การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา
มัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2

นางสาวพรธิดา สุขกรม

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย
The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2557
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A STUDY OF MISCONCEPTIONS AND MISTAKES IN MATHEMATICS OF ELEVENTH GRADE STUDENTS IN SCHOOLS UNDER THE SECONDARY EDUCATIONAL SERVICE AREA OFFICE 1 AND 2

Miss Porntida Sukkrom

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education Program in Mathematics Education
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2014
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2
โดย	นางสาวพรธิดา สุขกรม
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.....คณบดีคณะครุศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.บัญชา ชลาภิรมย์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.สุพัตรา ผาติวิสันติ์)

พรธิดา สุขกรม : การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 (A STUDY OF MISCONCEPTIONS AND MISTAKES IN MATHEMATICS OF ELEVENTH GRADE STUDENTS IN SCHOOLS UNDER THE SECONDARY EDUCATIONAL SERVICE AREA OFFICE 1 AND 2) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ. ดร.อัมพร ม้าคนอง, 114 หน้า.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 โดยมีกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 จำนวน 397 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง วิเคราะห์ข้อมูลโดยหาความถี่ ร้อยละ และการวิเคราะห์เชิงเนื้อหา

ผลการวิจัยพบว่า

1. นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มากที่สุดคือประเภท การมีมโนทัศน์ที่จำกัด รองลงมาคือ การมีความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข และการตีความผิด ตามลำดับ

2. ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบมากของการมีมโนทัศน์ที่จำกัด คือ

2.1 การมีมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนตรรกยะเพียงบางส่วน โดยไม่ได้คำนึงถึงกรณีที่เป็นค่าประมาณ

2.2 การมีมโนทัศน์ที่จำกัดเกี่ยวกับรากที่สอง โดยไม่ครอบคลุมไปถึงกรณีที่รากเป็นจำนวนจริงลบ

2.3 การมีมโนทัศน์เกี่ยวกับสมบัติของรากเพียงบางส่วน ทำให้นำไปประยุกต์ใช้ไม่ถูกต้อง

3. นักเรียนมีข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์มากที่สุดคือประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิด รองลงมาคือ ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ และการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม ตามลำดับ

4. ลักษณะที่พบมากของการใช้ข้อมูลผิด คือ

4.1 การแสดงแนวคิดในการหาคำตอบที่ถูกต้อง แต่เลือกใช้ข้อมูลผิดพลาด

4.2 การไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน

4.3 การแสดงคำตอบที่ได้จากการคำนวณไม่ถูกต้อง

ภาควิชา หลักสูตรและการสอน ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา การศึกษาคณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก .....

ปีการศึกษา 2557

5583328427 : MAJOR MATHEMATICS EDUCATION
KEYWORDS: MISCONCEPTIONS / MISTAKES

PORNTIDA SUKKROM: A STUDY OF MISCONCEPTIONS AND MISTAKES IN MATHEMATICS OF ELEVENTH GRADE STUDENTS IN SCHOOLS UNDER THE SECONDARY EDUCATIONAL SERVICE AREA OFFICE 1 AND 2. ADVISOR: ASSOC. PROF. AUMPORN MAKANONG, Ph.D., 114 pp.

This research focused on studying of mathematical misconceptions and mistakes of eleventh grade students in schools under the secondary educational service area office 1 and 2. The samples were 397 eleventh grade students who studied in the second semester of the 2014 academic year in the schools under the secondary educational service area office 1 and 2. The research instruments were the tests of misconceptions and mistakes in real number and power number. The data were analyzed by using frequency, percentage, and content analysis.

The results showed that

1. The mathematical misconceptions, descending of frequency, were limited conceptions, defective understanding about mathematics truths, overgeneralizations and mistranslations.

2. Limited conceptions were

2.1 comprehension only some parts of rational number concepts, not cover the cases of estimate values

2.2 comprehension only some parts of square root concepts, not cover the cases of negative numbers

2.3 comprehension only some parts of square root concepts that were not enough to apply correctly

3. The mathematical mistakes, descending of frequency, were misused data, errors in language and symbols, errors in operations and computations and distorted theorem or definition.

4. Misused data were

4.1 showing answers with the right concept but wrong data using

4.2 not following the commands but chose to do apart from them

4.3 showing answers from miscalculation

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Department: Curriculum and Instruction Student's Signature .....
Field of Study: Mathematics Education Advisor's Signature .....
Academic Year: 2014

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่เคารพ ผู้เสียสละเวลาและช่วยเหลือในการให้คำปรึกษา คำแนะนำและข้อคิดเห็นที่เป็นประโยชน์อย่างสูง ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องในการทำวิทยานิพนธ์ตั้งแต่เริ่มต้นจนสิ้นสุดในปัจจุบัน ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี ผู้วิจัยรู้สึกทราบซึ้งในความเอาใจใส่ดูแล ของท่านอาจารย์เป็นอย่างยิ่ง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ดร.สุพัตรา ผาติวิสันต์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งคณาจารย์สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่าน ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะในการปรับปรุงวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านเป็นอย่างสูงที่ได้เสียสละเวลาให้ความช่วยเหลือ และให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไขเครื่องมือที่ จนเป็นเครื่องมือที่พร้อมใช้ในการวิจัยครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการ คณะครู และขอขอบคุณนักเรียนโรงเรียนในกรุงเทพมหานคร ที่ให้ความร่วมมือในการนำเครื่องมือไปใช้เก็บข้อมูล ตลอดจนให้ความช่วยเหลือร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณรุ่นพี่นิสิตบัณฑิตศึกษา เพื่อนๆสาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกท่าน และเพื่อนๆทุกคนที่ได้ให้กำลังใจ และให้ความช่วยเหลือ รวมไปถึงคำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์มาโดยตลอด

ท้ายที่สุดขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่และคุณพ่อ เป็นอย่างสูงที่สนับสนุน อบรมสั่งสอนและให้กำลังใจตลอดการทำวิทยานิพนธ์ จนกระทั่งสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... จ
กิตติกรรมประกาศ ..... ฉ
สารบัญ ..... ช
บทที่ 1 บทนำ 9
ความเป็นมาและความสำคัญ 9
วัตถุประสงค์ของการวิจัย 12
สมมติฐานของการวิจัย 13
คำจำกัดความ 16
ขอบเขตของการวิจัย 18
บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 19
1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconceptions) 20
1.1 ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน 20
1.2 ลักษณะการเกิดมโนทัศที่คลาดเคลื่อน 21
2. ข้อผิดพลาด (Mistakes) 29
2.1 ความหมายของข้อผิดพลาด 29
2.2 ลักษณะของข้อผิดพลาด 30
3. ข้อแตกต่างระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับข้อผิดพลาด 37
4.งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 38
4.1 งานวิจัยในต่างประเทศ 38
4.2 งานวิจัยภายในประเทศ 41
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย 47

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

หน้า

1. การศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 47
2. การออกแบบการวิจัย 48
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง 49
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 52
5. การเก็บรวบรวมข้อมูล 56
6. การวิเคราะห์ข้อมูล 57
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 58
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 86
สรุปผลการวิจัย 87
อภิปรายผลการวิจัย 88
ข้อเสนอแนะ 96
รายการอ้างอิง 100
ภาคผนวก 101
ภาคผนวก ก. 102
ภาคผนวก ข. 111
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 114

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับการพัฒนาคนเพื่อนำไปสู่การพัฒนาความเจริญในด้านต่างๆโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานในการคิด การสร้างองค์ความรู้ และการทำงาน การจัดการศึกษาเพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ ความสามารถทางคณิตศาสตร์จึงเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญประการหนึ่งของการจัดการศึกษาของชาติ (ศิริชัย กาญจนวาสี, 2554)

นอกจากนี้คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีลักษณะและธรรมชาติเฉพาะตัว ทำให้คณิตศาสตร์มีความแตกต่างจากศาสตร์อื่น คนส่วนใหญ่มักมองว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยตัวเลขและการคำนวณ และมักคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก เนื่องจากมีทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม มากมาย และไม่มีสื่อรูปธรรมที่ใช้แทนได้ชัดเจน (อัมพร ม้าคนอง, 2554: 1) และจากที่ ชานนท์ จันทรา (2555) ได้กล่าวไว้ว่า เนื่องจากธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์นั้นมีลักษณะเนื้อหาที่เป็นนามธรรม มองเห็นหรือเข้าใจได้ค่อนข้างยาก ซึ่งในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์นั้น สิ่งที่สำคัญคือผู้เรียนจะต้องมีความรู้ และความเข้าใจหลักการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เป็น อย่างดีก่อน จึงจะทำให้สามารถเรียนวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไปได้ดี

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ถึงแม้คณิตศาสตร์จะเป็นวิชาพื้นฐาน ซึ่งมีความสำคัญและจำเป็นอย่างมาก แต่ในปัจจุบันหากเราพิจาณาจากผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขึ้นพื้นฐาน (O-NET) กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตั้งแต่ปีการศึกษา 2551–2555 มีคะแนนเฉลี่ยดังต่อไปนี้ 32.49, 35.97, 28.56, 14.99, 22.73 ตามลำดับ ซึ่งต่ำกว่าร้อยละ50 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ , 2556: Online) ผลสอบนี้สะท้อนให้เห็นถึงศักยภาพที่จำเป็นต้องได้รับการพัฒนาอย่างจริงจัง ซึ่งสาเหตุที่คุณภาพของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยยังไม่น่าเป็นที่พอใจนั้น อาจมาจากการที่นักเรียนเข้าใจเนื้อหาวิชาไม่ดีพอหรือมีข้อผิดพลาดระหว่างทำข้อสอบ

