มทดลอง	35	5.3714	1.5734	0.977^{*}
กลุ่มควบคุม	33	5.0000	1.5612	

$^{*}p > .05$

จากตารางที่ 21 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนแบบวัดความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป เท่ากับ 5.3714 และ 5.0000 ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป ไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 22 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	t
กลุ่มทดลอง	35	4.9143	2.0490	2.193^{*}
กลุ่มควบคุม	33	3.9091	1.7023	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 22 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 4.9143 และ 3.9091 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 23 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ ระหว่างกลุ่มทดลองกับกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	t
กลุ่มทดลอง	35	5.1714	1.6713	2.535^{*}
กลุ่มควบคุม	33	4.2121	1.4309	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 23 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 5.1714 และ 4.2121 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณสูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตารางที่ 24 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	t
กลุ่มทดลอง	35	5.3429	2.0138	0.158^{*}
กลุ่มควบคุม	33	5.2727	1.6061	

$^{*}p > .05$

จากตารางที่ 24 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิตของเท่ากับ 5.3429 และ 5.2727 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลายไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 6 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง นำเสนอผลดังนี้

ตารางที่ 25 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลอง

กลุ่มทดลอง	n	$\bar{x}$	s	t
ก่อนเรียน	35	16.7714	4.2294	7.252^{*}
หลังเรียน	35	24.0571	5.4446	

$^{*}p < .05$

จากตารางที่ 25 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนเท่ากับ16.7714 และ 24.0571 ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 7 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างนักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม นำเสนอผลดังนี้

ตารางที่ 26 แสดงค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และการทดสอบค่าที (t – test) เพื่อทดสอบความแตกต่างของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มตัวอย่าง	n	$\bar{x}$	s	t
กลุ่มทดลอง	35	24.0571	5.4446	2.893^*
กลุ่มควบคุม	33	20.6061	4.2862	

$^* p < .05$

จากตารางที่ 26 ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 24.0571และ20.6061 ตามลำดับ และการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ แบ่งเป็น 4 ตอน คือ

ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

1.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน

1.2 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับครู

1.3 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน แบ่งเป็นประเด็นย่อยดังนี้

1.3.1 ด้านผลการเรียน

1.3.2 ด้านปัจจัยอื่นที่อาจส่งผลต่อการเรียน

1.4 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับชุมชน

ตอนที่ 2 พฤติกรรมการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

ตอนที่ 3 พฤติกรรมที่แสดงถึงพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตอนที่ 4 ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

4.1 พัฒนาการของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

4.2 การนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิต

4.3 ตัวอย่างการนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิต

4.4 ตัวอย่างการสัมภาษณ์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

ตอนที่ 1 ข้อมูลทั่วไป

1.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน

ผู้วิจัยเลือกทำการทดลองที่โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา ซึ่งเป็นโรงเรียนที่ผู้วิจัยสังกัดอยู่ และเป็นโรงเรียนมัธยมขนาดกลาง สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 11 จังหวัดสุราษฎร์ธานี เปิดสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 6 มีห้องเรียนทั้งหมด 30 ห้องเรียน แบ่งเป็นระดับชั้นเรียนละ 5 ห้องเรียน ผู้วิจัยเลือกทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งมีทั้งหมด 5 ห้องเรียน มีนักเรียนเฉลี่ยห้องละ 36 คน ทุกห้องจัดชั้นเรียนคละระดับความสามารถที่วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากคะแนนสอบเข้า

1.2 ข้อมูลเกี่ยวกับครู

ในปีการศึกษา 2555 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยามีครูทั้งหมด 52 คน เป็นครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จำนวน 8 คน

สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี จำนวน 8 คน คิดเป็น ร้อยละ 100

และเมื่อศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับสาขาที่ครูสำเร็จการศึกษาพบว่า

สำเร็จการศึกษาทางการสอนคณิตศาสตร์โดยตรง จำนวน 7 คน คิดเป็น ร้อยละ 87.5

สำเร็จการศึกษาในสาขาที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ วิทยาศาสตร์ จำนวน 1 คน คิดเป็น ร้อยละ 12.5

จากการสอบถามด้านภาระงานในการสอนของครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ได้ข้อมูลว่า ครูแต่ละท่านได้รับมอบหมายให้สอนรายวิชาคณิตศาสตร์โดยเฉลี่ยประมาณ 16 คาบต่อสัปดาห์ รายวิชาอื่น ๆ เช่น กิจกรรมชุมนุม กิจกรรมโฮมรูม กิจกรรมลูกเสือ – เนตรนารี และมีภาระงานอื่นที่นอกเหนือจากงานสอน เช่น งานวัดผลทางการศึกษา งานฝ่ายแผนงานโรงเรียน งานฝ่ายการเงินและสินทรัพย์โรงเรียน งานฝ่ายบุคลากรโรงเรียน งานฝ่ายพยาบาลและอนามัยโรงเรียน เป็นต้น จากการสัมภาษณ์และสังเกตการณ์สอนของครู ได้ข้อมูลว่า ครูมีแนวการสอนไม่หลากหลายเท่าที่ควร ส่วนใหญ่เป็นการสอนแบบบรรยาย การใช้สื่อการเรียนรู้ไม่เป็นรูปธรรม และยังไม่มากพอ อาจเนื่องมาจากภาระงานที่มากของครูแต่ละคนที่ทำให้มีเวลาในการเตรียมการสอนน้อย

1.3 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน

ในปีการศึกษา 2555 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยามีนักเรียนทั้งหมด 1,113 คน เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 182 คน เป็นนักเรียนหญิง 121 คน เป็นนักเรียนชาย 61 คน

นักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีจำนวน 68 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 35 คน และ นักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 33 คน ผู้วิจัยวิเคราะห์เป็นประเด็นย่อย ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1.3.1 ด้านผลการเรียน

ผู้วิจัยได้รวบรวมผลการเรียนภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2555 ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ดังนี้

กลุ่มทดลอง

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ดีมาก คิดเป็นร้อยละ 9

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ดี คิดเป็นร้อยละ 14

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ปานกลาง คิดเป็นร้อยละ 46

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์พอใช้ คิดเป็นร้อยละ 11

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ปรับปรุง คิดเป็นร้อยละ 20

กลุ่มควบคุม

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ดีมาก คิดเป็นร้อยละ 12

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ดี คิดเป็นร้อยละ 15

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ปานกลาง คิดเป็นร้อยละ 43

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์พอใช้ คิดเป็นร้อยละ 18

ผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ปรับปรุง คิดเป็นร้อยละ 12

เมื่อพิจารณาผลการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่านักเรียนทั้งสองกลุ่มมีระดับผลการเรียนใกล้เคียงกันโดยนักเรียนส่วนใหญ่ของทั้งสองกลุ่มมีผลการเรียนอยู่ในเกณฑ์ปานกลาง

1.3.2 ด้านปัจจัยอื่นที่อาจส่งผลต่อการเรียน

กลุ่มทดลอง

นักเรียนกลุ่มทดลองร้อยละ 80 อาศัยอยู่กับบิดามารดา อีกร้อยละ 20 อาศัยอยู่กับญาติ เช่น ปู่ย่า ตายาย ป้า หรือน้า ลักษณะครอบครัวเป็นครอบครัวเดี่ยว นักเรียนกลุ่มทดลองร้อยละ 34 มีภูมิลำเนาเดิมอยู่จังหวัดอื่น ส่วนใหญ่เป็นครอบครัวที่ย้ายถิ่นฐานมาจากภาคตะวันออกเฉียงเหนือมารับจ้างกรีดยางในพื้นที่ ผู้ปกครองของนักเรียนกลุ่มทดลองประกอบอาชีพเกษตรกรสวนยางพาราร้อยละ 60 ประกอบอาชีพรับราชการและรัฐวิสาหกิจ ร้อยละ17 ประกอบอาชีพธุรกิจส่วนตัว เช่น ธุรกิจร้านอาหาร ธุรกิจร้านเสริมสวย ธุรกิจอู่ซ่อมรถ คิดเป็นร้อยละ 11 และประกอบอาชีพรับจ้าง และ อื่น ๆ คิดเป็นร้อยละ 11

จากการสัมภาษณ์ได้ข้อมูลว่า นักเรียนร้อยละ 86 มีความคิดเห็นว่าครอบครัวตนเองไม่มีปัญหาด้านการเงิน และผู้ปกครองเป็นผู้อุปการะทางด้านการเงินในการศึกษา นักเรียนร้อยละ 60 พักอาศัยอยู่ในเขตอำเภอบ้านตาขุนวิทยา ซึ่งการเดินทางมาโรงเรียนมีความสะดวกใช้เวลาในการเดิน ทาง

ประมาณ 5 – 15 นาที โดยนักเรียนที่เหลือเป็นนักเรียนที่พักอาศัยอยู่ในเขตอำเภอใกล้เคียง ได้แก่ อำเภอพนม อำเภอคีรีรัฐนิคม และอำเภอเคียนซา การเดินทางมาโรงเรียนใช้เวลาประมาณ 20 – 90 นาที จากการสอบถามนักเรียนที่อยู่ต่างอำเภอ ได้ข้อมูลว่านักเรียนไม่รู้สึกว่าตนเองลำบากในการเดินทางมาโรงเรียน เนื่องจากมีรถรับส่งประจำทางของนักเรียนในแต่ละหมู่บ้าน ตำบล หรือประจำอำเภอ เพื่อรับส่งนักเรียนเป็นประจำทุกวัน นักเรียนเคยชินกับการใช้เวลาในการนั่งรถนาน ๆ ซึ่งพบว่ามีนักเรียนที่เดินทางมาโรงเรียนโดยรถรับส่งประจำทางคิดเป็นร้อยละ 80 มีนักเรียนเดินทาง มาโรงเรียนโดยมีผู้ปกครองมารับส่ง คิดเป็น ร้อยละ 13 ที่เหลือเป็นนักเรียนที่เดินทางมาโรงเรียนโดยรถจักรยานยนต์

กลุ่มควบคุม

นักเรียนกลุ่มควบคุมร้อยละ 76 อาศัยอยู่กับบิดามารดา อีกร้อยละ 24 อาศัยอยู่กับญาติ เช่น ปู่ย่า ตายาย ป้า หรือน้า ลักษณะครอบครัวเป็นครอบครัวเดี่ยว นักเรียนกลุ่มทดลองร้อยละ25 มีภูมิลำเนาเดิมอยู่จังหวัดอื่น ส่วนใหญ่เป็นครอบครัวที่ย้ายถิ่นฐานมาจากภาคตะวันออกเฉียงเหนือมารับจ้างกรีดยางในพื้นที่เช่นเดียวกับกลุ่มทดลอง ผู้ปกครองของนักเรียนกลุ่มทดลองประกอบอาชีพเกษตรกรสวนยางพาราร้อยละ 72 ประกอบอาชีพรับราชการและรัฐวิสาหกิจ ร้อยละ15 ประกอบอาชีพธุรกิจส่วนตัว เช่น ธุรกิจร้านอาหาร ธุรกิจร้านเสริมสวย ธุรกิจอู่ซ่อมรถ คิดเป็นร้อยละ 5 และประกอบอาชีพรับจ้างและอื่น ๆ คิดเป็นร้อยละ 8

จากการสัมภาษณ์ได้ข้อมูลว่า นักเรียนร้อยละ 90 มีความคิดเห็นว่าครอบครัวตนเองไม่มีปัญหาด้านการเงิน และผู้ปกครองเป็นผู้อุปการะทางด้านการเงินในการศึกษา อีกร้อยละ 10 คิดว่าครอบครัวตนเองมีปัญหาด้านการเงิน ซึ่งมีนักเรียน 1 คนที่อาศัยอยู่กับยายซึ่งมีอายุมากและหาเลี้ยงตัวเองและหลานไม่ได้ ต้องพึ่งเงินผู้สูงอายุ และรับจ้างทั่วไป เพื่อส่งเสียหลานเรียนหนังสือ นักเรียนร้อยละ 64 พักอาศัยอยู่ในเขตอำเภอบ้านตาขุนวิทยา ซึ่งการเดินทางมาโรงเรียนมีความสะดวกใช้เวลาในการเดิน ทางประมาณ 5 – 15 นาที โดยนักเรียนที่เหลือเป็นนักเรียนที่พักอาศัยอยู่ในเขตอำเภอใกล้เคียง ได้แก่ อำเภอพนม อำเภอคีรีรัฐนิคม และอำเภอเคียนซา การเดินทางมาโรงเรียนใช้เวลาประมาณ 20 – 90 นาที จากการสอบถามนักเรียนที่อยู่ต่างอำเภอ ได้ข้อมูลว่านักเรียนไม่รู้สึกว่าตนเองลำบากในการเดินทางมาโรงเรียนเนื่องจากเหตุผลเดียวกันกับกลุ่มทดลองมีรถรับส่งประจำทางของนักเรียนในแต่ละหมู่บ้าน ตำบล หรือประจำอำเภอ เพื่อรับส่งนักเรียนเป็นประจำทุกวัน นักเรียนเคยชินกับการใช้เวลาในการนั่งรถนาน ๆ ซึ่งพบว่า มีนักเรียนที่เดินทางมาโรงเรียนโดยรถรับส่งประจำทางคิดเป็นร้อยละ 72 มีนักเรียนเดินทาง มาโรงเรียนโดยมีผู้ปกครองมารับส่ง คิดเป็น ร้อยละ 18 มีนักเรียนที่เดินทางมาโรงเรียนโดยรถจักยานยนต์ ร้อยละ 7 ที่เหลืออีก ร้อยละ 3 เป็นนักเรียนที่เดินทางมาโรงเรียนโดยการเดิน เนื่องจากบ้านอยู่ใกล้โรงเรียนเพียง 300 เมตร

เมื่อพิจารณาปัจจัยอื่นที่ส่งผลต่อการเรียนของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างในกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมพบว่า นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีปัจจัยอื่นที่อาจส่งผลต่อการเรียนใกล้เคียงกัน โดยนักเรียนส่วนใหญ่อยู่กับบิดามารดา ลักษณะครอบครัวเป็นครอบครัวเดี่ยว ผู้ปกครองของนักเรียนส่วนใหญ่ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มประกอบอาชีพเกษตรกรสวนยางพารา นักเรียนส่วนใหญ่มีความคิดเห็นว่าครอบครัวตนเองไม่มีปัญหาด้านการเงิน และไม่รู้สึกว่ามีความลำบากในการเดินทางมาโรงเรียน

1.4 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับชุมชน

โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา ตั้งอยู่ในตำบลเขาวง อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี ด้านหน้าโรงเรียนติดถนนใหญ่ สาย คีรีรัฐนิคม – ภูเก็ต บริเวณใกล้เคียงโรงเรียนมีบ้านของชาวบ้าน และด้านหลังของโรงเรียนเป็นสวนยางพาราของชาวบ้าน ซึ่งโรงเรียนอยู่ห่างจากตัวอำเภอบ้านตาขุน เป็นระยะทาง 1 กิโลเมตร ใช้เวลาในการเดินทางเพียงเวลา 5 นาที มีความสะดวกเรื่องการเดินทาง มีความเจริญทางด้านวัตถุค่อนข้างสูง ชาวบ้านส่วนใหญ่ประกอบอาชีพเกษตรกรสวนยางพารา และส่วนใหญ่จ้างคนงานจากภาคตะวันออกเฉียงเหนือ และคนงานชาวพม่าในการกรีดยางพารา ที่เหลือชาวบ้านประกอบอาชีพธุรกิจส่วนตัว เช่นค้าขาย ธุรกิจร้านเสริมสวย ธุรกิจการให้บริการต่าง ๆ อาชีพรับราชการ/รัฐวิสาหกิจ และอาชีพรับจ้างทั่วไป เศรษฐกิจโดยรวมค่อนข้างดี ประชาชนมีรายได้เฉลี่ยต่อปีต่อครอบครัว ดีพอสมควร การดำเนินชีวิตมีค่าครองชีพสูง เนื่องจากเป็นชุมชนที่มีสถานที่ท่องเที่ยวน่าสนใจ อย่างเช่น เขื่อนรัชชะประภา กุ้ยหลินเมืองไทย และ เขาสก ซึ่งมีนักท่องเที่ยวเข้ามาในชุมชนเป็นจำนวนมาก ทั้งนักท่องเที่ยวในประเทศ และชาวต่างประเทศ ปัญหาโดยทั่วไป คือ ปัญหายาเสพติด ปัญหาการพนัน ปัญหาเรื่องอิทธิพลมืด ปัญหาครอบครัว และปัญหาค่านิยมที่ผิดของคนในชุมชน เป็นต้น

ตอนที่ 2 พฤติกรรมการเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

นักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีพฤติกรรมการเรียนที่ใกล้เคียงกันในคาบเรียนที่ 1 – 3 และพฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมค่อย ๆ มีความแตกต่างกันเมื่อครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านไปหลายคาบมากขึ้น โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

พัฒนาการของนักเรียนในสัปดาห์ที่ 1 (คาบที่ 1 – 4)

นักเรียนทั้งสองกลุ่มมีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน คือมีปฏิกิริยาโต้ตอบกับครูน้อย ไม่ค่อยกล้าแสดงออก นักเรียนส่วนใหญ่ไม่ตอบคำถาม มีเพียงนักเรียน 1 – 2 คน เท่านั้นที่ตอบคำถาม ครูต้องเรียกชื่อเพื่อให้นักเรียนตอบคำถาม นักเรียนทั้งสองกลุ่มตั้งใจเรียนในห้องดี โดยทุกคนตั้งใจฟังอย่างเดียว ไม่แสดงออก ไม่แสดงอาการใด ๆ และไม่ค่อยร่วมกิจกรรมในชั้นเรียน ทำให้ยากที่จะรู้ว่านักเรียนเข้าใจหรือไม่ ครูต้องเสริมแรง และบังคับบ้างในบางครั้ง เพื่อให้นักเรียนตอบคำถาม หรือ

แสดงวิธีคิดเป็นรายบุคคล หรือนำเสนอกิจกรรมกลุ่ม ซึ่งการทำโจทย์ปัญหาของนักเรียนทั้งสองกลุ่ม ไม่สามารถที่จะแสดงแนวคิดเองได้ ต้องรอข้อมูลเพิ่มเติม หรือ แนวคิดของครู ถึงจะสามารถแก้โจทย์ปัญหานั้นได้

ในคาบเรียนที่ 3 – 4 นักเรียนทั้งสองกลุ่ม เริ่มมีการตอบคำถามมากขึ้น กล้าแสดงแนวคิดของตนเองบ้าง และกลุ่มทดลองเริ่มมีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมกลุ่ม กล้าที่จะนำเสนอหน้าชั้นเรียนเพื่อแสดงแนวคิดของกลุ่มมากขึ้น

พัฒนาการของนักเรียนในสัปดาห์ที่ 2 (คาบที่ 5 – 8)

พฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เริ่มมีความแตกต่างกัน ดังนี้

กลุ่มทดลอง

นักเรียนส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นในการเรียนรู้มากขึ้น กล้าตอบคำถามมากขึ้น มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมในชั้นเรียนมากขึ้น นักเรียนเริ่มที่จะพยายามคิดหาคำตอบด้วยตนเอง ตามกระบวนการที่ครูจัดกิจกรรมให้ นักเรียนสามารถที่จะเชื่อมโยงข้อมูลของโจทย์ตัวอย่าง และข้อมูลที่มีจากโจทย์ปัญหา ประกอบกับความรู้เดิมที่มี เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหาได้มากขึ้น แต่ยังมีนักเรียนบางส่วนที่ไม่คุ้นชินกับการทำกิจกรรมยังไม่ค่อยให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมในห้องเรียนเท่าที่ควร เนื่องจากมีความเคยชินกับการเรียนแบบที่มีครูบรรยายและให้ทำแบบฝึกหัดมากกว่า ครูผู้สอนพยายามพูดคุยสร้างความเข้าใจให้นักเรียนได้เห็นประโยชน์ของการทำกิจกรรม นักเรียนดังกล่าวจึงเริ่มปรับเปลี่ยนพฤติกรรมที่ดีขึ้น ให้ความร่วมมือมากขึ้น

ในคาบเรียนที่ 7 – 8 เป็นคาบที่ครูเริ่มใช้กิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด นักเรียนมีความคิดเห็นเกี่ยวกับกิจกรรมนี้แตกต่างกัน คือนักเรียนส่วนใหญ่ให้ความสนใจกับแนวทางการจัดกิจกรรมดังกล่าว โดยมีความกระตือรือร้นที่จะใช้แนวทางดังกล่าวในการแก้โจทย์ปัญหา โดยได้ข้อมูลจากนักเรียนว่า ไม่เคยเจอแนวทางดังกล่าวมาก่อน น่าสนใจดี และนักเรียนบางส่วนให้ความเห็นว่า แนวทางนี้ค่อนข้างยุ่งยาก ต้องใช้เวลาทำความเข้าใจ จึงไม่อยากใช้แนวทางนี้ในการแก้โจทย์ปัญหา และมีความเครียดในการเรียน ซึ่งในที่นี้ครูได้สร้างความเข้าใจกับนักเรียนทั้งห้องว่า แนวทางดังกล่าวเป็นเพียงแนวทางหนึ่งที่นักเรียนสามารถนำมาช่วยในการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล เพื่อเป็นแนวทางในการหาคำตอบ และแนวทางดังกล่าวไม่ได้มีความเหมาะสมที่จะนำไปใช้กับโจทย์ปัญหาทุกโจทย์ นักเรียนสามารถเลือกสรรแนวทางการแก้ปัญหาที่มีความถนัดและเหมาะสมกับโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างอิสระ เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจตรงกันแล้ว แต่ละคนต่างมีแนวทางในการนำเสนอแนวคิดเสรีตามความคิดของแต่ละคนมากขึ้น

ระยะแรก นักเรียนที่มีความพอใจที่จะใช้แนวคิดโมเดลเมธอดเป็นกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหานั้น ยังต้องใช้ตัวอย่างเป็นตัวแบบเพื่อให้มีความชำนาญในการใช้ ซึ่งแบบจำลองแบบแรกของโมเดล

เมธอด คือ แบบจำลองที่แบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ เป็นแบบจำลองที่ง่ายต่อการใช้ แต่นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความเห็นตรงกันว่า ตอนทำโจทย์จริง ๆ ไม่จำเป็นต้องใช้แบบจำลองนี้ เนื่องจาก เป็นการเสียเวลา และสามารถแปลความโจทย์เป็นสมการ และแก้ปัญหาได้เลย ซึ่งพบว่านักเรียนดังกล่าว เป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนปานกลางจนถึงนักเรียนที่มีผลการเรียนดีมาก มีเพียงนักเรียนส่วนน้อยที่เห็นว่าสมควรใช้ เพราะจะทำให้การคิดมีความผิดพลาดได้น้อย ซึ่งพบว่า นักเรียนที่ให้ความคิดเห็นดังกล่าว เป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนพอใช้ ส่วนนักเรียนที่เหลือ เป็นกลุ่มนักเรียนที่ไม่สามารถให้ความคิดเห็นใด ๆ ได้ เนื่องจากยังไม่สามารถหาแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาได้เลย

กลุ่มควบคุม

ผู้วิจัยสังเกตพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้นแต่ไม่มากเท่าที่ควร นักเรียนยังโต้ตอบกับครูน้อย นักเรียนที่ตอบคำถามก็มักจะเป็นคนเดิม ๆ ที่ตอบคำถามบ่อย ส่วนคนที่ไม่ตอบคำถาม ก็จะไม่ตอบคำถามเลย ต้องรอให้ครูถามคำถามเฉพาะเป็นรายบุคคลก่อน โดยรวมนักเรียนทั้งห้องสนใจเรียนดี มีคุยบ้างในกลุ่มนักเรียนที่นั่งแถวหลังของห้อง เมื่อเรียกให้ตอบคำถาม ก็นิ่ง ไม่สามารถตอบได้ เมื่อให้ทำโจทย์ปัญหา นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถหาแนวทางในการแก้ปัญหาของโจทย์นั้น ๆ ได้ และมีนักเรียนบางส่วนไม่ยอมคิดด้วยตนเอง โดยรอให้เพื่อนคิดก่อน เมื่อให้ช่วยกันเฉลยโจทย์ปัญหาหน้าชั้นเรียน ก็มีเฉพาะคนเดิม ๆ ที่สามารถออกมาแสดงแนวคิดของตนเองได้ และมีแนวทางในการแก้ปัญหาเพียงแนวทางเดียว ครูต้องแนะและชี้นำวิธีการคิดอื่น ๆ ที่หลากหลาย และต้องอธิบายซ้ำหลายรอบ กว่าที่นักเรียนจะเข้าใจ

ในคาบเรียนที่ 7 – 8 นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมที่จัดขึ้นดีกว่าช่วงคาบเรียนที่ 5 – 6 ซึ่งทั้งนี้ นักเรียนอาจเริ่มชินกับการเรียนที่ครูเน้นใช้คำถามให้นักเรียนตอบ การให้นักเรียนแสดงแนวคิดหน้าชั้นเรียน พร้อมการอธิบาย หรือการให้ร่วมทำกิจกรรมกลุ่ม ซึ่งนักเรียนต้องใช้เวลาในการปรับเปลี่ยนพฤติกรรมจากที่ได้สอบถามจากนักเรียนว่าพฤติกรรมเดิม ๆ ที่เรียนคือ ครูเน้นการบรรยายเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งนักเรียนจะชินกับการนั่งเฉย ๆ โดยครูไม่ได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมในชั้นเรียนเท่าที่ควร

พัฒนาการของนักเรียนในสัปดาห์ที่ 3 (คาบที่ 9 – 12)

พฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เริ่มมีความแตกต่างกันมากขึ้น ดังนี้

กลุ่มทดลอง

นักเรียนทั้งห้องมีความกระตือรือร้นในการเรียนรู้มากขึ้น กล้าตอบคำถามมากขึ้น มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมในชั้นเรียนมากขึ้น นักเรียนเริ่มที่จะพยายามคิดหาคำตอบด้วยตนเอง ตามกระบวนการที่ครูจัดกิจกรรมให้ และในการนำเสนอวิธีแก้โจทย์ปัญหา นักเรียนแต่ละคน แต่ละกลุ่มมีแนวทางที่หลากหลายในการนำเสนอ และกล้าที่จะให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนในแนวคิดของตนเองถึงแม้

ว่าเหตุผลบางเหตุผลยังไม่สมเหตุสมผลเท่าที่ควรก็ตาม

ในคาบเรียนที่ 9 – 10 เป็นคาบที่ครูเสริมกระบวนการคิดตามโมเดลเมธอด โดยผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาอย่างง่าย โดยเพิ่มแบบจำลองในลักษณะที่ 2 ของแนวคิดโมเดลเมธอดคือแบบจำลองในการเปรียบเทียบข้อมูล ซึ่งเป็นกลวิธีที่มีความซับซ้อนมากขึ้น และเหมาะสมกับลักษณะโจทย์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นเช่นเดียวกัน นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความสนใจดี แต่มีความสับสนบ้างในการเลือกใช้แบบจำลอง ซึ่งในการทำกิจกรรมในห้องเรียนพบว่า นักเรียนแต่ละคนยึดแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาแตกต่างกัน นักเรียนบางส่วนเลือกที่จะใช้แนวคิดโมเดลเมธอด นักเรียนบางส่วนเลือกที่จะใช้วิธีการสร้างสมการตามปกติ และผลที่พบจากการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน จากวิธีการต่าง ๆ มีทั้งที่นักเรียนได้คำตอบที่ถูกต้อง ไม่ถูกต้อง และ แสดงวิธีทำไม่สำเร็จ

ในคาบเรียนที่ 11 – 12 เป็นคาบที่ครูเสริมกระบวนการคิดตามโมเดลเมธอด โดยผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาอย่างง่าย โดยเพิ่มแบบจำลองในลักษณะที่ 3 ของแนวคิดโมเดลเมธอดคือแบบจำลองเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของข้อมูล ซึ่งเป็นกลวิธีที่มีความซับซ้อนมากกว่าแบบจำลองทั้งสองแบบจำลองที่ผ่านมา และเหมาะสมกับลักษณะโจทย์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นกว่าลักษณะโจทย์ปัญหาที่ผ่านมาเช่นเดียวกัน นักเรียนให้ความสนใจดี แต่ส่วนใหญ่เริ่มมีความสับสนในการใช้แบบจำลอง ต้องให้แนวทางหรือยกตัวอย่างซ้ำ ถึงจะเริ่มคิดเอง และมีแนวทางในการนำเสนอเป็นของตัวเอง หรือของกลุ่ม ซึ่งจากการทำกิจกรรมในห้องเรียนพบว่า นักเรียนแต่ละคนยึดแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหาแตกต่างกัน นักเรียนบางส่วนเลือกที่จะใช้แนวคิดโมเดลเมธอด นักเรียนบางส่วนเลือกที่จะใช้วิธีการสร้างสมการตามปกติ และแนวทางอื่นๆ เช่นการวาดภาพ การใช้ตาราง การใช้เส้นโยงความสัมพันธ์ และผลที่พบจากการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน วิธีการต่าง ๆ ส่วนใหญ่นักเรียนได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง หรือ แสดงวิธีทำได้แค่บางส่วนเท่านั้น

ในภาพรวมช่วงสัปดาห์ที่ 3 นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความสนใจ มีความกระตือรือร้นในการเรียนดี มีความเคยชินกับการตอบคำถาม การให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบ และมีความพอใจที่จะคิดหาคำตอบด้วยตนเองด้วยวิธีการที่หลากหลายมากขึ้น แต่ละคนมีแนวทางที่ยึดเพื่อนำไปใช้ในลักษณะโจทย์ที่แตกต่างกัน โดยสังเกตจากตัวอย่าง และลักษณะโจทย์แบบฝึกหัด ซึ่งนักเรียนบางคนนำเสนอแนวทางแก้ปัญหาได้มากกว่าหนึ่งแนวทาง

กลุ่มควบคุม

ผู้วิจัยสังเกตพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้นในการเรียนมากขึ้น นักเรียนที่ไม่ค่อยตอบคำถาม สามารถตอบคำถามได้มากขึ้น ซึ่งครูใช้วิธีการเรียกถามเป็นรายบุคคลบ่อยขึ้น จากที่เป็นคนไม่กล้าตอบคำถาม ก็เริ่มมีพฤติกรรมที่เปลี่ยนไป โดยสามารถตอบคำถามบ่อยขึ้น ซึ่งอาจเป็นคำตอบที่ถูกบ้าง ผิดบ้าง และนักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบได้

ในสัปดาห์ที่ 3 นักเรียนเจอสถานการณ์ปัญหาที่ยากและซับซ้อนมากขึ้น นักเรียนบางส่วนเริ่มมีอาการเบื่อหน่ายกับการเรียน เนื่องจากไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ ครูต้องใช้วิธีการอธิบายซ้ำหลาย ๆ ครั้ง ซึ่งนักเรียนยังคงใช้วิธีการเดิมคือ ฟังเมื่อครูอธิบาย แก้โจทย์ปัญหาได้ถ้าเป็นโจทย์ที่เหมือนกับตัวอย่าง เมื่อเป็นโจทย์ปัญหาที่ประยุกต์มากขึ้น นักเรียนไม่สามารถที่จะแก้ปัญหาได้เลย และพบว่าเมื่อเกิดปัญหาดังกล่าว นักเรียนเลือกที่จะนั่งเฉย ๆ เพื่อรอให้เพื่อนคิด หรือรอให้ครูเฉลย โดยไม่พยายามหาคำตอบด้วยตนเอง

พัฒนาการของนักเรียนในสัปดาห์ที่ 4 (คาบที่ 13 – 18)

พฤติกรรมของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม เริ่มมีความแตกต่างกันอย่างชัดเจนมากขึ้น ดังนี้

กลุ่มทดลอง

นักเรียนกลุ่มทดลอง มีพฤติกรรมการเรียนรู้ที่ดีขึ้นมาก มีความกระตือรือร้นในการเรียนรู้ สังเกตได้จากการเข้าเรียนของนักเรียน คือไม่มีนักเรียนเข้าเรียนสาย และนักเรียนบางคนพบว่าไม่กล้าขออนุญาตออกไปเข้าห้องน้ำเพราะกลัวว่าจะขาดการปะติดปะต่อเกี่ยวกับเรื่องที่ครูสอน ในช่วงที่ไปเข้าห้องน้ำนั่นเอง นักเรียนมีความสนุกสนานในการทำกิจกรรมกลุ่มมากขึ้น สมาชิกของกลุ่มบางกลุ่มแย่งกันนำเสนอหน้าชั้นเรียน ซึ่งครูแก้ไขโดยให้นักเรียนได้สร้างข้อตกลงให้นักเรียนผลัดเปลี่ยนให้ได้ออกมานำเสนอกันทุกคน นักเรียนกล้าพูด กล้าแสดงออก และกล้าตอบคำถาม นอกจากนั้น ยังกล้าที่จะถามในสิ่งที่ตนเองสงสัยมากขึ้น นักเรียนแต่ละคนมีอารมณ์ร่วม และครูก็สนุกกับการสอนและให้นักเรียนทำกิจกรรมในชั้นเรียน เนื่องจากเห็นว่านักเรียนส่วนใหญ่สนุกกับการเรียนรู้มากขึ้น

คาบที่ 13 – 14 เป็นคาบที่ครูทบทวนโจทย์ปัญหาอย่างง่ายให้แก่นักเรียน ครูเน้นให้นักเรียนเห็นลักษณะโจทย์ และความเหมาะสมแนวทางแก้ปัญหาโจทย์ในแต่ละลักษณะในแนวทางที่หลากหลาย นักเรียนแต่ละคนต่างมีแนวทางที่ยึดใช้เป็นของตัวเอง เห็นได้จาก การให้นักเรียนนำเสนอแนวคิดหน้าชั้นเรียน จะสังเกตเห็นความแตกต่างที่นักเรียนเลือกใช้ และยังมีนักเรียนบางส่วนที่เลือกใช้แนวทางที่ไม่มีความเหมาะสมแต่สามารถหาคำตอบได้ถูกต้อง เช่น ใช้วิธีลองผิดลองถูก หรือใช้วิธีแทนตัวเลข จนกว่าจะเจอคำตอบที่ตรงกับเงื่อนไข ซึ่งเป็นการใช้เวลาในการคิดนานกว่าที่จะได้คำตอบ

คาบที่ 15 – 18 เป็นคาบที่ครูเน้นให้โจทย์ปัญหาที่หลากหลาย และมีความซับซ้อนมากขึ้น ครูเน้นให้นักเรียนใช้กระบวนการกลุ่มในการคิดหาแนวทางเพื่อแก้โจทย์ปัญหาอย่างอิสระ ซึ่งในการทำกิจกรรมครูต้องให้เวลาแก่นักเรียนในการคิดพอสมควร นักเรียนมีความพยายามในการทำกิจกรรมกลุ่มเป็นอย่างดี เมื่อสังเกตการทำงานกลุ่ม จากการสอบถามพบว่าพฤติกรรมของแต่ละกลุ่มมีความหลากหลาย หลายกลุ่มพยายามสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีในโจทย์ก่อน แล้วค่อย ๆ เชื่อมโยงวิธีการต่าง ๆ ที่ครูสอนที่คิดว่าเป็นแนวทางที่มีความเหมาะสมแล้วจึงแสดงวิธีคิด หลายกลุ่มพยายาม

วิเคราะห์โจทย์ และสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ก่อน จากนั้นเปิดดูตัวอย่างที่เคยทำมา เพื่อพิจารณาว่ามีความคล้ายคลึงกับโจทย์ที่เคยเรียนผ่านมาหรือไม่ แล้วค่อยแสดงวิธีคิด และมีบางกลุ่มที่ไม่ได้วิเคราะห์โจทย์ก่อน แต่ให้สมาชิกกลุ่มเปิดดูตัวอย่างที่เรียนผ่านมาและช่วยกันเปรียบเทียบว่าเหมือนหรือต่างกันอย่างไร แล้วค่อยแสดงวิธีคิด ซึ่งพบว่า ถ้าเป็นโจทย์ที่มีการประยุกต์จากลักษณะโจทย์เดิม กลุ่มนักเรียนที่มีการวิเคราะห์โจทย์ และสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลก่อน แล้วค่อยเปรียบเทียบกับแนวโจทย์ที่เรียนผ่านมา สามารถที่จะแสดงวิธีคิด และหาคำตอบได้ ส่วนกลุ่มที่เลือกเปรียบเทียบโจทย์ปัญหากับโจทย์ตัวอย่างก่อนนั้น มักจะแสดงวิธีคิดไม่สำเร็จ

ในสัปดาห์ที่ 4 นี้ เมื่อพิจารณาเกี่ยวกับพฤติกรรมในการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดสามารถสังเกตได้อย่างชัดเจนว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถพิจารณาโจทย์และเลือกใช้แบบจำลองได้อย่างเหมาะสม แต่มีทั้งสามารถแสดงวิธีคิดสำเร็จจนได้คำตอบ และไม่สามารถหาคำตอบได้ เมื่อสังเกตพบว่านักเรียนที่เลือกใช้วิธีการสร้างแบบจำลองของแนวคิดโมเดลเมธอดนี้ ส่วนใหญ่เป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับปานกลาง ซึ่งนักเรียนเหล่านี้ให้เหตุผลว่า มีขั้นตอนในการแสดงแนวคิดที่เป็นรูปภาพ ตีความโจทย์ปัญหาที่ง่าย และมีโอกาสที่จะได้คำตอบมากกว่า ถึงแม้ว่าต้องใช้เวลา ในการแสดงแนวคิดก็ตาม ส่วนนักเรียนที่เหลือ คือนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี ถึงดีมาก ไม่นิยมใช้แนวคิดโมเดลเมธอดช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา แต่เลือกที่จะใช้วิธีการอื่น เช่น การใช้ตาราง หรือการแปลความโจทย์ปัญหามาเป็นสมการ และแก้สมการเพื่อหาคำตอบได้เลย ซึ่งให้เหตุผลว่า ไม่จำเป็นต้องใช้ เสียเวลา สามารถแปลเป็นสมการได้เลย ใช้เวลาน้อยกว่ามาก ส่วนนักเรียนที่มีผลการเรียนพอใช้ และนักเรียนที่มีผลการเรียนต้องปรับปรุง นิยมใช้วิธีลองผิดลองถูก ไม่มีหลักการในการคิดหาคำตอบ และให้เหตุผลว่าไม่ใช้การสร้างแบบจำลองของแนวคิดโมเดลเมธอดเนื่องจาก ใช้ยาก เลยเลือกที่จะลองผิดลองถูก จนกว่าจะพบคำตอบ

ในภาพรวม พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่สามารถวิเคราะห์โจทย์ สร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล ในโจทย์ และหาแนวทาง หรือวิธีการในการหาคำตอบได้ ซึ่งครูเน้นให้นักเรียนเลือกใช้แนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียนเอง อย่างอิสระ จากการสังเกตพบว่า แนวทางของนักเรียนมีความหลากหลาย เช่น มีการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือ การใช้ตาราง การใช้สมการ การใช้นิพจน์ ช่วยในการแก้ปัญหาและหาคำตอบ มีการใช้การนำเสนอตัวแทนความคิดที่หลากหลาย เช่น การวาดภาพ การใช้กลวิธีการสร้างแบบจำลองของแนวคิดโมเดลเมธอดช่วยในการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล และสร้างสมการเพื่อหาคำตอบ นอกจากนี้มีนักเรียนบางส่วนที่ยังไม่มีหลักการในการคิดแก้ปัญหา มักใช้วิธีลองผิดลองถูก จนกว่าจะพบคำตอบ แต่โดยรวม นักเรียนทุกคนมีความพยายามที่จะแก้ปัญหาและหาคำตอบด้วยตนเอง

กลุ่มควบคุม

หลังจากที่ในสัปดาห์ที่ 3 พบว่า นักเรียนบางส่วนเริ่มมีความเบื่อหน่ายในการเรียน ซึ่งพบว่านักเรียนดังกล่าวส่วนใหญ่เป็นนักเรียนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับพอใช้ และระดับที่ต้องปรับปรุง ซึ่งจากการสอบถาม นักเรียนให้คำตอบว่า ยากเกินไป ไม่เข้าใจ เลยเลือกที่จะนั่งเฉย ๆ ไม่ค่อยมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม จากปรากฏการดังกล่าว ครูแก้ปัญหาด้วยการทบทวนโจทย์ปัญหาอย่างง่ายที่มีความหลากหลาย โดยอธิบายซ้ำ ๆ ช้า ๆ เพื่อสร้างความเข้าให้นักเรียนทั้งห้องอีกครั้งหนึ่ง จากนั้นให้โจทย์ปัญหาที่มีความคล้ายคลึง และค่อย ๆ ประยุกต์มากขึ้น ให้นักเรียนร่วมกันทำเป็นกลุ่ม และเข้าไปอธิบายกับนักเรียนกลุ่มดังกล่าวตัวต่อตัวมากขึ้น ผลออกมาพบว่านักเรียนกลุ่มดังกล่าว กลับมากระตือรือร้น และตั้งใจเรียนอีกครั้ง เนื่องจากเริ่มมีกำลังใจมากขึ้น เมื่อเริ่มที่จะแสดงวิธีคิดได้เองถึงแม้ว่าแนวทางยังไม่ได้ถูกต้องสมบูรณ์ก็ตาม และพบว่าเมื่อนักเรียนแต่ละคนมีแนวทางในการคิดแก้โจทย์ปัญหาได้บ้างแล้ว พฤติกรรมการรอให้เพื่อนคิด และรอให้ครูเฉลยลดน้อยลง แต่มีความตั้งใจในการคิดเอง และพยายามถามเพื่อนข้าง ๆ เมื่อไม่แน่ใจ ซึ่งยังมีนักเรียนส่วนน้อยที่เลือกถามครูผู้สอนแทนการถามเพื่อนที่นั่งข้าง ๆ หรือเพื่อนที่มีผลการเรียนอยู่ในระดับดี

ในภาพรวมพบว่า ในสัปดาห์ที่ 4 นี้ นักเรียนมีพฤติกรรมโดยรวมดีขึ้นจากสัปดาห์ที่ 3 นักเรียนมีความกระตือรือร้นดีขึ้น นักเรียนกลุ่มที่มีความเบื่อหน่ายในการเรียนในสัปดาห์ที่ 3 ก็ลดลง แนวทางการแก้ปัญหาของนักเรียนยังคงเป็นวิธีการแก้ปัญหาแบบปกติ ไม่มีความหลากหลายเท่าที่ควร ส่วนใหญ่จะเหมือนกันกับเพื่อน หรือที่ครูเฉลย และส่วนใหญ่มักใช้สมการมาช่วยในการแก้ปัญหา ซึ่งพบว่า สำหรับโจทย์ปัญหาที่ไม่มีความซับซ้อนมากนัก นักเรียนส่วนใหญ่สามารถแสดงแนวคิดได้ และหาคำตอบได้ถูกต้องบ้าง ไม่ถูกต้องบ้าง มีนักเรียนบางส่วนเท่านั้นที่ไม่สามารถแสดงแนวคิดได้เลย จากการสอบถาม นักเรียนให้เหตุผลว่า เนื่องจากสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อแปลงเป็นสมการไม่ได้ เลยไม่มีการแสดงแนวคิดใด ๆ เลย แต่เมื่อเป็นโจทย์ปัญหาที่ค่อนข้างประยุกต์มากขึ้น มีนักเรียนเพียงบางส่วนเท่านั้นที่สามารถแสดงแนวคิดและหาคำตอบได้ซึ่งจากการสังเกตพบว่านักเรียนใช้สมการช่วยในการหาคำตอบเป็นส่วนใหญ่ มีการใช้แนวทางอื่นน้อยมาก เช่น การใช้การวาดภาพ การลองผิดลองถูก ซึ่งเมื่อแก้ปัญหาไม่ได้ นักเรียนเลือกที่จะไม่แสดงแนวคิดใด ๆ เลย นอกจากปล่อยให้กระดาษว่าง

และสิ่งที่สังเกตพบเหมือนกันทั้งสองกลุ่ม คือ การให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหานั้น ต้องให้เวลาแก่นักเรียนพอสมควรเพื่อให้นักเรียนได้คิด ซึ่งถ้ามีการกำหนดเวลาสั้น ๆ นั้น นักเรียนส่วนน้อยเท่านั้นที่จะแสดงวิธีคิดและได้คำตอบ และนักเรียนที่เหลือไม่ได้แสดงแนวคิดเพราะเห็นว่าหมดเวลาแล้ว ครูเลยเลือกที่จะให้เวลาในการคิดนานขึ้น เพื่อให้นักเรียนทั้งห้องได้มีเวลาคิดกันทุกคน ถึงแม้ว่าจะใช้เวลาในการทำกิจกรรมนานขึ้นก็ตาม เพราะอยากให้นักเรียนทุกคนได้ฝึกทักษะการคิดให้มากขึ้น

ตอนที่ 3 พฤติกรรมที่แสดงถึงพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตารางที่ 27 แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงพัฒนาการของการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

คาบที่	เนื้อหาย่อย	การพัฒนาการของนักเรียน
1	แบบรูปและความสัมพันธ์	- นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจลักษณะของแบบรูป โดยสามารถอธิบายลักษณะของแบบรูปที่ครูกำหนดให้ได้ ซึ่งครูต้องคอยถามเป็นรายบุคคล เพื่อตรวจสอบว่านักเรียนเข้าใจมากน้อยเพียงใด - นักเรียนบางส่วนสามารถหาแบบรูปที่ครูกำหนดให้หาได้ แต่ยังมีนักเรียนไม่น้อยที่ยังไม่สามารถหาแบบรูปที่ครูกำหนดให้หาได้ โดยเฉพาะลักษณะแบบรูปที่ไม่ได้เพิ่มจำนวนที่ละเท่า ๆ กัน หรือลักษณะแบบรูปที่แปลก ๆ - นักเรียนส่วนใหญ่นิยมวาดภาพ และใช้วิธีการขีดเส้นเพื่อกำกับแบบรูปในแต่ละลำดับที่ เพื่อพิจารณาการเพิ่มขึ้น หรือลดลง ทีละเท่าไหร่ และเขียนจำนวนกำกับไว้ เพื่อช่วยในการขยายแบบรูปในลำดับที่ ที่มากขึ้น
2 – 3	แบบรูปและความสัมพันธ์	- นักเรียนสามารถขยายแบบรูปที่ครูกำหนดให้ได้มากขึ้น นักเรียนส่วนใหญ่สามารถขยายแบบรูปที่มีลักษณะการเพิ่มหรือลดทีละเท่า ๆ กันได้ และสามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปนั้น ๆ ได้ - นักเรียนบางส่วนสามารถขยายแบบรูปที่ไม่ได้มีการเพิ่มหรือลดที่ละเท่า ๆ กัน แต่ไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปนั้น ๆ นั้น - มีนักเรียน 2 – 3 คน ที่สามารถขยายแบบรูปและสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปที่หลากหลายได้ - ในการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป นักเรียนส่วนใหญ่นิยมใช้ตารางช่วยในการจัดระบบการคิด และมีนักเรียนบางส่วนที่สามารถ สร้างกรณีทั่วไปโดยใช้หลักการคิดที่เป็นเฉพาะ นำสมการเข้ามาช่วยในการหากรณีทั่วไปของแบบรูป

ตารางที่ 27 (ต่อ) พฤติกรรมการพัฒนาการที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

คาบที่	เนื้อหาย่อย	การพัฒนาการของนักเรียน
4 – 6	- คำตอบของสมการ - การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- นักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจและตอบคำถามและอธิบายเกี่ยวกับสมบัติการของการเท่ากันได้ - นักเรียนสามารถดำเนินการแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้ ซึ่งระยะแรกนักเรียนต้องอาศัยการนำเสนอตัวอย่างที่หลากหลาย จากนั้นครูให้นักเรียนดำเนินการแก้สมการเองทั้งรายบุคคล และกิจกรรมกลุ่ม พบว่านักเรียนสามารถแก้สมการได้ดีขึ้น
7 – 8	- การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาอย่างง่าย)	- นักเรียนบางส่วนมีความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาอย่างง่ายที่กำหนดให้ได้ โดยสามารถแปลความจากโจทย์ปัญหา และสร้างความสัมพันธ์ในรูปของตัวแปรและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาอย่างง่ายได้ - ปัญหาส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นกับนักเรียนคือ ขั้นตอนการแปลความจากโจทย์ปัญหาเป็นสมการ ซึ่งนักเรียนไม่น้อยที่มีความสับสนเกี่ยวกับภาษาที่มีความซับซ้อน ทำให้สร้างสมการที่ผิดพลาด นำไปสู่การหาคำตอบที่ผิดพลาดด้วยเช่นเดียวกัน
9 – 10	- การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาอย่างง่าย)	- นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ดีขึ้น โดยสามารถแปลความจากโจทย์ปัญหา และสร้างความสัมพันธ์ในรูปของตัวแปรและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหาได้ โดยนักเรียนแต่ละคนมีแนวทางในการคิดเพื่อแก้ปัญหายังไม่หลากหลาย พบว่านักเรียนมีการใช้วิธีการสร้างแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดมาช่วยในการสร้างสมการ นักเรียนบางส่วนสามารถที่จะสร้างสมการและแก้สมการได้เลย หรือบางส่วนนักเรียนยังมีการลองผิดลองถูก ในการแก้โจทย์ปัญหา

ตารางที่ 27 (ต่อ) พฤติกรรมการพัฒนาการที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

คาบที่	**เนื้อหาย่อย**	**การพัฒนาการของนักเรียน**
11 – 14	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- นักเรียนมีหลักการในการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาได้ด้วยวิธีการที่หลากหลาย ซึ่งนักเรียนบางส่วนสามารถวิเคราะห์และเลือกได้ว่าโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ควรใช้วิธีการใดในการหาคำตอบ มีนักเรียนบางส่วนที่สามารถเลือกแนวทางที่เหมาะสมในการแก้โจทย์ปัญหาได้แต่ต้องใช้เวลาในการวิเคราะห์พิจารณาพอสมควร ทั้งนี้บางคนยังต้องเปิดตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่เคยผ่านมาก่อนที่จะเริ่มดำเนินการแก้ปัญหา นอกจากนี้มีนักเรียนบางส่วนที่ไม่สามารถแสดงวิธีการคิดเพื่อหาคำตอบได้เลย - พบว่าแนวทางที่นักเรียนใช้มีหลากหลายมากขึ้น เช่น การใช้ตาราง การใช้สมการ การสร้างแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดในการช่วยสร้างสมการ การวาดภาพ และการลองผิดลองถูก เป็นต้น
15 – 18	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลจากโจทย์ปัญหาได้ดี แต่เนื่องจากลักษณะโจทย์ปัญหาที่มีความยากและซับซ้อนมากขึ้น เลยทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาและหาคำตอบได้น้อยลง - นักเรียนแต่ละคนมีแนวทางในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย บางคนสามารถแสดงแนวคิดได้มากกว่า 1 วิธีการในการหาคำตอบ และนักเรียนบางส่วนสามารถแสดงเหตุผลเกี่ยวกับความสมเหตุสมผลในวิธีการแก้ปัญหาและหาคำตอบของตนเองได้

ตอนที่ 4 ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ผู้วิจัยได้ศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด โดยได้ศึกษาในด้านการพัฒนาการความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต และการนำเสนอวิธีแสดงการคิดเชิงพีชคณิต ของนักเรียน โดยจำแนกตามลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยศึกษาใน 4 ลักษณะ คือ 1) การวิเคราะห์แบบรูป

ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และ 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

4.1 พัฒนาการของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

การวิเคราะห์ผลจากคะแนนแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลอง เมื่อเทียบกับคะแนนเต็มทั้งฉบับ โดยแสดงพัฒนาการของคะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิด 4 ลักษณะ ดังตารางที่ 28

ตารางที่ 28 แสดงคะแนนพัฒนาการของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต	คะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น
1. การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป	1.14%
2. การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต	20%
3. การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ	22.57% (สูงสุด)
4. การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย	2.57%

จากตารางที่ 28 แสดงถึงผลการวิเคราะห์คะแนนพัฒนาการของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนตามลักษณะของการคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน เทียบกับคะแนนเต็มทั้งฉบับ พบว่า นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยของแต่ละลักษณะการคิดเพิ่มขึ้น ซึ่งลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนมีพัฒนาการสูงที่สุดคือ คะแนนความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 22.57% อันดับรองลงมาคือ คะแนนความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต ซึ่งมีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 20% ในขณะที่ คะแนนความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป และ คะแนนความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย มีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้นเล็กน้อย คือ 1.14% และ 2.57% ตามลำดับ

4.2 การนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิต

จากการศึกษาแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองฉบับหลังเรียน พบว่านักเรียนมีแนวทางในการนำเสนอวิธีคิดที่แตกต่างและหลากหลาย ซึ่งผู้วิจัยได้พิจารณาลักษณะการนำเสนอวิธีคิดของนักเรียนจำแนกตามลักษณะการคิด 4 ลักษณะ ดังนี้

4.2.1 การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป

ตารางที่ 29 แสดงลักษณะการนำเสนอวิธีคิดของนักเรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป

การแสดงวิธีคิด / ตัวบ่งชี้การคิด	การใช้ตาราง	การใช้แผนภาพ	การเขียนอธิบาย	ใช้มากกว่า 1 วิธี	ไม่แสดงวิธีคิด
1. การวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์	15.43%	7.43%	41.71%	26.86%	8.57%
2. การสร้างกรณีทั่วไป	31.43%	3.43%	30.86%	1.14%	33.14%

จากตารางที่ 29 แสดงถึงผลการศึกษาลักษณะการนำเสนอวิธีคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง ซึ่งแบ่งเป็น 2 ตัวบ่งชี้ของการคิด คือ

1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ พบว่า นักเรียนแสดงวิธีคิดโดยการเขียนอธิบายมากที่สุด คิดเป็น ร้อยละ 41.71 อันดับรองลงมาคือ การแสดงวิธีคิดโดยใช้วิธีผสมผสานกันมากกว่า 1 วิธีคิดเป็นร้อยละ 26.86% และนักเรียนใช้แผนภาพนำเสนอวิธีคิดน้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ7.43

2) การสร้างกรณีทั่วไป พบว่า นักเรียนแสดงวิธีคิดโดยการใช้ตารางมากที่สุด คิดเป็น ร้อยละ 31.43% อันดับรองลงมาคือ การแสดงวิธีคิดด้วยการอธิบาย คิดเป็นร้อยละ 30.86 การใช้แผนภาพร้อยละ 3.43 และนักเรียนใช้วิธีคิดแบบผสมผสานกันมากกว่า 1 วิธีน้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 1.14

4.2.2 การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

ตารางที่ 30 แสดงลักษณะการนำเสนอวิธีคิดของนักเรียนเกี่ยวกับการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

การแสดงวิธีคิด / ตัวบ่งชี้การคิด	การใช้ตาราง	การใช้แผนภาพ	การเขียนอธิบาย	ใช้มากกว่า 1 วิธี	ไม่แสดงวิธีคิด
การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต	0.57%	22.87%	12.56%	0%	64%

จากตารางที่ 30 แสดงลักษณะการนำเสนอวิธีคิดที่นักเรียนกลุ่มทดลองแสดงในแบบวัดความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต พบว่า ส่วนใหญ่นักเรียนไม่แสดงวิธีคิด แต่สามารถสร้างความสัมพันธ์ในรูปของตัวแปรได้เลย และพบว่าสำหรับนักเรียนที่แสดงวิธีคิด นักเรียนใช้วิธีวาดแผนภาพ มากที่สุด คิดเป็น 22.87% อันดับรองลงมาคือการเขียนอธิบาย คิดเป็น 12.57% และการใช้ตาราง 0.57% โดยไม่พบการแสดงวิธีคิดที่ผสมผสานกันมากกว่า 1 วิธี

4.2.3 การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

ตารางที่ 31 แสดงลักษณะการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ / ตัวบ่งชี้การคิด	ตาราง	กราฟ	สมการ	นิพจน์	ใช้มากกว่า 1 วิธี	ไม่ใช้
การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ	8.00%	1.71%	36.00%	17.15%	9.71%	27.43%

จากตารางที่ 31 แสดงถึงผลการศึกษาลักษณะการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่นักเรียนกลุ่มทดลองแสดงในแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ พบว่า ส่วนใหญ่นักเรียนใช้สมการเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบ คิดเป็นร้อยละ 36 และนักเรียนใช้กราฟเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในการหาคำตอบน้อยที่สุด คิดเป็น 1.71% นอกจากนี้พบว่านักเรียนร้อยละ 27.43 ไม่ได้แสดงวิธีคิดด้วยการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ แต่ใช้วิธีการอื่น ๆ เช่น การใช้แผนภาพ การลองผิดลองถูก และไม่แสดงวิธีคิดใด ๆ เลย เป็นต้น

ตารางที่ 32 แสดงลักษณะการนำเสนอวิธีคิดของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

การแสดงวิธีคิด / ตัวบ่งชี้การคิด	การใช้ตาราง	การใช้แผนภาพ	การเขียนอธิบาย	ใช้มากกว่า 1 วิธี	ไม่ใช้ตัวแสดงแทน
การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ	11.43%	41.14%	9.71%	3.43%	34.29%

จากตารางที่ 32 แสดงถึงผลการศึกษาลักษณะการนำเสนอวิธีคิดที่นักเรียนกลุ่มทดลองแสดงในแบบวัดความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ พบว่าส่วนใหญ่นักเรียนใช้แผนภาพในการนำเสนอวิธีคิด คิดเป็นร้อยละ 41.14 และนักเรียนนำเสนอวิธีคิดโดยใช้มากกว่า 1 วิธี น้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 3.43 และพบว่ามีนักเรียนร้อยละ 34.29 ไม่ได้แสดงวิธี

คิดด้วยการใช้ตัวแสดงแทนการคิด แต่ใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และวิธีการอื่น ๆ เช่น การใช้สมการเป็นต้น

4.2.4 การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

ตารางที่ 33 แสดงลักษณะการนำเสนอวิธีคิดของนักเรียนในการเหตุผลเพื่อยืนยันข้อสรุปเกี่ยวกับการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

การแสดงวิธีคิด / ตัวบ่งชี้การคิด	**การใช้ตาราง**	**การใช้แผนภาพ**	**การเขียนอธิบาย**	**ใช้มากกว่า 1 วิธี**	**ไม่เขียนตอบ**
การให้เหตุผลเพื่อยืนยันข้อสรุปเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย	4.57%	5.71%	68.00%	10.86%	10.86%

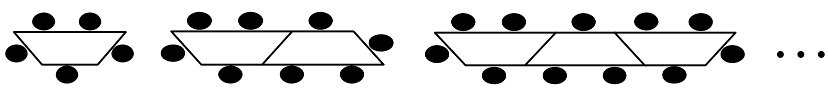
จากตารางที่ 33 แสดงถึงผลการศึกษาลักษณะการนำเสนอวิธีคิด ที่นักเรียนแสดงเพื่อให้เหตุผลยืนยันข้อสรุปในแบบวัดความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย พบว่า ส่วนใหญ่นักเรียนใช้วิธีการเขียนอธิบายเพื่อให้เหตุผลมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 68 และนักเรียนใช้ตารางนำเสนอวิธีคิดน้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 4.57 และยังพบว่า มีนักเรียนร้อยละ 10.86 ไม่เขียนการให้เหตุผลใด ๆ เลย

4.3 ตัวอย่างการนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิต

นักเรียนมีการนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิตที่หลากหลายซึ่งผู้วิจัยได้ยกตัวอย่างการนำเสนอของนักเรียนให้เห็นถึงความหลากหลายของการคิด โดยแยกตามลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิต ดังนี้

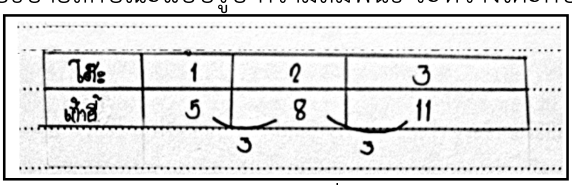
4.2.1 ตัวอย่างลักษณะการคิดเกี่ยวกับการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป

ตัวอย่างโจทย์ที่ 1 กำหนดให้นักเรียนนั่งรอบโต๊ะรับประทานอาหาร ดังภาพ



โต๊ะ 1 ตัว โต๊ะ 2 ตัว โต๊ะ 3 ตัว

คำถามที่ 1. จงอธิบายลักษณะแบบรูป ความสัมพันธ์ ระหว่างโต๊ะกับนักเรียน ที่กำหนดให้

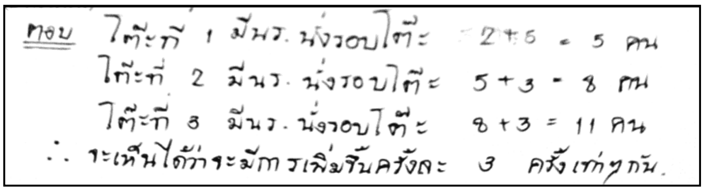


โต๊ะ	1	2	3
เก้าอี้	5	8	11
	3	3	

ภาพประกอบที่ 24

แสดงตัวอย่างการใช้ตารางในการวิเคราะห์แบบรูปของนักเรียนกลุ่มทดลอง

จากภาพประกอบที่ 24 เป็นตัวอย่างการคิดเพื่ออธิบายแบบรูปความสัมพันธ์ ระหว่างโต๊ะ กับนักเรียน โดยใช้ตารางในการนำเสนอ และใช้การเขียนเชื่อมโยงความต่างระหว่างค่าของลำดับที่ในแบบรูปที่กำหนดมาให้

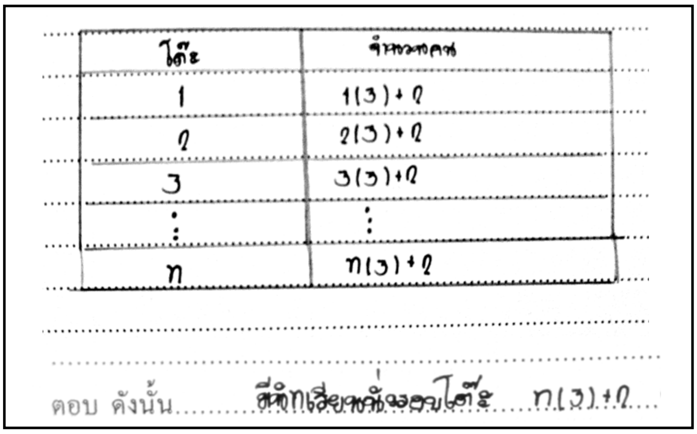

ตอบ โต๊ะที่ 1 มีนร. นั่งรอบโต๊ะ 2+3 = 5 คน
โต๊ะที่ 2 มีนร. นั่งรอบโต๊ะ 5+3 = 8 คน
โต๊ะที่ 3 มีนร. นั่งรอบโต๊ะ 8+3 = 11 คน
∴ จะเห็นได้ว่าจะมีการเพิ่มขึ้นครั้งละ 3 ครั้งเท่าๆกัน.