อัมพร ม้าคนอง (2554: 3 - 5) ได้อธิบายประเภทของความรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่ง แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ 1. ความรู้เชิงมโนทัศน์ (Conceptual knowledge) เป็นความรู้เกี่ยวกับความหมายและโครงสร้างของคณิตศาสตร์ เป็นความรู้เกี่ยวกับความสัมพันธ์หรือความเกี่ยวข้องกันของสิ่งที่ใช้อธิบายและ ให้ความหมายของกระบวนการคณิตศาสตร์ รวมทั้งเป็นความรู้เกี่ยวกับความคิดรวบยอด ทฤษฎีและที่มา หรือเหตุผลของขั้นตอนหรือวิธีการทางคณิตศาสตร์ ความรู้ประเภทนี้มีความสำคัญมากทั้งต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับสูงและต่อการนำคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหา แต่มักไม่ได้ถูกเน้นในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ 2. ความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ (Procedural knowledge) เป็นความรู้เกี่ยวกับการคำนวณ การระบุปัญหา การใช้กฎ กลวิธี และขั้นตอนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น การคำนวณพื้นที่โดยใช้สูตร การหารยาว การหารากที่สองของจำนวน ความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการเป็นสิ่งที่สอนกันมากในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ จนบางครั้งกลายเป็นความรู้เกี่ยวกับการทำงานเป็นลำดับขั้นแบบซ้ำๆ หรือเป็นการทำงานที่ผู้ทำไม่เข้าใจความหมายของสิ่งที่ทำ และอัมพร ม้าคนอง (2554: 6 – 7) ยังอธิบายเพิ่มเติมอีกว่า ความรู้ทั้งสองประเภท คือ ความรู้เชิงมโนทัศน์ และความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ มีความสำคัญต่อการนำคณิตศาสตร์ไปใช้งาน ในการเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์เฉพาะใดๆ ผู้เรียนจึงควรได้รับความรู้ทั้งสองประเภท แต่ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป มักเน้นการสอนความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ การสอนความรู้เชิงมโนทัศน์มีน้อยมาก แต่เนื่องจากมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจำเป็นต้องมีครูคณิตศาสตร์จึงพยายามพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียนบรรลุวัตถุประสงค์การเรียนรู้ที่กำหนดไว้ทุกคน แต่ในความเป็นจริงพบว่าแม้นักเรียนจะได้รับการสอนจากครูคนเดียวกันและในเวลาเดียวกัน ก็ยังคงมีนักเรียนส่วนหนึ่งที่ไม่สามารถบรรลุวัตถุประสงค์การเรียนรู้ตามที่กำหนดได้ อาจเนื่องมาจากความแตกต่างของนักเรียนทั้งทางด้านสติปัญญา ความถนัด ความสนใจ รวมทั้งความบกพร่องในการจัดการเรียนการสอนของครู ซึ่งนำไปสู่ปัญหาสำคัญได้แก่ การที่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

หากจะกล่าวถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematics Concept) ซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปแก้ปัญหาหรือใช้งาน สำหรับนักเรียนที่มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ดี มักสามารถเรียนรู้และแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ดี รวมทั้งมีพื้นฐานที่จะเชื่อมโยงและคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับสูงขึ้นไปได้ดีด้วย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ,2552) แต่จากการที่นักเรียนอาจได้รับจากการสอนเนื้อหาที่ไม่เพียงพอ การคิดอย่างไม่เป็นระบบ หรือความจำที่บกพร่อง จะก่อให้เกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งเป็นปัญหาหนึ่งที่นำไปสู่ความยากลำบากในการเรียนคณิตศาสตร์ตั้งแต่แนวคิดในระดับประถมไปจนถึงการเรียนแคลคูลัส (Allen , 2007: 1 - 2) ซึ่งตรงกับที่ Brown (1992: 17 - 34) ได้กล่าวไว้ว่า “มโนทัศน์

พื้นฐานที่คลาดเคลื่อนจะก่อให้เกิดปัญหาในการเรียนรู้มโนทัศน์ที่สูงขึ้นไป ซึ่งหากผู้เรียนมีมโนทัศน์เดิมคลาดเคลื่อน ย่อมส่งผลกระทบต่อการแก้ปัญหา การแสดงวิธีทำและการเรียนรู้เนื้อหาที่สูงขึ้นอีกต่อไป" ส่วนในด้านของครูนั้นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนก็เป็นสาเหตุใหญ่ที่ทำให้การสอนของครูไม่เห็นผล ดังนั้นจึงเป็นสิ่งสำคัญมากที่จะตระหนักถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนและสอนนักเรียนใหม่เพื่อแก้ไขความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้ถูกต้อง (Allen , 2007: 1-2) หากสามารถทราบถึงจุดที่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนก็จะเป็นประโยชน์ในการจัดการเรียนรู้โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ เพราะเป็นวิชาที่มีเนื้อหาต่อเนื่อง มีลักษณะเป็นนามธรรมและมีความซับซ้อน ซึ่งหากครูสามารถให้ข้อมูลย้อนกลับเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนแต่ละคนได้ในภายหลังของการประเมินผลการเรียนรู้แต่ละเนื้อหาก่อนที่จะเรียนเนื้อหาถัดไป ก็จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งทั้งต่อตัวนักเรียนและครู โดยจะทำให้นักเรียนทราบถึงข้อบกพร่อง ที่เป็นอุปสรรคต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของตน และสามารถปรับปรุงแก้ไขได้ทัน ส่วนตัวครูนั้นก็จะทราบถึงข้อมูลของนักเรียนว่ามีจุดบกพร่องตรงส่วนไหน เพื่อนำไปเป็นแนวทางในการปรับปรุงการสอนของตน (เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร, 2551: 26) ซึ่งสอดคล้องกับที่ Chai and Ang (1987: 189 – 198) กล่าวถึงการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้การพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีประสิทธิภาพและการศึกษาความคลาดเคลื่อนจะทำให้สามารถจัดหาข้อมูลซึ่งเกี่ยวข้องกับความคิดของนักเรียนเกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์และกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลเหล่านี้มีความหมายมากในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะต้องมีการแนะแนวทางในการช่วยให้นักเรียนหลีกเลี่ยงปัญหาและสามารถอธิบายได้ว่า เพราะสาเหตุใดนักเรียนจึงไม่มีการพัฒนาด้านความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ การละเลยต่อมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความคิดที่ผิดเพราะนั่นอาจเป็นก้าวสำคัญของการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

นอกจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแล้วยังมีอีกหนึ่งสิ่งที่มักเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งมีความใกล้เคียงกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แต่หากพิจารณาความจริงแล้วนั้นจะเห็นได้ชัดว่ามีความหมายที่แตกต่างกัน นั่นคือ "ข้อผิดพลาด" หรือคำในภาษาอังกฤษ เรียกว่า "Mistakes" ถึงแม้ว่าข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจะมีความเกี่ยวข้องกัน แต่ทั้งคู่นั้นแตกต่างกัน (Luneta and Makonye, 2010: 35) จากเอกสาร misconceptions with the key objectives ได้อธิบายไว้ว่า ข้อผิดพลาดในคณิตศาสตร์อาจเกิดจากสาเหตุที่หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นเกิดจากความสะเพร่า ขาดสมาธิในการทำงาน ซึ่งข้อผิดพลาดไม่ได้เกิดขึ้นเป็นประจำ โดยคำตอบอาจเป็นคำตอบที่ผิดแต่นักเรียนสามารถแก้ไขหรือทำให้ถูกต้องด้วยตนเองได้อย่างง่ายดาย ส่วนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกิดจากความผิดพลาดในระบบความคิด (Riccomini , 2005: 233 - 242) ข้อผิดพลาดสามารถเห็นได้ชัดในผู้เรียนซึ่งจะแสดงจากการเขียนหรือพูด แต่มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้นมักซ่อนอยู่

โดยผู้ที่สังเกตไม่ทันสังเกตเห็น โดยบางครั้งอาจซ่อนอยู่ภายใต้คำตอบที่ถูกต้องก็เป็นได้ ซึ่งคำตอบนั้นอาจเป็นคำตอบที่ถูกต้องโดยบังเอิญ นักการศึกษาจำเป็นที่จะต้องรับฟังอย่างละเอียดเพื่อตรวจสอบการให้เหตุผลของนักเรียนในการหาคำตอบแต่ละข้อ ซึ่งจะทำให้นักการศึกษาติดตามการให้เหตุผลของนักเรียนได้อย่างถูกต้อง (Smith , Disessa & Roschelle, 1993: 115 - 163) บางครั้งข้อผิดพลาดได้รับการยกย่องว่าเป็นโอกาสที่จะสะท้อนให้เห็นและเรียนรู้แทนที่จะเตือนผู้เรียนเกี่ยวกับการหลีกเลี่ยงข้อผิดพลาดเราสามารถใช้ข้อผิดพลาดเป็นตัวเร่งปฏิกิริยาสำหรับการเรียนรู้โดยมองข้อผิดพลาดเป็นโจทย์ปัญหาสถานการณ์หนึ่ง (Ashlock , 2006: 9)

อย่างไรก็ตามการที่จะพัฒนาประสิทธิภาพการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูมีความจำเป็นที่จะต้องทราบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและมีข้อผิดพลาดในลักษณะใดซึ่งแสดงให้เห็นว่าการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดย่อมเป็นสิ่งที่จำเป็นต่อการพัฒนาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้แก่นักเรียน เช่นเดียวกับการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เพื่อเป็นข้อมูลในการวางแผนแก้ไขปรับปรุงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น ผู้วิจัยตระหนักเห็นความสำคัญต่อประเด็นที่กล่าวมาข้างต้นนี้ จึงมีความสนใจที่จะทำการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนและหวังว่างานวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์และผู้สนใจศึกษาค้าต่อไป

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เพื่อศึกษาข้อผิดพลาดในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

สมมติฐานของการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยทั้งในและต่างประเทศ พบว่างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์มีผู้ศึกษาไว้มากมาย ดังต่อไปนี้

เกษสุดา บูรณพันศักดิ์ (2545: 39 – 79) ได้ทำวิจัยเรื่อง “การศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา กรุงเทพมหานคร” โดยได้ทำการศึกษาใน 3 ประเด็นคือ 1) เพื่อศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 2) เพื่อศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำแนกตามระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์ และ3) เพื่อศึกษา มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2545 จากโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษากรุงเทพมหานครจำนวน 313 คน และผู้วิจัยคัดเลือกนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์ต่ำที่ได้คะแนนแบบทดสอบมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันน้อยที่สุดเพื่อสัมภาษณ์จำนวน 24 คน โดยผู้วิจัยได้ผลการศึกษาในประเด็นของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันด้านการใช้บทนิยาม สัญลักษณ์ สมบัติและตัวแปรและนักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในด้านการใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้การใช้สูตรการคิดคำนวณการตีความด้านภาษาการตรวจสอบการแก้ปัญหาและการเขียนกราฟ

ไข่มุก เลื่องสุนทร (2552: 1 - 6) ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต1 และประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต 1กระทรวงศึกษาธิการ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสุ่มแบบแบ่งชั้น (Stratified Random Sampling) โดยสุ่มโรงเรียนที่เปิดสอนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต 1 กระทรวงศึกษาธิการ ปีการศึกษา 2552 จากแต่ละอำเภอ ด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายโดยการจับสลากจำนวน 10 โรงเรียน และพิจารณาตามสัดส่วนจำนวนโรงเรียนในแต่ละอำเภอ ในแต่ละโรงเรียนที่สุ่มได้ สุ่มห้องเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนละ 1 ห้องเรียนโดยวิธีการจับสลาก จะได้ห้องเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 ห้อง เป็นจำนวนนักเรียน 402 คน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการสัมภาษณ์เป็นนักเรียนที่มีความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่องจำนวนมากที่สุด จำนวน 10 คนซึ่งผลการวิจัยพบว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการ

ทำแบบวัดมโนทัศน์แบบอัตนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง “จำนวน” ซึ่งประกอบด้วย 3 หัวข้อ คือ สมบัติของจำนวนนับ ระบบจำนวนเต็ม และเลขยกกำลังเรียงตามลำดับความถี่จากมากไปหาน้อย คือ ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ ด้านการใช้ข้อมูลผิด และด้านการตีความด้านภาษา