ภาพประกอบที่ 25

แสดงตัวอย่างการวิเคราะห์แบบรูปของนักเรียนกลุ่มทดลองด้วยการเขียนอธิบาย

จากภาพประกอบที่ 25 เป็นตัวอย่างการแสดงการคิดเพื่ออธิบายแบบรูปความสัมพันธ์ระหว่างโต๊ะ กับนักเรียน โดยใช้การอธิบายวิธีการพิจารณาลักษณะการเพิ่มขึ้นของจำนวนนักเรียนและการเพิ่มขึ้นของจำนวนโต๊ะ

คำถามที่ 2. ถ้าต้องการจัดโต๊ะจำนวน n ตัว จะมีจำนวนนักเรียนนั่งรอบโต๊ะทั้งหมดกี่คน

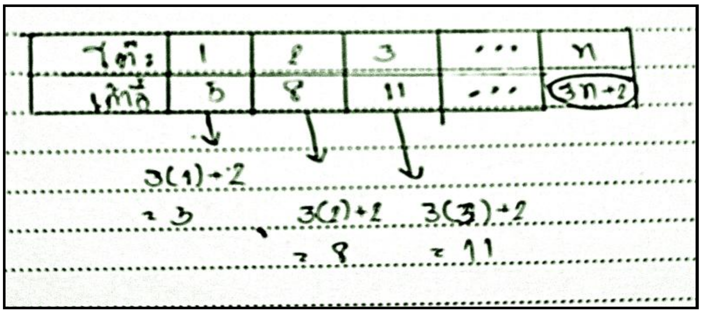


โต๊ะ	จำนวนคน
1	1(3)+2
2	2(3)+2
3	3(3)+2
⋮	⋮
n	n(3)+2

ตอบ ดังนั้น ... n(3)+2

ภาพประกอบที่ 26

แสดงตัวอย่างการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปของนักเรียนกลุ่มทดลองด้วยการใช้ตาราง(1)



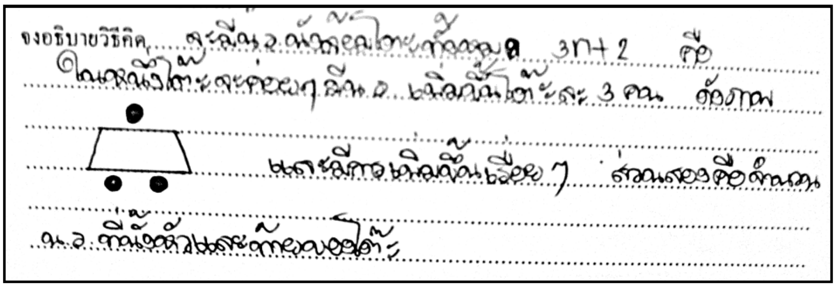
โต๊ะ	1	2	3	...	n
เก้าอี้	5	8	11	...	3n+2

3(1)+2 = 5 , 3(2)+2 = 8 3(3)+2 = 11

ภาพประกอบที่ 27

แสดงตัวอย่างการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปของนักเรียนกลุ่มทดลองด้วยการใช้ตาราง(2)

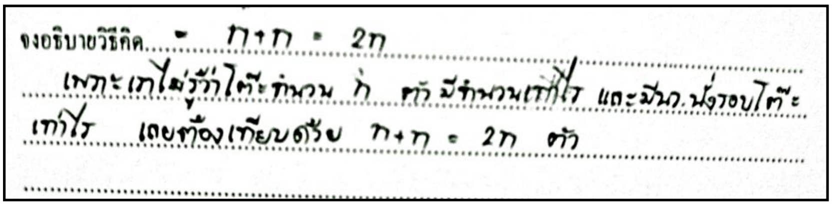
จากภาพประกอบที่ 26 และ ภาพประกอบที่ 27 เป็นตัวอย่างการนำเสนอวิธีคิดเพื่อสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ซึ่งนักเรียนใช้ตารางในการนำเสนอวิธีคิด และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโต๊ะ กับ จำนวนนักเรียน



ภาพประกอบที่ 28

แสดงการคิดเพื่อสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปโดยการเขียนอธิบายและวาดภาพประกอบ

จากภาพประกอบที่ 28 เป็นตัวอย่างการแสดงการคิดเพื่อสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ซึ่งนักเรียนใช้วิธีเขียนอธิบายและวาดภาพประกอบเพื่อนำเสนอการคิด และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโต๊ะ กับ จำนวนนักเรียน



ภาพประกอบที่ 29

แสดงตัวอย่างการคิดเพื่อสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปที่ไม่ถูกต้อง

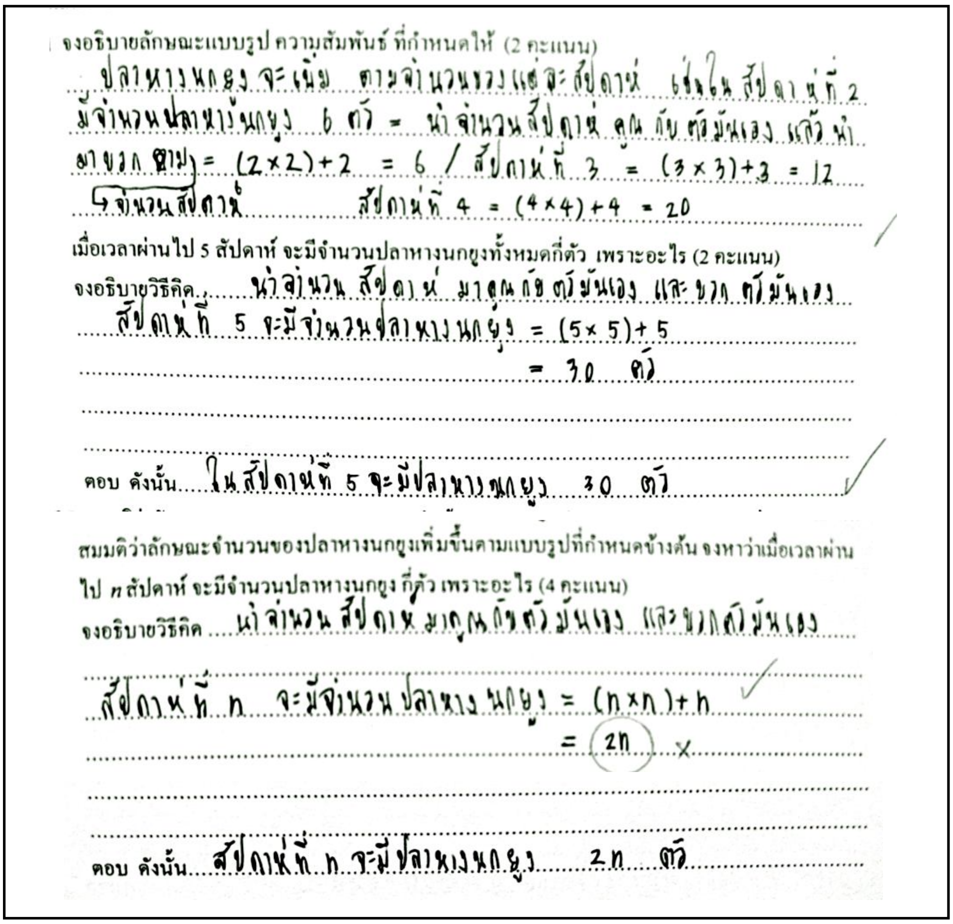
จากภาพประกอบที่ 29 เป็นตัวอย่างการแสดงการคิดเพื่อสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปที่ไม่ถูกต้อง โดยนักเรียนพยายามเขียนอธิบาย เพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโต๊ะ กับจำนวนนักเรียน

ตัวอย่างโจทย์ที่ 2 น้ำทิพย์เลี้ยงปลาหางนกยูง โดยซื้อพ่อพันธุ์ และแม่พันธุ์ มาอย่างละตัว และได้นับจำนวนปลาในทุกสัปดาห์ ดังนี้

เวลาผ่านไป 1 สัปดาห์แรก	มีจำนวนปลาหางนกยูงเท่าเดิม
เวลาผ่านไป 2 สัปดาห์	มีจำนวนปลาหางนกยูง 6 ตัว
เวลาผ่านไป 3 สัปดาห์	มีจำนวนปลาหางนกยูง 12 ตัว
เวลาผ่านไป 4 สัปดาห์	มีจำนวนปลาหางนกยูง 20 ตัว

คำถามที่ 1 จงอธิบายลักษณะแบบรูป ความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้ และ เมื่อเวลาผ่านไป 5 สัปดาห์จะมีจำนวนปลาหางนกยูงทั้งหมดกี่ตัว

คำถามที่ 2 สมมติว่าลักษณะจำนวนของปลาหางนกยูงเพิ่มขึ้นตามแบบรูปที่กำหนดข้างต้น จงหาว่าเมื่อเวลาผ่าน ไป n สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูงกี่ตัว



จงอธิบายลักษณะแบบรูป ความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้ (2 คะแนน)
ปลาหางนกยูง จะเพิ่ม ตามจำนวนของแต่ละสัปดาห์ เช่นในสัปดาห์ที่ 2 มีจำนวนปลาหางนกยูง 6 ตัว = นำจำนวนสัปดาห์ คูณ กับตัวมันเอง แล้วนำมาบวก ตามจำนวนสัปดาห์ = (2×2)+2 = 6 / สัปดาห์ที่ 3 = (3×3)+3 = 12
สัปดาห์ที่ 4 = (4×4)+4 = 20

เมื่อเวลาผ่านไป 5 สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูงทั้งหมดกี่ตัว เพราะอะไร (2 คะแนน)
จงอธิบายวิธีคิด นำจำนวนสัปดาห์ มาคูณกับตัวมันเอง และบวกตัวมันเอง
สัปดาห์ที่ 5 จะมีจำนวนปลาหางนกยูง = (5×5)+5
= 30 ตัว

ตอบ ดังนั้น ในสัปดาห์ที่ 5 จะมีปลาหางนกยูง 30 ตัว

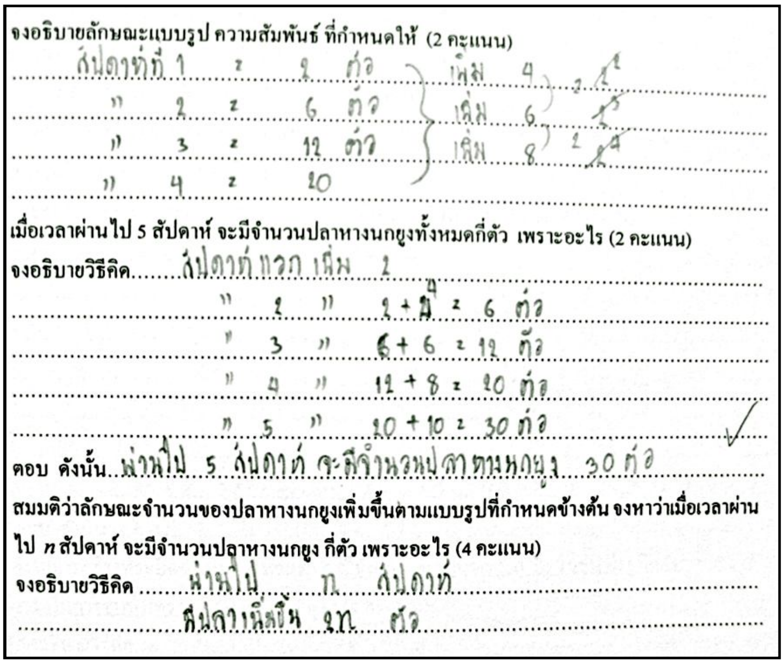
สมมติว่าลักษณะจำนวนของปลาหางนกยูงเพิ่มขึ้นตามแบบรูปที่กำหนดข้างต้น จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป n สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูง กี่ตัว เพราะอะไร (4 คะแนน)
จงอธิบายวิธีคิด นำจำนวนสัปดาห์ มาคูณกับตัวมันเอง และบวกตัวมันเอง
สัปดาห์ที่ n จะมีจำนวนปลาหางนกยูง = (n×n)+n
= 2n ×

ตอบ ดังนั้น สัปดาห์ที่ n จะมีปลาหางนกยูง 2n ตัว

ภาพประกอบที่ 30

แสดงตัวอย่างการอธิบายแบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไปด้วยการเขียนอธิบาย(1)

จากภาพประกอบที่ 30 นักเรียนแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนสัปดาห์ที่ผ่านไปกับจำนวนปลาหางนกยูงที่เพิ่มขึ้นด้วยวิธีการเขียนอธิบายและพร้อมกับยกตัวอย่างประกอบ จากนั้นเชื่อมโยงความสัมพันธ์ที่ได้ไปขยายแบบรูป เพื่อหาจำนวนปลาหางนกยูงในสัปดาห์ที่ต้องการได้ เมื่อถึงขั้นของการสร้างกรณีทั่วไป นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์จากการขยายแบบรูป ไปยังกรณีทั่วไปได้ แต่ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากความผิดพลาดของการดำเนินการของตัวแปร


จงอธิบายลักษณะแบบรูป ความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้ (2 คะแนน)

สัปดาห์ที่ 1 = 2 ตัว เพิ่ม 4

" 2 = 6 ตัว เพิ่ม 6

" 3 = 12 ตัว เพิ่ม 8

" 4 = 20

เมื่อเวลาผ่านไป 5 สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูงทั้งหมดกี่ตัว เพราะอะไร (2 คะแนน)

จงอธิบายวิธีคิด สัปดาห์แรก เพิ่ม 2

" 2 " 2 + 4 = 6 ตัว

" 3 " 6 + 6 = 12 ตัว

" 4 " 12 + 8 = 20 ตัว

" 5 " 20 + 10 = 30 ตัว

ตอบ ดังนั้น ผ่านไป 5 สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูง 30 ตัว

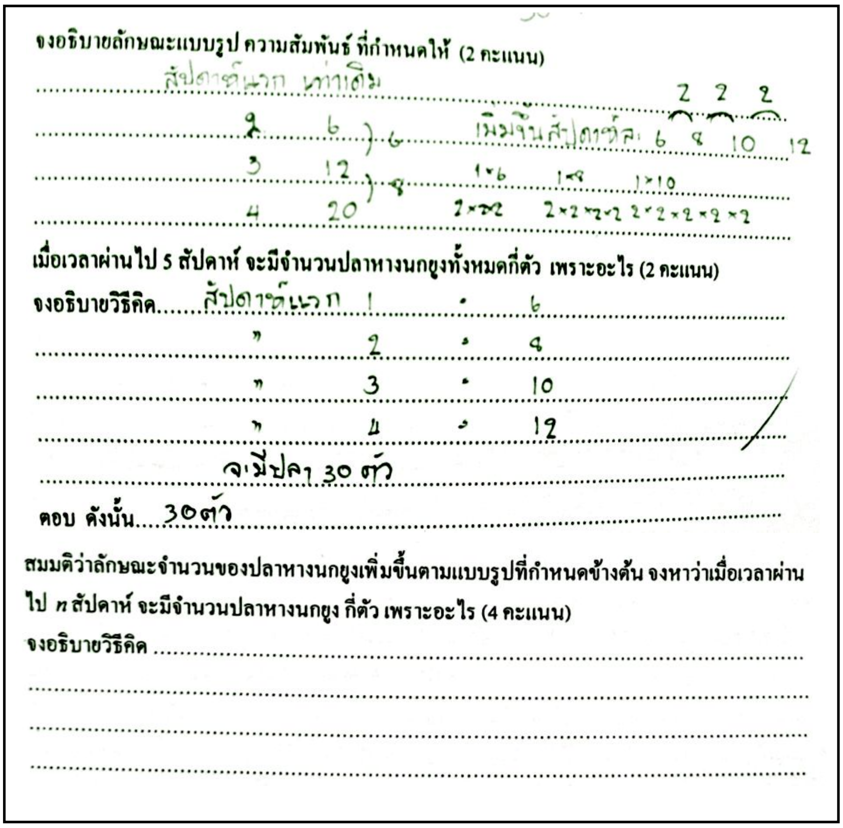
สมมติว่าลักษณะจำนวนของปลาหางนกยูงเพิ่มขึ้นตามแบบรูปที่กำหนดข้างต้น จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป *n* สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูง กี่ตัว เพราะอะไร (4 คะแนน)

จงอธิบายวิธีคิด ผ่านไป n สัปดาห์

มีปลาเพิ่มขึ้น 2n ตัว

ภาพประกอบที่ 31

แสดงตัวอย่างการอธิบายแบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไปด้วยการเขียนอธิบาย(2)


จงอธิบายลักษณะแบบรูป ความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้ (2 คะแนน)

สัปดาห์แรก เท่าเดิม

2 6 6 เพิ่มขึ้นสัปดาห์ละ 6 8 10 12

3 12 8 1×6 1×8 1×10

4 20 2×2 2×2×2×2 2×2×2×2×2

เมื่อเวลาผ่านไป 5 สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูงทั้งหมดกี่ตัว เพราะอะไร (2 คะแนน)

จงอธิบายวิธีคิด สัปดาห์แรก 1 · 6

" 2 · 8

" 3 · 10

" 4 · 12

จะมีปลา 30 ตัว

ตอบ ดังนั้น 30 ตัว

สมมติว่าลักษณะจำนวนของปลาหางนกยูงเพิ่มขึ้นตามแบบรูปที่กำหนดข้างต้น จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป *n* สัปดาห์ จะมีจำนวนปลาหางนกยูง กี่ตัว เพราะอะไร (4 คะแนน)

จงอธิบายวิธีคิด

ภาพประกอบที่ 32

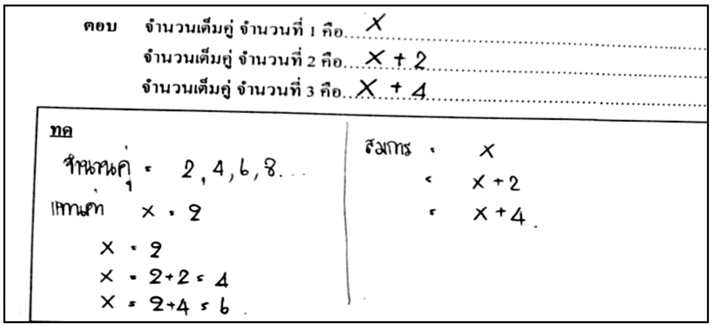
แสดงตัวอย่างการอธิบายแบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไปด้วยการเขียนอธิบาย(3)

จากภาพประกอบที่ 31 และ ภาพประกอบที่ 32 นักเรียนแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนสัปดาห์ที่ผ่านไปกับจำนวนปลาหางนกยูงที่เพิ่มขึ้นด้วยวิธีการเขียนอธิบาย โดยพิจารณาความต่างระหว่างจำนวนปลาหางนกยูงที่เพิ่มขึ้นในแต่ละสัปดาห์ที่เพิ่มขึ้นทีละไม่เท่ากัน ซึ่งนักเรียนหาแนวโน้มของความต่างที่เกิดขึ้นได้ และสามารถขยายแบบรูป และหาจำนวนปลาหางนกยูงในสัปดาห์ที่ต้องการได้ แต่เมื่อถึงขั้นของการสร้างกรณีทั่วไป นักเรียนไม่สามารถสร้างได้ เนื่องจากการเพิ่มขึ้นหรือความต่างของจำนวนปลาหางนกยูงในแต่ละสัปดาห์เพิ่มทีละไม่เท่ากัน ทำให้ไม่สามารถหากรณีทั่วไปได้

4.2.2 ตัวอย่างการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

ตัวอย่างโจทย์ที่ 3 เด็กสามคนเล่นเกมต่อจำนวน ซึ่งให้แต่ละคนบอกชุดของจำนวน โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องบอกเป็น **"จำนวนเต็มคู่ 3 จำนวนเรียงติดกัน"** ถ้าคนใดบอกไม่ได้ตามเวลาที่กำหนดถือว่าแพ้ในเกมนั้น

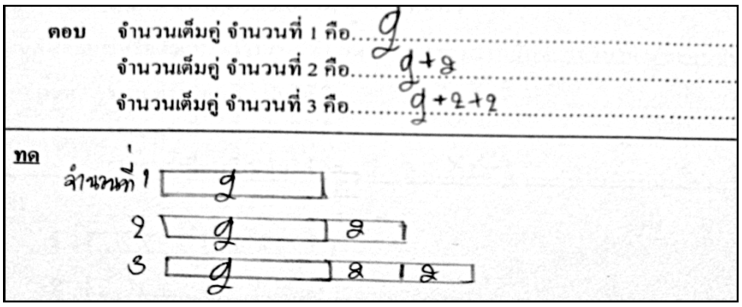
จงเขียนสัญลักษณ์หรือตัวแปรสร้างความสัมพันธ์ของจำนวนเต็มคู่ทั้งสามจำนวน


ตอบ จำนวนเต็มคู่ จำนวนที่ 1 คือ x
จำนวนเต็มคู่ จำนวนที่ 2 คือ $x + 2$
จำนวนเต็มคู่ จำนวนที่ 3 คือ $x + 4$

ทด
จำนวนคู่ = 2, 4, 6, 8...
แทนค่า $x = 2$
$x = 2$
$x = 2+2 = 4$
$x = 2+4 = 6$.
สมการ = x
= $x + 2$
= $x + 4$.

ภาพประกอบที่ 33 แสดงตัวอย่างการสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปร

จากภาพประกอบที่ 33 นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรจากสถานการณ์ปัญหา โดยนักเรียนกำหนดให้จำนวนน้อยเป็นตัวแปรเริ่มต้น แล้วค่อย ๆ สร้างความสัมพันธ์ของจำนวนที่มากขึ้น ซึ่งผู้เรียนแสดงการคิดด้วยการยกตัวอย่างจำนวนคู่ แล้วเปรียบเทียบกับโจทย์เพื่อสร้างตัวแปร


ตอบ จำนวนเต็มคู่ จำนวนที่ 1 คือ ก
จำนวนเต็มคู่ จำนวนที่ 2 คือ ก+2
จำนวนเต็มคู่ จำนวนที่ 3 คือ ก+2+2

ทด
จำนวนที่ 1 ก
2 ก 2
3 ก 2 2

ภาพประกอบที่ 34

แสดงตัวอย่างการสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรโดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด

จากภาพประกอบที่ 34 นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรจากสถานการณ์ปัญหา โดยนักเรียนใช้การวาดแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดช่วยในการสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา โดยให้จำนวนน้อยเป็นตัวแปรเริ่มต้น เพื่อเชื่อมโยงสู่จำนวนอื่น ๆ

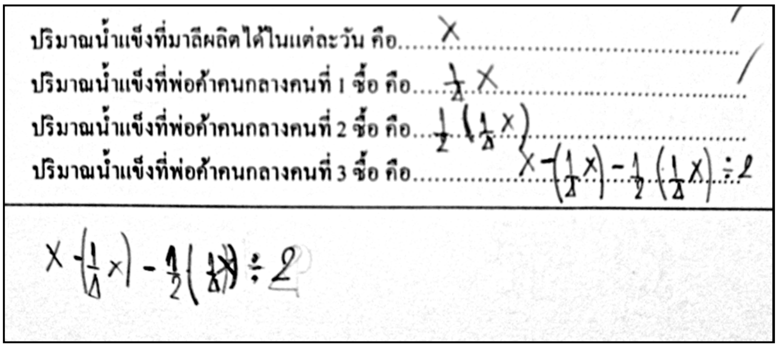
ตัวอย่างที่ 4 มาลีมีอาชีพผลิตน้ำแข็งขาย ในแต่ละวันจะมีพ่อค้าคนกลางมาซื้อ 4 คน โดยที่

คนแรกซื้อน้ำแข็งเป็น $\frac{1}{4}$ ของปริมาณน้ำแข็งที่ผลิตในแต่ละวัน

คนที่สองซื้อน้ำแข็งเป็น 2 เท่าของคนที่หนึ่ง

คนที่สาม และคนที่สี่ แบ่งซื้อน้ำแข็งไปคนละเท่า ๆ กัน ของที่เหลือ

จงเขียนสัญลักษณ์หรือตัวแปรสร้างความสัมพันธ์ของปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางแต่ละคนซื้อไป



ปริมาณน้ำแข็งที่มาลีผลิตได้ในแต่ละวัน คือ X

ปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางคนที่ 1 ซื้อ คือ $\frac{1}{4}X$

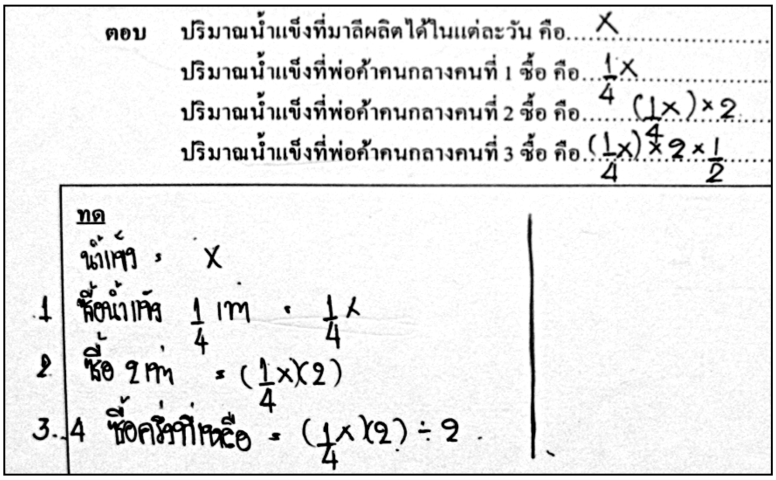
ปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางคนที่ 2 ซื้อ คือ $\frac{1}{2}(\frac{1}{4}X)$

ปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางคนที่ 3 ซื้อ คือ $X-(\frac{1}{4}X)-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}X)\div 2$

$X-(\frac{1}{4}X)-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}X)\div 2$

ภาพประกอบที่ 35

แสดงตัวอย่างการสร้างตัวแปรและสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่แตกต่างกัน (1)



ตอบ ปริมาณน้ำแข็งที่มาลีผลิตได้ในแต่ละวัน คือ X

ปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางคนที่ 1 ซื้อ คือ $\frac{1}{4}X$

ปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางคนที่ 2 ซื้อ คือ $(\frac{1}{4}X)\times 2$

ปริมาณน้ำแข็งที่พ่อค้าคนกลางคนที่ 3 ซื้อ คือ $(\frac{1}{4}X)\times 2\times\frac{1}{2}$

ทด

น้ำแข็ง = X

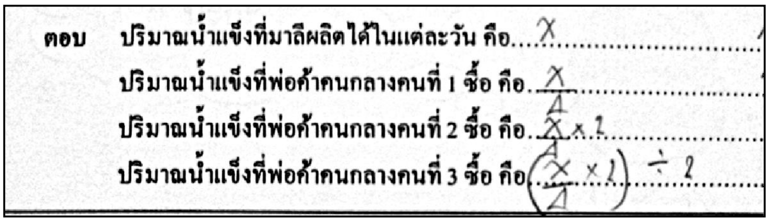
1 ซื้อน้ำแข็ง $\frac{1}{4}$ เท่า = $\frac{1}{4}X$

2 ซื้อ 2 เท่า = $(\frac{1}{4}X)(2)$

3. 4 ซื้อครึ่งที่เหลือ = $(\frac{1}{4}X)(2)\div 2$

ภาพประกอบที่ 36

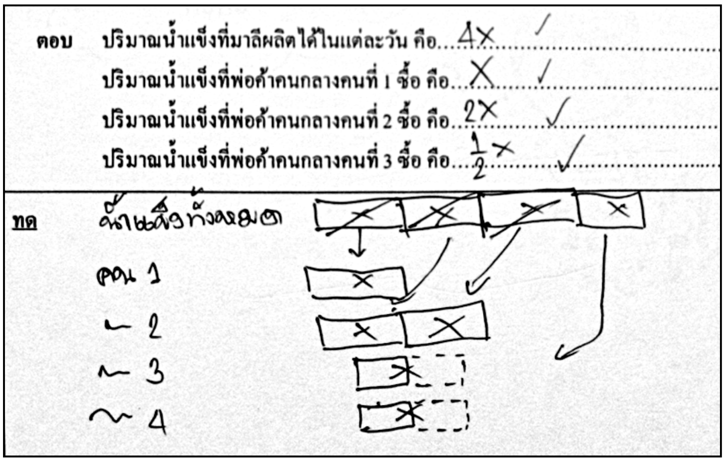
แสดงตัวอย่างการสร้างตัวแปรและสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่แตกต่างกัน (2)



ภาพประกอบที่ 37

แสดงตัวอย่างการสร้างตัวแปรและสัญลักษณ์ทางพีชคณิตที่แตกต่างกัน (3)

จากภาพประกอบที่ 35, 36 และ 37 นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ของโครงสร้างสถานการณ์ปัญหา ซึ่งลักษณะการคิด นักเรียนจะกำหนดให้ค่าที่เจอก่อนเป็นตัวแปรเริ่มต้น จากนั้นเชื่อมโยงตัวแปรแรก สร้างความสัมพันธ์สร้างตัวแปรและสัญลักษณ์ทางพีชคณิตของค่าอื่น ๆ ตามที่โจทย์กำหนด



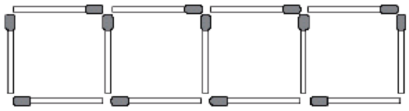
ภาพประกอบที่ 38

แสดงตัวอย่างการสร้างตัวแปรและสัญลักษณ์ทางพีชคณิตโดยใช้แนวคิดโมเดลเมธอด

จากภาพประกอบที่ 38 เป็นการแสดงการคิดสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหา โดยวาดแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดช่วยสร้างความสัมพันธ์ ของตัวแปรและสัญลักษณ์ทางพีชคณิต ซึ่งลักษณะการคิด นักเรียนจะให้ค่าเริ่มต้นคิดเป็น 4 ส่วน ก่อน แล้วค่อยหาความสัมพันธ์ จากการแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วน ๆ ตามภาพข้างต้น

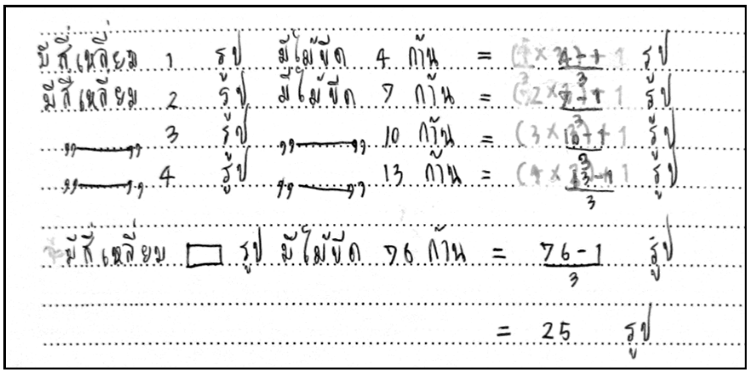
4.2.3 การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณจำนวน

ตัวอย่างโจทย์ที่ 5 จากภาพ ไม้ขีดไฟ 13 ก้านถูกนำมาจัดเรียงต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส 4 รูป ถ้าใช้ไม้ขีดไฟจำนวน 76 ก้าน จะสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต่อกันแบบนี้ได้กี่รูป



จงแสดงวิธีคิด และหาคำตอบ

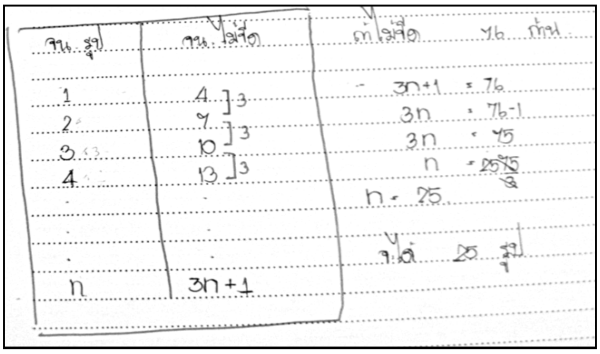
(นักเรียนอาจใช้ ตาราง สมการ กราฟ หรือ นิพจน์ ในการหาคำตอบ)



ภาพประกอบที่ 39

แสดงตัวอย่างการใช้นิพจน์อธิบายวิธีคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง

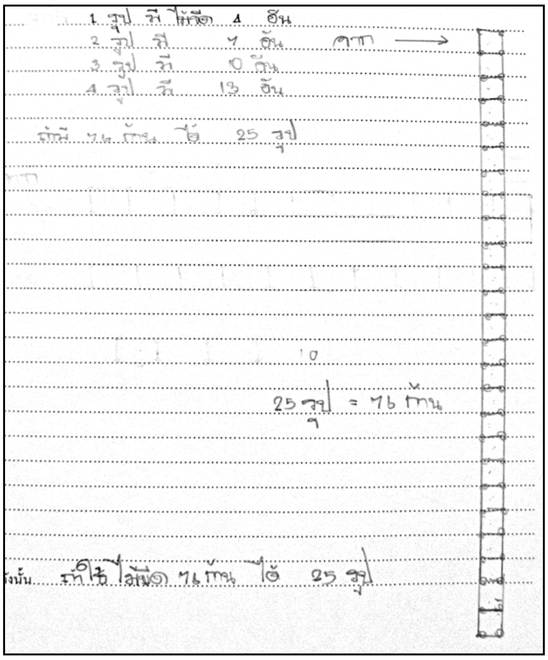
จากภาพประกอบที่ 39 แสดงให้เห็นวิธีคิดของนักเรียนเพื่อหาคำตอบในสถานการณ์ปัญหา โดยนักเรียนใช้นิพจน์ เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ช่วยในการดำเนินการ



ภาพประกอบที่ 40

แสดงตัวอย่างการใช้ตารางอธิบายวิธีคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง

จากภาพประกอบที่ 40 แสดงให้เห็นวิธีการนำเสนอตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ในการหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา คือการใช้ตาราง และ สมการ โดยเริ่มจากการใช้ตารางช่วยในการสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปก่อน จากนั้นใช้กรณีทั่วไปที่ได้ ไปสร้างความสัมพันธ์ในรูปของสมการ แล้วแก้สมการเพื่อหาคำตอบ



จากภาพประกอบที่ 41 เป็นการแสดงวิธีคิดของนักเรียน ซึ่งไม่ได้แสดงวิธีคิดโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ แต่ใช้การนำเสนอตัวแทนการคิด ด้วยการวาดภาพ

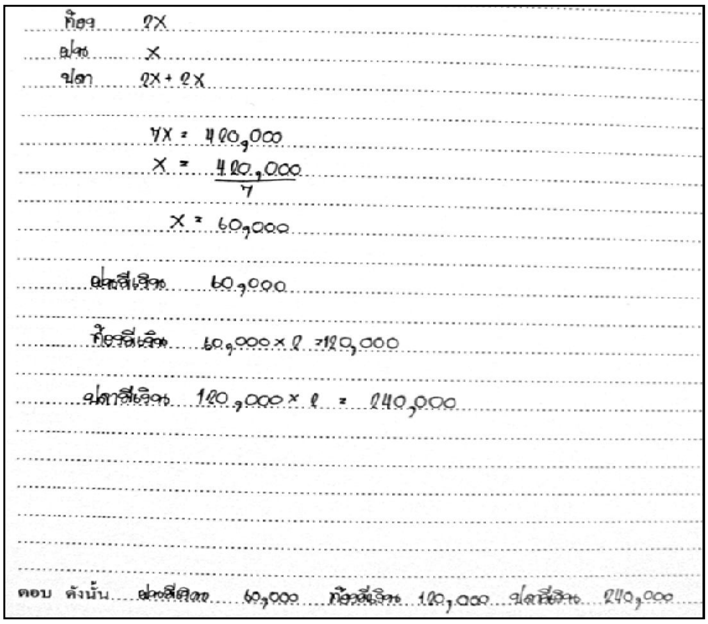
ภาพประกอบที่ 41 แสดงตัวอย่างการวาดภาพอธิบายวิธีคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ตัวอย่างโจทย์ที่ 6 ก้อง ฝน และปลา มีเงินเก็บจำนวนหนึ่ง โดยที่

ก้องมีเงินเป็นสองเท่าของฝน ปลามีเงินเป็นสองเท่าของก้อง

ถ้าทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 420,000 บาท แต่ละคนมีเงินคนละกี่บาท

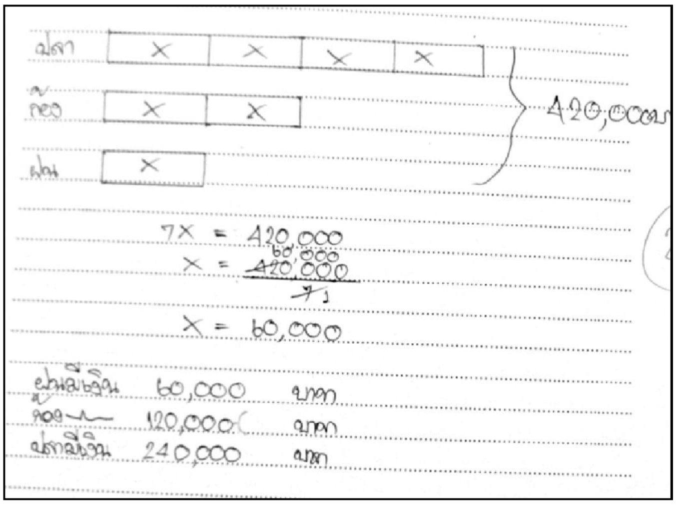
จงแสดงวิธีคิด และหาคำตอบ (นักเรียนอาจใช้ ตาราง สมการ กราฟ หรือ นิพจน์ ในการหาคำตอบ)



ภาพประกอบที่ 42

แสดงตัวอย่างการใช้สมการอธิบายวิธีคิดของนักเรียนกลุ่มทดลอง

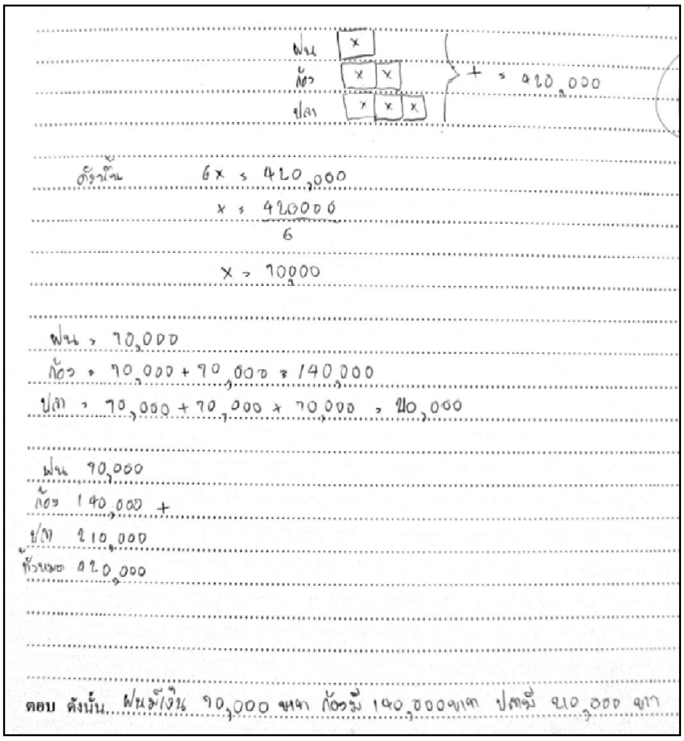
จากภาพประกอบที่ 42 เป็นการแสดงวิธีคิดของนักเรียน ซึ่งนักเรียนใช้สมการเป็น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ในการหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา



ภาพประกอบที่ 43

แสดงตัวอย่างการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดอธิบายวิธีคิดเพื่อสร้างสมการของนักเรียนกลุ่มทดลอง

จากภาพประกอบที่ 43 เป็นการแสดงการคิดของนักเรียนโดยนักเรียนใช้ทั้งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และการนำเสนอตัวแทนความคิดร่วมกัน กระบวนการคิดเริ่มจากที่นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลโดยใช้การวาดแบบจำลองการเปรียบเทียบตามแนวคิดโมเดลเมธอด จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นมาสร้างสมการ จากนั้นนักเรียนแก้สมการและหาคำตอบ



ภาพประกอบที่ 44

แสดงตัวอย่างการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดอธิบายวิธีคิดเพื่อสร้างสมการไม่ถูกต้อง

จากภาพประกอบที่ 44 เป็นการแสดงวิธีคิดของนักเรียน โดยใช้การวาดแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด แต่วาดแบบจำลองไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขในสถานการณ์ปัญหา ทำให้สร้างสมการไม่สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาเช่นเดียวกัน จึงทำให้ได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งในที่นี้นักเรียนมีการตรวจสอบคำตอบ แต่ไม่ได้ตรวจสอบวิธีการสร้างแบบจำลอง จึงทำให้นักเรียนไม่ทราบว่าวิธีการคิดแลคำตอบไม่ถูกต้อง

4.2.4 การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

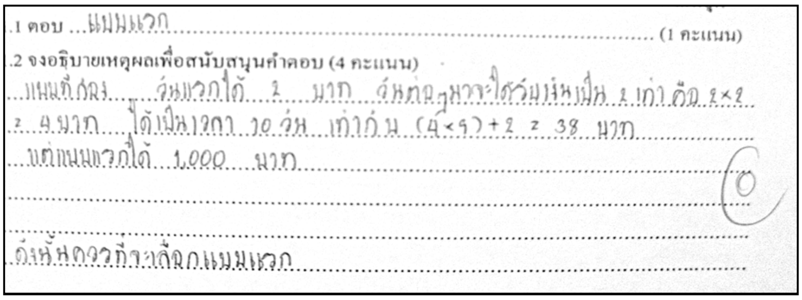
ตัวอย่างโจทย์ที่ 7 สถานการณ์ “แท็กซี่ พลเมืองดี”

หนุ่มแท็กซี่ เก็บกระเป๋าของผู้โดยสารที่ลืมทิ้งไว้ในรถแท็กซี่ เขาเลยนำไปมอบให้ตำรวจ เจ้าของกระเป๋าประทับใจหนุ่มแท็กซี่มาก เลยต้องการมอบรางวัลเป็นสินน้ำใจให้ โดยให้ตัดสินใจว่าจะเลือกรับรางวัลแบบใด

แบบแรก คือ ชายหนุ่มจะได้รับเงินจำนวน 1,000 บาท

แบบที่สอง คือ วันแรกชายหนุ่มจะได้รับเงิน 2 บาท วันต่อ ๆ มา เขาจะได้รับเงินเป็น 2 เท่าของวันก่อนหน้านั้น โดยจะได้รับเงิน เป็นเวลา 10 วัน

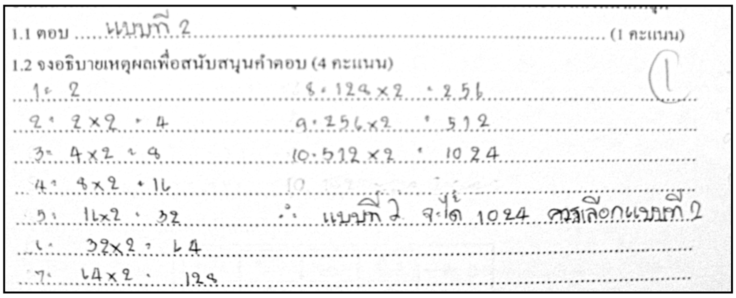
จากสถานการณ์ข้างต้นนักเรียนคิดว่าหนุ่มแท็กซี่ควรเลือกรางวัลแบบใด เพื่อให้ได้เงินมากที่สุด พร้อมให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ


.1 ตอบ ...แบบแรก .... (1 คะแนน)
.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ (4 คะแนน)
แบบที่สอง วันแรกได้ 2 บาท วันต่อๆมาจะได้รับเงินเป็น 2 เท่า คือ 2×2 = 4 บาท ได้เป็นเวลา 10 วัน เท่ากับ (4×9)+2 = 38 บาท
แต่แบบแรกได้ 1,000 บาท
ดังนั้นควรที่จะเลือกแบบแรก

ภาพประกอบที่ 45

แสดงตัวอย่างการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของนักเรียนกลุ่มทดลอง(1)

จากภาพประกอบที่ 45 แสดงให้เห็นการคิดของนักเรียนในการวิเคราะห์สถานการณ์ที่กำหนด ซึ่งจะเห็นได้ว่า นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์เงื่อนไขที่กำหนดได้ถูกต้อง ทำให้ไม่สามารถให้ตอบคำถามและให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลได้



1.1 ตอบ ....แบบที่ 2.... (1 คะแนน)

1.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ (4 คะแนน)

1 : 2 8 : 128 × 2 : 256

2 : 2 × 2 : 4 9 : 256 × 2 : 512

3 : 4 × 2 : 8 10 : 512 × 2 : 1024

4 : 8 × 2 : 16

5 : 16 × 2 : 32 ∴ แบบที่ 2 จะได้ 1024 ควรเลือกแบบที่ 2

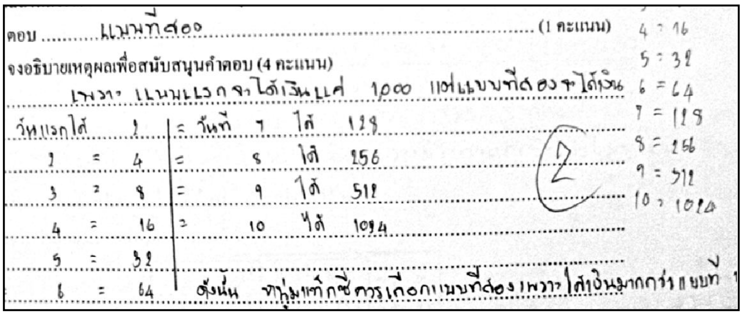
6 : 32 × 2 : 64

7 : 64 × 2 : 128

ภาพประกอบที่ 46

แสดงตัวอย่างการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของนักเรียนกลุ่มทดลอง(2)

จากภาพประกอบที่ 46 จะเห็นว่านักเรียนตอบได้ถูกต้องแต่ยังให้เหตุผลไม่สมบูรณ์ เนื่องจากการวิเคราะห์เงื่อนไขคลาดเคลื่อน



ตอบ ....แบบที่สอง.... (1 คะแนน)

จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ (4 คะแนน)

เพราะ แบบแรกจะได้เงินแค่ 1000 แต่แบบที่สองจะได้เงิน

วันแรกได้ 2 = วันที่ 7 ได้ 128

2 = 4 = 8 ได้ 256

3 = 8 = 9 ได้ 512

4 = 16 = 10 ได้ 1024

5 = 32

6 = 64 ดังนั้น ทางแม่ควรเลือกแบบที่สอง เพราะได้เงินมากกว่าแบบที่ 1

4 = 16, 5 = 32, 6 = 64, 7 = 128, 8 = 256, 9 = 512, 10 = 1024

ภาพประกอบที่ 47

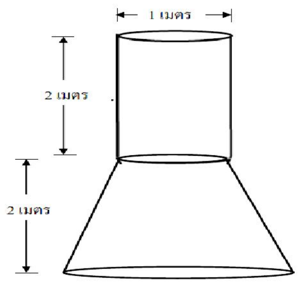
แสดงตัวอย่างการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของนักเรียนกลุ่มทดลอง(3)

จากภาพประกอบที่ 47 แสดงให้เห็นถึงการคิดของนักเรียนเกี่ยวกับการให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบที่มีความสมเหตุสมผล

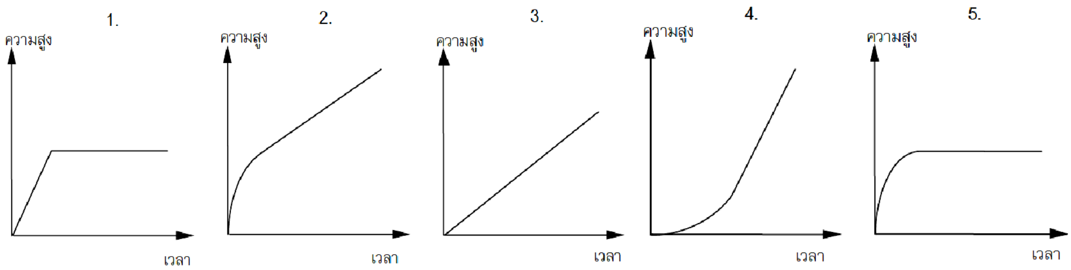
ตัวอย่างโจทย์ที่ 8 สถานการณ์ "ถังน้ำปริศนา"

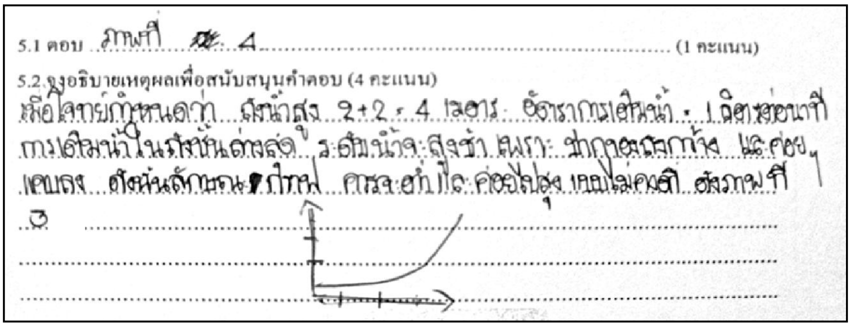
ถังน้ำใบหนึ่งมีรูปร่างและขนาดดังภาพ

เริ่มต้นจากถังเปล่า แล้วเติมน้ำด้วยอัตรา 1 ลิตรต่อนาที



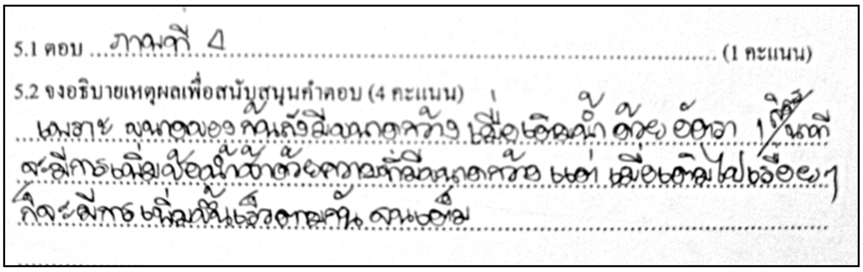
กราฟข้อใดต่อไปนี้ เป็นกราฟที่แสดงการเปลี่ยนแปลงความสูงของผิวน้ำตามเวลาที่ผ่านไป เพราะเหตุใด จงให้เหตุผลประกอบ




5.1 ตอบ ภาพที่ 4 (1 คะแนน)
5.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ (4 คะแนน)

ภาพประกอบที่ 48

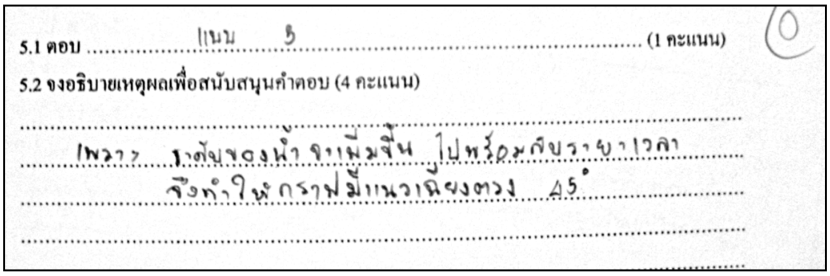
แสดงตัวอย่างการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของนักเรียนกลุ่มทดลอง(4)


5.1 ตอบ ภาพที่ 4 (1 คะแนน)
5.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ (4 คะแนน)

ภาพประกอบที่ 49

แสดงตัวอย่างการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของนักเรียนกลุ่มทดลอง(5)

จากภาพประกอบที่ 48 และภาพประกอบที่ 49 แสดงให้เห็นถึงความสามารถในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาเนื่องจากสามารถตอบคำถามได้ถูกต้อง และให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล


5.1 ตอบ แบบ 5 (1 คะแนน)
5.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ (4 คะแนน)
เพราะ ระดับของน้ำ จะเพิ่มขึ้น ไปพร้อมกับระยะเวลา
จึงทำให้กราฟมีแนวเฉียงตรง 45°

ภาพประกอบที่ 50

แสดงตัวอย่างการให้เหตุผลเพื่อยืนยันคำตอบของนักเรียนกลุ่มทดลอง(6)

จากภาพประกอบที่ 50 แสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่มีความสามารถในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา โดยตอบคำถามไม่ถูกต้อง และให้เหตุผลไม่สมเหตุสมผล

4.4 ตัวอย่างการสัมภาษณ์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

หลังจากที่ผู้วิจัยตรวจและวิเคราะห์แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองแล้วนั้น ผู้วิจัยได้ทำการจำแนกลักษณะการเขียนตอบของนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามเกณฑ์การให้คะแนนของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ดังนี้

กลุ่มที่ 1 นักเรียนเขียนอธิบายไม่ถูกต้อง หรือไม่มีการเขียนอธิบายใด ๆ

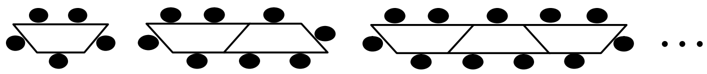
กลุ่มที่ 2 นักเรียนเขียนอธิบายได้ถูกต้องบางส่วน แต่ไม่สมบูรณ์

กลุ่มที่ 3 นักเรียนเขียนอธิบายได้ถูกต้อง สมบูรณ์

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป

กำหนดให้นักเรียนนั่งรอบโต๊ะรับประทานอาหาร ดังภาพ



โต๊ะ 1 ตัว　　โต๊ะ 2 ตัว　　　　โต๊ะ 3 ตัว

ตัวบ่งชี้การคิดที่ 1 การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และขยายแบบรูป

<u>ตัวอย่างนักเรียนกลุ่มที่ 1</u>

ปัญหา: จงอธิบายลักษณะแบบรูป ความสัมพันธ์ ระหว่างโต๊ะกับนักเรียน ที่กำหนดให้

ผู้วิจัย : อ่านแล้ว โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้างคะ

จักรกฤษณ์: *โต๊ะ กับ นักเรียน ครับ*

ผู้วิจัย : ทราบไหมว่า จำนวนโต๊ะ กับ จำนวนนักเรียน สัมพันธ์กันอย่างไร

จักรกฤษณ์: *(ไม่ตอบ)*

ผู้วิจัย: ไหนลองดูที่โต๊ะ 1 ตัวก่อนซิคะ ว่า โต๊ะ 1 ตัว มี นักเรียนนั่งรอบโต๊ะกี่คน

จักรกฤษณ์: *5 คน ครับ*

ผู้วิจัย: จากนั้นลองดูที่โต๊ะ 2 ตัว และ ที่โต๊ะ 3 ตัวซิคะว่า มีนักเรียนนั่งรอบโต๊ะกี่คน

จักรกฤษณ์: *8 คน และ 11 คน ครับ*

ผู้วิจัย: จากนั้นดูซิว่าเมื่อจำนวนโต๊ะเพิ่มขึ้น จำนวนนักเรียนเปลี่ยนแปลงอย่างไรคะ

จักรกฤษณ์: *เพิ่มขึ้นครับ*

ผู้วิจัย: เพิ่มขึ้นอย่างไรคะ ไหนบอกครูซิ

จักรกฤษณ์: *ห่างกัน 3 ครับ*

ผู้วิจัย: ไหนคิดอย่างไรคะ

จักรกฤษณ์: เอา 8 ลบ ออก 5 ได้ 3 และเอา 11 ลบออกด้วย 8 ได้ 3 เท่ากัน

ผู้วิจัย: ถ้ามีโต๊ะ จำนวน 4 ตัว จะมีจำนวนนักเรียนกี่คนคะ ลองอธิบายให้ครูฟังซิ

จักรกฤษณ์: 14 คับ คิดเหมือนเดิม เอา 11 บวกเพิ่ม 3 คับ ได้ 14

ผลจากการสัมภาษณ์ นักเรียนกลุ่มที่ 1 ซึ่งนักเรียนคนดังกล่าวไม่ได้อธิบายอะไรลงในกระดาษคำตอบเลย เมื่อสัมภาษณ์จะเห็นว่าเมื่อครูให้คำถามนำ นักเรียนสามารถวิเคราะห์แบบรูปได้ ขยายแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถเขียนอธิบายสิ่งที่คิดได้

ตัวบ่งชี้การคิดที่ 2 การสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูป ความสัมพันธ์

<u>ตัวอย่างนักเรียนกลุ่มที่ 2</u>

ปัญหา: ถ้าต้องการจัดโต๊ะจำนวน n ตัว จงหาว่ามีจำนวนนักเรียนนั่งรอบโต๊ะทั้งหมดกี่คน

ผู้วิจัย: ไหนดูที่หนูทำซิคะ ตอนแรกทำอย่างไรก่อน

ดวงราตรี: วาดตารางค่ะ

ผู้วิจัย: จากนั้นทำอย่างไรต่อคะ

ดวงราตรี: เขียน 1 ถึง 4 ในนี้ (ใช้มือชี้) แล้วเขียน 5, 8, 11 และ 14 ในนี้ (ใช้มือชี้)

ผู้วิจัย: 1 ถึง 4 คือค่าของอะไร และ 5, 8, 11 และ 14 คือค่าของอะไรคะ

ดวงราตรี: โต๊ะ กับ นักเรียน

ผู้วิจัย: จากนั้นทำอย่างไรต่อคะ

ดวงราตรี: ช่องนี้เขียนต่อลงมา อีกนิด เขียน จุด จุด จุด แล้วเขียน n

ผู้วิจัย: แล้วอีกช่องล่ะคะ (คอลัมน์ของจำนวนนักเรียน)

ดวงราตรี: เขียนลงมาเหมือนกัน แล้วแยกจำนวนออก

ผู้วิจัย: แยกจำนวนอย่างไรคะ

ดวงราตรี: ทำให้จำนวนแต่ละแถวคล้าย ๆ กันค่ะ

ผู้วิจัย: จำนวนนักเรียน 5 คน หนูแบ่งได้อย่างไรคะ

ดวงราตรี: เป็น 2 บวก 3

ผู้วิจัย: แล้ว จำนวนนักเรียน 8 คน 11 คน และ 14 คน ล่ะคะ แบ่งได้อย่างไร

ดวงราตรี: 8 เป็น 2 บวก 6, 11 เป็น 2 บวก 9 และ 14 เป็น 2 บวก 12 ค่ะ

ผู้วิจัย: จำนวนที่แบ่งออกมา คล้ายกันทุกแถวยัง

ดวงราตรี: คล้ายแล้ว

ผู้วิจัย: แล้วทำอย่างไรต่อคะ

ดวงราตรี: (ไม่ตอบ)

ผลจากการสัมภาษณ์ นักเรียนกลุ่มที่ 2 ซึ่งนักเรียนคนดังกล่าว สามารถวิเคราะห์ อธิบายแบบรูป และขยายแบบรูปได้ แต่ขั้นของการสร้างกรณีทั่วไป ทำได้ไม่สำเร็จสมบูรณ์ นักเรียนมีการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เข้ามาช่วยในการหากรณีทั่วไป จากการตอบคำถามของนักเรียน เห็นได้ว่านักเรียนมีวิธีการทำอย่างเป็นขั้นตอน เข้าใจว่าจะต้องสร้างกลุ่มของจำนวนนักเรียนให้มีรูปแบบที่คล้ายกันของแต่ละแถว แต่ไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโต๊ะกับจำนวนนักเรียนได้ เลยไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้เช่นกัน

<u>ตัวอย่างนักเรียนกลุ่มที่ 3</u>

ปัญหา: ถ้าต้องการจัดโต๊ะจำนวน n ตัว จงหาว่ามีจำนวนนักเรียนนั่งรอบโต๊ะทั้งหมดกี่คน

ผู้วิจัย: ข้อนี้นักเรียนคิดอย่างไรก่อนคะ

จุลีพร: หนูสร้างตารางค่ะ แล้วให้ช่องแรกเป็นจำนวนโต๊ะ ช่องที่สองเป็นจำนวนนักเรียน แต่ให้ช่องนี้กว้างหน่อยนะคะ

ผู้วิจัย: ทำไมช่องของจำนวนนักเรียนถึงกว้างกว่าคะ

จุลีพร: เพราะต้องเขียนขยายไปข้างหลังอีกค่ะ

ผู้วิจัย: ไหนลองอธิบายสิ่งที่หนูเขียนซิคะ ว่าคิดอย่างไร

จุลีพร: ช่องจำนวนโต๊ะก็เขียน 1 จนถึง 4 แล้ว เขียนละไว้ค่ะ (ชี้ที่จุด 3 จุด) แล้วก็เขียน n ส่วนอีกช่องก็เหมือนกัน คู่ใครคู่มันค่ะ 1 คู่กับ 5 2 คู่กับ 8 3 คู่กับ 11 และ 4 คู่กับ 14 ค่ะ จากนั้นเราก็มอง ๆ ค่ะ

ผู้วิจัย: มองอย่างไรคะ

จุลีพร: 5 แยกเป็น 3 บวก 2 ค่ะ 8 แยกเป็น 6 บวก 2 ค่ะ 11 แยกเป็น 9 บวก 2 และ 14 แยกเป็น 12 บวก 2

ผู้วิจัย: ทำไมถึงแยกแบบนั้นคะ

จุลีพร: ต้องพยายามทำให้ตัวเลขเหมือนกันก่อน ข้างหลัง (ชี้) บวกด้วย 2 เหมือนกันหมดแล้ว แล้วเดี๋ยวค่อยแยกตัวข้างหน้าอีกรอบให้คล้ายกัน

ผู้วิจัย: คำว่าคล้ายของหนู แปลว่าอะไรคะ

จุลีพร: มันคล้ายกันค่ะ อย่างนี้ค่ะ มีตัวเหมือนกัน และมีตัวที่ไม่เหมือนกันเรียง 1, 2, 3 ลงมาเรื่อย ๆ ค่ะ นี่ค่ะ พอเรามองตัวหน้า มี 3, 6, 9, 12 แล้วเราต้องทำให้ตัวที่ไม่เหมือนนี้ ให้คล้ายกันค่ะ และมี 1, 2, 3, 4, มาเกี่ยวด้วย

ผู้วิจัย: อย่างไรค่ะ

จุลีพร: นี่ค่ะ(ชี้) ได้ 3 เท่ากับ 3 คูณ 1 ค่ะ 6 เท่ากับ 3 คูณ 2 ค่ะ 9 เท่ากับ 3คูณ 3 แบบนี้ไปเรื่อย ๆ ค่ะ แล้วสุดท้ายเราก็ได้ค่ะ สุดท้ายได้ 3 คูณ n บรรทัด

สุดท้ายในตาราง ช่องจำนวนโต๊ะ n ตัว คู่กับ จำนวนนักเรียน 3 คูณ n บวกอยู่กับ 2 ค่ะ

ผลจากการสัมภาษณ์ นักเรียนกลุ่มที่ 3 ซึ่งเป็นกลุ่มที่นักเรียนสามารถวิเคราะห์แบบรูป อธิบายลักษณะแบบรูป ขยายแบบรูป และสามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความสามารถในการพูดอธิบายสิ่งที่ตนเองคิดได้ คล่องแคล่ว ถูกต้อง มีการพิจารณาและสร้างความสัมพันธ์ของแบบรูปเป็นขั้นเป็นตอน มีหลักการในการคิดอย่างเป็นระบบ ซึ่งนักเรียนใช้วิธีการมอง ๆ ลักษณะของแบบรูป แบ่งจำนวนออกเป็นกลุ่ม โดยให้จำนวนชุดแรกที่แบ่งออกมาเหมือนกันก่อน ซึ่งในที่นี้นักเรียนเลือกแบ่ง 2 ออกมา จากนั้น จำนวนที่เหลือ นักเรียนจะค่อย ๆ พิจารณาโดยสร้างให้จำนวนดังกล่าวเป็นกลุ่มของจำนวนที่มีตัวประกอบหนึ่งตัวเป็นชุดของจำนวนในช่องของจำนวนโต๊ะ ซึ่ง จะได้เป็น 3 คูณอยู่กับ 1, 2, 3 และ 4 ไปเรื่อย ๆ แล้วนักเรียนก็แทนไปจนถึงจำนวนโต๊ะที่มี n ตัว ได้จำนวนนักเรียน 3 คูณอยู่กับ n บวก อยู่กับ 2

<u>ตัวอย่างนักเรียนกลุ่มที่ 3 (คิดต่างจากคนอื่น ๆ)</u>

ปัญหา: ถ้าต้องการจัดโต๊ะจำนวน n ตัว จงหาว่ามีจำนวนนักเรียนนั่งรอบโต๊ะทั้งหมดกี่คน

ผู้วิจัย: ที่หนูแสดงในการเขียนตอบ ลองอธิบายให้ครูฟังซิคะว่าหนูคิดอย่างไร

ญานิกา: ขั้นแรกหนูจะดูก่อนค่ะว่าจำนวนนักเรียนเพิ่มขึ้นทีละเท่ากันหรือไม่ ถ้าเพิ่มทีละเท่ากัน หนูจะให้ การเพิ่มขึ้นทีละเท่าไหร่ ก็เป็นเท่านั้น คูณกับ n ค่ะ

ผู้วิจัย: ทำไมหนูถึงคิดอย่างนั้นคะ

ญานิกา: หนูสังเกตตอนเรียนค่ะ สมมติ ถ้า ห่างกันทีละ 1 กรณีทั่วไป จะเป็น n บวกอยู่กับจำนวนใดสักตัวหนึ่ง ถ้า ห่างกันทีละ 2 กรณีทั่วไป จะเป็น 2 คูณ n บวกอยู่กับจำนวนใดสักตัวหนึ่ง เป็นอย่างนี้ตลอดค่ะ

ผู้วิจัย: อ๋อ ค่ะ แล้วหนูคิดอย่างไรต่อคะ

ญานิกา: ข้อนี้ก็เหมือนกันค่ะ จำนวนนักเรียนเพิ่มทีละ 3 หนูก็ให้เป็น 3 คูณอยู่กับ n แล้วบวกอยู่กับอะไรสักตัวหนึ่งค่ะ

ผู้วิจัย: แล้วหนูจะหาอย่างไรคะ

ญานิกา: หนูแทนในจำนวนนักเรียนของโต๊ะที่ 1 ค่ะ คิดในใจว่า 3 คูณกับ 1 บวกกับอะไร ได้ 5 หนูก็เลยได้ ว่า 3 คูณ 1 บวก 2 ได้เท่ากับ 5 แล้วหนูก็เขียนแบบนี้แทนลงในตารางค่ะ เปลี่ยนจาก 1 เป็น 2, 3, 4, จนถึง 3 คูณ n บวก 2 ค่ะ

ผู้วิจัย: แล้วหนูแน่ใจได้อย่างไรว่าถูกต้องคะ

ญานิกา: *หนูแทนค่ะ และคิดทั้งหมดว่ามีค่า เป็น 5, 8, 11 และ 14 หรือไม่ (ชี้)*

ผู้วิจัย: หนูคิดว่า ถ้าแบบรูปเพิ่มทีละเท่า ๆ กัน หนูจะสามารถใช้วิธีการนี้ได้ตลอดหรือไม่

ญานิกา: *ได้ค่ะ*

ผู้วิจัย: แล้วถ้าแบบรูปที่ครูกำหนดให้ไม่ได้เพิ่มทีละเท่า ๆ กันล่ะ หนูจะใช้วิธีการนี้หรือเปล่าคะ

ญานิกา: *หนูลองแล้ว ไม่ได้ค่ะ*

ผู้วิจัย: แล้วหนูคิดว่าจะใช้วิธีการใดได้บ้าง

ญานิกา: *ถ้าเพิ่มทีละไม่เท่ากัน หนูไม่แน่ใจนะคะ แต่หนูจะแยกตัวประกอบก่อน แยกตัวประกอบออกมาดูว่าแต่ละจำนวนมีตัวประกอบอะไรบ้างค่ะ แล้วมอง ๆ เอาค่ะ*

ผลจากการสัมภาษณ์ นักเรียนกลุ่มที่ 3 ซึ่งเป็นกลุ่มที่นักเรียนสามารถวิเคราะห์แบบรูป อธิบายลักษณะแบบรูป ขยายแบบรูป และสามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ จะเห็นได้ว่า นักเรียนใช้วิธีการสังเกตตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่าง แล้วสรุปเป็นวิธีการของตัวเองได้อย่างสมเหตุสมผล สามารถอธิบายการคิดได้คล่องแคล่ว มีการคิดที่เป็นระบบ มีหลักการ จากการสัมภาษณ์เพิ่มเติม นักเรียนให้ความเห็นว่า วิธีการนี้เร็วมาก คิดในใจก็ออกและควรเลือกการแทนค่าในลำดับที่ 1 เนื่องจากตัวเลขมีค่าน้อย ง่ายต่อการคิด แต่ต้องเข้าใจเงื่อนไขเบื้องต้น ซึ่งผู้วิจัยสรุปวิธีการคิดของนักเรียน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 พิจารณาว่า ลักษณะแบบรูปมีการเพิ่มขึ้น หรือลดลง ทีละเท่ากันหรือไม่