Muzangwa and Chifamba (2012: 1 – 10) ทำการวิจัยเกี่ยวกับการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการเรียนแคลคูลัสของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ในมหาวิทยาลัย เกรท ซิมบับเว โดยข้อมูลได้มาจากการรวบรวมผ่านการทำแบบฝึกหัดแคลคูลัส1 และ 2 นักศึกษาผ่านการเรียนแคลคูลัส 1 ในเทอมแรก โดยให้นักศึกษาทำแบบทดสอบก่อนเรียนในตอนเริ่มต้นเพื่อประเมินระดับของผู้เรียนในตอนแรก และเพื่อตรวจสอบว่าสาเหตุของความเข้าใจผิดบางอย่างเป็นเพราะพื้นฐานของผู้เรียน จากนั้นจะทำการทดสอบหลังเรียนเมื่อจบจบการเรียน (60 ชั่วโมง) จุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้ให้ความสนใจในเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้น ได้แก่ ฟังก์ชัน ลิมิต ความต่อเนื่อง พื้นฐานการอนุพันธ์และพื้นฐานปริพันธ์ จากการวิจัยแสดงว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นผลมาจากพื้นฐานความรู้ของแคลคูลัสเบื้องต้นที่ไม่ดี อีกทั้งสาเหตุหลักของข้อผิดพลาดคือช่องว่างระหว่างความรู้ในพีชคณิตพื้นฐาน

Movshovitz and others (1987: 3 – 14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การจำแนกหมวดหมู่สำหรับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย” โดยมีจุดประสงค์ของการศึกษาคือ การตรวจสอบข้อผิดพลาดทั่วไป ที่เกิดขึ้นและพยายามจัดหมวดหมู่ให้แก่ข้อผิดพลาดเหล่านั้นซึ่งตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีข้อผิดพลาดตามหมวดหมู่ที่แบ่ง ไว้ซึ่งสามารถเรียงตามลำดับความถี่จากน้อยไปหามากได้ดังนี้ ด้านการขาดการตรวจสอบวิธีการหาคำตอบ (Unverified solution) ด้านการอนุมานโดยใช้ตรรกวิทยาที่ไม่สมบูรณ์ (Logically invalid inference) ด้านการตีความด้านภาษาผิด (Misinterpreted language) ด้านการใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data) ด้านข้อผิดพลาดทางเทคนิคการทำ (Technical errors) และด้านการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted Theorem or Definition)

Schnepper and Mccoy (2013: 1 – 7) ได้ทำวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมปลาย” ซึ่งมีนักเรียนเข้าร่วม 38 คน โดยเป็นนักเรียนชายจำนวน 19 คน และนักเรียนหญิงจำนวน 19 คน โดยผู้วิจัยทำการวิเคราะห์การ

ทำงานของนักเรียนที่เข้าร่วมวิจัยทุกคนและคัดเลือกนักเรียนมาสัมภาษณ์ถึงขั้นตอนและวิธีการแก้ปัญหาจำนวน 5 คน โดยผู้เข้าร่วมจะได้รับการสอนเนื้อหาก่อนจากนั้นจะได้รับการประเมินสั้นๆ โดยการสอบย่อยจากนั้นผู้วิจัยจะทำการวินิจฉัยและวิเคราะห์หาจุดที่ผิดพลาดของนักเรียน โดยระหว่างระยะเวลาเรียน ข้อผิดพลาดเหล่านี้จะได้รับการสอนใหม่อีกครั้ง และในตอนท้ายของบทเรียนนักเรียนจะได้รับการทดสอบท้ายบท ซึ่งจะวัดในเรื่องของความรู้เชิงกระบวนการและความรู้เชิงมโนทัศน์ นอกจากนี้ผู้วิจัยยังทำการแบ่งประเภทของข้อผิดพลาดออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ คำตอบที่ไม่สมบูรณ์, การใช้ข้อมูลที่ผิด, ข้อผิดพลาดทางเทคนิค, ข้อผิดพลาดที่เกิดจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้เรียนมาก่อนหน้า และการบิดเบือนทางบทนิยาม โดยจากการวินิจฉัยพบข้อผิดพลาดที่ไม่ซ้ำกันจำนวน 143 จุดจากทั้งหมด 265 จุด ซึ่งหากเรียงลำดับข้อผิดพลาดที่พบจากมากไปน้อยเป็นร้อยละ (รวมข้อผิดพลาดจุดที่ซ้ำ) ได้ดังนี้ คำตอบที่ไม่สมบูรณ์, การใช้ข้อมูลที่ผิด, ข้อผิดพลาดทางเทคนิค, ข้อผิดพลาดที่เกิดจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้เรียนมาก่อนหน้าและการบิดเบือนทางบทนิยามตามลำดับ

Swedosh (1996, 534 – 541) ทำวิจัยเกี่ยวกับการตรวจสอบลักษณะและความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่ตรวจพบในการทดสอบของสองสถาบันอุดมศึกษาได้แก่ University of Melbourne และ LaTrobe University โดยในเอกสารได้ระบุถึงลักษณะการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนรวมไปถึงร้อยละความถี่ที่พบในโจทย์แต่ละข้อ ซึ่งผู้วิจัยได้อธิบายว่าความเข้าใจที่ไม่เพียงพอมีแนวโน้มที่จะส่งผลไปยังการนำทฤษฎีบทไปใช้เกินขอบเขต ซึ่งการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขดูเหมือนว่าจะเป็นลักษณะหลักของการที่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าข้อมูลเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้จะนำไปสู่การให้ความสำคัญในการเน้นย้ำประเด็นเหล่านี้ให้มากขึ้นเพื่อช่วยลดความถี่ของการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในนักเรียน

จากงานวิจัยข้างต้น พบว่าทั้งเกษสุดา บูรณพันศักดิ์, ไข่มุก เลื่องสุนทรและMovshovitz ต่างรายงานว่าข้อบกพร่องที่พบมากที่สุดคือการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม สัญลักษณ์สมบัติและตัวแปร นอกจากนี้ทั้งเกษสุดา บูรณพันศักดิ์และMuzangwa and Chifamba ยังพบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ดี ซึ่งสอดคล้องกับSwedosh ที่ได้อธิบายเพิ่มเติมว่าความเข้าใจที่ไม่เพียงพอมีแนวโน้มที่จะส่งผลไปยังการนำทฤษฎีบทไปใช้เกินขอบเขต และการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขดูเหมือนว่าจะเป็นลักษณะหลักของการที่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ส่วน Schnepper and Mccoy นั้นได้ผลการวิจัยที่แตกต่างกันออกไปคือพบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องที่คำตอบไม่สมบูรณ์มากที่สุด

เนื่องจากงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้แบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ จากการวิเคราะห์งานวิจัย รายงานการสำรวจ และข้อมูลจากหนังสือเป็นพื้นฐาน แต่ก็ไม่สามารถทราบได้แน่ชัดว่าประชากรของการวิจัยครั้งนี้ซึ่งได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 จะมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดเป็นไปตามงานวิจัยตั้งต้นหรือไม่ จึงมีความจำเป็นที่จะต้องเก็บข้อมูลจริงเพื่อพิจารณาว่าประชากรของการวิจัยในครั้งนี้จะมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ประเภทใดบ้าง

จากงานวิจัยข้างต้น แม้ว่าผู้วิจัยจะไม่ได้แบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์เหมือนกับงานวิจัยข้างต้นทั้งหมด แต่ยังคงมีความสอดคล้องกันบ้างในบางส่วน ดังนั้นผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานงานวิจัย โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากงานวิจัยตั้งต้นเป็นพื้นฐาน ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในด้านการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขมากที่สุด
2. นักเรียนมีข้อผิดพลาดในด้านการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยามมากที่สุด

คำจำกัดความ

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้นิยามคำจำกัดความพร้อมทั้งแบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ออกเป็นหมวดหมู่ เพื่อความชัดเจน และสะดวกต่อการอธิบายข้อมูล ซึ่งได้มาจากการวิเคราะห์งานวิจัย รายงานการสำรวจ และข้อมูลจากหนังสือเป็นพื้นฐาน ซึ่งนิยามคำจำกัดความของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และข้อผิดพลาด ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึง ความคิดหรือความเข้าใจที่แตกต่างจากความเป็นจริงอย่างเป็นระบบซึ่งอาจเกิดจากการรับรู้จากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้องหรือไม่สมบูรณ์ ไม่ชัดเจนของแต่ละบุคคล ซึ่งผู้เรียนมักไม่รู้สึกว่าตนเองมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เนื่องจากคิดว่าตนเองเข้าใจถูกต้องแล้ว ในการวิจัยครั้งนี้จำแนกมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Graeber (1992: 4 - 51) และ Wylie and Ciofalo (2008: 1 – 2) ซึ่งสามารถแบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations) เป็นการนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือนิยามไปใช้ในกรณีอื่นทั่วไป ซึ่งเกินกว่าขอบเขตหรือเงื่อนไขที่ได้ระบุไว้

2. ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Defective understanding about mathematics truths) เป็นความเข้าใจที่มีพื้นฐานมาจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิด

3. การตีความผิด (Mistranslations) เป็นการแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง

4. การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited conceptions) เป็นการมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง

2. ข้อผิดพลาด หมายถึง ความผิดพลาดที่ไม่เป็นระบบหรือการเบี่ยงเบนจากความถูกต้อง ซึ่งเกิดจากความพลาดพลั้งหรือขาดสมาธิในการทำงาน โดยเกิดจากความไม่ตั้งใจและไม่ได้เกิดขึ้นเป็นประจำ และสามารถเกิดขึ้นได้แม้จะมีความเข้าใจในพื้นฐานอยู่แล้ว ในการวิจัยครั้งนี้จำแนกข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Ashlock (1994: 4 – 5) Backman (1978: 177 – 195) Carpmail and others (2013: 2 – 7) Engelhardt (1977: 149 – 154) Movshovitz and others (1987: 3 – 12) และ Radatz (1979: 163 – 170) ซึ่งสามารถแบ่งประเภทของข้อผิดพลาดได้เป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. การใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ใช้ข้อมูลอื่นที่ไม่สอดคล้องต่อการใช้แก้ปัญหา ไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน เลือกใช้หน่วยของตัวแปรผิด หรือการลอกรายละเอียดเกี่ยวกับโจทย์ผิด โดยข้อผิดพลาดอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มต้น หรืออาจเกิดขึ้นในช่วงระหว่างการดำเนินการกับข้อมูล

2. ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ (Errors in language and symbols) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ภาษา สัญลักษณ์หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง รวมไปถึงการนำเสนอข้อมูลจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ สมการ แผนภาพ ตารางหรือกราฟไม่ถูกต้อง

3. ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ (Errors in operation /and computation) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณหรือการเลือกการดำเนินการที่ไม่สอดคล้องในการแก้ปัญหา

4. การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted theorem or definition) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยามที่เฉพาะเจาะจง ผิดไปจากความเป็นจริง

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยคือคณิตศาสตร์พื้นฐานเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าตำรา เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งได้นำเสนอรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconceptions)
    1.1 ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
    1.2 ลักษณะการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

2. ความหมายของข้อผิดพลาด (Mistakes)
    2.1 ความหมายของข้อผิดพลาด
    2.2 ลักษณะของข้อผิดพลาด

3. ข้อแตกต่างระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับข้อผิดพลาด

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    4.1 งานวิจัยในต่างประเทศ
    4.2 งานวิจัยภายในประเทศ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconceptions)

1.1 ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน

นักการศึกษาคณิตศาสตร์ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ดังนี้

Allen (2007: 1) กล่าวถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ว่า เป็นความสัมพันธ์ทางความคิดซึ่งได้รับมาแต่อาจจะไม่เหมาะสมในบริบทบางอย่าง ความเข้าใจผิดนี้ไม่ได้อยู่อย่างอิสระแต่ขึ้นอยู่กับกรอบความคิดบางอย่างที่มีอยู่ และสามารถเปลี่ยนหรือหายไปได้เมื่อกรอบความคิดเปลี่ยน

Askew and William (1995: 5 - 16) ได้กล่าวถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า คือการที่นักเรียนประยุกต์ใช้กฎทางคณิตศาสตร์บางกฎซึ่งมีการจำกัดโดเมนผิดอย่างเป็นระบบ

Chambers (2008: 107 - 108) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความผิดพลาดที่เป็นระบบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนก่อให้เกิดคำตอบที่ไม่ถูกต้องแต่ก็นำไปสู่คำตอบที่สามารถอธิบายได้และสามารถเกิดขึ้นซ้ำอาจกล่าวได้ว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่ผิด

Jordaan (2005: 11 - 12) กล่าวถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า เป็นการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นจากพื้นฐานความรู้ก่อนหน้าที่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ ซึ่งไม่สามารถมองข้ามได้เนื่องจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจะเป็นอุปสรรคต่อการพัฒนาความเข้าใจที่ซับซ้อนของแนวคิดพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ให้ดี

Riccomini (2005: 233 - 242) ได้กล่าวถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า มีลักษณะผิดพลาดในระบบความคิด

Swan (2001: 154) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไม่ใช่ความคิดที่ผิดแต่เป็นความคิดรวบยอดในช่วงแรกเริ่มหรือทั่วไปที่นักเรียนได้สร้างขึ้น ซึ่งในความเป็นจริงแล้วอยู่ในขั้นที่อาจจำเป็นต้องพัฒนา

ไข่มุก เลื่องสุนทร (2552: 14) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า ความคิดสำคัญหรือความคิดรวบยอดที่แตกต่างไปจากความเป็นจริง และเป็นความคิดที่ต่างไปจากแนวคิดที่

ได้รับการยอมรับกันในสังคม อาจได้มาจากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน ของแต่ละบุคคลซึ่งวัดได้จากการทำแบบวัด

โสภาพรรณ แสงศัพท์ (2518: 12) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า เป็นความเชื่อและความเข้าใจที่ได้มาจากแนวความคิดหรือความรู้ที่ไม่ถูกต้องความรู้ที่ไม่สมบูรณ์ คลุมเครือ

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2546: 18) ให้ความหมายของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า เป็นความคิด ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน ไม่สมบูรณ์ และแตกต่างไปจากความเป็นจริงที่ได้รับการยอมรับที่อาจจะมาจากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้อง ไม่ชัดเจน ของบุคคลแต่ละคน

จากข้อมูลข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน หมายถึงความคิดหรือความเข้าใจที่ผิดไปจากความเป็นจริงอย่างเป็นระบบ และเป็นการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นจากพื้นฐานความรู้ก่อนหน้าที่ไม่ถูกต้องสมบูรณ์ ซึ่งอาจเกิดจากการรับรู้ จากประสบการณ์ที่ไม่ถูกต้อง หรือถูกต้องไม่หมด ไม่ชัดเจนของแต่ละบุคคล

1.2 ลักษณะการเกิดมโนทัศที่คลาดเคลื่อน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2552: 29 – 32) ได้กล่าวถึงเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ครูและนักเรียนมักมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน โดยครอบคลุมลักษณะความคลาดเคลื่อนดังประเด็นต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่ครูและนักเรียนมักเข้าใจคลาดเคลื่อนประเด็นนี้ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม ข้อเท็จจริงและการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่ครูมักเข้าใจคลาดเคลื่อน หรือครูอาจไม่ได้เข้าใจคลาดเคลื่อน แต่เมื่อสอนไปแล้วนักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนเอง เช่น เข้าใจว่า $\sqrt{4} = \pm 2$ ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับการใช้เครื่องหมายกรณฑ์ โดยครูส่วนใหญ่อาจไม่ได้เน้นในขณะสอนว่า เครื่องหมาย $\sqrt{4}$ ใช้แทนรากที่สองที่เป็นบวกของ 4
2. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอที่อาจทำให้เกิดความเข้าใจคลาดเคลื่อน ลักษณะความคลาดเคลื่อนในประเด็นนี้เกี่ยวข้องกับการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอที่ครูใช้และบางครั้งทำให้นักเรียนมีความเข้าใจคลาดเคลื่อน ทั้งที่ครูอาจมีมโนอาจมีมโนทัศน์ที่ถูกต้อง แต่การสื่อสารกับนักเรียนไม่

ชัดเจนพอ ทำให้เข้าใจบิดเบือน หรือไม่มีการสื่อความหมายที่ลึกซึ้งในทางคณิตศาสตร์มากพอ ทำให้นักเรียนเข้าใจไม่ชัดเจนจนอาจกลายเป็นความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนได้ในบางครั้ง เช่น การใช้สัญลักษณ์ AB แทนความยาวของส่วนของเส้นตรง AB มีความหมายแตกต่างกันกับสัญลักษณ์ $\overline{AB}$ ซึ่งใช้แทนชื่อเรียกส่วนของเส้นตรง AB นักเรียนมักนำไปใช้อย่างถูกบ้างผิดบ้าง

เช่น AB = CD ใช้ผิดเป็น $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ ใช้ผิดเป็น AB // CD

3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความหมายของคำที่ใช้ในคณิตศาสตร์บางเนื้อหามีความจำเป็นที่จะต้องให้นักเรียนยอมรับข้อตกลงหรือความหมายของคำบางคำและนำไปใช้ก่อนโดยไม่ได้ให้ความรู้ ความเข้าใจที่ชัดเจน เนื่องจากมีข้อจำกัดทางพื้นฐานความรู้ของนักเรียนและลำดับขั้นตอนของเนื้อหาที่ต้องจัดให้เหมาะสมกับนักเรียน จึงอาจทำให้สับสนและมีความเข้าใจไม่ตรงกัน เช่น ความเข้าใจเกี่ยวกับการให้ความหมายของคำหรือข้อความ ที่บางข้อความ ให้ไว้ในลักษณะที่เป็นบทนิยามบางข้อความกำหนดให้เป็นข้อตกลง และบางข้อความก็ให้ไว้ว่าเป็นสมบัติทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างข้อความที่ใช้ในลักษณะต่างๆ

บทนิยาม “ตัวประกอบของจำนวนนับใดๆ คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นลงตัว”

ข้อตกลง “จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียงสองตัว คือ 1 และตัวเอง เรียกว่า จำนวนเฉพาะ”

สมบัติ “เมื่อ a แทนจำนวนใดๆ และ n แทนจำนวนเต็มบวก $a^m \times a^n = a^{m+n}$”

4. ความคลาดเคลื่อนลักษณะอื่นๆ

ความคลาดเคลื่อนในประเด็นนี้ไม่อยู่ใน 3 ประเด็นที่กล่าวไว้ข้างต้น แต่เป็นความคลาดเคลื่อนที่อาจเป็นอุปสรรคต่อการเรียนรู้หรือแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนมีความเข้าใจที่ถูกต้องว่าจำนวนตรรกยะ เป็นจำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ เช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{-5}{7}$ทำให้นักเรียนคุ้นเคยกับสัญลักษณ์ของเศษส่วนที่ทั้งตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็ม เมื่อต้องแก้ปัญหาที่ถามว่า $\frac{0.92}{0.81}$เป็นจำนวนตรรกยะหรือไม่ นักเรียนอาจตอบว่าไม่ใช่ทั้งที่คำตอบคือใช่ สิ่งที่เกิดขึ้นแสดงให้เห็นว่านักเรียนไม่ได้มีความเข้าใจคลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะ แต่เป็นความเข้าใจคลาดเคลื่อนในการนำมโนทัศน์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2546: 6) ได้จำแนกลักษณะของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ทั้งหมด 4 ด้าน ดังต่อไปนี้

1. ด้านการตีความจากโจทย์ หมายถึง ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง นำข้อมูลที่ผิดหรือโจทย์ไม่กำหนดมาใช้ในการ คำนวณ ไม่ใช้ข้อมูล ที่โจทย์กำหนด เขียนหรือแปลความหมายของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ หรือสิ่งที่โจทย์ให้หาไม่ครบ เกิน ไม่ชัดเจนหรือผิดพลาด กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้หรือสิ่งที่โจทย์ให้หาผิด ไม่เข้าใจความหมายของตัวแปรที่โจทย์กำหนด หรือ นำข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาใช้ผิด
2. ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติหมายถึง ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการจำทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติผิด ขาดความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ หรือไม่สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บทนิยาม และสมบัติ
3. ด้านการคิดคำนวณ หมายถึง ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้น ขาดความเข้าใจในพีชคณิตคือไม่สามารถแก้สมการอสมการหรือแยกตัวประกอบได้หรือขาดความระมัดระวัง
4. ด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา หมายถึง ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการไม่หาคำตอบตามที่โจทย์ต้องการหรือทำไม่เสร็จ สรุปคำตอบจากโจทย์ไม่ถูกต้อง ไม่ครบทุกกรณี ไม่สรุปคำตอบให้เป็นผลสำเร็จตามหลักคณิตศาสตร์ หรือแสดงวิธีการตรวจคำตอบไม่ครบ ไม่ชัดเจน ผิดพลาด

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Fisher (1985: 49) กล่าวถึงลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไว้ ดังนี้