ขั้นตอนที่ 2 ถ้าเป็นแบบรูปที่มีการเพิ่มหรือลดทีละเท่ากัน ให้นำจำนวนที่เพิ่ม หรือที่ลด นั้นคูณกับ n บวกอยู่กับค่าคงที่ใด ๆ

ขั้นตอนที่ 3 จากนั้น ให้ ตรวจสอบหาค่าคงที่ โดยใช้ข้อมูลชุดที่ 1 ในการคิด คือ นำจำนวนที่เพิ่มหรือลดนั้น คูณ ลำดับที่ 1 บวก ค่าคงที่ เท่ากับ ค่าของลำดับที่ 1

ขั้นตอนที่ 4 แก้สมการ หาค่าคงที่ จากนั้น จะได้ จำนวนที่เพิ่มหรือลดนั้นคูณ n บวกอยู่กับค่าคงที่ใด ๆ ที่หาได้ เป็นกรณีทั่วไปของแบบรูป

จากการสัมภาษณ์ นักเรียนมีลักษณะความสามารถและการสื่อความคิดในแต่ละกลุ่มแตกต่างกันค่อนข้างชัดเจน โดยที่

นักเรียนกลุ่มที่ 1 เป็นกลุ่มที่ไม่ค่อยมีความเชื่อมันในความคิดของตนเอง ไม่กล้าแสดงออกไม่กล้าสื่อความคิด เมื่อถามคำถาม ต้องให้เวลาในการคิดเพื่อตอบ ซึ่งลักษณะการอธิบายแบบรูป เมื่อมี

คำถามนำ นักเรียนสามารถตอบคำถามได้ แต่เมื่อให้ขยายแบบรูป นักเรียนยังไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์และตอบคำถามได้

นักเรียนกลุ่มที่ 2 นักเรียนมีความมั่นใจในการอธิบายเกี่ยวกับลักษณะของแบบรูป และสามารถขยายแบบรูปได้ ไม่ว่าลักษณะแบบรูปที่กำหนดให้จะเป็นลักษณะแบบรูปที่เพิ่มทีละเท่ากันและเพิ่มทีละไม่เท่ากัน ตัวอย่างเช่น

แบบรูปที่ มีการเพิ่มหรือลดทีละเท่า ๆ กัน 1, 4, 7, 10, . . . นักเรียนใช้วิธีการหาผลต่างระหว่างค่าของแต่ละลำดับที่ แล้วอธิบายว่า แบบรูปมีลักษณะเพิ่มทีละเท่า ๆ กัน โดยเพิ่มขึ้นทีละ 3 และสามารถหาค่าของลำดับที่หรือขยายแบบรูปได้ แต่เมื่อถึงขั้นของการหากรณีทั่วไป นักเรียนกลุ่มนี้สามารถหากรณีทั่วไปได้แต่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์

แบบรูปที่มีการเพิ่มหรือลดทีละไม่เท่ากัน แต่ มีการเพิ่มหรือลดทีละเท่ากัน ในขั้นของการหาผลต่างระหว่างค่าของลำดับที่ในรอบที่ 2 เช่น 2, 6, 12, 20, . . . นักเรียนใช้วิธีการหาผลต่างระหว่างค่าของแต่ละลำดับที่ ในรอบแรกก่อน เมื่อเห็นว่าได้ค่าไม่เท่ากัน นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า ลำดับเพิ่มขึ้นแต่เพิ่มทีละไม่เท่ากัน อย่างไร และแบบรูปลักษณะนี้นักเรียนสามารถขยายแบบรูปได้ โดยบวกเพิ่มตามลักษณะที่เพิ่มขึ้น จากในตัวอย่าง จะเห็นว่า เพิ่มทีละ 4, 6, 8 ซึ่งลักษณะดังกล่าวนักเรียนสามารถคาดการณ์ได้ว่า ค่าของลำดับต่อไปจะเพิ่มขึ้นเป็น 10 , 12 ไป เรื่อย ๆ ถ้าแบบรูปกำหนดให้ขยายแบบรูปนักเรียนก็สามารถขยายต่อไปได้ โดยบวกเพิ่มขึ้น ทำให้ได้แบบรูปเป็น 2, 6, 12, 20, 30, 42, ... เป็นต้น แต่เมื่อถึงขั้นของการสร้างกรณีทั่วไป นักเรียนไม่สามารถสร้างได้ เนื่องจากไม่สามารถเชื่อมความสัมพันธ์ได้เลย เช่นเดียวกับแบบรูปในลักษณะ อื่น ๆ นักเรียนกลุ่มนี้สามารถอธิบายแบบรูปและขยายแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปได้ ซึ่งนักเรียนกลุ่มนี้ เป็นนักเรียนส่วนใหญ่ของห้อง

นักเรียนกลุ่มที่ 3 นักเรียนกลุ่มนี้มีความมั่นใจในการอธิบายเพื่อสื่อสิ่งที่คิดได้อย่างมั่นใจในความคิดของตน มีวิธีการในการอธิบายแบบรูป ขยายแบบรูป และการสร้างกรณีทั่วไปได้ดี และมีวิธีการคิดที่หลากหลาย แต่ละคนมีวิธีการเป็นของตนเอง แต่ถือว่านักเรียนกลุ่มนี้มีเพียงส่วนน้อยของห้อง นักเรียนกลุ่มนี้มีความสามารถถึงขั้นของการสร้างกรณีทั่วไป ลักษณะการสร้างกรณีทั่วไปมีวิธีการคิดแบ่งได้เป็น 3 วิธี

วิธีการที่ 1 นักเรียนใช้การพิจารณาความสัมพันธ์ของแบบรูป คือนำค่าของแต่ละลำดับมาเขียนในตารางหรือเขียนเรียงเองในกระดาษเขียนตอบ จากนั้นพยายามมองความสัมพันธ์ที่จะสามารถเกิดได้ระหว่างลำดับที่กับค่าของลำดับที่ โดยการแยกจำนวนที่เท่ากันออกมาในรูปของการบวก หรือลบ จากนั้นสังเกตค่าที่เหลือ นำมาสร้างความสัมพันธ์กับลำดับที่ ให้แต่ละลำดับมีค่าของการจัดเรียงเป็นชุดแบบรูปเดียวกัน

กำหนดแบบรูป 5, 8, 11, 14, . . . จงหากรณีทั่วไปของแบบรูปชุดนี้

ลำดับที่	ค่าของลำดับที่		
1	5	=	3 + 2 = 3(1) + 2
2	8	=	6 + 2 = 3(2) + 2
3	11	=	9 + 2 = 3(3) + 2
4	14	=	12+ 2 = 3(4) + 2
$\vdots$			$\vdots$
n			$3n+2$

วิธีการที่ 2 นักเรียนพิจารณาการเพิ่มหรือลดของแบบรูปว่าเพิ่มหรือลดครั้งละเท่ากันหรือไม่ จากนั้นสร้างกรณีทั่วไปตามขั้นตอนที่สรุป 4 ขั้นตอนข้างต้น ดังนี้

กำหนดแบบรูป 5, 8, 11, 14, . . . จงหากรณีทั่วไปของแบบรูปชุดนี้

วิธีการคิด หาผลต่างระหว่างค่าของลำดับที่ $\underbrace{5,\ 8}_{3}\ \underbrace{,\ 11}_{3}\ \underbrace{,\ 14}_{3}, \ldots$

ผลต่างเท่ากัน ดังนั้น กรณีที่ n เท่ากับ $3n+C$ เมื่อ C คือจำนวนใด ๆ

แทนค่าในลำดับที่ 1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 5 จะได้ $3(1)+C = 5$

แก้สมการ ได้ $C = 2$ ดังนั้น ได้กรณีทั่วไป เท่ากับ $3n+2$

วิธีการที่ 3 นักเรียนใช้วิธีการ แยกตัวประกอบ นั่นคือ แบบรูปที่กำหนดมีผลต่างระหว่างค่าของแต่ละลำดับไม่เท่ากัน ซึ่งนักเรียนใช้วิธีการมอง ๆ พิจารณาความสัมพันธ์ และแยกตัวประกอบเพื่อสังเกตจำนวน ตัวอย่าง เช่น

ลำดับที่	ค่าของลำดับที่				
1	2	=	2	=	2^1
2	4	=	2×2	=	2^2
3	8	=	$2\times2\times2$	=	2^3
4	16	=	$2\times2\times2\times2$	=	2^4
$\vdots$			$\vdots$		
n			2^n		

เป็นต้น

จากผลการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 3 กลุ่ม พบว่า ลักษณะการเขียนตอบนั้นส่วนใหญ่ตรงกับความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน กล่าวคือ นักเรียนกลุ่มที่1 ตอบคำถามได้แต่ต้องมีคำถามนำ และไม่มีความสามารถในการเขียนอธิบายสิ่งที่ตัวเองคิด กลุ่มที่ 2 นักเรียนสามารถอธิบายลักษณะของแบบรูป ความสัมพันธ์ และขยายแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ แต่นักเรียนมีความสามารถในการอธิบายสิ่งที่ตนเองเขียนได้คล่องแคล่ว และ กลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มที่นักเรียนมีความสามารถในการวิเคราะห์ อธิบายแบบรูป ความสัมพันธ์ และสามารถสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปได้ โดยมีวิธีการคิดที่หลากหลาย แต่ละคนมีวิธีการคิดเป็นของตนเอง สามารถอธิบายสิ่งที่ตนเองคิด และเขียนได้อย่างคล่องแคล่ว มีหลักการ และมั่นใจในการตอบคำถาม

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีวัตถุประสงค์ของการวิจัยดังนี้

1. เพื่อศึกษาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด
3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดกับการเรียนแบบปกติ
4. เพื่อศึกษาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานมัธยมศึกษา เขต 11 จังหวัดสุราษฎร์ธานี

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานมัธยมศึกษา เขต 11 จังหวัดสุราษฎร์ธานี เป็นโรงเรียนมัธยมขนาดกลาง เปิดสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีห้องเรียนทั้งหมด 30 ห้องเรียน แบ่งเป็นระดับชั้นเรียนละ 5 ห้องเรียน ผู้วิจัยเลือกทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งมีทั้งหมด 5 ห้องเรียน มีนักเรียนเฉลี่ยห้องละ 36 คน ทุกห้องจัดชั้นเรียนคละระดับความสามารถที่วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากคะแนนสอบเข้า

ผู้วิจัยเลือกนักเรียนกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยพิจารณาคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2555 ของนักเรียนทั้ง 5 ห้อง มาหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) แล้วผู้วิจัยเลือกนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 2 ห้องเรียน ที่มีค่า

มัชฌิมเลขคณิต ($\bar{x}$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ใกล้เคียงกัน ได้แก่ ห้อง ม.1/1 และห้อง ม.1/2 นำมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F – test) พบว่าความแปรปรวนไม่แตกต่างกัน และนำมาทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนสอบปลายภาคเรียนที่ 1 ด้วยค่าที (t – test) พบว่ารายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างต่างกัน จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้อง ทำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียน และทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ก่อนเรียน นำผลคะแนนไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F – test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่าความแปรปรวนของทั้งสองห้องไม่แตกต่างกัน แล้วผลคะแนนไปทดสอบความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตด้วยค่าที (t – test) พบว่า ค่ามัชฌิมเลขคณิตไม่แตกต่างกัน แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความ สามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน หลังจากนั้นผู้วิจัยได้จับสลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผลปรากฏว่า นักเรียนชั้น ม.1/1 เป็นกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ และนักเรียนชั้น ม.1/2 เป็นกลุ่มทดลอง ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แบ่งเป็น 2 ชนิด คือ

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ประกอบด้วย

1.1 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด

1.2 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ครอบคลุมสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้เขียนแผนการจัดการเรียนรู้โดยมีองค์ประกอบคือ มาตรฐานการเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ สาระสำคัญ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ สำหรับกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลอง ผู้วิจัยแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ ขั้นเตรียมความพร้อม ขั้นจัดกิจกรรม และ ขั้นสรุปและสะท้อนความคิด และกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มควบคุม ผู้วิจัยแบ่งเป็น ขั้นนำ ขั้นสอนและปฏิบัติกิจกรรม และขั้นสรุป สิ่งที่มีความแตกต่างกันอย่างชัดเจน คือขั้นจัดกิจกรรม แผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนใช้เวลาสอนไม่เท่ากัน รวมแผนการจัดการเรียนรู้มีทั้งหมดจำนวน 11 แผน ใช้ในการทดลองสอน 18 คาบ เป็นเวลาทั้งสิ้น 4 สัปดาห์ กับ 4 วัน โดยได้นำแผนการจัดการเรียนรู้ทั้งหมดไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมกับเนื้อหา การลำดับเนื้อหา และความสอดคล้องขององค์ประกอบต่าง ๆ ในแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข และนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

2.1 แบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน

ผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต โดยใช้แนวคิดของสมาคมผู้สอนคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 37) โดยพิจารณาลักษณะที่แสดงออกถึงการคิดเชิงพีชคณิตใน 4 ลักษณะ คือ 1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และ 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย ลักษณะแบบวัดเป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 20 ข้อ ซึ่งแบ่งเป็นข้อสอบของแต่ละลักษณะการคิดละ 5 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน ซึ่งครอบคลุมเนื้อหาและตัวชี้วัดตามตารางวิเคราะห์หลักสูตรที่ได้สร้างขึ้น ซึ่งจากการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดพบว่า แบบวัดความ สามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับก่อนเรียน มีค่าความเที่ยง เท่ากับ 0.75 มีค่าความยาก (P) 0.32 – 0.70 มีค่าอำนาจจำแนก (r) 0.23 – 0.73 และแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ฉบับหลังเรียน มีค่าความเที่ยง เท่ากับ 0.82 มีค่าความยาก (P) 0.25 – 0.61 และมีค่าอำนาจจำแนก (r) 0.23 – 0.68

2.2 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน

ผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ตามกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของโพลยา (Polya, 1957: 4 – 40) เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน ซึ่งในแต่ละข้อจะประกอบด้วย 4 ข้อย่อย คือ ขั้นทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา (2 คะแนน) ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (2 คะแนน) ขั้นดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ แบ่งการให้คะแนนเป็น 2 ตอน คือ ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา (2 คะแนน) และขั้นสรุปคำตอบ (1 คะแนน) และขั้นสุดท้าย ขั้นตรวจสอบคำตอบ (2 คะแนน) โดยครอบคลุมเนื้อหาและตัวชี้วัดตามตารางวิเคราะห์โครงสร้างของข้อสอบตามหลักสูตร ซึ่งจากการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดพบว่า แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน มีค่าความเที่ยง เท่ากับ 0.84 มีค่าความยาก (P) 0.41 – 0.64 มีค่าอำนาจจำแนก(r) 0.33 – 0.63 และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียนมีค่าความเที่ยง เท่ากับ 0.86 มีค่าความยาก(P) 0.39 – 0.63 และมีค่าอำนาจจำแนก(r) 0.28 – 0.60

2.3 แบบสัมภาษณ์การคิดเชิงพีชคณิต

เป็นแนวคำถามที่ใช้ประกอบแบบสัมภาษณ์ เป็นแนวคำถามที่ใช้ประกอบการสัมภาษณ์แบบเจาะลึก (In-depth Interview) เกี่ยวกับลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในแบบวัดความสามารถในการ

คิดเชิงพีชคณิตหลังเรียน ที่ได้ให้นักเรียนทุกคนได้ทำเหมือนกัน ซึ่งการสร้างแนวคำถามนั้นผู้วิจัยได้สร้างแนวคำถาม แบ่งเป็น 4 แนวคำถามที่แตกต่างกัน ตามลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต 4 ลักษณะ คือ 1) แนวคำถามสำหรับการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป 2) แนวคำถามสำหรับการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต 3) แนวคำถามสำหรับการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และ 4) แนวคำถามสำหรับการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองทั้งกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยมีขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

1. ขั้นเตรียมการ

1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว รายวิชาพื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

1.2 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

1.3 ผู้วิจัยทำหนังสือขอความร่วมมือในการทำวิจัยจากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เพื่อขอความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลถึงผู้อำนวยการโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุนวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี

2. ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

2.1 ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียน และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน กับกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

2.2 ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่เตรียมไว้ โดยผู้วิจัยทำการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 4 คาบต่อสัปดาห์ เป็นเวลา 4 สัปดาห์ กับ 4 วัน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2555 โดยสอนตามชั่วโมงปกติที่ทางโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยาได้จัดไว้สำหรับการเรียนการสอนในเนื้อหา เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 3 คาบต่อสัปดาห์ และได้ขออนุญาตใช้ชั่วโมงค้นคว้าของนักเรียนเพิ่มอีก 1 คาบต่อสัปดาห์ โดยเริ่มทดลองสอนตั้งแต่วันที่ 3 มกราคม 2556 ถึงวันที่ 8 กุมภาพันธ์ 2556

2.3 เมื่อดำเนินการทดลองสอนตามเนื้อหาที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ ครบ 18 คาบแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียน และแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กับกลุ่ม

ตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูล โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for Social Science: SPSS) มีการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1) วิเคราะห์คะแนนของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองฉบับหลังเรียน โดยคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิต ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละเปรียบเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 50 ของคะแนนสอบทั้งฉบับ

2) เปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดของกลุ่มทดลอง โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3) เปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตนักเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งใช้คะแนนแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียน โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

4) เปรียบเทียบคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดของกลุ่มทดลอง โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

5) เปรียบเทียบคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นักเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งใช้คะแนนของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียน โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6) วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพเพิ่มเติม โดยนำการเขียนแสดงขั้นตอนการคิดหาคำตอบของนักเรียน หลักฐาน ร่องรอย จากการทำแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนของนักเรียนที่เรียนผ่านการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มาวิเคราะห์ โดยจำแนกนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ตามลักษณะของการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนเขียนแสดง แล้วเลือกนักเรียนจำนวนหนึ่งที่ผู้วิจัยวิเคราะห์แล้วเห็นว่ามีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนของแต่ละกลุ่มที่จำแนกไว้มาสัมภาษณ์เพื่อหาข้อมูลเชิงเจาะลึกถึงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

1. สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 สรุปผลการวิจัยมีดังนี้

1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่าร้อยละ 50 เทียบกับคะแนนจากแบบวัดทั้งฉบับ

2) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4) นักเรียนกลุ่มทดลองนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิตที่หลากหลาย เช่น ตาราง แผนภาพ กราฟ นิพจน์ สมการ และ การเขียนอธิบาย และความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มทดลองมีพัฒนาการที่ดีขึ้นทั้ง 4 ลักษณะการคิด โดยที่ ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณของนักเรียนมีพัฒนาการสูงที่สุด รองลงมาคือความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต ส่วนความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป และความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย นักเรียนมีพัฒนาการขึ้นเล็กน้อย

2. อภิปรายผลการวิจัย

1. จากผลการศึกษาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด พบว่านักเรียนมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตสูงกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถทั้งฉบับ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการคิดแบบฮิวริสติกส์ทำให้นักเรียนได้คิดและค้นหาคำตอบด้วยตนเอง สอดคล้องกับ ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545) ที่กล่าวว่า“ฮิวริสติกส์ เป็นการสอนที่เน้นการเชื่อมโยงข้อมูลหรือแนวคิดที่สัมพันธ์กันให้อยู่ในลักษณะที่เป็นระบบ โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ต้องการเรียนรู้หรือปัญหาที่ต้องการแก้ไข การฝึกทักษะนี้เป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนอย่างมาก

โดยฝึกให้เริ่มต้นจากสิ่งง่ายไปสู่สิ่งที่ซับซ้อนมากขึ้น ทำให้สามารถนำไปแก้ปัญหาได้” ประกอบกับแนวคิดโมเดลเมธอด เป็นกลวิธีที่ช่วยให้นักเรียนสามารถตีความจากโจทย์ปัญหาหรือข้อมูลที่เป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมมากขึ้น มองเห็นปัญหาและมีวิธีการคิดที่หลากหลาย ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Yeap BanHar และคณะ (2008) ได้ทำการศึกษาเรื่อง แนวคิดโมเดลเมธอด เพื่อส่งเสริมการคิดทางพีชคณิตของนักเรียน โดยนำแนวคิดโมเดลเมธอด ในการสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนในระดับประถมศึกษาที่ประเทศสิงคโปร์ ผลการศึกษาพบว่า การสร้างและใช้แบบจำลองช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนได้เป็นอย่างดี เนื่องจากเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปธรรมอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่เป็นนามธรรม โดยนำเสนอผ่านแบบจำลองที่เป็นแบบจำลองที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพและเข้าใจความสัมพันธ์ของสิ่งโจทย์กำหนดให้ได้ดียิ่งขึ้น นอกจากนี้วิธีการดังกล่าวยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่อยู่ในหลักสูตรของโรงเรียนและเป็นวิธีที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาองค์ความรู้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ขั้นสูงด้วย ซึ่งแนวคิดการใช้แบบจำลองนี้เป็นวิธีการที่เหมาะสำหรับครูที่จะนำแนวทางดังกล่าวไปปรับใช้เพื่อเตรียมความพร้อมให้กับนักเรียนในการเรียนพีชคณิตที่เป็นทางการในระดับที่สูงขึ้น

เมื่อเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด พบว่า ความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน โดยที่คะแนนแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 16.97 คิดเป็นร้อยละ 42.43 และ คะแนนแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนของกลุ่มทดลองมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 20.80 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 52 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 1 สอดคล้องกับผลการวิจัยของ Ng Swee Fong (2004) ซึ่งได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของประเทศสิงคโปร์ ผลการศึกษา พบว่า แนวทางการพัฒนาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนมีสามวิธี คือการใช้แนวคิดโมเดลเมธอด, การวางนัยทั่วไป และ การกำกับการคิด โดยนำแนวทางดังกล่าวผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาทางพีชคณิต จะทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตได้

เมื่อพิจารณาความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต ที่ผู้วิจัยศึกษา โดยได้พิจารณาใน 4 ลักษณะ คือ 1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต และ 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่

หลากหลาย ผลปรากฏว่าคะแนนของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนสูงสุดคือ ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป โดยมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 5.26 คะแนน และความสามารถที่นักเรียนได้คะแนนต่ำสุดคือ ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ โดยมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 2.91 คะแนน จากคะแนนในแต่ละลักษณะการคิดคะแนนเต็ม 10 คะแนน และสำหรับลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่นักเรียนได้คะแนนจากแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนสูงสุดคือ ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ โดยมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 5.37 คะแนน และความสามารถที่นักเรียนได้คะแนนต่ำสุดคือ ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต โดยมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 4.91 คะแนน จากคะแนนความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตในแต่ละลักษณะมีคะแนนเต็ม 10 คะแนนเช่นเดียวกัน และเมื่อพิจารณาลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตใน 4 ลักษณะจะเห็นได้ว่า คะแนนของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนทุกลักษณะการคิดสูงกว่าก่อนเรียนทั้งสิ้น

จากผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิดของนักเรียนกลุ่มทดลองระหว่างก่อนและหลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดเพิ่มเติม โดยมีการเปรียบเทียบเป็นรายคู่ของแต่ละลักษณะการคิด ดังนี้ 1) ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนเล็กน้อย ซึ่งพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์ ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเลขคณิตของคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ซึ่งพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ซึ่งพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 4) ความสามารถในการวิเคราะห์บริบทที่หลากหลาย มีค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนก่อนเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ซึ่งพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีความสามารถในการการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เมื่อพิจารณาลักษณะความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของแต่ละลักษณะ โดยสรุปผลในรูปของพัฒนาการของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 4 ลักษณะ ผลปรากฏว่า คะแนนหลังเรียนของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตในแต่ละลักษณะสูงกว่าก่อนเรียน โดยที่ คะแนนความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณมีคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียน 22.57% คะแนนความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตมีคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียน 20% ส่วนคะแนนความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป และคะแนนความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย มีคะแนนเฉลี่ยของหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียนเล็กน้อย คิดเป็น 1.14% และ 2.57% เมื่อเทียบกับคะแนนเต็มทั้งฉบับ

จากผลดังกล่าวจะเห็นว่าความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตของกลุ่มทดลองมีพัฒนาการของความสามารถสูง ส่วนความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป และความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลายมีพัฒนาการของความสามารถที่ค่อนข้างต่ำ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดนั้น เป็นลักษณะของการจัดกิจกรรมตามแบบจำลองความคิดของเชฟฟิลด์ที่เน้นการให้นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลผ่านกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา เช่นเดียวกับแนวคิดโมเดลเมธอดเน้นการสร้างแบบจำลองเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของสถานการณ์ปัญหา ช่วยให้นักเรียนมีมุมมองในการสร้างสมการ แก้สมการและหาคำตอบได้ ซึ่งถือเป็นการส่งเสริมและสนับสนุนโดยตรงกับ การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต และการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ และในทางกลับกัน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดนั้นอาจไม่เอื้อหรือไม่ได้สนับสนุนมากพอกับการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไปและการวิเคราะห์บริบทที่หลากหลาย ซึ่งทั้งสองลักษณะของการคิดดังกล่าวเน้นถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของผู้วิจัยเองอาจไม่สนับและส่งเสริมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มากพอด้วย

และจากผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด และกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ พบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตสูงกว่านักเรียนทีได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ นั่นคือ นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 20.80 คะแนน มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่า 4.67 และ นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ18.39 คะแนน มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.83 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 2 สอดคล้องกับ Charlotte และคณะ (2007) ที่กล่าวว่า “การศึกษาแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนถือเป็นเรื่องสำคัญและจำเป็นมาก เพราะการคิดโดยเฉพาะการคิดเชิงพีชคณิตจะเป็นเครื่องมือสำหรับการทำความเข้าใจลักษณะเนื้อหาที่เป็นนามธรรมได้เป็นอย่างดี จากงานวิจัยต่าง ๆ ได้มีแนวทางในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตที่หลากหลาย และแนวทางการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดเป็นแนวทางหนึ่งที่เป็นเครื่องมือในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต เนื่องจากเป็นเครื่องมือที่ทำให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลที่มีกับปัญหาที่ต้องการ และสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Lisa Englard (2010) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยได้เปรียบเทียบผลการทดสอบของนักเรียน 3 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองที่จัดการเรียนการสอนตามแนวคิดโมเดลเมธอด กลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และ กลุ่มนักเรียนอื่น ๆ ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีการพัฒนาการเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสูงกว่า นักเรียนที่เหลืออีก 2 กลุ่ม ซึ่งการใช้โมเดลเมธอด ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ลิซ่าทำการศึกษานี้ ถือเป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตผ่านกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั่นเอง

เมื่อเปรียบเทียบรายคู่ตามลักษณะของความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตที่ผู้วิจัยศึกษาใน 4 ลักษณะ โดยเปรียบเทียบคะแนนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดและกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ มีดังนี้ 1) ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไป พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดและกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามปกติ มีความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไปไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ ซึ่งนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 4) ความสามารถในการวิเคราะห์บริบทที่หลากหลาย พบว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดและกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติมีความสามารถในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลายไม่แตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากผลการเปรียบเทียบความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตตามลักษณะการคิดรายคู่ดังกล่าว นั่นคือ มีลักษณะการคิด 2 ลักษณะที่ระดับความสามารถของนักเรียนกลุ่มทดลองสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม คือ ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต และความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ เชิงปริมาณ และมีลักษณะการคิด 2 ลักษณะที่ระดับของความสามารถของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกัน นั่นคือ ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูปความสัมพันธ์และการสร้างกรณีทั่วไปและความสามารถในการวิเคราะห์บริบทที่หลากหลาย จากผลดังกล่าวอาจมีความสอดคล้องกับผลอภิปรายจากการเปรียบเทียบความสามารถของนักเรียนกลุ่มทดลองก่อนเรียนและหลังเรียน

เมื่อพิจารณาถึงลักษณะการนำเสนอวิธีคิดเชิงพีชคณิต ซึ่งผู้วิจัยศึกษาจากการเขียนตอบในแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียนทั้ง 4 ลักษณะของนักเรียนกลุ่มทดลองพบว่า 1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป ในตัวบ่งชี้การคิดย่อย 1.1) การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการขยายแบบรูป ส่วนใหญ่นักเรียนนำเสนอวิธีคิดด้วยการเขียนอธิบาย คิดเป็น 41.71% และ 1.2) การสร้างกรณีทั่วไป ส่วนใหญ่นักเรียนนำเสนอวิธีคิดด้วยการใช้ตาราง คิดเป็น 31.43% 2) การนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต นักเรียนส่วนใหญ่นำเสนอวิธีคิดด้วยการใช้แผนภาพ คิดเป็น 22.87% 3) การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ ลักษณะการคิดนี้ผู้วิจัยนำเสนอพฤติกรรมการคิดโดยจำแนกเป็น 2 รูปแบบ คือพิจารณาการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และ พิจารณาการนำเสนอวิธีคิด ซึ่งพบว่า การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นส่วนใหญ่นักเรียนใช้สมการมากที่สุด คิดเป็น 36% และการนำเสนอวิธีคิดนั้น ส่วนใหญ่นักเรียนใช้แผนภาพในการนำเสนอ

มากสุดคิดเป็น 41.14% 4) การวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย นักเรียนส่วนใหญ่ใช้การเขียนอธิบายเพื่อนำเสนอวิธีคิดในการให้เหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบมากที่สุด คิดเป็น 68% เมื่อเทียบกับจำนวนนักเรียนของกลุ่มทดลองทั้งกลุ่ม

และจากการพิจารณาพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดกับการแก้ปัญหาโจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ดีมากและเกณฑ์ที่ต้องปรับปรุง ไม่นิยมใช้แนวคิดโมเดลเมธอดเป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา ซึ่งนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีมากให้เหตุผลว่า สามารถที่จะอ่านโจทย์แล้วเข้าใจสร้างสมการ และแก้สมการหาคำตอบได้เลย โดยไม่จำเป็นต้องวาดแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ต้องปรับปรุงให้เหตุผลว่า ไม่สามารถสร้างแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอดได้เพราะยากต่อการวาดเกินไป ส่วนนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่อยู่ในเกณฑ์ดีและปานกลาง พบว่า นิยมใช้การวาดแบบจำลองตามแนวคิดโมเดลเมธอด โดยให้เหตุผลว่า ช่วยในการทำความเข้าใจโจทย์ปัญหาให้สามารถสร้างสมการได้ง่ายขึ้น และมีความผิดพลาดน้อยกว่าการอ่านโจทย์ปัญหาแล้วสร้างสมการเลย เพราะส่วนใหญ่การแก้โจทย์ปัญหาที่ไม่ถูกต้องไม่ได้อยู่ที่ขั้นของการแก้สมการ แต่อยู่ที่ขั้นของการสร้างสมการให้ถูกต้องมากกว่า

2. จากผลการศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด พบว่านักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถทั้งฉบับ อาจเป็นเพราะว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด เป็นกระบวนการที่ช่วยให้นักเรียนได้เข้าใจในกระบวนการคิดเพื่อวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา สร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล และค้นหาวิธีการที่หลากหลายในการหาคำตอบนั้น ๆ ได้ ซึ่งสอดคล้องกับ Novak และ Gowin (1984: 48) ที่กล่าวว่า “แนวคิดแบบฮิวริสติกส์ เป็นวิธีการต่าง ๆ ที่ใช้สำหรับการแก้ปัญหาหรือช่วยให้เกิดความเข้าใจกระบวนการค้นหาคำตอบด้วยตนเอง เพื่อให้เข้าใจโครงสร้างความรู้ และทราบถึงว่าความรู้ถูกสร้างขึ้นมาอย่างไร” และสอดคล้องกับงานวิจัยของ Yeap Banhar และคณะ (2008: 198 – 203) ที่ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดโมเดล เมธอดในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่า การใช้โมเดลเมธอด จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเนื่องจากเป็นวิธีการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปธรรมอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลในโจทย์ปัญหาที่เป็นนามธรรม โดยนำเสนอผ่านแบบจำลองที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพและเข้าใจความสัมพันธ์ของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ยิ่งขึ้น อีกทั้งเป็นวิธีที่ส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนให้สูงขึ้นด้วย