1. เป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไปจากมโนทัศน์ของผู้เชี่ยวชาญในแขนงนั้นๆ
2. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเพียงเรื่องเดียวหรือจำนวนหนึ่งจะขยายออกไปได้ เนื่องจากมีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นที่แตกต่างกันของแต่ละบุคคลจำนวนมาก
3. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจะขยายวงกว้างออกไปจากเรื่องที่ง่ายไปสู่เรื่องที่ยากขึ้น และมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจำนวนไม่น้อยที่ยากต่อการเปลี่ยนแปลงแก้ไข หรือแก้ไขได้น้อยมาก ถ้าใช้วิธีการสอนแบบดั้งเดิม
4. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนบางเรื่องก็เกี่ยวข้องกับความเชื่ออื่นๆ ซึ่งเกี่ยวโยงกันอย่างมีระบบและทำให้นักเรียนมีแนวโน้มที่จะนำไปใช้ในชีวิตของเขาด้วย
5. มโนทัศน์คลาดเคลื่อนบางเรื่องเป็นสิ่งที่ถ่ายทอดกันมาแต่อดีต จากผู้ที่เป็นผู้นำทางความรู้ในแขนงวิชานั้นๆ แล้วถูกถ่ายทอดมาสู่นักเรียน

Graeber (1992: 4 –51) ได้พิจารณาถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในระดับมัธยมศึกษาและแยกประเภทมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนซึ่งสังเกตได้ออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่

1. การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations) โดยให้คำนิยามการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขเป็นสองประเภท ดังนี้

1.1 นักเรียนนำหลักการ ความคิดรวบยอด หรือขั้นตอนกระบวนการที่เป็นจริงสำหรับโดเมนหนึ่ง แต่นักเรียนนำไปใช้ในโดเมนอื่นซึ่งนอกเหนือจากนั้น ดังเช่น

A) นักเรียนคุ้นเคยกับของจำนวนเต็มว่าหากเครื่องหมายลบอยู่หน้าจำนวนเต็มแล้วจะมีค่าน้อยกว่าศูนย์เสมอ อย่างเช่น -7, -89, -2 และ -67 ต่างมีค่าน้อยกว่าศูนย์ ดังนั้นเมื่อใส่เครื่องหมายลบที่หน้าสัญลักษณ์ เช่น “-a” นักเรียนบางคนจะเข้าใจว่า “-a” มีค่าน้อยกว่าศูนย์

B) การแยกตัวประกอบพหุนาม (x - 3) (x + 5) = 0 หมายถึง (x - 3) = 0 หรือ (x + 5) = 0 นักเรียนบางคนประยุกต์ทฤษฎีผลคูณเป็นศูนย์กับการแยกตัวประกอบอื่นที่ได้ผลลัพธ์มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ เช่น (x - 3) (x + 5) = 9 ว่า (x - 3) = 9 หรือ (x + 5) = 9 ด้วย

C) ขั้นตอนการคูณไขว้ 7 x 24 = 3 x 56 สำหรับตรวจสอบการเท่ากันของเศษส่วน $\frac{3}{24} = \frac{7}{56}$ นักเรียนนำไปประยุกต์ในการแก้สมการพีชคณิต เช่น $\frac{3}{2-x} + \frac{7}{2+x} = 9$ นักเรียนดำเนินการเพียง 3(2 + x) +7(2 - x) = 9 โดยไม่พิจารณาส่วน

D) นักเรียนนำสมบัติการกระจายของการคูณไปประยุกต์ใช้กับการหารโดยไม่ระมัดระวัง เช่น A (B ÷ C) = AB ÷AC รวมไปถึงนักเรียนมักใช้สมบัติการกระจายกับฟังก์ชันที่ไม่สามารถกระจายได้ เช่น

log 5 = log 2 + log 3	[log (a + b) = log (a) + log (b)]
sin (75) = sin (30) + sin (45)	[sin (a + b) = sin (a) + sin (b)]
$4^{2.5} = 4^2 + 4^{-5} = 16 + 2 = 18$	$[a^{(b+c)} = a^b + a^c]$

E) นักเรียนนำรูปแบบตัวผกผันของการบวกและการคูณว่า a + -a = 0 และ a x 1/a = 1 ไปประยุกต์ว่า n + ตัวผกผันใดๆของ n = 0 หรือ n x ตัวผกผันใดๆของ n = 1 ดังนั้นนักเรียนบางคนจึงกล่าวว่า n + 1/n = 0 หรือ n x –n = 1 อย่างเช่น $\frac{2}{3}$ y = 7 จะได้ $\frac{2}{3} \times \frac{-2}{3}$ y = 7 x $\frac{-2}{3}$ ดังนั้น y = $\frac{-14}{3}$

(เมื่อนักเรียนเข้าใจผิดว่า $\frac{2}{3} \times \frac{-2}{3}$ เป็น เช่น n x –n = 1)

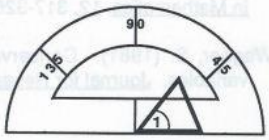
F) นักเรียนประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพิธากอรัส กับรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมมุมฉาก

1.2 นักเรียนนำขั้นตอนและกระบวนการมาใช้เป็นมโนทัศน์ เช่น การหารโดยตัวส่วนเป็นทศนิยมควรเปลี่ยนทศนิยมให้เป็นจำนวนเต็มก่อน นักเรียนบางคนพัฒนามโนทัศน์เกี่ยวกับการหารว่า “การหารไม่สามารถหารด้วยทศนิยมได้”

2. การจำกัดความคิด (Overspecialization) การที่นักเรียนกำหนดสมบัติของกลุ่มย่อยมาใช้ในกลุ่มใหญ่ หรือการที่นักเรียนเพิ่มข้อจำกัดทางความคิด หลักการหรือขั้นตอนกระบวนการที่ไม่เป็นลักษณะของกลุ่มใหญ่ทั้งหมด ดังเช่น

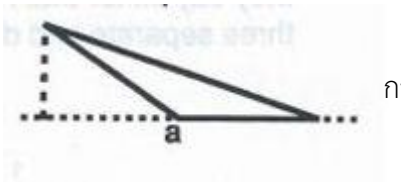
A) นักเรียนบางคนยอมรับกฎการกระจายดังนี้ a (b + c) = ab + ac แต่ไม่ยอมรับการกระจาย “c” จากด้านขวา เช่น (a + b) c = ac + bc

B) เมื่อนักเรียนใช้ไม้โปรแทรกเตอร์ในการวัดมุมของรูปสามเหลี่ยม นักเรียนบางคนโต้แย้งว่ามุมที่ด้านยาวไม่ถึงไม้โปรแทรกเตอร์นั้นไม่สามารถวัดได้ อย่างเช่น ดังรูปนักเรียนกล่าวว่ามุม 1 ไม่สามารถวัดค่ามุมได้



C) นักเรียนส่วนใหญ่จำกัดความรู้ และทัศนคติของเขาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมว่าส่วนของเส้นตรงจะบรรจุภายในรูปสามเหลี่ยมเท่านั้น ดังรูป

การตอบสนองไม่ถูกต้องในการพยายามวาดเส้นตรงบรรจุภายในรูปสามเหลี่ยม



การตอบสนองที่ถูกต้อง

D) นักเรียนบางคนมีข้อจำกัด ดังต่อไปนี้

1. จำนวนตรรกยะจะอยู่ในรูป $\frac{a}{b}$ เช่น นักเรียนไม่ยอมรับว่า 2 เป็นจำนวนตรรกยะเพราะไม่ได้เขียนในรูปของเศษส่วน
2. จำนวนทศนิยมจะอยู่รูป ab.cd เช่น นักเรียนไม่ยอมรับว่า 5 เป็นจำนวนทศนิยมเพราะไม่มีจุดทศนิยมแสดงให้เห็น
3. จำนวนนับต้องอยู่ในรูปที่ไม่มีจุดทศนิยมหรือรูปเศษส่วน เช่น นักเรียนไม่ยอมรับว่า $\frac{6}{3}$ และ 4.00 เป็นจำนวนนับเพราะไม่ได้เขียนอยู่ในรูปจำนวนเต็ม

3. การตีความผิด (Mistranslations) เป็นการแปลความจากข้อมูลที่ให้มาในรูปสัญลักษณ์ สูตร ตารางหรือกราฟ ไม่ถูกต้อง ตัวอย่างเช่น

A) นักเรียนแปลความจากประโยค เขาแบ่งครึ่งพายสี่ชิ้น เป็นเขาแบ่งพายครึ่งหนึ่งออกเป็นสี่ชิ้น

B) นักเรียนมักอธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรสองตัวด้วยกราฟ โดยมักสมมติว่ากราฟจะตรงกับการแสดงภาพของปรากฏการณ์ที่สร้างข้อมูล ดังเช่น กราฟแสดงความเร็วของการปาลูกบอลไปบนอากาศ จะเป็นกราฟพาราโบลาคว่ำมากกว่าพลิกทางด้านขวา

C) นักเรียนมักแปลความสัมพันธ์ที่แสดงในรูปแบบตารางผิด เมื่อนักเรียนพยายามที่จะเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปสูตร อย่างเช่น ข้อมูลของสปริงและน้ำหนักที่แสดงในตารางข้างล่างนี้ นักเรียนเขียนสูตรแสดงความสัมพันธ์เป็น 3S = 100W

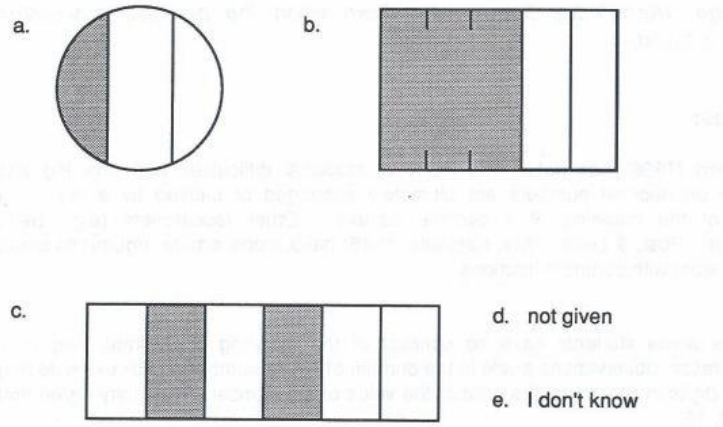
Stretch **S (cm)**	**Weight** **W (g)**
3	100
6	200
9	300
12	400

4. การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited conceptions) คือการที่นักเรียนมีความเข้าในหลักการขั้นตอนและกระบวนการที่จำกัด ซึ่งรวมไปถึงมโนทัศน์ที่ไม่ขยาย คือมีมุมมองที่จำกัด และมโนทัศน์ที่ขาดหายคือการที่นักเรียนนำความรู้มาใช้ได้เพียงส่วนหนึ่งเท่านั้น อย่างเช่น

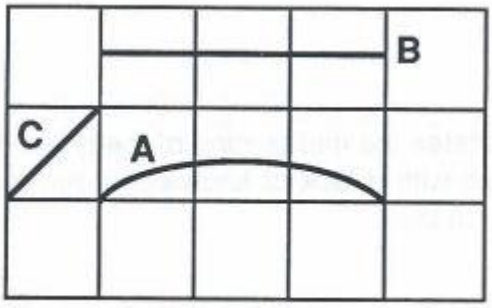
A) นักเรียนมีความยุ่งยากในการเรียงอันดับและการดำเนินการบนทศนิยม เกิดจากการขาดมโนทัศน์เกี่ยวกับความหมายของจำนวนทศนิยม ซึ่งคล้ายกันกับการทำงานกับเศษส่วน

B) นักเรียนที่ไม่มีความรู้เกี่ยวกับค่าของเศษส่วน เช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ หรือ $\frac{2}{5}$ มักไม่ตระหนักถึงความไม่เหมาะสมของการดำเนินการดังเช่น $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$

C) โจทย์ถามหาภาพแสดงส่วนที่แรเงา เป็น $\frac{1}{3}$ ซึ่งมีนักเรียน 43% เลือกข้อ a.



D) นักเรียนหลายคนมีมุมมองที่จำกัดของแนวคิดที่ระบุว่าเส้นที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจุดเดียวกันจะมีความยาวเท่ากัน นั่นคือความยาวส่วนโค้ง A ในรูปมีค่าเท่ากับความยาวเส้นตรง B รวมไปถึงความยาวเส้นทแยงมุม C ของตารางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีค่าเท่ากับความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังรูป



Wylie and Ciofalo (2010: 1 – 2) ได้แบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ไว้ดังต่อไปนี้

1. ความบกพร่องในการใช้แผนภาพ โมเดลและการนำเสนอในรูปแบบอื่น ซึ่งแผนภาพ โมเดลและการนำเสนอในรูปแบบต่างๆนั้นถูกใช้ทางคณิตศาสตร์ และบางครั้งอาจเกิด ความไม่แน่นอน ไม่สมบูรณ์หรือข้อจำกัดที่ไม่ชัดเจน ในขณะที่ครูอาจเข้าใจข้อจำกัด แต่นักเรียนยังคงพิจารณาแค่ ตามตัวอักษร อย่างเช่น นักเรียนชั้นเล็กๆไม่ค่อยได้พบเห็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐาน ที่ไม่ใช่ตามแนวพื้นราบและอาจอธิบายว่าเป็นสามเหลี่ยมที่คว่ำลง
2. ความบกพร่องในการอ้างอิงในรูปทั่วไปหรือทำให้เป็นรูปอย่างง่าย โดยลักษณะและรายละเอียดของวิธีการทางคณิตศาสตร์การแสดงออกหรือแนวคิด ที่อาจมีความเป็นนามธรรม ลักษณะทั่วไปหรือง่ายจนเกินไป อย่างเช่น นักเรียนต้องเข้าใจบางอย่างเมื่อความจริงทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถประยุกต์ใช้ได้ทั่วๆไป เช่น การบวกจะมีผลต่อการขยายจำนวนเสมอ (ซึ่งไม่ถูกต้องหากเป็นจำนวนลบ)
3. ความสับสนในการใช้ภาษาและคำศัพท์ ซึ่งคำศัพท์และวลีที่ถูกใช้ในการสื่อสารในทั่วๆไป สามารถสร้างความสับสนหรือมีความหมายที่แตกต่างกับการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เช่น คำว่า “mean”, “plane”, ”point” มีความหมายแตกต่างจากภาษาที่ใช้สื่อสารในทั่วๆไป
4. ความบกพร่องในการยอมรับข้อความจริง โดยข้อความจริงที่มีพื้นฐานจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิดพลาดสามารถทำให้เกิดความเข้าใจผิดได้ อย่างเช่น บางครั้งนักเรียนมีความคิดที่ผิดว่าหลักแรกไปทางขวามือของทศนิยมเป็นตำแหน่งที่หนึ่ง (พยายามที่จะสมมาตรรอบจุดทศนิยม)
5. ความบกพร่องในการยอมรับการเทียบเท่าที่เป็นเท็จ วิธีการทาง คณิตศาสตร์ต่างๆหรือแนวคิดที่บางครั้งดูเทียบเท่าไม่ถูกต้อง อย่างเช่น นักเรียนอาจพยายามที่จะจัดการกับเศษส่วน โดยใช้การให้เหตุผลเรื่องของจำนวนจริง โดยคิดว่าการคำนวณ เป็นเช่นเดียวกับการทำงานร่วมกับทศนิยม หรือการสมมติว่าการลบและการหารมีสมบัติการสับเปลี่ยนเช่นเดียวกับการบวกและการคูณ

จากการศึกษาลักษณะของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักการศึกษาที่กล่าวมาข้างต้น พบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนได้หลายรูปแบบที่แตกต่างกัน ซึ่งขึ้นอยู่กับเกณฑ์การแบ่งประเภทของนักการศึกษาและนักวิจัยแต่ละท่าน

2. ข้อผิดพลาด (Mistakes)

2.1 ความหมายของข้อผิดพลาด

Carpmail and others (2013: 2 - 7) ได้กล่าวว่า ข้อผิดพลาดในคณิตศาสตร์อาจเกิดจากสาเหตุที่หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นเกิดจากความสะเพร่า ขาดสมาธิในการทำงาน หรือการขาดความรู้หรือความเข้าใจในเนื้อหา ข้อผิดพลาดบางอย่างสามารถทำนายหรือ แสดงให้เห็นถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งครูมีความจำเป็นที่จะต้องมีความรู้เรื่องของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่อาจเกิดขึ้นได้และทำไมข้อผิดพลาดจึงอาจเกิดขึ้น รวมไปถึงวิธีการคลี่คลายความยากลำบากของนักเรียนสำหรับการเรียนที่ต่อเนื่องขึ้นไป

Chambers (2008: 107 - 108) กล่าวถึง ข้อผิดพลาดว่าเป็นผลมาจากความประมาทหรือความเหนื่อยล้า ซึ่งข้อผิดพลาดสามารถเกิดขึ้นได้แม้ในขณะที่ทำงานโดยมีความเข้าใจในพื้นฐานอย่างทั่วถึง

Haylock and Thangata (2007: 66) กล่าวว่า ข้อผิดพลาดของนักเรียนพบได้ในการเขียน การทำแบบฝึกหัด และการตอบคำถามกับอาจารย์ ซึ่งข้อผิดพลาดเกิดจากผลของความสะเพร่า หรือการคำนวณคลาดเคลื่อน สิ่งที่สำคัญคือข้อผิดพลาดเหล่านั้นจะสะท้อนถึงการขาดความเข้าใจต่อมโนทัศน์และขั้นตอนกระบวนการทางคณิตศาสตร์

Drews (2011: 11 – 12) กล่าวไว้ว่าการเกิดข้อผิดพลาดอาจมาจากหลายสาเหตุ ซึ่งเกิดจากความประมาทพลาดพลั้ง การตีความสัญลักษณ์ หรือข้อความผิด ขาดประสบการณ์หรือความรู้ที่เกี่ยวข้องที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อทางคณิตศาสตร์ และขาดการตรวจทานคำตอบ

Hobbs and Falconwood (2010: 3 – 8) ได้กล่าวไว้ว่า ข้อผิดพลาดอาจเกิดจากการสะเพร่าการให้เหตุผลที่รวดเร็วเกินไป การจดจำข้อมูลเยอะเกินไปหรือผิดพลาดในการสังเกตข้อมูลประเด็นสำคัญที่ใช้ในการแก้ปัญหา

Luneta and Makonye (2010: 35 – 36) กล่าวถึงข้อผิดพลาดว่าคือการเบี่ยงเบนจากความแม่นยำ ซึ่งเกิดจากการขาดความระมัดระวังและความสะเพร่า

Riccomini (2005: 233 - 242) กล่าวถึงข้อผิดพลาดที่ไม่เป็นระบบซึ่งเกิดจากความไม่ได้ตั้งใจและไม่ได้เกิดขึ้นเป็นประจำ โดยคำตอบที่ผิดนักเรียนสามารถแก้ไขด้วยตัวเองได้อย่างรวดเร็ว

Swan (2005: 34) กล่าวว่า นักเรียนมักเกิดข้อผิดพลาดจากหลายสาเหตุ ซึ่งอาจเกิดเพราะความสะเพร่า การให้เหตุผลอย่างรวดเร็ว หรือขาดการสังเกตในประเด็นที่สำคัญสำหรับใช้ในการแก้ปัญหา

จากข้อมูลข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า ข้อผิดพลาด หมายถึงความผิดพลาดที่ไม่เป็นระบบ เป็นความพลาดพลั้งหรือเบี่ยงเบนจากความถูกต้อง ซึ่งอาจเกิดจากความสะเพร่า การให้เหตุผลที่รวดเร็วเกินไป โดยข้อผิดพลาดเกิดจากความไม่ตั้งใจ ไม่ได้เกิดขึ้นเป็นประจำ แต่สามารถเกิดขึ้นได้แม้ในขณะที่ทำงานโดยมีความเข้าใจในพื้นฐานอย่างทั่วถึง

2.2 ลักษณะของข้อผิดพลาด

Ashlock (1994: 4 – 5) ได้แบ่งประเภทของข้อผิดพลาดเป็น 4 ประเภท ดังนี้

1. การดำเนินการที่ไม่ถูกต้อง (wrong operation) นักเรียนพยายามที่จะตอบสนองโดยการดำเนินการอื่น ๆ มากกว่าที่จำเป็นในการแก้ปัญหา
2. ข้อผิดพลาดที่เห็นได้ชัดของการคำนวณ (Obvious computational error) นักเรียนใช้การดำเนินการที่ถูกต้อง แต่คำตอบที่ได้นั้นจะขึ้นอยู่กับข้อผิดพลาดที่เป็นความจริงพื้นฐานเกี่ยวกับตัวเลข
3. ขั้นตอนวิธีที่มีข้อบกพร่อง (Defective algorithm) นักเรียนพยายามที่จะใช้การดำเนินการที่ถูกต้องแต่ทำข้อผิดพลาดอื่นๆกว่าข้อผิดพลาดเรื่องข้อเท็จจริงของตัวเลขในการดำเนินการผ่านขั้นตอนที่จำเป็น
4. การตอบสนองแบบสุ่ม (Random response) การตอบสนองที่ไม่แสดงถึงความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหา

Backman (1978: 177-195) แบ่งประเภทของข้อผิดพลาดเกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่

1. ข้อผิดพลาดในการจัดลำดับขั้นตอนภายในกระบวนการ (errors in sequencing steps within a procedure)

2. ข้อผิดพลาดในการเลือกข้อมูลหรือกระบวนการ (errors in selecting information Or procedures)
3. ข้อผิดพลาดในการบันทึกการทำงาน (errors in recording work)
4. ข้อผิดพลาดในการทำความเข้าใจมโนทัศน์ (errors in conceptual understanding)

Blando and others (1989: 301 – 308) ได้ทำการวิเคราะห์และหารูปแบบข้อผิดพลาดทางเลขคณิต และแบ่งประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้เป็น 4 ประเภทคือ