เมื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 1 นั่นคือ คะแนนแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียนมีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 16.77 คะแนน และคะแนนแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียน มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 24.06 คะแนน จากคะแนนเต็ม 45 คะแนน ซึ่งผลการวิเคราะห์ดังกล่าว สอดคล้องกับผลการวิจัยของ Yen (1985: 1) ได้ศึกษาในเรื่องการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา โดยการใช้ฮิวริสติกส์ในการแนะนำวิธีแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และการวัดระดับความสามารถของตนเอง ตัวอย่างประชากรที่ใช้ในการศึกษานักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และ 3 ตัวอย่างประชากรจำนวน 18 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แบบประเมินความสามารถในการเรียนรู้ของตนเอง ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดย ฮิวริสติกส์มีความสามารถในการแก้ปัญหาสูงขึ้น และมีทัศนคติต่อการเรียนดีขึ้น เนื่องจากฮิวริสติกส์ช่วยในการช่วยพัฒนาระดับการเรียนรู้และค้นหาข้อมูลในการศึกษาหาความรู้ใหม่ ๆ ได้ด้วยของตนเอง

และจากผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด และกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานข้อที่ 2 โดยที่ผลการวิเคราะห์พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 24.06 คะแนน มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5.44 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 20.61 คะแนน และมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 4.29 ผลการวิเคราะห์ดังกล่าวสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Lisa Englard (2010) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้แนวคิดโมเดลเมธอดในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยได้เปรียบเทียบผลการทดสอบของนักเรียน 3 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลองที่จัดการเรียนการสอนตามแนวคิดโมเดลเมธอด กลุ่มนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ และ กลุ่มนักเรียนอื่น ๆ ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีการพัฒนาการเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสูงกว่า นักเรียนที่เหลืออีก 2 กลุ่ม และสอดคล้องกับผลการวิจัยของ นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552) ที่ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

ผลปรากฏว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

1. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยนำแนวคิดโมเดลเมธอด ไปประยุกต์ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จะมีความเหมาะสมในเฉพาะเนื้อหาที่เกี่ยวกับพีชคณิต เช่น สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร หรือในเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เป็นโจทย์ปัญหาที่มีตัวแปรเดียว เช่น โจทย์ปัญหาทศนิยม เศษส่วน อัตราส่วน และร้อยละ เป็นต้น

2. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยนำแนวคิดโมเดลเมธอดมาประยุกต์ในการสอนนั้น ครูผู้สอนต้องเพิ่มเวลาเรียนแก่นักเรียนเพื่อศึกษาแนวทางการใช้แบบจำลองแต่ละแบบของแนวคิดโมเดลเมธอดเพิ่มเติม เพื่อให้นักเรียนสามารถเลือกนำแบบจำลองแต่ละแบบมาประยุกต์ใช้แก้โจทย์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง คล่องแคล่ว และมีความเหมาะสมในแต่ละลักษณะของโจทย์ปัญหานั้น ๆ

3. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดมาประยุกต์ใช้ ครูผู้สอนไม่ควรเน้นการสอนโดยใช้กลวิธีใดวิธีหนึ่ง การสอนตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์เป็นลักษณะการสอนที่เน้นการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยแนวทางที่หลากหลาย ซึ่งแนวคิดของแนวคิดโมเดลเมธอดเป็นกลวิธีหนึ่งในหลาย ๆ กลวิธีที่ครูผู้สอนเสริมให้แก่นักเรียนเท่านั้น อยู่ที่ตัวนักเรียนว่าจะสามารถเลือกกลวิธีใดในการแก้โจทย์ปัญหาที่มีความเหมาะสมของแต่ละปัญหา

4. เนื่องจากขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดต้องใช้เวลาในการทำกิจกรรมเพื่อให้ครบทุกขั้นตอน ครูผู้สอนควรมีความยืดหยุ่นในการปรับใช้แผนการจัดการเรียนรู้ให้มีความเหมาะสมกับสภาพจริงในชั้นเรียน

5. ครูผู้สอนควรบันทึกปัญหาหลังสอนหลังจากการสอนทุกคาบอย่างละเอียดเพื่อนำข้อมูลมาใช้ในการปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในครั้งต่อไป

ข้อเสนอแนะสาหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และตามแนวคิดโมเดลเมธอดในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์อื่น ๆ นอกจากเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ผู้วิจัยทำการศึกษา เช่น สมการเชิงเส้นสองตัวแปร เนื่องจากลักษณะเนื้อหามีความเป็นนามธรรมสูง

การนำแนวทางทั้งสองแนวทางดังกล่าวไปประยุกต์ใช้จะทำให้นักเรียนสามารถปรับเปลี่ยนลักษณะที่เป็นนามธรรมเป็นรูปธรรมเพื่อทำความเข้าใจในเนื้อหาได้มากขึ้น

2. การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยในห้องเรียนที่คละความสามารถ ซึ่งมีทั้งนักเรียนที่มีระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีมาก ดี ปานกลาง และต้องปรับปรุง ดังนั้นผู้วิจัยที่สนใจเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ควรทดลองศึกษาวิจัยกับกลุ่มนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนที่ดีและดีมาก กลุ่มนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนปานกลาง หรือ กลุ่มนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนที่ต้องปรับปรุง เพื่อจะได้ศึกษาวิจัยว่า แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความเหมาะสมในการพัฒนาความสามารถกับนักเรียนกลุ่มใดมากที่สุด

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กษมา วุฒิสารวัฒนา. 2548. ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยเน้นการเรียนรู้จากประสบการณ์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 จังหวัดพะเยา. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กระทรวงศึกษาธิการ. 2551. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.

กำจร มุนีแก้ว. 2539. ผลของการสอนโดยใช้เทคนิคการคิดออกเสียงที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิต สังกัดสำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ**.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ขอบใจ สาสิทธิ์. 2545. ผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต.สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

งามตา กมลวรเดช. 2536. ผลของการฝึกกลวิธีคำถามนำที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4**.** วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. ภาควิชาจิตวิทยา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

จิตติมา คงเมือง. 2554. การส่งเสริมความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการวาดแบบจำลองของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

ณัชชา กมล. 2548. กรอบแสดงการคิดเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ดวงเดือน อ่อนน่วม. 2536. โจทย์ปัญหา ปัญหาโจทย์. วารสารคณิตศาสตร์. 37 (พฤศจิกายน-ธันวาคม): 432-433.

ดวงทิพย์ เพ็ชรนิล. 2544. <u>ผลของการใช้กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีต่อการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกและผลสัมฤทธิ์ทาการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 48 – 49.

ทิศนา แขมมณีและคณะ. 2544. <u>วิทยาการด้านการคิด</u>. กรุงเทพฯ: เดอะมาสเตอร์กรุ๊ปแมเนจเม้นท์.

ทิศนา แขมมณี, นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์ และ ศรินธร วิทยะสิรินันท์. 2547. <u>มิติของการคิด: กรอบแนวคิดเพื่อพัฒนาการคิดของเด็กและเยาวชนไทย</u>. (เอกสารประกอบการประชุมเชิงปฏิบัติการ เรื่องการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด). กรุงเทพฯ: คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. อัดสำเนา.

นิตยา โสรีกุล. 2547. <u>ผลของการใช้การสอนแนะในการเรียนรู้ด้วยกรณีศึกษาบนเว็บที่มีต่อการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีรูปแบบการคิดต่างกัน</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาเทคโนโลยีและการสื่อสารการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 90.

นุตริยา จิตตารมย์. 2548. <u>ผลของการสอนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้กลวิธี STAR ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จังหวัดสุราษฎร์ธานี</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

แน่งน้อย ทองธวัช. 2527. <u>ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านเหตุผลเชิงถ้อยคำและความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 16.

นวลจันทร์ ผมอุดทา. 2545. <u>ผลของการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบ SSCS ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 58 – 59.

นวลทิพย์ นวพันธุ์. 2545. <u>ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

บุญเพ็ญ บุบผามาตะนัง. 2542. บัญญัติ 9 ประการของการพัฒนาการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์. <u>วารสารวิชาการ 2</u>, 2 (กุมภาพันธ์ 2542): 40-43.

เบญจมาศ ฉิมมาลี. 2550. <u>ผลของการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้คำถามระดับสูงประกอบแนวทางพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ของฟรายวิลลิกที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปฐมพร บุญลี. 2545. <u>การสร้างแบบฝึกหัดทักษะเพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3</u>. สารนิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ประกาย วิโรจน์กุล. 2532. <u>ผลของปัจจัยนำเข้าบางประการและสภาพการเรียนการสอนต่อความสามารถในการคิดแก้ปัญหาของนักศึกษาพยาบาลในระบบการศึกษาพยาบาลศาสตร์ที่เน้นชุมชน</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.

ประสาท อัครปรีดา. 2547. <u>สารัตถะจิตวิทยาการศึกษา</u>. พิมพ์ครั้งที่ 4. มหาสารคาม: โครงการตำราคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม: 100.

ประเสริฐ แสงสุมาตย์. 2533. <u>การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง บทประยุกต์ โดยใช้วิธีสอนแบบเทคนิค 4 คำถาม กับวิธีสอนตามปกติ</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. 2538. <u>การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ การพัฒนาทักษะการคิดคำนวณของนักเรียนระดับประถมศึกษา</u>. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. 2544. <u>กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิดสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทร์วิโรฒ.

พรทิพา โสกัณทัต. 2552. <u>การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง การประยุกต์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวด้วยกลวิธีที่หลากหลาย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสันทรายวิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่</u>. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.

พิชากร แปลงประสพโชค. 2540. <u>การพัฒนาหลักสูตรเรขาคณิตสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. 2544. <u>การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์</u>. กรุงเทพฯ : คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ยุพิน พิพิธกุล. 2530. <u>การสอนคณิตศาสตร์</u>**.** กรุงเทพฯ: ภาควิชาการมัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 52.

ยุพิน พิพิธกุล. 2542. <u>การเรียนการสอนคณิตศาสตร์</u>. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.

ราตรี เกตบุตตา. 2546. <u>ผลของการเรียนแบบใช้ปัญหาเป็นหลักต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รสอุบล ธรรมพานิชวงค์. 2545. <u>ผลของการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รุ่งทิวา คนการณ์. 2549. <u>การใช้กิจกรรมการแก้ปัญหาปลายเปิดเพื่อพัฒนาหลักสูตรที่เน้นกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

รุ่งทิวา นาบำรุง. 2550. <u>วิถีธรรมชาติแห่งการคิดเชิงคณิตศาสตร์เรื่องการคูณและการหารของเด็กที่มีอายุตั้งแต่ 7-10 ปี</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

วิชาการ, กรม. กระทรวงศึกษาธิการ. 2544. <u>การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์</u>. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

วิชาการ, กรม. กระทรวงศึกษาธิการ. 2544. <u>หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544</u>**.** กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว).

วินัย ดำสุวรรณ. 2529. <u>ความสัมพันธ์ระหว่างความคิดสร้างสรรค์ทางวิทยาศาสตร์กับความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. ภาควิชาประถมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 28.

วิษณุ นภาพันธ์. 2551. <u>การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต. สาขาคณิตศาสตรศึกษา. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สำนักงานทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. 2548**.** <u>ผลการสอบวัดคุณภาพระดับชาติ ปี 2547</u>[online]. Available from: http://bet.obec.go.th/gat_sat/bet_47.pdf[2 ตุลาคม 2555]

สำนักงานทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. 2554. ประกาศผลสอบ O-Net ป.6 และ ม.3 ปีการศึกษา 2554 [ออนไลน์]. แหล่งที่มา: http://www.kruthai.info/view.php?article_id=743 [5 กรกฎาคม 2555].

สำนักงานทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. 2552. สรุปผลการประเมินคุณภาพการศึกษาระดับนานาชาติและปัจจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อเสนอแนะแนวทางการยกระดับคุณภาพการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และการอ่าน [ออนไลน์]. แหล่งที่มา: http://siteresources.worldbank.org [5 กรกฎาคม 2555].

สำนักงานรับรองมาตรฐานและประเมินคุณภาพการศึกษา. 2547. มาตรฐานการศึกษา ตัวบ่งชี้และเกณฑ์การพิจารณาเพื่อการประเมินคุณภาพภายนอก ระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2547. กรุงเทพฯ: กลุ่มงานประเมินคุณภาพการศึกษา.

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. 2544. สร้างสรรค์นักคิด: คู่มือการจัดการศึกษาสำหรับผู้ที่มีความสามารถพิเศษด้านทักษะความคิดระดับสูง. กรุงเทพฯ: รัตนพรชัย.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน.กระทรวงศึกษาธิการ. 2546. คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ศรีเมืองการพิมพ์: 104 – 106.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. กระทรวงศึกษาธิการ. 2550. ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. 2551. รายงานการประเมินผลการเรียนนานาชาติ PISA 2006 ความรู้และสมรรถนะทางวิทยาศาสตร์สำหรับโลกวันพรุ่งนี้. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

สมจิตร เพชรผา. 2544. การพัฒนาชุดการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์แบบฮิวริสติกส์ เรื่อง สมการและอสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สมเดช บุญประจักษ์. 2540. การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สมเดช บุญประจักษ์. 2547. แนวคิดในการพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์. วารสารคณิตศาสตร์ฉบับเฉลิมพระเกียรติ 72 พรรษา สมเด็จพระนางเจ้าพระบรมราชินีนาถ.

สมเดช บุญประจักษ์. 2550. การแก้ปัญหา (Problem Solving). วารสารคณิตศาสตร์ 51, 562-564 (กุมภาพันธ์-เมษายน 2550): 71 – 73.

สมศักดิ์ โสภณพินิจ. 2543. ยุทธวิธีการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ (กับการสอน). วารสารคณิตศาสตร์. (พฤษภาคม-กรกฎาคม 2543): 44.

สมศักดิ์ โสภณพินิจ. 2547. ยุทธวิธีการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ (กับการสอน). วารสารคณิตศาสตร์ ฉบับเฉลิมพระเกียรติ 72 พรรษา สมเด็จพระนางเจ้าพระบรมราชินีนาถ.

สิริพร ทิพย์คง. 2536. การแก้ปัญหา. เอกสารคำสอนวิชา158522: ทฤษฎีและวิธีสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สุพัตรา จอมคำสิงห์ .2552. ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างงานที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต.สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุพัตรา ผาติวิสันติ์. 2535. การเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถทางการคำนวณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีแบบการเรียนต่างกัน. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุภนันท์ เสถียรศรี. 2536. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ การคิดอย่างมีเหตุผลของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนโดยใช้แบบฝึกกิจกรรมการคิดกับการสอนตามคู่มือครู. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, วิชาเอกการมัธยมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุรัช อินทสังข์. 2545. เล่าสู่กันฟังเรื่องโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์. วารสารการศึกษาวิทยาศาสตร์คณิตศาสตร์และเทคโนโลยี 30 (120 กันยายน-ตุลาคม): 53-54.

สุรางค์ โค้วตระกูล. 2548. จิตวิทยาการศึกษา. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่ง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: 109.

อนันต์ โพธิกุล. 2543. การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอบแบบบูรณาการเชิงวิธีการกับการสอนตามคู่มือครู. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, สาขาวิชาการมัธยมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร: 77 – 84.

อเนก จันทรจรูญ. 2545. การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้ชุดการสอน. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, คณะศึกษาศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.

อรุณี ระย้าแก้ว. 2539. การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นทักษะการคิดแบบฮิวริสติกส์ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ อัตราส่วน ร้อยละ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนกระทู้วิทยา จังหวัดภูเก็ต. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

อัมพร ม้าคนอง. 2553. ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ. ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาษาอังกฤษ

Adams, S. 1977. Teaching Mathematics. New York: Harper & Raw.

Adams, S; Leslie E; and Beeson, B.F. 1977. Teaching Mathematics with Emphasis in the Diagnostic Approach. New York : Harper & Row.

Armstrong, T. 1998. Awakening Genius in the Classroom. VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Anderson, K. B., and Pingry, R. E. 1973. Problem-Solving in Mathematics; Its theory And practice. Washington, D.C. The National Council of Teachers of Mathematics.

Ang, S. 2008. Cultural intelligence and offshore outsourcing success: A framework of firm-level intercultural capability. Decision Sciences, 39, 3: 33-358.

Atkinson, R. K.,et al. 1961. Introduction to Psychology. New York: Harcourt Brace Jovanorich.

Ausburn, L. J., and Ausburn, F. B. 1978. Cognitive styles: Some information and implication for in structtional design. Education Communication and Technology Journal: 337- 354.

Ausubel,D.P, 1968. Education Psychology: A Cognitive View. NewYork: Holt, Rinehart and Winston.

Baroody, A. J. 1993. Problem Solving, Reasoning and Communicating,K-8 :Helping Children Think Mathematically. New York: Macmillan.

Beckmann, S. 2004. Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4–6 Texts Used in Singapore. The Mathematics Educator. 14, 1: 42–46.

Bednarz, N., & Janvier, B. 1996. Emergence and development of algebra as a Problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching: 115–136.

Bell, Frederick H. 1978. Teaching and Learning Mathematics (in secondary schools). Dubuque, Lowa: Wm.C. Brown.

Biggs, John B; & Collis, Kevin F. 1982. Evaluating the Quality of Learning. New York: Academic Press.

Bitter, Gray G. 1990. Mathematics Methods for the Elementary and Middle School : A Comprehensive Approach. Boston: Allyn and Bacon.

Blanton, M., & Kaput, J. J. 2005. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36, 5: 412-446.

Bloom, B.S. 1961. Taxonomy of Education Objectives. New York: David McKay.

Booker, G. 2009. Algebraic Thinking: generalizing number and geometry to express patterns and properties succinctly. Griffith University: 10 – 21.

Boyatzis, R. E. 1998. Transforming Qualitative Imformation: Theometic Analysis and Code Development. Thousand Oaks, CA: Sage.

Branca, N.A. 1980. Problem Solving as a Goal, Process and Basic Skill. In Krulik S., and ReysR. E. (eds.), Problem Solving in School Mathematics; Yearbook, 3-8. Reston,VA: NCTM.

Bransford, G., and Stains, J. Reassessing the role of collaboration writing in advancbed composition[Online]. 1984. Available from: http://www.ericdb.com/research/info.htm [2012, Dec 13].

Bruckner, L. J. 1957. Developing Mathematics Understanding in the Upper Grad. Philadelphia: The John C Winston.

Bruner, J. S.; et al .1966. Study in Cognitive Growth. New York: John Wiley & Son.

Bruner. 1973. Going Beyond the Information Given: In Bruner, J. et al. (eds), Contemporary approaches to Cognition. Cambridge: Harvard University Press.

Cai, J. 2004. Developing Algebraic Thinking in the earlier Grades from an International Perspective. The Mathematics Educator. 8, 1: 1-5.

Cai, J. et al. 2005. The Development of Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: A Cross-Cultural Comparative Perspective1**.** ZMD. 37, 1: 6.

Cai, J., Ng, S. F and John C. M, 2011 . Developing Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore. Advances in Mathematics Education.

Carpenter, T. P., & Levi, L. 2000. Developing conceptions of algebraic reasoning in the Primary Grades (Res. Rep. 00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. 1: 1–18.

Chambers, D.L. 1994. The Right Algebra for All. Educational Leadership 51 (March): 85

Charle, S., et al. 1987. How to evaluate Progress in Problem Solving. Reston, NCTM.

Charles, R. L., and Frank, K. L. 1982. Teaching Problem Solving What Why & How. Dale Seymour Publications.

Charles, R. L.1985. The role of Problem Solving. Arithmetic Teacher 22 .

Charlotte, C. et al. 2007. Shaping Math Course Book 2nd Edition 4A. Marshall Cavendish Education, Singapore.

Child, D. 2004. Psychology and the Teacher, 7^{rd} ed. New York: Continuum: 89.

Christmas, P. T., & Fey, J. T. 1999. Communicating the importance of algebra to students. In B. Moses (Ed.), Algebraic thinking, Grades K-12: readings from the NCTM's school-based journals and other publications (pp. 52-58). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clarkson, S. P. 1979. A Study of the Relationship among Translation and Problem Solving Abilities. Dissertation Abstracts International. 39 (January): 4101-A.

Clements, D. H., and Sarama, J. 2000. Young Children's Ideas about Geometric Shapes. Teaching Children Mathematics, 6: 482–88.

Clyde, C. G. 1967. Teaching mathematics in the elementary school. New York: Ronald Press.

Crowley, C. S.1991. Using heuristics to teach problem-solving in algebra : A meta-cognitively controlled approach [Online].Available from: http://thailis.uni.net.th/dao/detail.nsp [2012, July 10]

Cruikshank, D. E., and Sheffield, L. J.2000. Teaching and Learning Elementary and Middle school mathematics. United States of America: John Wiley & Sons.

David, D. F., and Zbigniew, M. 2000. How to solve it: Modern Heuristics**.** New York, 2000: 404 – 408.

De Bono, E. 1984. Children solve problems. NY: Penguin Books: 10.

Debra I. J. 2004. Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. Journal of Mathematical Behavior, 23: 371–388**.**

Diana. F. S., and Debra I. J. 2004. A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. Educational Studies in Mathematics (2004), 57, 1: 65-90.

Dossey. J., et. 2005**.** Mathematic Method and Modeling for Today' s Mathematics Classroom: A Contemporary Approach to teaching Grade 7 – 12. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

Driscoll, D.L. 1997. "Focus Groups as a Method for Enhancing Community Consensus and Mobilization". Presented at the Society for Applied Anthropology Conference, Seattle, WA.

Driscoll, M. 1999. Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6–10, Heinemann, Portsmouth.

Duncan, J., and James, E. The heuristics utilized by fifth grade students in solving verbal mathematics problems in a small group setting.[Online]. Available from: http://thailis.uni.net.th/dao/detail.nsp [2012, July15]

Enright, B. 1998. Picky patterns*.* Teaching Children Mathematics*,* 5**,** 174-178.

Fan, L., & Zhu, Y. 2007. Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. Educational Studies in Mathematics. Netherlands. 66,1: 61-75.

Ferrini – Mundy, J., Lappan, G., & Phillips, E. 1999. Experiences with patterning. National Council of Teachers of Mathematics, 2000: 112 – 119.

Floyd, C. 2002. Problem solving as a strategy for learning mathematics. Lesson plan Project-Lit.[Online]. 2002. Available from: http:// www.mtsu.edu[2012, July 11]

Floyd, R. W. 2005. Heuristics for Math Problem Solving [Online] Available from: math.com/math/heuristics.php [2012, November 10] .

Fong, H. K. 1994. Bridging the gap between secondary and primary mathematics. Teaching and Learning, 14, 2: 73-84.

Frank, S. 2009. 4 – 5 .Singapore Math Practice Level 6B, Grade 7. Singapore mathematic Education.

Garnett, K. F. 1991. Developing Heuristics in The Mathematics Problem – Solving Process of Sixth – Grade Children: A Non – constructivist Teaching Experiment. Dissertation Abstracts (July). 102 – 103A.

Gick, M.L. 1986. Problem Solving strategies. Educational Psychologist. 21: 99 – 120.

Ginsburg. H., and Opper, H. 1969. Piget's theory of intellectual development: An Introduction. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Goh., C. B., & Gopinathan, S. 2008. Education in Singapore: Development since 1965. United States, Washington, DC: The World Bank.

Goldin, Gerald A. 1999. Representation in School Mathematics: A Unifying Research Perspective. In A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. pp. 275-283. 2nd ed. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldstein, K.M., and Blackman, S. 1981. Theoretical approaches to cognitive style. In Personality Theory. Measurement and Research. London: Methean: 80.

Gonzales, N. A. 1994. A Problem Posing: A Neglected Component in Mathematics Courses for Prospective Elementary and Middle School Teachers. School Science and Mathematics 94, 2 (February 1994) : 78-84.

Good, C. V. 1959. Dictionary of Education. United State of America: McGraw – Hill Book, 570.

Greenes, Carole E. 1972. Algorithmic Statement of Problems. Chapter in Developing Mathematics, grade 8, J.F. Fitzgerald, et al. New York: Macmillan.

Greenes, C., & Findell, C. 1998. Algebra puzzles and problems, grade 6. Mountain View, CA: Creative Publications.

Greeno, J. G. 1978. A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.), Ad-nces in instructional psychology. 1: 13-75.

Guilford, J. P. 1971. The analysis of intelligence. New York: McGraw-Hill, 1971.

Hall, D. W. 1979. A Study of the Relationship between Estimation and Mathematical Problem Solving Among Fifth Grade Students. Dissertation Abstracts International 37, 4: 6324-A.

Hatfield, M. M.; Noney, T. E.; and Bitter, G. G. 1989. Mathematics Methods for the Elementary and middle School. Boston: Allyn and Bacon.

Heddens, J. W. & William R. S. 1992. Problem Solving, Decision Making, and Communicating in Mathematics. 7th ed. New York: Macmillan: 34 – 35.

Heimer, R. T., and Trueblood, C. R.1977. Strategies for teaching children mathematics. Reading Mass: Addison Wesley.

Helton, F. F. 1958. Introduction Mathematics. New York: John Wiley & Sons.

Henny, M. 1971. Improving Mathematics Verbal Problem Solving ability Through Reading Instruction. The Arithmetic Teacher. 18, 4: 223-224.

Herbert, K. & Brown, R. H. 1997. Patterns as tools for Algebraic Reasoning. In Algebraic thinking. Grades K – 12: Reading from NCTM' s School – Based Journals and other Publications. Edited by Barbara Moses. 123 – 128 .

Herscovice, N. 1989. Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. In Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Edited by Sigrid Wagner and Carolyn Kieran. Pp. 60 – 91. Reston, VA: The National Council of Teac hers of Mathematics.

Hyde, A. A., & Hyde, P. R. 1991. Math wise: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving. Portsmouth, NH: Heinemann.

Jackson, L. 2000. Increasing Critical Thinking Skills to Improve Problem-Solving Ability in Mathematics. Master of Arts Action Research Project. Graduate Faculty, Saint Xavier University.

James, J. 1981. Problem solving behavior and attitude of prospective elementary teachers with a history of math avoidance as a function of heuristics and discussion. [Online]. 1981. Available from: http://thailis.uni.net .[2012, July 11].

James, H. W., and William, S. R. 1992. Today's Mathematic. 2rd ed. The United States of America: 44 – 45.

Jean. S, Binghamton, 2005. The Development of Algebraic Thinking A Vygotskian Perspective. ZDM. 37, 1.

Jonassen, D. H., and Grabowski, B. L. 1993. Handbook of Individual Differences, Learning, and Instruction. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey: 146.

Kagan, J., & Moss, H. A. 1962. Birth to maturity: A study in psychological development. New York: John Wiley & Sons.

Kaput, J. 1993. Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows1. Department of Mathematics University of Massachusetts at Dartmouth.

Kaput, J. 1999. Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.),Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Katretchko, S. L. 1971. Between Logic and Heuristics [Online]. Available from: http://www.bu.edu/wcp/Papers/Logi/LogiKatr.htm [2012, July 12].

Katz, V. J., & Barton, B. 2007. Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. Educational Studies in Mathematics. 66: 185–201.

Kay, D. A. 1991. comparison of students taught how to use heuristics in problem-solving with students who have not had explicit instruction in the use of heuristics.[Online]. 1991 Available from: http://thailis.uni.net.th/dao/detail.nsp [2012, July 17].

Kennady, L. M.1984. Guiding Children's Learning of Mathematics. 4 ed. Belmont, California: Wadsworth.

Kho, T. H. 1987. Mathematical models for solving arithmetic problems. In Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI-SEAMS). Mathematical Education in the 1990 S. June 1 - 3, 345-351. Singapore: Institute of Education.

kho, 2005 . The Singapore Model Method for learning Mathematic. Ministry of Education Singapore.

Kho, T. H, Yeo, S. M., James, L., Seah, J. C., 2009. Singapore Model Method for Learning Mathematics. Singapore: EPB Pan Pacific.

Kieran, C. & Chalouh, L. 1993. Pre-algebra: The transition from Arithmetic to Algebra. In D. T. Owens (Ed), Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. 1996. The Changing Face of School Algebra', Invited Lecture for ICME-8 Congress in Spain.

Kriegler, S. 2003. Just What is Algebraic Thinking? [Online]. Available from: http://www.math.ucla.edu/~kriegler/pub/algebrat.html [2012, July 4].

Krulik, S. 1977. Problem, Problem Solving and Strategy Games. The Mathematics Teachers 7, 9: 650-651.

Krulik, S., and Reys, R. E. 1980. Problem Solving in School Mathematics : National Council of Teacher of Mathematics 1980 Year Book. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Krulik, S., and Rudnick, J. A. 1993. Reasoning and Problem – Solving : A Handbook for Elementary School Teachers. Boston: Allyn and Bacon.

Kutz, R. E. 1991. Teaching Elementary Mathematics. Boston: Allyn and Bacon.

Leblance, J. F. 1977. You Can Teach Problem Solving. Arithmetic Teacher 25 (November 1977): 17-25.

LeBlanc, J. F., Proudfit, L., and Putt I. J. 1980. Teaching problem solving in the Elementary school. In S. Krulik (eds), Problem solving in school Mathematics, 104-116. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, L. 1996. Algebraic understanding: The search for a model in the mathematics education community. Unpublished doctoral dissertation. University du Quebec à Montréal.

Leinhardt, G., & Schwarz, B. B. 1997. Seeing the problem: an explanation from Polya. Cognition and Instruction, 15, 395-434.

Lester, S.1980. Achievement effects of individual small group and cooperative learning strategies on math problem-solving.[Online]. Available from: http://www.infojdb.com/education/problemsolving/learning.htm[2012, Aug12]

Lew, H. C. 2004. Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. The Mathematics Educator. 8, 1: 88-106.

Lisa, E . 2010. Raise the bar on problem solving. Teaching children mathematics, 156 – 165.

Long, M. 2009. The Psychology of Education. London: Routldge Falmer: 49

Lubinski, C. A. & Otto, A. D. 1999. Literature and Algebraic Reasoning. National Council of Teachers of Mathematics, 2000: 99 – 105.

Lynn, C. H. 1993. Some Factor That Impede or Enhance Performance in Mathematical Problem Solving. Journal Research of Mathematics Education. (March): 167-169.

Mark, J. L. 1965. Teaching Elementary School Mathematics for Understanding. New York: McGraw-Hill Book.

Marzano, Robert J. 2001. Designing a New Taxonomy of Educational Objectives. Thousand Oaks, California: Corwin Press.

Matlin, M. 1983. Cognition. New York: Holt, Rinehart and Winston: 225 – 229.

Matos, A. 2009. Exploring functional relationships to foster Algebraic thinking in grade 8. Department of Mathematics, University of Palermo, Italy.

Mayer, E. R., and Hegarty, M. 1987. The Process of Understanding Mathematical Problems. In Sternberg, R. J., and Baron, J. B. (eds.), Teaching Thinking Skills : Theory & Practice, pp.31-33. New York: W.IT.

Mclnerney , D. M., and Mclnerney. 2002. Educational Psychology: Constructing Learning. Frenhs Forest: Prentice Hall: 232.

Mcmaster university. Teaching of heuristics strategies: A Pilot Study [Online]. 1998. Available from: http://www.interpaper.net/search.asp?detail=1 [2012, Dec 13].

Messick, S. 1984. The nature of cognitive style: Problem and promise in education practice. Educational Psychologist, 19, 2: 45.

Middleton, H., and Wheeler, A. 1999. Heuristics: The technology of good Ideas. Stimulating research in technology education: 12-15.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. 1994. Qualitative Data Analysis. Thousand Oaks, CA: Sage. Ministry of Education Singapore. 1990. Mathematics Syllabus: Primary. Singapore: Curriculum Planning Division.

Ministry of Education Singapore. 2000. Revised syllabus for primary mathematics. Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education. Singapore.

Minyi , et. al. Teaching heuristic with problem-solving.[Online]. 2002. Available from: http://www.resourcedbs.com/getdb_detail.asp [2012, Dec 13].

Moustakas, C. 1990. Heuristic Research. California. Sage. Publication, Inc.

Mullis, I.V.S., et al. 2000. IEA' s Repeal of the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS – R) at the Eighth Grade. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Muraski, S. V. 1979. A Study of Effect of Explicit Reading Instruction on Reading Performance in Mathematics and on Problem Solving Ability of Sixth Grade. Dissertation Abstracts International. 39: 4014-A.

Musser, G. L., and Shaughnessy, J.M. 1980. Problem – solving strategies in school Mathematics. In S.

Natcha, K. and Yeap, B. H. 2007. Upper Primary School Students' Algebraic Thinking. Mathematics Education Research Group of Australasia, Paper presented at the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia.

National Council of Teachers of Mathematics. 1989. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. 1991. Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics . 2000. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Nemirovsky, R. 1996b. Mathematical narratives, modeling and algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee. (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for learning and teaching (pp. 197 - 220). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Nesher, P., Greeno, J.J., & Riley, M.S. 1982b. The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. Educational Studies in Mathematics, 13, 373-394.

Ng, S. F. 2003. How Secondary Two Express Stream Students Used Algebra and the Model Method to Solve problems. The Mathematics Educator, 7, 1:. 1-17.