1. ผิดพลาดในการจัดอันดับการดำเนินการ เช่น บวกก่อนคูณ
2. ผิดพลาดในการทำผิดความหมาย เช่น คูณแทนการบวก
3. ข้อผิดพลาดอื่นๆ เช่น ให้คำตอบเป็นลบทั้งๆที่ควรเป็นบวก
4. ข้อผิดพลาดที่ไม่มีรูปแบบแน่นอนเนื่องจากขาดความระมัดระวังในการคำนวณ

Carpmail and others (2013: 2 - 7) ได้แบ่งแยกประเด็นของการเกิดข้อผิดพลาดโดยพิจารณาออกเป็น 3 ประเด็นหลัก ดังต่อไปนี้

1. นักเรียนกับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ (The child and mathematical errors)
    - ประสบการณ์ (experience) นักเรียนมาโรงเรียนด้วยประสบการณ์ที่แตกต่างเฉพาะคน ซึ่งข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์อาจเกิดขึ้นเมื่อครูสันนิษฐานว่านักเรียนต่างมีความรู้อยู่แล้ว
    - ความชำนาญ (expertise) มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอาจเกิดขึ้นเมื่อนักเรียนขาดความสามารถในการทำความเข้าใจถึงสิ่งที่โจทย์ต้องถามหา
    - ความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (mathematical knowledge and understanding) เมื่อนักเรียนทำข้อผิดพลาด มักอาจเกิดจากการขาดความเข้าใจในกลยุทธ์ กระบวนการขั้นตอนในการประยุกต์ใช้กลยุทธ์เทคนิคต่างๆ
    - จินตนาการและความคิดสร้างสรรค์ (imagination and creativity) ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์อาจเกิดขึ้นเมื่อนักเรียนมีจินตนาการหรือความคิดสร้างสรรค์เมื่อต้องการตัดสินใจหาคำตอบโดยใช้ประสบการณ์ที่ผ่านมาซึ่งอาจเป็นประสบการณ์ที่ผิดติดตัวมาและส่งผลให้คำตอบที่ได้ผิดตามไปด้วย
    - ภาวะทางอารมณ์ (mood) ถ้านักเรียนไม่อยู่ในภาวะทางอารมณ์ที่พร้อมทำงานหรือทำงานอย่างเร่งรีบ อาจก่อให้เกิดข้อผิดพลาดที่เกิดจากการไม่ระวังหรือสะเพร่า
    - ทัศนคติและความมั่นใจ (Attitude and confidence) การเห็นคุณค่าในตนเอง

ของนักเรียนและทัศนคติที่มีต่อความสามารถของพวกเขาในวิชาคณิตศาสตร์และครูของพวกเขาอาจส่งผลกระทบต่อประสิทธิภาพการทำงานของพวกเขา อย่างเช่น นักเรียนมีความสามารถในคณิตศาสตร์ แต่กลัวครูผู้สอน ดังนั้นจึงขาดความมั่นใจในการทำงานทำให้ทำได้ไม่เต็มที่ ซึ่งอาจส่งผลต่อการเกิดข้อผิดพลาดภายหลัง

2. ภาระงานกับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ (The task and mathematical errors)
   - ความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์ (mathematical complexity) ข้อผิดพลาดอาจเกิดขึ้นได้ หากภาระงานที่ได้รับยากจนเกินไป
   - การนำเสนอที่ซับซ้อน (presentational complexity) ถ้าภาระงานไม่ถูกนำเสนอในทางที่เหมาะสม นักเรียนอาจเกิดความสับสนว่าโจทย์ต้องการอะไร
   - การแปลความหมายที่ซับซ้อน (translation complexity) นักเรียนต้องอ่านและตีความโจทย์เพื่อทำความเข้าใจว่าโจทย์ต้องการอะไร ข้อผิดพลาดก็อาจเกิดขึ้นได้หากตีความโจทย์ไม่ถูกต้อง
3. ครูกับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ (The teacher and mathematical errors)
   - ประสบการณ์ (experience) ความรู้สามารถเพิ่มพูนได้จากการทำข้อผิดพลาด ครูสามารถเรียนรู้มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนได้จากการสอนพวกเขา
   - ความชำนาญ (expertise) ความชำนาญไม่เพียงแต่ในวิชาเท่านั้นแต่ยังรวมไปถึงการติดต่อสื่อสารกับเด็กนักเรียน เพื่อสร้างบรรยากาศในการเรียนให้เอื้อต่อการเรียนมากขึ้น
   - ความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (mathematical knowledge and understanding) บางครั้งการที่ครูมีความรู้มากก็อาจส่งผลให้เกิดการไม่เข้าใจความยากของนักเรียนซึ่งมีความรู้เพียงน้อยนิด อาจทำให้เกิดข้อจำกัดในการสอนมากขึ้น
   - จินตนาการและความคิดสร้างสรรค์ (imagination and creativity) ครูที่มีความคิดสร้างสรรค์ พวกเขาอาจจะสอนแนวคิดในลักษณะที่กว้างขึ้น และกำลังมองหาวิธีการหรือทางเลือกซึ่งช่วยลดความน่าจะเป็นของความผิดพลาดในการเรียนรู้
   - ภาวะทางอารมณ์ (mood) ภายใต้แรงกดดันของการสอนในปัจจุบันครูอาจมีความรู้สึกกดดันและเร่งรีบให้ทันเวลา ทำให้ครูไม่สามารถแสดงความสามารถได้อย่างเต็มที่

- ทัศนคติและความมั่นใจ (Attitude and confidence) ความคล้ายคลึงกับนักเรียน ถ้าครูขาดความมั่นใจหรือไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ โอกาสเกิดข้อผิดพลาดในการสอนมักมีเพิ่มมากขึ้น

Engelhardt (1977: 149-54) นั้นแบ่งข้อผิดพลาดออกเป็น 8 ประเภท ดังนี้

1. ข้อผิดพลาดเกี่ยวกับความจริงพื้นฐาน (Basic fact error)
2. ข้อบกพร่องในลำดับขั้นตอนวิธีซึ่งใช้ในการแก้ปัญหา (Defective algorithm)
3. ข้อผิดพลาดในการจัดกลุ่ม (Grouping error)
4. การสับเปลี่ยนที่กันอย่างไม่เหมาะสม (Inappropriate inversion)
5. การดำเนินการที่ไม่ถูกต้อง (Incorrect operation)
6. ลำดับขั้นตอนวิธีซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาที่ไม่สมบูรณ์ (Incomplete algorithm)
7. ข้อผิดพลาดที่เอกลักษณ์ (Identity error)
8. ข้อผิดพลาดที่ศูนย์ (Zero error)

Movshovitz and others (1987: 3 – 12) ได้ร่วมกันวิเคราะห์และจัดหมวดหมู่ของ “ข้อผิดพลาด” ในวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ซึ่งสามารถจัดออกมาได้ 6 กลุ่ม ดังนี้

1. การใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data) ประเภทนี้รวมไปถึงข้อผิดพลาดที่เกี่ยวข้องกับความแตกต่างระหว่างข้อมูลที่ให้มาและวิธีการที่นักเรียนกระทำกับข้อมูล ซึ่งคำสั่งที่ชัดเจนแสดงให้เห็นว่าข้อมูลที่ได้รับถูกนำมาใช้จะต้องรวมอยู่ในวิธีการหาคำตอบของนักเรียน ซึ่งข้อผิดพลาดอาจเกิดก่อนคือช่วงระหว่างที่ใส่ข้อมูลเข้าด้วยกันหรืออาจเกิดทีหลังในช่วงระหว่างการดำเนินการกับข้อมูล โดยมีลักษณะต่างๆ ดังนี้
   - นักเรียนเลือกที่จะใช้ข้อมูลอื่นแทนข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้
   - นักเรียนเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องแทนข้อมูลที่มีความจำเป็นต่อวิธีการหาคำตอบ
   - นักเรียนไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่กลับทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน
   - นักเรียนเลือกใช้ชิ้นส่วนของข้อมูลที่มีความหมายไม่สอดคล้องกับโจทย์ที่ให้มา เช่น เลือกใช้ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมในการหาคำตอบของโจทย์ที่ต้องใช้เส้นมัธยฐาน

- นักเรียนใช้หน่วยของตัวแปรหนึ่งแทนอีกตัวแปรหนึ่ง เช่น ใช้หน่วยของระยะทางเป็นหน่วยของความเร็ว
- นักเรียนลอกรายละเอียดเกี่ยวกับโจทย์ผิด

2. การตีความด้านภาษาผิด (Misinterpreted language) ประเภทนี้รวมไปถึงข้อผิดพลาดที่จัดการกับการแปลข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ไม่ถูกต้องโดยมีลักษณะต่างๆ ดังนี้
   - การแปลความจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์หรือสมการไม่ถูกต้อง
   - กำหนดแนวคิดทางคณิตศาสตร์โดยใช้สัญลักษณ์ที่แสดงถึงแนวคิดอื่นและดำเนินการคิดหาคำตอบตามสัญลักษณ์นั้น ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่ไม่สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ
   - แปลสัญลักษณ์กราฟ ไปสู่รูปแบบของคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง หรือในทางกลับกันแปลข้อมูลในรูปแบบคณิตศาสตร์ไปสู่กราฟได้ไม่ถูกต้อง

3. การอนุมานโดยใช้ตรรกวิทยาที่ไม่สมบูรณ์ (Logically invalid inference) ซึ่งรวมไปถึงข้อผิดพลาดในการให้เหตุผลที่ผิดพลาดและเนื้อหาที่ไม่เฉพาะเจาะจง เช่น ข้อมูลใหม่ที่ไม่สมบูรณ์ หรือมาจากส่วนหนึ่งของข้อมูลซึ่งยังไม่น่าเชื่อถือพอ โดยมีลักษณะต่างๆ ต่อไปนี้
   - เกิดความผิดพลาด หรือบกพร่องในการการสรุปค่าความจริงของประพจน์ที่มีเงื่อนไข ถ้า.....แล้ว
   - ใช้ตัวบ่งปริมาณ เช่น ทั้งหมด มี หรือ อย่างน้อย ในตำแหน่งที่ไม่ถูกต้อง
   - การอนุมานโดยอ้างหลักตรรกศาสตร์ที่ข้ามขั้นตอน

4. การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted Theorem or Definition) โดยรวมไปถึงข้อผิดพลาดที่เกี่ยวข้องกับการบิดเบือนหลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยาม ซึ่งมีลักษณะต่างๆ ดังนี้
   - การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทที่นอกเหนือจากเงื่อนไขของตัวทฤษฎี
   - การประยุกต์ใช้กฎการกระจายกับฟังชันก์ที่ไม่สามารถใช้กฎการกระจายได้ เช่น $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$, $\log\frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}$, $(a + b)^n = a^n + b^n$
   - การอ้างถึงนิยาม ทฤษฎีบท หรือสูตรอย่างคลุมเครือ ไม่แน่ใจ