Ng, S. F. 2004. Developing algebraic thinking in early grades: case study of the Singapore primary mathematics curriculum. The Mathematics Educator, 8, 1: 39-59.

Ng ,S. F., and Kerry, L. 2005. How primary five pupils use the model method to solve word problems. The Mathematics Educator, 9, 1: 60-83.

Ng, C. H., & Lim, K. H. 2001. A handbook for mathematics teachers in primary schools. Singapore: Federal Publications.

Novak, J. D., & Gowin, D. B. 1984. Learning How to Learn. New York and Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ohlsson, S., and Rees, E. 1991.The function of Conceptual Understanding in the learning of Arithmetic Procedures. Cognition and Instruction: 1.

Oladunni, M. 1998. An experimental study on the effectiveness of metacognitive and Heuristic problem solving techniques on computational performance of students in mathematics. Journal of Mathematical Education and Science Technology, 29, 6.

Osborn, A. & Wilson, S.P. 1989. Moving to algebraic thought. In T. R Post (Ed) Teaching Mathematics to Grades K-8: Research-Based Methods. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Peelle, H. 2001. Alternative modes for teaching school mathematics: A Synopsis. [Online]. Available from: http:// www.educ.umass.edu [2012, Nov 10].

Perkins, D. N. 1981. Knowledge as Design : Teaching Thinking Trough Content. In Sternberg, R.J., and Baron, J.B. (ed), Teaching Thinking Skills : Theory & Practice,. New York: W.IT Freeman and Company: 62-68.

Piaget, J. 1977. The Origin of Intelligence in the child. New York: Penguin Books.

Polya, G. 1957. How To Solve It : A New Aspect of Mathematical Method. New York: Doubleday.

Polya, G. 1973. How to Solve It. New Jersey: Princeton, Princeton University Press.

Polya, G.1980. On Solving Mathematical Problems in High School. Problem Solving in School Mathematics; Yearbook. Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. 1985. How To Solve It : A New Aspect of Mathematical Method. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Polya, G. 2000. How to solve it: A new aspect of mathematical method, 3rd ed . Princeton: Princeton University Press.

Putt, J. 1979. An Exploratory Investigation of Methods of Instruction in Mathematical Problem Solving at the Fifth Grade Level. Dissertation Abstracts International. 339, 3: 5382-A.

Rechtin, G. 1991. Learning system and problem solving.[Online]. Available from: http://www.rehks.com/knowledge/details.asp [2012, Dec 13].

Rey, C. L. 1992. A Comparative Laboratory Study of the Effects of Lower Level and Higher Level Questions on Student Abstract Reasoning and Critical Thinking in Two Non Directive High School Chemistry Classroom. Dissertation Abstracts International 6, 40 (April 1973): 3220 – A.

Reys, R. E., et al. 2004. Helping Children Learn Mathematics. 7*th* ed. New York: John Wiley & Sons, 124 – 130.

Rickart. 1996. Structuralism and Mathematical Thinking. In The Nature of Mathematical Thinking. Sternberg, Robert J.; & Ben-Zeev, Talia., editors: 285-300. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Riding, R. and Rayner, S. 1998. Cognitive Styles and Learning Strategies. London: David Fulton.

Riedesel, C. Alan . 1990. Teaching elementary school mathematics. MA: Allyn & Bacon, 90.

Ritt, P.1987. Mathematical problem-solving: An exploration of the relationship Between strategies and heuristic.[Online]. Available from: http:// www.thailis.uni.net.th/dao/detail.nsp [2012, Aug 1].

Ruopp F. N., Cuoco, Al, Rasala S. M. & Kelemanik, M. G. 1997. Algebraic thinking: A professional-development theme. The Mathematics Teacher, 90, 2: 150-155.

Russell, David H. 1956. Children's Thinking. USA: Ginn and Company.

Russell, P. V. 1961. Essential of Mathematics. New York: John Wiley & Sons.

Russell, S. Jo. 1999. Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In Developing Mathematical Reasoning in Grades K – 12. Edited by Lee V. Stiff and Frances R. Curcio: 1 – 12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. 1985. Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions and meta-cognitions as driving forces in intellectual performance. Cognitive Science, 7: 329 - 363.

Sheffield, L. J. 2003. Extending the challenge in Mathematics: Developing Mathematical Promise in K – 8 pupils [Online]. Available from: http://www.sagepub.com/upm-data/7203_sheffield_ch_1.pdf [2012, July 16].

Sheffield, L. J. 2005. Using Creativity Techniques to Add Depth and Complexity to the Mathematics Curricula. [Online]. Available from: http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/SYM1.htm [2012, July 16].

Sheffield, L. J. & Cruikshank, D. E. 2005. Teaching and Learning Mathematics: pre-kindergarten through Middle School. Fifth Edition. New York: Wiley.

Sheffield, L. J. 2009. RE: Using the heuristic for Developing Mathematical Creativity for Thai student [Online]. Available from:E - mail: Sheffield@nku.edu [2012,November 4]

Sigel, I. E., & Hooper, F. H. (Eds.). 1968. Logical thinking in children. New York: Holt, Rinehart & Winston, Inc.

Silver, E. 1997. Algebra for all – Increasing student access to algebraic ideas, not just algebra courses. Mathematics Teaching in the Middle School, 2: 204-207.

Simon, H.A, & Newell, A. 1971. Human problem solving: the state of the theory in 1970. American Psychologist, 26, 2: 145-159.

Silver, E. A., Branca, N., & Adams, V. 1980. Meta-cognition: The missing link in problem solving?. In R. Karplus (Ed.), Proceedings pf the Fourth International Congress on Mathematical Education (pp. 429 - 433). Boston, M A: Birkhauser Confrey.

Soh, C. K. 2005. An overview of mathematics education in Singapore. Paper presented at the 1ST Internation Mathematics Curriculum Conference. Chicago, USA.

Stacey, K., & MacGregor, M. 2000. Learning the algebraic method of solving problems. Journal of Mathematical Behavior, 18: 149-167.

Steele, D. F. 2000. Observing 4th-grade students as they develop algebraic reasoning through discourse. Childhood Education, 76: 92-96.

Steen, L. Arthur. 1992. Does Everybody Need to Study Algebra?. Mathematics Teacher, 85: 4 (April 1992) 258-260. Also appeared in Basic Education, 37.

Strenberg, R. J. 1999. Cognitive Psychology. 2nd ed. New York: Harcourt Brance College, 351 – 354.

Suchman, J R.; & Spaulding, R. 1970. Cognitive Style: Theory, Observation, and Measurement. In Theory and Process in Elementary Education, Photocopied.

Swafford, J.O. and Langrall, C.W. 2000, Grade 6 students' pre-instructional use of Equations to describe and represent problem situations. Journal for Research in Mathematics Education, 31: 89–112.

Tall, D. 1991. Advanced mathematical thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Talton, C. F. 1988. Let's Solve the Problem We Find the Answer. Arithmetic Teacher (September 1988). 36: 1. .

TIMSS International Study Center Boston College Chestnut Hill. 2007. Highlights from TIMSS 2007: Mathematics and Science Achievement of U.S. Fourth and Eighth-Grade Students in an International Context. MA, USA.

The Trends in International Mathematics and Science Study. 2007. TIMSS 2007 International Mathematic Report. Boston College. United States.

Thiessen, D., et al.1989. Elementary Mathematics Method. 3ed. New York: Macmillan.

Torrance, E. 1962. Guiding Creative Talent. Englewood Cliffs. N. J. Prentece-Hall: 135.

Toshiakaira, F. 2003. Probing students' understanding of variables through cognitive conflict: Is the concept of a variable so difficult for students to understand. Proceedings of the 2003 Joint meeting of PME and PMENA 1: 49-65.

Tougaw, P. W. 1994. A Study of Effect of Using an Open Approach to Teaching Mathematics upon the Mathematical Problem Solving Behaviors of Secondary School Students. Dissertation Abstracts International. 54, 8 (February): 2934-A.

Troutman, A. P. & Lichtenberg, B. K. 1995. Mathematics: A Good Beginning. 5th ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 4 – 7.

Usiskin, Z. 1988. Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Van .D. B. 1979. Understanding educational research(4th ed.). New York,: McGraw-Hill.

Verschaffel, L. 1999. Realistic Mathematical Modeling and Problem Solving. In Hamers, J., Van Luit, J. and Csapo, B. (Eds), Teaching and Learning Thinking Skills (215-239). Lisse: Swets & Zeitlinger.

Vygotsky, L. S. 1978. Mind in society: The development of higher psychological processes. (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Weir . J. Joseph . 1974 . Problem Solving is Everybody 's Problem . The Science Teacher. 41 (April): 16 – 18

Will, W. 2011. Algebraic Thinking: A Problem Solving Approach. Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Fremantle: 665 – 672.

Wilson, et al. 1993. Mathematical Problem Solving. Research Idea for the Classroom : High School Mathematics. New York: McMillan.

Wink, J., & Putney, L. 2002. A vision of Vygotsky. Boston, MA: Allyn & Bacon. June 16.

Witkin, H.A, Oltman, P.K., Raskin, E., and Karp, S.A. 1971. A Manual for the embedded figures tests. California: Consulting psychologist press.

Woolfolk, K .1995. Logic and scientific. 3^{rd} ed. New York: The Ronald Press.

Yeap, B., Ferruci, B., Kaur, B., Carter, J. and. 2008. Using a model approach to enhance algebraic thinking in the elementary school mathematics classroom. National Council of Teachers of Mathematics. 2008. Algebra and algebraic thinking in school mathematics (70th yearbook). Reston Virginia: NCTM: 195-209.

Yen, F., and Flora, B. 1985. An intervention study in mathematical problem solving Among selected junior high school students (heuristics math tutoring self efficacy).[Online]. Available from: http://thailis.uni.net.th/dao/detail.nsp [2012, July 16].

Yip, J. S. K., and W. K. Sim (eds.). 1990. Evolution of educational excellence: 25 years of education in the Republic of Singapore. Singapore: Longman.

Yotis, C., and Hosticka, A. 1980. Promoting the transition to formal though through the development of problem solving skills middle school mathematics and science curriculum. Shool Science and Mathematics. 80(November).

Zalewski, C. J. 1978. An Investigation of Selected Factor, Contributing to Success in Solving Mathematical Word Problem. Dissertation Abstracts International: 2804 – A.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามของผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

รายนามของผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

ผู้ทรงคุณวุฒิที่พิจารณา ความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของข้อคำถาม ความเหมาะสมของสำนวนภาษา พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

ผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

1. อาจารย์ ดร. วิษณุ นภาพันธ์	อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
2. อาจารย์ ดร.ณัชชา กมล	อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. อาจารย์คนอง หนูจันทร์	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนวรนารีเฉลิม จังหวัดสงขลา

ผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

1. อาจารย์ ดร.อลิสรา ชมชื่น	อาจารย์ประจำวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี
2. อาจารย์ ดร.ณัฐิกานต์ รักนาค	อาจารย์ผู้เชี่ยวชาญวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา ผู้อำนวยการโรงเรียนวัดสว่างอารมณ์ จังหวัดสระบุรี
3. อาจารย์อำพา รัตตโอภาส	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนไชยาวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี

ภาคผนวก ข

หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิ และหนังสือขอความร่วมมือในการวิจัย

ที่ ศธ 0512.6(2771)/56-1598

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตปัตตานี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ใคร่ขอเชิญ อาจารย์ ดร.อลิสรา ชมชื่น เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ ดร.อลิสรา ชมชื่น เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

จุฑารัตน์ วิบูลผล

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-82 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/56-1599

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ วิทยาเขตพัทลุง

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1" โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ใคร่ขอเชิญ อาจารย์ ดร.วิษณุ นภาพันธ์ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ ดร.วิษณุ นภาพันธ์ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-82 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/56-1600

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์ ดร.ณัฐิกานต์ รักนาค

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ใคร่ขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-82 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/56-1601

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริณัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1" โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ใคร่ขอเชิญ อาจารย์ ดร.ณัชชา กมล เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ ดร.ณัชชา กมล เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-82 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/56-1602

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนวรนารีเฉลิม จังหวัดสงขลา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ใคร่ขอเชิญ อาจารย์คนอง หนูจันทร์ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์คนอง หนูจันทร์ เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-82 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6(2771)/56-1603

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนไชยาวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ใคร่ขอเชิญ อาจารย์อำพา รัตตโอภาส เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์อำพา รัตตโอภาส เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-82 ต่อ 612

ที่ ศธ 0512.6 (2771)/56- 1604

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

23 เมษายน 2556

เรื่อง ขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัยและทดลองใช้เครื่องมือ

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา จังหวัดสุราษฎร์ธานี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอดที่มีต่อความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมี รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องขอเก็บรวบรวมข้อมูลและทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัด และแบบสัมภาษณ์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทำการเก็บข้อมูลวิจัยและทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(อาจารย์ ดร.จุฑารัตน์ วิบูลผล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2681-2 ต่อ 612

ภาคผนวก ค

คุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

- คุณภาพเครื่องมือแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับก่อนเรียน
- คุณภาพเครื่องมือแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียน
- คุณภาพเครื่องมือแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน
- คุณภาพเครื่องมือแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 34 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับก่อนเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.55	0.36	0.748
2	0.52	0.32	
3	0.61	0.41	
4	0.34	0.52	
5	0.37	0.41	
6	0.57	0.23	
7	0.41	0.43	
8	0.57	0.32	
9	0.59	0.36	
10	0.36	0.32	
11	0.50	0.64	
12	0.52	0.59	
13	0.55	0.45	
14	0.34	0.23	
15	0.45	0.55	
16	0.32	0.45	
17	0.70	0.23	
18	0.59	0.73	
19	0.57	0.50	
20	0.61	0.59	

ตารางที่ 35 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก
ของแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.39	0.23	0.816
2	0.45	0.33	
3	0.57	0.41	
4	0.25	0.36	
5	0.45	0.45	
6	0.48	0.68	
7	0.52	0.41	
8	0.43	0.59	
9	0.36	0.36	
10	0.50	0.45	
11	0.37	0.45	
12	0.50	0.36	
13	0.25	0.48	
14	0.34	0.32	
15	0.41	0.36	
16	0.42	0.36	
17	0.61	0.32	
18	0.57	0.59	
19	0.34	0.32	
20	0.48	0.41	

ตารางที่ 36 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.41	0.33	0.837
2	0.46	0.46	
3	0.64	0.41	
4	0.58	0.42	
5	0.55	0.63	

ตารางที่ 37 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจจำแนก ของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.46	0.28	0.859
2	0.56	0.33	
3	0.63	0.42	
4	0.55	0.60	
5	0.39	0.44	

ภาคผนวก ง

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

- ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต
- ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์
- ตัวอย่างแบบสัมภาษณ์ในการคิดเชิงพีชคณิต

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

ชุดที่ 1

ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป

(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ.. ชั้น................... เลขที่..............

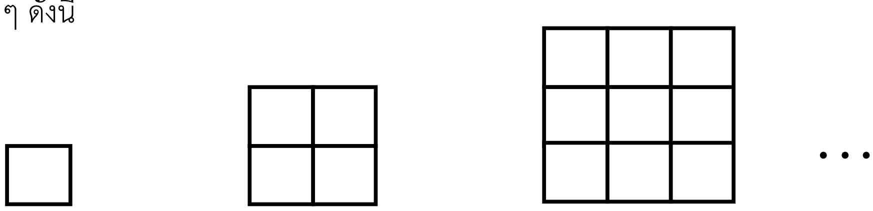
คำชี้แจง

1. แบบวัดชุดนี้มีจำนวนทั้งหมด 5 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 30 นาที
2. แบบวัดแต่ละข้อให้นักเรียนตอบคำถาม แสดงวิธีคิด พร้อมอธิบาย ลงในช่องว่างที่ให้ไว้ในแต่ละข้อ

คำจำกัดความ

ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด ในการวิเคราะห์ และอธิบายลักษณะของแบบรูป ความสัมพันธ์ (ลำดับทางเลขคณิต, เรขาคณิต) เพื่อขยายแบบรูป ความสัมพันธ์ และสร้างกรณีทั่วไปของแบบรูปโดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้

ข้อที่ 1. ช่างปูกระเบื้องต้องการปูกระเบื้องตามแบบ โดยนำกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมาวางเรียงต่อกันตามแบบต่าง ๆ ดังนี้



แบบที่ 1 แบบที่ 2 แบบที่ 3

จงแสดงวิธีคิดและหาคำตอบต่อไปนี้

1.1 ถ้าต้องการปูกระเบื้องตามแบบที่ 4 แบบการปูกระเบื้องของช่างมีลักษณะเป็นอย่างไร

เพราะอะไร จงอธิบายวิธีคิด

....

....

....

1.2 ถ้าช่างต้องการปูกระเบื้องตามแบบที่ 125 จะต้องใช้จำนวนกระเบื้องกี่แผ่น เพราะอะไร

จงอธิบายวิธีคิด..

....

....

....

....

....

....

....

....

ตอบ ดังนั้น..

ข้อที่ 2 พิจารณาแบบรูปต่อไปนี้

แถวที่ 1				1			
แถวที่ 2			1	2	1		
แถวที่ 3		1	2	3	2	1	
แถวที่ 4	1	2	3	4	3	2	1

จงแสดงวิธีคิดและหาคำตอบต่อไปนี้

2.1 ในแถวที่ 6 จะมีจำนวนเต็มปรากฏอยู่ในแถวกี่ตัว เพราะอะไร จงอธิบายวิธีคิด

....

....

....

....

....

....

ตอบ ดังนั้น...

2.2 ในแถวที่ 570 จะมีจำนวนเต็มปรากฏอยู่ในแถวกี่ตัว เพราะอะไร

จงอธิบายวิธีคิด...

....

....

....

....

....

....

....

ตอบ ดังนั้น...

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

ชุดที่ 2

ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์โครงสร้าง

และสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยการใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ.. ชั้น.................... เลขที่..............

คำชี้แจง

1. แบบวัดชุดนี้มีจำนวนทั้งหมด 5 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 20 นาที
2. แบบวัดแต่ละข้อให้นักเรียนตอบคำถามลงในช่องว่างที่กำหนดให้ **<u>โดยไม่ต้องแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบ</u>**

คำจำกัดความ

ความสามารถในการนำเสนอและ วิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด วิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ แล้วนำเสนอโดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้

ข้อที่ 1. ในคาบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ครูปิ่นให้นักเรียนยกตัวอย่างชุดของจำนวน คือ

"จำนวนเต็ม 3 จำนวนเรียงติดกัน"

เพื่อเป็นตัวอย่างของการจัดกิจกรรมเรื่องแบบรูปของจำนวน

จงเขียนสัญลักษณ์หรือตัวแปรแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนเต็มทั้งสามจำนวน

ตอบ จำนวนเต็ม จำนวนที่ 1 คือ..

จำนวนเต็ม จำนวนที่ 2 คือ..

จำนวนเต็ม จำนวนที่ 3 คือ..

<u>ทด</u>

ข้อที่ 2. ร้านขายอาหารแห่งหนึ่ง จ้างลูกจ้าง 4 คน โดยนายจ้างจะจ่ายค่าจ้างของลูกจ้างให้กับพ่อครัว และพ่อครัวต้องเอาจำนวนเงินครึ่งหนึ่งของที่ได้รับแบ่งให้พนักงานเสิร์ฟอีก 3 คน คนละเท่า ๆ กัน **จงเขียนสัญลักษณ์หรือตัวแปรแสดงความสัมพันธ์ของ <u>ค่าจ้างทั้งหมด</u> <u>ค่าจ้างของพ่อครัว</u> และ<u>ค่าจ้างของพนักงานเสิร์ฟ</u>**

ตอบ ค่าจ้างทั้งหมดของพ่อครัวและลูกจ้าง คือ..

ค่าจ้างของพ่อครัว คือ...

ค่าจ้างของพนักงานเสิร์ฟ แต่ละคน คือ...

<u>ทด</u>

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

ชุดที่ 3

ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ

(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ.. ชั้น.................... เลขที่..............

คำชี้แจง

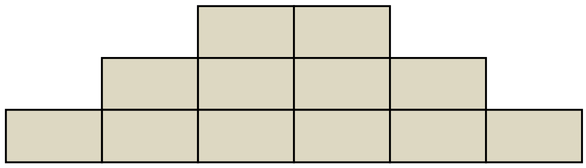
1. แบบวัดชุดนี้มีจำนวนทั้งหมด 5 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 40 นาที
2. แบบวัดแต่ละข้อให้นักเรียนตอบคำถาม แสดงวิธีคิด พร้อมอธิบายอย่างละเอียด ลงในช่องว่างที่ให้ไว้ในแต่ละข้อ ในการแก้ปัญหาและหาคำตอบ

คำจำกัดความ

ความสามารถในการใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด เกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ตาราง กราฟ นิพจน์ สมการ) ช่วยในการแก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบได้

ข้อที่ 1. ถ้าต้องการเรียงอิฐบนพื้นเป็นลักษณะที่แสดงดังรูป

แถวที่ 1
แถวที่ 2
แถวที่ 3
⋮



จงหาว่าในแถวที่ 2,500 จะมีอิฐ จำนวนกี่ก้อน

จงแสดงวิธีคิด และหาคำตอบ (นักเรียนอาจใช้ ตาราง สมการ กราฟ หรือ นิพจน์ ในการหาคำตอบ)

....

....

....

....

....

....

....

....

ตอบ ดังนั้น..

ข้อที่ 2. **เหมียว**มีเงินมากกว่า**เอื้อง** 25 บาท และ **เอื้อง**มีเงินมากกว่า**กบ** 18 บาท

ถ้า ผลรวมของเงินทั้งสามคนเท่ากับ 253 บาท **จงหาว่าแต่ละคนมีเงินคนละกี่บาท**

จงแสดงวิธีคิด และหาคำตอบ (นักเรียนอาจใช้ ตาราง สมการ กราฟ หรือ นิพจน์ ในการหาคำตอบ)

....

....

....

....

....

....

....

....

ตอบ ดังนั้น..

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิต

ชุดที่ 4

ความสามารถในการวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย

(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ... ชั้น.................. เลขที่.............

คำชี้แจง

1. แบบวัดชุดนี้ มีจำนวนทั้งหมด 5 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 20 นาที
2. แบบวัดแต่ละข้อให้นักเรียนตอบคำถาม พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ ลงในช่องว่างที่ให้ไว้ในแต่ละข้อ

คำจำกัดความ

ความสามารถในการวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้ทักษะการคิด วิเคราะห์ข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่หลากหลาย เพื่อตอบคำถามและอธิบายการเปลี่ยนแปลงหรือความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นเพื่อสนับสนุนคำตอบได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

ข้อที่ 1. สถานการณ์ “แนวโน้ม เพิ่มขึ้น หรือ ลดลง”

กำหนดกรณีที่ n ของจำนวนชุดหนึ่ง เป็น $\dfrac{2n}{n(n+1)}$

จงวิเคราะห์ว่าแนวโน้มของจำนวนชุดนี้ ในแต่ละลำดับที่มากขึ้น จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

1.1 ตอบ ....

1.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ

....

....

....

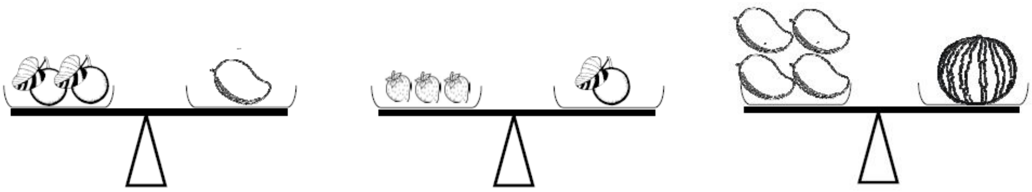
....

....

....

ข้อที่ 2. สถานการณ์ “Balancing Fruit”

กำหนดสถานการณ์ การช่างน้ำหนักของผลไม้ 4 ชนิด คือ ส้ม มะม่วง สตรอเบอรี่ และ แตงโม ดังนี้



จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ จงเรียงลำดับน้ำหนักของผลไม้ทั้ง 4 ชนิด จากมาก ไปหาน้อย พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

2.1 ตอบ ....

2.2 จงอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนคำตอบ

....

....

....

....

....

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ.. ชั้น.................. เลขที่.............

คำชี้แจง

1. แบบวัดฉบับนี้เป็นแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีลักษณะเป็นคำถามปลายเปิด
2. ให้นักเรียนนำเสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาอย่างละเอียดรอบคอบ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องเหมาะสมกับปัญหา
3. ในการประเมินคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะพิจารณาลักษณะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจาก
    1) ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา
    2) ความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา
    3) ความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ
    4) ความสามารถในการตรวจสอบคำตอบ
4. จำนวนแบบวัด 5 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 1 ชั่วโมง 30 นาที

ข้อที่ 1. กำหนดแบบรูปของจำนวนหนึ่ง ที่แสดงถึงการนั่งฟังธรรมในวันสำคัญของนักเรียนจำนวนหนึ่ง ดังนี้

		หลักที่				
		1	2	3	4	5
แถวที่	1	1	2	3	4	
	2		8	7	6	5
	3	9	10	11	12	
	4		16	15	14	13
	5	. . .				

จากแบบรูปการนั่งฟังธรรมของนักเรียน **จงหาว่า ในหลักที่ 3 แถวที่ 50 จะเป็นนักเรียนลำดับที่เท่าไร**

1.1) ทำความเข้าใจปัญหา (2 คะแนน)

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ ....

....

....

สิ่งที่ โจทย์ต้องการให้หา คือ ....

....

....

1.2) วางแผนแก้ปัญหา โดยมีขั้นตอนการหาคำตอบดังนี้ (2 คะแนน)

ลำดับแรกที่ต้องทำคือ..

....

....

วิธีการหรือแนวทางที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาคือ...

....

....

1.3) ดำเนินแก้ปัญหาและหาคำตอบดังนี้ (2 คะแนน)

วิธีทำ..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

สรุปคำตอบ...(1 คะแนน)

1.4) การตรวจสอบคำตอบมีดังนี้ (2 คะแนน)

....

....

....

....

....

....

....

ข้อที่ 2. เสริมศรีจอดรถที่ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่ง โดยทางห้างคิดค่าที่ในการจอดรถดังนี้

"ชั่วโมงแรก คิดราคา 40 บาท
ชั่วโมงถัดไป คิดชั่วโมงละ 5 บาท"

ถ้าการจอดรถครั้งนี้เสริมศรีต้องจ่ายค่าจอดรถเป็นจำนวนเงิน 120 บาท จงหาว่าเสริมศรีใช้เวลาจอดรถกี่ชั่วโมง

2.1) ทำความเข้าใจปัญหา (2 คะแนน)

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ ....

....

สิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา คือ ....

....

2.2) วางแผนแก้ปัญหา โดยมีขั้นตอนการหาคำตอบดังนี้ (2 คะแนน)

ลำดับแรกที่ต้องทำคือ...

....

....

วิธีการหรือแนวทางที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาคือ..

....

....

2.3) ดำเนินแก้ปัญหาและหาคำตอบดังนี้ (2 คะแนน)

วิธีทำ...

....

....

....

....

....

สรุปคำตอบ... (1 คะแนน)

2.4) การตรวจสอบคำตอบมีดังนี้ (2 คะแนน)

....

....

....

ตัวอย่างแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์การคิดเชิงพีชคณิต

แบบสัมภาษณ์

1. ความสามารถในการวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป

ประเด็นที่สัมภาษณ์	**บันทึกคำตอบนักเรียน**
- หลังจากนักเรียนอ่านโจทย์แล้ว นักเรียนบอกได้	....
หรือไม่ว่าโจทย์ต้องการอะไร	....
- จาก (ภาพ, จำนวน) ที่ให้มานักเรียนบอกได้ไหมว่า	....
แต่ละ(ภาพ, จำนวน) มีความสัมพันธ์กันอย่างไร	....
คำตอบที่นักเรียนคิดได้ นักเรียนคิดอย่างไร	....
เล่าให้ฟังหน่อย	....
- ในกรณีทั่วไปนี้ คำตอบที่นักเรียนได้	....
นักเรียนใช้วิธีการใด	....
- นักเรียนเล่าให้ฟังหน่อยได้ไหมว่านักเรียนคิดอย่างไร	....

....

....

....

2. ความสามารถในการนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

ประเด็นที่สัมภาษณ์	**บันทึกคำตอบนักเรียน**
- นักเรียนอ่านโจทย์แล้ว นักเรียนบอกได้	....
หรือไม่ว่าโจทย์ต้องการอะไร	....
- ข้อมูลในโจทย์ที่ให้มานักเรียนคิดว่าเพียงพอที่จะนำ	....
ไปสร้างความสัมพันธ์ และใช้ตัวแปรแสดงแทน	....
ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด อธิบายให้ฟังหน่อย	....
- ทำไมนักเรียนถึงใช้ตัวอักษรดังกล่าวแทนตัวแปร	....
- ทำไมนักเรียนถึงเลือกวิธีการนี้มาช่วยในการวิเคราะห์	....
ในการสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปร	....
- เล่าให้ฟังหน่อยว่านักเรียนคิดอย่างไร	....

....

....

....

ภาคผนวก จ

โครงสร้างแบบวัดความสามารถในคิดเชิงพีชคณิตและความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์

- โครงสร้างแบบวัความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับก่อนเรียน
- โครงสร้างแบบวัความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียน
- โครงสร้างแบบวัความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน
- โครงสร้างแบบวัความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 38 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการคิดเชิงพีชคณิตฉบับก่อนเรียน

เนื้อหาเรื่อง	จำนวนชั่วโมง	การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป	การนำเสนอและวิเคราะห์โครงสร้างและสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต	การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ	การวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย
1. การแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป (ประถมศึกษาปีที่ 6) 1.1 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป	3	3 ข้อ	2 ข้อ	1 ข้อ	1 ข้อ
2. สมการและการแก้สมการ (ประถมศึกษาปีที่ 6) 2.1 สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า 2.2 การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัว 2.3 การเขียนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า 2.4 การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ	15	2 ข้อ	3 ข้อ	4 ข้อ	4 ข้อ
รวม	**18**	**5 ข้อ**	**5 ข้อ**	**5 ข้อ**	**5 ข้อ**

ตารางที่ 39 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการทางคิดเชิงพีชคณิตฉบับหลังเรียน

<table>
<tr><th>เนื้อหาเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1</th><th>จำนวนชั่วโมง</th><th>การวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ และการสร้างกรณีทั่วไป</th><th>การนำเสนอและวิเคราะห์โครงสร้างและสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต</th><th>การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายความสัมพันธ์เชิงปริมาณ</th><th>การวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงในบริบทที่หลากหลาย</th></tr>
<tr><td>1. แบบรูปและความสัมพันธ์</td><td>3</td><td>3 ข้อ</td><td>2 ข้อ</td><td>1 ข้อ</td><td>1 ข้อ</td></tr>
<tr><td>2. คำตอบของสมการ</td><td>1</td><td rowspan="3">2 ข้อ</td><td rowspan="3">3 ข้อ</td><td rowspan="3">4 ข้อ</td><td rowspan="3">4 ข้อ</td></tr>
<tr><td>3. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4. โจทย์สมการเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว</td><td>7</td></tr>
<tr><td>รวม</td><td>18</td><td>5 ข้อ</td><td>5 ข้อ</td><td>5 ข้อ</td><td>5 ข้อ</td></tr>
</table>

ตารางที่ 40 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน

เนื้อหาเรื่อง	หัวข้อย่อย	จำนวนชั่วโมง	จำนวนข้อสอบ
1. การแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป (ประถมศึกษาปีที่ 6)	1.1 การแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป	3	1 ข้อ
2. สมการและการแก้สมการ (ประถมศึกษาปีที่ 6)	2.1 สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า	3	2 ข้อ
	2.2 การแก้สมการที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัว	4	
	2.3 การเขียนประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่า	4	2 ข้อ
	2.4 การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการ	4	
รวม		**18**	**5 ข้อ**

ตารางที่ 41 แสดงโครงสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

เนื้อหาเรื่อง	หัวข้อย่อย	จำนวนชั่วโมง	จำนวนข้อสอบ
1. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (มัธยมศึกษาปีที่ 1) (18 ชั่วโมง)	1. แบบรูปและความสัมพันธ์	3	1 ข้อ
	2. คำตอบของสมการ	1	2 ข้อ
	3. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	7	
	4. โจทย์สมการเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	7	2 ข้อ
รวม		**18**	**5 ข้อ**

ภาคผนวก ฉ

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

- แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด สำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ สำหรับกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 42 แสดงรายละเอียดของแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดแบบฮิวริสติกส์และโมเดลเมธอด และการจัดกิจกรรมแบบปกติ

แผนที่	จำนวนคาบ	เนื้อหา	จุดประสงค์
1	1	แบบรูปและความสัมพันธ์	- วิเคราะห์แบบรูปที่กำหนดให้ได้ - เขียนความสัมพันธ์จากแบบรูปที่กำหนดให้โดยใช้ตัวแปรได้
2	2	แบบรูปและความสัมพันธ์	- วิเคราะห์แบบรูปที่กำหนดให้ได้ - เขียนความสัมพันธ์จากแบบรูปที่กำหนดให้โดยใช้ตัวแปรได้
3	1	คำตอบของสมการ	- หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยวิธีลองแทนค่าตัวแปรได้
4	2	การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- บอกสมบัติของการเท่ากันได้
5	2	การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายโดยใช้สมบัติการเท่ากันได้
6	1	การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายโดยใช้สมบัติการเท่ากันได้
7	1	การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายโดยใช้สมบัติการเท่ากันได้
8	2	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแทนสถานการณ์ปัญหาหรือปัญหาอย่างง่ายได้
9	2	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากโจทย์สมการที่กำหนดให้ - หาคำตอบของสมการจากโจทย์สมการได้
10	2	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากโจทย์สมการที่กำหนดให้ - หาคำตอบของสมการจากโจทย์สมการได้
11	2	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	- เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากโจทย์สมการที่กำหนดให้ - หาคำตอบของสมการจากโจทย์สมการได้

ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

เรื่องย่อย โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ผู้สอน นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม จำนวน 2 ชั่วโมง

1. สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.2

1. เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแทนสถานการณ์หรือปัญหาอย่างง่ายได้
2. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายได้
3. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

2. จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

ด้านความรู้

1. เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแทนสถานการณ์ปัญหาได้
2. หาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

1. แก้ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้
2. สร้างแบบจำลองในการนำเสนอความสัมพันธ์ของโจทย์ปัญหา
3. นำเสนอแบบรูปทางพีชคณิตในรูปแบบที่หลากหลาย
4. ตั้งสถานการณ์ปัญหาใหม่ที่สอดคล้องกับลักษณะปัญหาที่กำหนดให้ได้

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

1. ทำงานอย่างเป็นระบบ
2. มีความกระตือรือร้นและสนใจเรียน

3. สาระสำคัญ

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ดังต่อไปนี้

1. อ่านวิเคราะห์โจทย์ปัญหาให้เข้าใจว่าโจทย์กำหนดอะไร และโจทย์ต้องการหาอะไร
2. แปลงข้อมูลที่มีอยู่ในโจทย์ปัญหาไปสู่สมการในแบบรูปภาพ หรือสมการ โดยเลือกตัวแปรและระบุการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้องสอดคล้องกับโจทย์ปัญหา
3. แก้สมการเพื่อหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ
4. ตรวจสอบคำตอบที่ได้กับเงื่อนไขในโจทย์

ตัวอย่างที่ 1 โรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนทั้งหมด 86 คน ถ้าโรงเรียนนี้มีจำนวนนักเรียนชายมากกว่านักเรียนหญิงอยู่ 12 คน จงหาว่ามีนักเรียนหญิงจำนวนกี่คน

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ X แทนจำนวนนักเรียนหญิง

จากข้อมูล มีนักเรียนทั้งหมด 86 คน

มีจำนวนนักเรียนชายมากกว่านักเรียนหญิง 12 คน

จะได้ จำนวนนักเรียนชาย เท่ากับ X + 12 คน

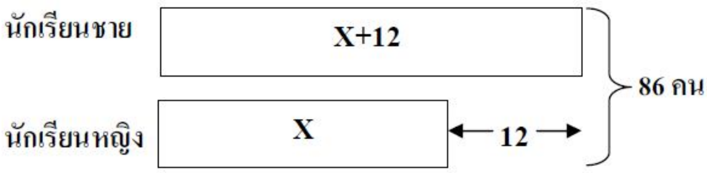
นั่นคือ (X + 12) + X = 86

จะได้ X = 37

ดังนั้น จำนวนนักเรียนหญิงมีทั้งหมด 37 คน

<u>**วิธีคิดตามแนวคิดการใช้แบบจำลอง**</u>

แบบที่ 1 ให้ X แทนจำนวนนักเรียนหญิง

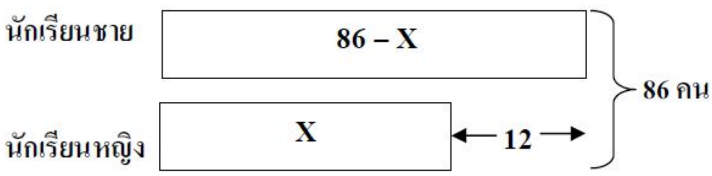


จากแบบจำลองจะได้ (X+12) + X = 86

X = 37

ดังนั้น จำนวนนักเรียนหญิงมีจำนวน 37 คน

แบบที่ 2 ให้ X แทนจำนวนนักเรียนหญิง



จากแบบจำลองจะได้ (86 – X) – X = 12

X = 37

ดังนั้น จำนวนนักเรียนหญิงมีจำนวน 37 คน

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนเต็มสองจำนวนรวมกัน -45 ถ้าจำนวนหนึ่งน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 15 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น

<u>**วิธีทำ**</u> ให้ X แทนจำนวนเต็มที่น้อยกว่า

จากข้อมูล มีจำนวนเต็มสองจำนวนรวมกัน -45

จำนวนเต็มหนึ่งน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 15

จะได้ จำนวนเต็มที่มากกว่า เท่ากับ X + 15

นั่นคือ (X + 15) + X = -45

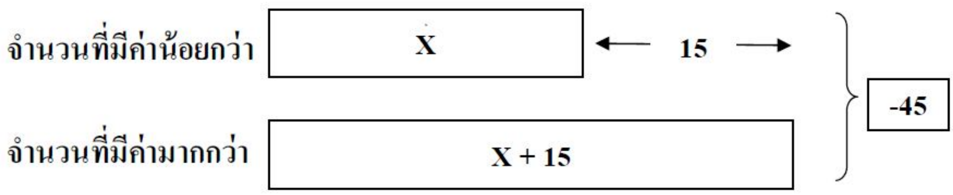
จะได้ X = -30

ดังนั้น จำนวนเต็มที่น้อยกว่ามีค่าเท่ากับ -30

และ จำนวนเต็มที่มากกว่า มีค่าเท่ากับ X + 15 = -30 + 15 = -15

<u>**วิธีคิดตามแนวคิดการใช้แบบจำลอง**</u>

แบบที่ 1 ให้ X แทนจำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่า



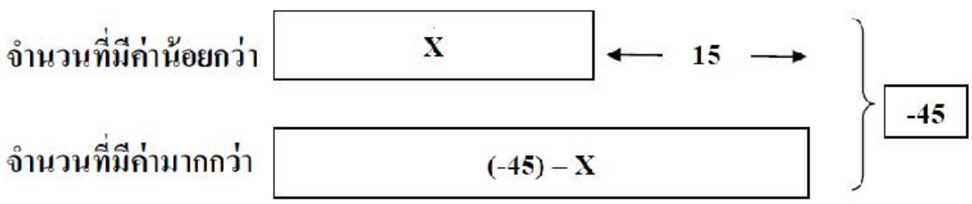
จากแบบจำลองจะได้ X + (X + 15) = -45

X = -30

ดังนั้น จำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่า มีค่าเท่ากับ -30

จำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า มีค่าเท่ากับ X + 15 = -15

แบบที่ 2 ให้ X แทนจำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่า



จากแบบจำลองจะได้ (-45 – X) – X = 15

X = -30

ดังนั้น จำนวนเต็มที่มีค่าน้อยกว่า มีค่าเท่ากับ -30

จำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า มีค่าเท่ากับ X + 15 = -15

ตัวอย่างที่ 3 สุดเขตมีส้มและมะม่วง 56 ผล ถ้าจำนวนส้มมีมากกว่าจำนวนมะม่วง 14 ผล จงหาจำนวนของผลไม้ทั้งสองชนิด

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนมะม่วง

จากข้อมูล มีส้มและมะม่วง 56 ผล

จำนวนส้มมีมากกว่าจำนวนมะม่วง 14 ผล

จะได้ จำนวนมะม่วง เท่ากับ X + 14 ผล

นั่นคือ X + (X + 14) = 56

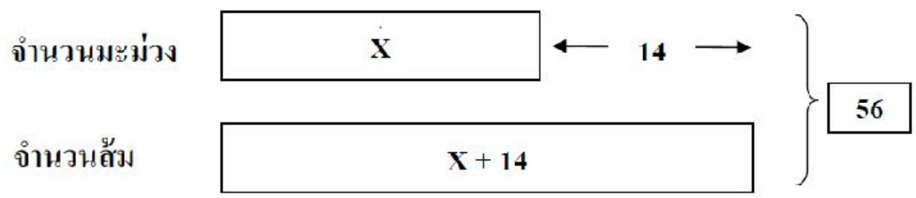
จะได้ X = 21

และ มีจำนวนส้ม เท่ากับ X + 14 = 21 + 14 = 35 ผล

ดังนั้น สุดเขตมีมะม่วงจำนวน 21 ผล

<u>วิธีคิดตามแนวคิดการใช้แบบจำลอง</u>

แบบที่ 1 ให้ X แทนจำนวนมะม่วง

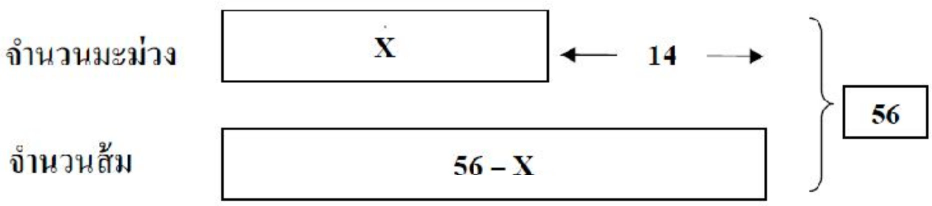


จากแบบจำลองจะได้ X + (X + 14) = 56

X = 21

ดังนั้น สุดเขตมีจำนวนมะม่วง 21 ผล และมีจำนวนส้ม X + 14 = 21 + 14 = 35 ผล

แบบที่ 2 ให้ X แทนจำนวนมะม่วง



จากแบบจำลองจะได้ (56 – X) – X = 14

X = 21

ดังนั้น สุดเขตมีจำนวนมะม่วง 21 ผล และมีจำนวนส้ม X + 14 = 21 + 14 = 35 ผล

ตัวอย่างที่ 4 มะลิมีเงินน้อยกว่าจำปี 5 บาท จำปีมีเงินน้อยกว่า ดาวเรือง 10 บาท ถ้าสามคนมีเงินรวมกัน 110 บาท จงหาจำนวนเงินของแต่ละคน

วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนเงินของมะลิ

มะลิมีเงินน้อยกว่าจำปี 5 บาท นั่นคือ จำปีมีเงิน X + 5 บาท

จำปีมีเงินน้อยกว่า ดาวเรือง 10 บาท นั่นคือ ดาวเรืองมีเงิน X + 5 + 10 บาท

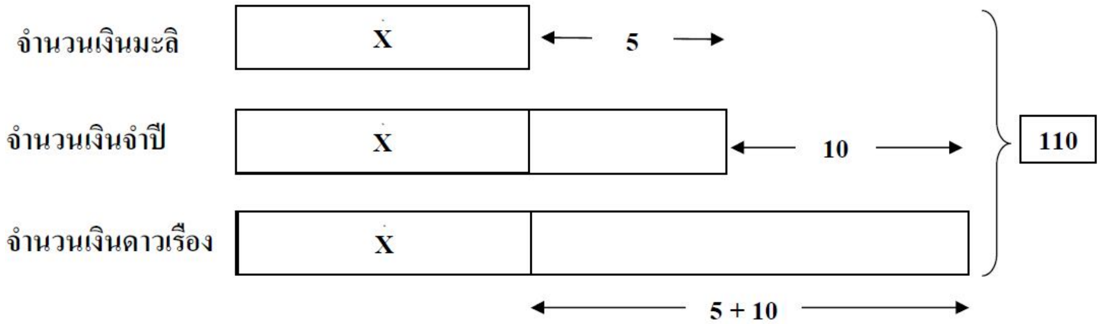
ทั้งสามคนมีเงินรวมกัน 110 บาท

จะได้ว่า $X + (X + 5) + (X + 5 + 10) = 110$ ดังนั้น $X = 30$

เพราะฉะนั้น มะลิมีเงิน 30 บาท จำปีมีเงิน 35 บาท และ ดาวเรืองมีเงิน 45 บาท

<u>**วิธีคิดตามแนวคิดการใช้แบบจำลอง**</u>

แบบที่ 1 ให้ X แทนจำนวนเงินมะลิ

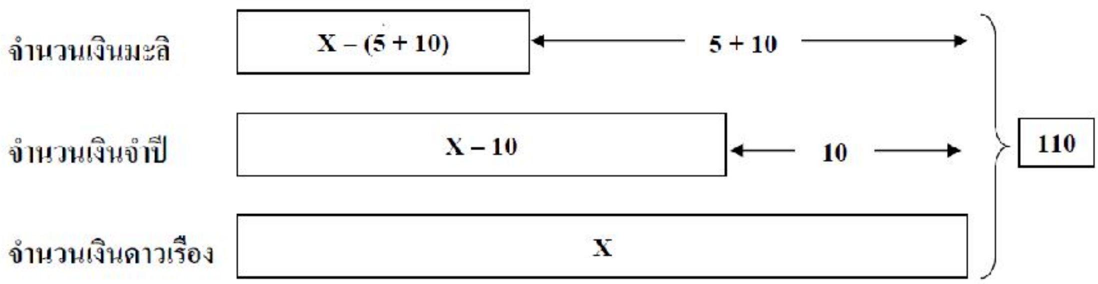


จากแบบจำลองจะได้ $X + (X + 5) + (X + 5 + 10) = 110$

$X = 30$

ดังนั้น มะลิมีเงิน 30 บาท จำปีมีเงิน 30 + 5 = 35 บาท และ ดาวเรืองมีเงิน 30 + 15 = 45 บาท

แบบที่ 2 ให้ X แทนจำนวนเงินดาวเรือง



จากแบบจำลองจะได้ $X + (X - 10) + (X - 15) = 110$

$X = 45$

ดังนั้น ดาวเรืองมีเงิน 45 บาท จำปีมีเงิน 45 – 10 = 35 บาท และ มะลิมีเงิน 45 - 15 = 30 บาท

4. กิจกรรมการเรียนรู้

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
<u>ขั้นที่ 1 ขั้นเตรียมความพร้อม</u> 1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการทบทวนเนื้อหาที่เรียนในคาบที่แล้วเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เกี่ยวกับการใช้สมบัติของการเท่ากัน โดยครูให้นักเรียนสรุปสมบัติของการเท่ากัน ในการหาคำตอบ ได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวก และสมบัติการคูณ และยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้นักเรียนอธิบายวิธีการในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ 2. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย โดยครูให้นักเรียนร่วมกันสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยวิธีที่หลากหลาย เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างสมการและแก้ปัญหา ดังนี้ **ตัวอย่างที่ 1** โรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนทั้งหมด 86 คน ถ้าโรงเรียนนี้มีจำนวนนักเรียนชายมากกว่านักเรียนหญิงอยู่ 12 คน จงหาว่ามีนักเรียนหญิงจำนวนกี่คน ครูใช้คำถามประกอบดังนี้ - โจทย์ปัญหาข้อนี้กำหนดอะไรให้บ้าง - โจทย์ให้หาอะไร - จะแก้โจทย์ปัญหาข้อนี้ได้อย่างไรบ้าง 3. ครูฟังแนวคิดของแต่ละคนถึงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาเพื่อหาคำตอบว่าคิดอย่างไร จากนั้นครูและนักเรียนสรุปแนวทางการแก้โจทย์ปัญหาของข้อนี้เพื่อเป็นตัวอย่างแก่นักเรียน 4. ครูเสนอแนวทางการแก้ปัญหาโจทย์เพิ่มเติมด้วยแนวคิดการใช้แบบจำลอง โดยให้นักเรียนวิเคราะห์โจทย์ปัญหาดังกล่าวว่ามีลักษณะโจทย์ตรงกับแบบจำลองรูปแบบใดในแนวคิดการใช้แบบจำลอง นั่นคือ แบบจำลองแบบแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็นส่วน ๆ (part – whole model) แบบจำลองแบบเปรียบเทียบ (The comparison model)	**<u>ขั้นที่ 1 ขั้นนำ</u>** 1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนด้วยการยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย ดังนี้ **ตัวอย่างที่ 1** โรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักเรียนทั้งหมด 86 คน ถ้าโรงเรียนนี้มีจำนวนนักเรียนชายมากกว่านักเรียนหญิงอยู่ 12 คน จงหาว่ามีนักเรียนหญิงจำนวนกี่คน ครูใช้คำถามดังนี้ - โจทย์ปัญหาข้อนี้กำหนดอะไรให้บ้าง - โจทย์ให้หาอะไร - จะมีวิธีการใดในการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาข้อนี้ 2. ครูให้เวลานักเรียนช่วยกันหาคำตอบของโจทย์ปัญหาดังกล่าวเป็นคู่ ๆ โดยให้นักเรียนแต่ละคู่แสดงวิธีคิดอย่างอิสระ 3. ครูสุ่มนักเรียนบางคู่ออกมาแสดงแนวคิดในประเด็นที่ถามไปข้างต้น และแสดงวิธีคิดเพื่อหาคำตอบ จากนั้นให้นักเรียนทั้งห้องร่วมแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดของเพื่อน 4. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปแนวการคิด และคำตอบของโจทย์ปัญหาข้อนี้ พร้อมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับปัญหา หรือข้อจำกัดของการแก้ปัญหา โดยครูใช้คำถามกระตุ้นดังนี้ - จากโจทย์ปัญหาดังกล่าวใครที่คิดไม่ได้บ้าง - เกิดปัญหาขั้นตอนไหนถึงทำให้ไม่สามารถหาคำตอบได้ - ขั้นการสร้างสมการเป็นปัญหากับนักเรียนหรือไม่

กลุ่มทดลอง	**กลุ่มควบคุม**
หรือ แบบจำลองแบบแสดงการเปลี่ยนแปลง (The change model) พร้อมทั้งช่วยกันสร้างแบบจำลองเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อสร้างสมการและหาคำตอบของโจทย์ปัญหา 5. ครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวทางการแก้ปัญหาด้วยแนวคิดการใช้แบบจำลอง ดังนี้ - นักเรียนคิดว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีการสร้างแบบจำลองตามแนวคิดการใช้แบบจำลอง มีข้อดี ข้อเสีย แตกต่างจากวิธีแบบทางการ และวิธีอื่น ๆ อย่างไร - นักเรียนคิดว่าการสร้างแบบจำลองตามแนวคิดการใช้แบบจำลอง ทำให้นักเรียนสามารถสร้างสมการได้ดีขึ้นหรือไม่อย่างไร - คิดว่ามีแบบจำลองอื่นที่ช่วยในการสร้างสมการหรือไม่ - มีข้อดี หรือ ข้อจำกัดอย่างไรในการสร้างแบบจำลองและสมการเพื่อแก้ปัญหา	- คิดว่ามีวิธีการใดบ้างที่จะทำให้สร้างสมการของโจทย์ปัญหานี้ได้ง่ายขึ้น โดยครูให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับคำถามข้างต้น เพื่อดูแนวคิดของนักเรียน
2. ขั้นจัดกิจกรรม ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มย่อยกลุ่มละ 3 – 4 คน โดยคละความ สามารถทั้งเก่ง กลาง และอ่อน แล้วร่วมกันทำกิจกรรม "มาสร้างสมการและหาคำตอบกันเถอะ" โดยครูมีคะแนนเป็นทีมทั้งคะแนนจากการตอบคำถามในใบกิจกรรมและคะแนนการมีส่วนร่วมในการทำงานกลุ่ม **2.1 <u>ขั้นสร้างความสัมพันธ์(Relate)</u>** เมื่อนักเรียนแต่ละกลุ่มได้พบกับสถานการณ์ปัญหา ครูกระตุ้นให้แต่ละกลุ่มวิเคราะห์ปัญหาเพื่อสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยพิจารณาว่าลักษณะโจทย์ปัญหานั้นมีความเหมือน คล้ายคลึง หรือแตกต่างจากโจทย์ปัญหาที่เคยพบหรือไม่ อย่างไร โดยครูจะใช้คำถามกระตุ้นนักเรียน ดังนี้ - นักเรียนพิจารณาซิคะว่าลักษณะโจทย์ปัญหาเหมือน	**<u>ขั้นที่ 2 ขั้นสอนและปฏิบัติกิจกรรม</u>** 1. ครูสอนขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแก่นักเรียน ดังนี้ 1) อ่านโจทย์ปัญหา สร้างความเข้าใจโจทย์และวิเคราะห์เงื่อนไขในโจทย์ 2) กำหนดสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา 3) สร้างสมการเชิงเส้นตามเงื่อนไขที่กำหนด 4) แก้สมการเพื่อหาคำตอบ 5) ตรวจสอบคำตอบที่ได้กับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ 2. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่มย่อยกลุ่มละ 3 – 4 คน โดยคละความสามารถทั้งเก่ง กลาง และอ่อน แล้วร่วมกันทำกิจกรรมสำรวจตรวจค้น "มาสร้างสมการและหาคำตอบกันเถอะ" โดยครูมีคะแนนเป็นทีมทั้งคะแนนจากการตอบคำถามในใบกิจกรรม และคะแนนการมีส่วนร่วมในการทำงานกลุ่ม 3. ครูกระตุ้นให้นักเรียนแสดงแนวทางการแก้ปัญหาอย่างอิสระ ไม่ต้องกังวลว่าวิธีคิดของตนเองจะผิด และสมาชิกทุกคนต้องมีส่วนร่วมในการทำงานกลุ่ม ร่วมแสดงความคิดเห็น และยอมรับฟังความคิดเห็นของเพื่อนในกลุ่ม

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
โจทย์ที่เคยเจอหรือไม่ - ลักษณะโจทย์ของตัวอย่างที่ 1 และโจทย์ "มาสร้างสมการและหาคำตอบกันเถอะ" มีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร - นักเรียนใช้ข้อสังเกตใดในการพิจารณาถึงความเหมือนหรือความต่างของโจทย์ปัญหา- โจทย์กำหนดอะไร โจทย์ถามอะไร - ต้องใช้ความรู้อะไรบ้าง ความรู้ที่มีอยู่เพียงพอหรือไม่ **2.2 <u>ขั้นสำรวจตรวจค้น (Investigate)</u>** ครูให้เวลานักเรียนแต่ละกลุ่มในการสำรวจตรวจค้นเพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหา ตลอดจนแก้ปัญหาและได้ผลลัพธ์ของปัญหา โดยครูกระตุ้นให้นักเรียนออกแบบวิธีแก้ปัญหาที่หลากหลายตามความสนใจ และความถนัดของนักเรียนในแต่ละกลุ่ม เพื่อสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ หรือ สร้างสมการในการหาคำตอบอย่างอิสระเพื่อเชื่อมโยงข้อมูลที่โจทย์ให้ แล้วสรุปเป็นวิธีของกลุ่มตามที่สนใจและถนัด ซึ่งขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่ม ครูต้องกระตุ้นให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบ และประเมินความถูกต้องของแนวการคิด ขั้นตอนวิธีคิด รวมทั้งพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้โดยใช้คำถามต่าง ๆ เช่น - คิดว่าจะมีแนวทางการสร้างสมการ หรือ วิธีแก้ปัญหาแบบอื่นเพื่ออธิบายการคิดหรือการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลอีกหรือไม่ - การแทนตัวแปร หรือสัญลักษณ์จากการสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลถูกต้องหรือไม่ - คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้อง และสมเหตุสมผลหรือไม่	4. ครูกระตุ้นให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบ และประเมินความถูกต้องของแนวการคิด ขั้นตอนวิธีคิด รวมทั้งพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้โดยใช้คำถามต่าง ๆ เช่น 1) การเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ถูกต้องหรือไม่ 2) คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่เป็นต้น 5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มระดมสมองเพื่อประเมินคำตอบในการทำกิจกรรมของกลุ่มตนเอง 6. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอแนวทางการสร้างสมการ และการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน 7. ครูให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบและวิธีการคิดจากปัญหาในกิจกรรมสำรวจตรวจค้น "มาสร้างสมการและหาคำตอบกันเถอะ" โดยครูจะคอยเสริมแรงกระตุ้นให้นักเรียนร่วมแสดงความคิด และนำเสนอ โดยไม่ต้องกังวลเรื่องความถูกผิด 8. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับวิธีคิดหรือแนวคิดที่ร่วมกันนำเสนอ ว่าวิธีการใดที่เหมือนกัน คล้ายกัน หรือแตกต่างกันอย่างไร มีข้อดีข้อจำกัดอย่างไร มีความเหมาะสมหรือไม่ 9. ครูยกสถานการณ์ปัญหาใหม่ ที่มีความคล้ายคลึงปัญหาเดิม แต่มีการประยุกต์มากขึ้นแก่นักเรียน โดยให้นักเรียนออกแบบแนวทางแก้ปัญหาเป็นกลุ่ม ดังนี้

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
2.3 <u>ขั้นสื่อสาร/นำเสนอ/อภิปราย (Communicate)</u> เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นร่วมกันเกี่ยวกับแนวทางการแก้โจทย์ปัญหา 2.3.1 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอแนวทางการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ หรือ สมการ และอธิบายวิธีการแก้โจทย์ปัญหาเป็นรายกลุ่มหน้าชั้นเรียน โดยครูกระตุ้น ให้กำลังใจ และแนะนำให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นอย่างอิสระ และ เปิดโอกาสให้ทุกกลุ่มร่วมแสดงความคิดเห็นร่วม กับการนำเสนอของเพื่อนหน้าชั้นเรียน 2.3.2 เมื่อแต่ละกลุ่มนำเสนอหน้าชั้นเรียนเสร็จแล้ว ครูให้นักเรียนทุกคนช่วยกันอภิปรายเปรียบเทียบวิธีการแก้โจทย์ปัญหา และการสร้างตัวแบบของแต่กลุ่ม ว่ามีความเหมือน คล้ายคลึง หรือแตกต่างกันอย่างไร มีความยาก ง่าย หรือ ข้อดี ข้อจำกัด ในการนำไปใช้อย่างไร	**“มะลิมีเงินน้อยกว่าจำปี 5 บาท จำปีมีเงินน้อยกว่า ดาวเรือง 10 บาท ถ้าสามคนมีเงินรวมกัน 110 บาท จงหาจำนวนเงินของแต่ละคน”** โดยครูให้เวลานักเรียนแต่ละกลุ่มทำงาน 8 นาที 10. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอแนวทางการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียนพร้อมทั้งให้เพื่อน ๆ ร่วมแสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับแนวคิดของแต่ละกลุ่ม 11. ครูและนักเรียนร่วมสรุปแนวทางการแก้ปัญหาที่มีความเหมาะสม พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่ามีความถูกต้องหรือไม่ มีความสมเหตุสมผลหรือไม่
2.4 <u>ขั้นประเมิน (Evaluate)</u> เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันประเมินและหาข้อสรุปสิ่งที่ค้นพบร่วมกันเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหา 2.4.1 ครูให้นักเรียนประเมินและสรุปได้ว่าในแต่ละโจทย์ปัญหา จะแก้ปัญหาด้วยการวิธีการแบบใดได้บ้าง และ มีแนวทางการสร้างสมการอย่างไร ที่มีประสิทธิภาพและมีความเหมาะสมมากที่สุดในแต่ละปัญหา 2.4.2 ครูและนักเรียนช่วยกันประเมินคำตอบที่ได้ว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง เหมาะสมกับสถานการณ์นั้น ๆ หรือไม่ คำตอบนั้นมีความสมเหตุสมผลหรือไม่ **2.5 <u>ขั้นสร้างคำถามบูรณาการปัญหา (Create)</u>** 2.5.1 ครูยกสถานการณ์ปัญหาใหม่ ที่มีความคล้ายคลึงปัญหาเดิม แต่มีการประยุกต์มากขึ้นแก่นักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้ใช้แนวทางการหาคำตอบเดิมเป็นตัวแบบ	**<u>ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป</u>** ครูให้นักเรียนสรุปประเด็นถึงเนื้อหาที่เรียนในคาบ 1. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปการสร้างแนวทางการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ในรูปของสมการ 2. ครูร่วมสรุปแนวคิด ขั้นตอนการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งการตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบเพิ่มเติมแก่นักเรียน 3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.1 ในหนังสือเป็นการบ้าน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ในการวิเคราะห์ สร้าง หรือออกแบบแนวทางสร้างสมการเพื่อหาคำตอบของโจทย์ปัญหา เป็นกลุ่ม ดังนี้ **“มะลิมีเงินน้อยกว่าจำปี 5 บาท จำปีมีเงินน้อยกว่าดาวเรือง 10 บาท ถ้าสามคนมีเงินรวมกัน 110 บาท จงหาจำนวนเงินของแต่ละคน”** โดยครูให้เวลานักเรียนแต่ละกลุ่มได้ออกแบบแนวคิดหรือหรือแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา 8 นาที 2.5.2 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอแนวทางการเชื่อมโยงข้อมูลในโจทย์ปัญหา เพื่อสร้างสมการอย่างอิสระ จากนั้นครูและนักเรียนอภิปรายร่วมกันของวิธีการต่างๆ เพื่อหาข้อสรุป **<u>ขั้นที่ 3 ขั้นสรุปและสะท้อนความคิด</u>** ครูให้นักเรียนสรุปประเด็นถึงเนื้อหาที่เรียนในคาบ 3.1 ครูให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ระหว่างลักษณะโจทย์ปัญหากับแนวทางการสร้างสมการเพื่อแก้โจทย์ปัญหาที่มีความเหมาะสมกัน จากนั้นครูร่วมเสนอแนวคิดและสรุปเพิ่มเติมแก่นักเรียน 3.2 ครูร่วมสรุปแนวคิด ขั้นตอนการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งการตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบเพิ่มเติมแก่นักเรียน 3.3 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.1 ในหนังสือเป็นการบ้าน	

5. สื่อ/แหล่งการเรียนรู้

1) กิจกรรม “มาสร้างสมการและหาคำตอบกันเถอะ”

3) แบบฝึกหัด 4.4 หนังสือ สสวท.

4) แหล่งการเรียนรู้

- แหล่งข้อมูลต่าง ๆ ในห้องสมุด เช่น หนังสือเสริมทักษะ เอกสารและวารสารคณิตศาสตร์ เป็นต้น
- อินเทอร์เน็ต

6. การวัดการประเมินผล

การประเมินการเรียนรู้ ประเมินในประเด็นดังต่อไปนี้

การวัดผล	การประเมินผล
1) พฤติกรรมการนำเสนอ การตอบคำถาม การอภิปราย และการมีส่วนร่วมในกิจกรรมเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	
2) การแสดงขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	
3) ความถูกต้องในการทำกิจกรรม และ แบบฝึกหัด 4.1	
4) มีความรับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมาย ส่งงานตรงต่อเวลา	

7. บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ปัญหาที่พบ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แนวทางแก้ไขปรับปรุง

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

อื่น ๆ

....

....

....

....

....

ชื่อกลุ่ม .... สมาชิกกลุ่ม

1. ....
2. ....
3. ....

กิจกรรม

“มาสร้างสมการและหาคำตอบกันเถอะ”

1

“จำนวนเต็มสองจำนวนรวมกัน -45 ถ้าจำนวนหนึ่งน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งอยู่ 15 จงหาจำนวนสองจำนวนนั้น”

ออกแบบแนวคิดเพื่อสร้างสมการ

....
....
....
....
....

สมการของโจทย์ปัญหา คือ

....

วิธีทำ..

....
....
....
....
....

ตรวจสอบคำตอบ

....
....
....
....
....
....

สรุปคำตอบ

....
....

2

“สุดเขตมีส้มและมะม่วง 56 ผล ถ้าจำนวนส้มมีมากกว่าจำนวนมะม่วง 17 ผล จงหาจำนวนของผลไม้ทั้งสองชนิด”

ออกแบบแนวคิดเพื่อสร้างสมการ

....
....
....
....
....

สมการของโจทย์ปัญหา คือ

....

วิธีทำ..

....
....
....
....
....

ตรวจสอบคำตอบ

....
....
....
....
....
....

สรุปคำตอบ

....
....

แนวทางที่กลุ่มเลือกใช้ และชอบมากที่สุด คือ..
เนื่องจาก (ระบุเหตุผลประกอบ) ....
ปัญหาที่เกิดจากการสร้างสมการ คือ..
....

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวปริฉัตร์ จันทร์หอม เกิดเมื่อวันที่ 12 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2528 ที่จังหวัดพัทลุง สำเร็จการศึกษาวิทยาศาสตรบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ ในปีการศึกษา 2550 และสำเร็จการศึกษาประกาศนียบัตรบัณฑิต (ป.บัณฑิต) ในปีการศึกษา 2551 โครงการส่งเสริมการผลิตครูที่มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ (สควค.) จากมหาวิทยาลัยทักษิณ และเข้าศึกษาต่อหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2554 ปัจจุบันรับราชการ ตำแหน่งครู อันดับ คศ. 1 โรงเรียนบ้านตาขุนวิทยา อำเภอบ้านตาขุน จังหวัดสุราษฎร์ธานี