5. การขาดการตรวจสอบวิธีการหาคำตอบ (Unverified solution) ลักษณะหลักของข้อผิดพลาดประเภทนี้คือ แต่ละขั้นตอนในวิธีหาคำตอบถูกต้อง แต่สุดท้ายแล้วได้คำตอบที่ไม่ตรงกับคำถามของโจทย์ เนื่องมาจากนักเรียนไม่ได้ตรวจสอบระหว่างทำ จึงทำให้ไม่ เห็นข้อผิดพลาด ซึ่งควรตั้งข้อสังเกตว่าบ่อยครั้งที่นักเรียนไม่ได้ตรวจคำตอบของตนเอง

6. ข้อผิดพลาดทางเทคนิคการทำ (Technical errors) โดยรวมไปถึงข้อผิดพลาดในการคำนวณ การใช้ข้อมูลในตาราง ผิดพลาดในการจัดการสัญลักษณ์พื้นฐานทางพีชคณิต การใช้หน่วยผิด และการสะเพร่า ไม่ระมัดระวังในการคำนวณ

Radatz (1979: 163 – 170) ได้แนะนำรูปแบบการจัดหมวดหมู่ของสาเหตุการเกิดข้อผิดพลาดได้ 5 ประการ ดังต่อไปนี้

1. ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากความยากทางภาษา (Errors due to language difficulties) ซึ่งนักเรียนเรียนเกี่ยวกับความคิดรวบยอด สัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเปรียบเสมือนการเรียนภาษาต่างประเทศ ในการแก้โจทย์ปัญหานักเรียน การไม่เข้าใจความหมายของข้อความทางคณิตศาสตร์มักเป็นที่มาของข้อผิดพลาดของนักเรียน

2. ข้อผิดพลาดอันเกิดจากความยากลำบากในการได้รับข้อมูลเชิงปริภูมิ (Errors due to difficulties in obtaining spatial informations) เนื้อหาตำราเรียนคณิตศาสตร์ในระดับประถมและมัธยม มีแนวโน้มที่จะเพิ่มการนำเสนอเกี่ยวกับสัญลักษณ์และภาพ ซึ่งทำให้ความต้องการความสามารถในเชิงปริภูมิของนักเรียนมีมากขึ้น ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ส่วนมากเกิดจากความแตกต่างของความสามารถทางการรับข้อมูลเชิงปริภูมิของนักเรียน

3. ข้อผิดพลาดเนื่องจากการขาดความชำนาญในทักษะที่จำเป็น ข้อเท็จจริงและแนวคิด (Error due to deficient mastery of prerequisite skills, facts, and concepts) ข้อผิดพลาดประเภทนี้รวมไปถึงการขาดตกบกพร่องในเนื้อหา ปัญหา และความรู้เฉพาะที่จำเป็นต่อความสำเร็จในการดำเนินงานทางคณิตศาสตร์ ซึ่งรวมไปถึงความบกพร่องในพื้นฐานเบื้องต้น หรือขาดความรู้ในลำดับขั้นตอนวิธี ในข้อความจริงพื้นฐาน เทคนิคการคำนวณที่ผิดและขาดความรู้ในเรื่องความคิดรวบยอดและสัญลักษณ์

4. ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนกลุ่มที่ไม่ถูกต้องหรือการยึดติดกับความคิด (Errors due to incorrect associations or rigidity of thinking) มีความยืดหยุ่นเพียงพอในการถอดรหัสและการเข้ารหัสข้อมูลใหม่มักจะหมายถึงประสบการณ์ที่มีปัญหาที่คล้ายกันที่จะนำไปสู่ความแข็งแกร่งเป็นนิสัยของการคิด ซึ่งในกรณีนี้นักเรียนจะพัฒนาเป็นวิธีการดำเนินการอย่างต่อเนื่อง และจะยังคงยึดติดกับวิธีการที่สร้างขึ้นนี้แม้ความจริงแล้วเงื่อนไขพื้นฐานของงานชิ้นถัดไปจะเปลี่ยนไปแล้วก็ตาม

5. ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากการใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่สอดคล้อง (Errors due to the application of irrelevant rules or strategies) ชนิดของข้อผิดพลาดนี้มักจะเกิดขึ้นจากประสบการณ์ในการประสบความสำเร็จในการประยุกต์ใช้กฎเทียบเคียงหรือกลยุทธ์กับเนื้อหาอื่น

Schnepper and Mccoy (2013: 3) ได้แบ่งประเภทของข้อผิดพลาดเป็น 5 ประเภท ดังนี้

1. คำตอบที่ไม่สมบูรณ์ (Incomplete Answer) ตอบคำถามเพียงบางส่วน โดยไม่ครอบคลุมการแก้ปัญหาหรือข้อสรุปที่คำถามต้องการทั้งหมด
2. การใช้ข้อมูลผิด (Misused Data) ให้ข้อสรุปจากข้อมูลที่รวบรวมอยู่ในทางที่ไม่เหมาะสม แต่มีขั้นตอนการดำเนินการที่ถูกต้อง
3. ข้อผิดพลาดทางเทคนิค (Technical Error) ผิดพลาดในด้านการคำนวณ ผิดพลาดในการจัดการกับสัญลักษณ์ทางพีชคณิตพื้นฐาน สะเพร่า หรือผิดพลาดในการใช้กระบวนการและทักษะที่มักจะเข้าใจในหลักสูตรเบื้องต้น
4. ข้อผิดพลาดที่เกิดจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้เรียนมาก่อนหน้า (Error Originating from Misconceptions of Previously Learned Material) ผิดพลาดในขั้นตอนตามมาหรือผิดพลาดจากการใช้ทักษะที่มักจะต้นแบบก่อนหน้านี้ในเนื้อหาเดียวกัน
5. การบิดเบือนบทนิยาม (Distorted Definition) เปลี่ยนแปลงคำนิยามที่มีความเกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาของข้อคำถาม

Truran (1987: 92) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนและเทคนิคการสอนเพื่อแก้ไขความคลาดเคลื่อนนั้นในการหาสาเหตุที่ผิดและแบ่งระดับความผิดพลาดที่นักเรียนทำไว้ 9 ด้าน ดังต่อไปนี้

1. รูปแบบของคำถาม
2. การอ่านคำถาม

3. ความเข้าใจในคำถาม
4. กลยุทธในการเลือกใช้ความรู้
5. ทักษะการเลือกใช้ความรู้
6. ทักษะการประยุกต์ใช้ความรู้
7. การเสนอคำตอบ
8. ความผิดพลาดซึ่งไม่สามารถระบุสาเหตุที่แน่นอนได้ เนื่องจากไม่ระมัดระวัง
9. ความผิดพลาดซึ่งผู้สอนสามารถทราบได้จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียน

จากการศึกษาลักษณะของการเกิดข้อผิดพลาด จะพบว่าสามารถแบ่งลักษณะได้หลากหลายรูปแบบ ซึ่งเกณฑ์การแบ่งของนักการศึกษาแต่ละคนนั้นล้วนขึ้นอยู่กับเนื้อหาที่ได้ทำการศึกษาข้อผิดพลาดนั้นๆด้วย

3. ข้อแตกต่างระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนกับข้อผิดพลาด

Ashlock (1994: 1 - 9) กล่าวว่า มีความแตกต่างระหว่างข้อผิดพลาดที่เกิดจากการไม่ระมัดระวังกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับหลักการทางคณิตศาสตร์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนเรียนหลักการ ความคิดรวบยอด และบางครั้งพวกเขานั้นเรียนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนไปด้วย นอกจากนี้ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ยังช่วยเปิดเผยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนอีกด้วย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Chambers (2008: 107) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแตกต่างจากข้อผิดพลาด ทุกคนสามารถเกิดข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ได้ เนื่องจากข้อผิดพลาดอาจเกิดขึ้นได้แม้กระทั่งจะมีความเข้าใจพื้นฐานเป็นอย่างดี ซึ่งอาจเกิดจากความประมาทหรือความเหนื่อยล้า แต่มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความผิดพลาดอย่างเป็นระบบ

Luneta and Makonye (2010: 35) กล่าวถึง มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดว่า ถึงแม้ว่าข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจะมีความเกี่ยวข้องกัน แต่ทั้งคู่นั้นแตกต่างกัน ข้อผิดพลาดเป็นการเบี่ยงเบนจากความถูกต้อง ซึ่งเกิดจากความพลาดพลั้ง

Ryan and Williams (2002: 16) กล่าวว่า มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้นสร้างปัญหามากกว่าข้อผิดพลาดเนื่องจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นความเข้าใจผิดในระดับลึก ซึ่งจำเป็นต้องได้รับการวินิจฉัย

Smith , Dissessa and roschelle (1993: 115 - 163) กล่าวว่า ลักษณะพิเศษของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนคือนักเรียนสามารถรับรู้ได้โดยสัญชาตญาณและสามารถจัดการเรียนการสอนที่ยืดหยุ่นเพื่อแก้ไขมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนให้ถูกต้องได้ นอกจากนี้ยังเปรียบเทียบระหว่างข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่า ข้อผิดพลาดสามารถเห็นได้ชัดในผู้เรียนซึ่งจะแสดงจากการเขียนหรือพูดแต่มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนั้นมักแอบซ่อนอยู่โดยผู้ที่สังเกตไม่ทันสังเกตเห็น โดยบางครั้งอาจซ่อนอยู่ภายใต้คำตอบที่ถูกต้องก็เป็นได้ ซึ่งคำตอบนั้นอาจเป็นคำตอบที่ถูกต้องโดยบังเอิญ

สามารถสรุปได้ว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์นั้นมีความแตกต่างกันโดยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการเรียนรู้ที่ผิดไปจากความเป็นจริง แต่ข้อผิดพลาดนั้นเกิดขึ้นจากสาเหตุใหญ่คือความสะเพร่า ไม่ระมัดระวัง รวมไปถึงปัจจัยภายนอกด้านอื่นๆแต่ไม่ได้เกิดจากกระบวนการคิดที่ผิดเหมือนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมักแอบซ่อนอยู่โดยไม่ทันสังเกตเห็น หรือบางครั้งอาจซ่อนตัวอยู่ภายใต้คำตอบที่ถูกต้องก็เป็นได้ แต่ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถสังเกตเห็นได้ชัดเจนจากการเขียนหรือการพูดของนักเรียน

4.งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

4.1 งานวิจัยในต่างประเทศ

Liang and Wood (2005: 53 – 70) ได้ทำวิจัยเกี่ยวกับ “มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดของนักเรียนเมื่อทำงานกับลอกกาลิทึ่ม” การศึกษาครั้งนี้จะตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเมื่อทำงานกับลอการิทึมโดยใช้แบบทดสอบกับนักเรียน 81 คนซึ่งมาจากสองโรงเรียนในสิงคโปร์ โดยคำถามจะถูกจำแนกตามระดับความรู้ความเข้าใจ ซึ่งข้อมูลจะถูกนำไปวิเคราะห์เพื่อหาข้อผิดพลาดและสาเหตุที่เป็นไปได้ ซึ่งพบว่านักเรียนมีความสามารถในการคำนวณขั้นพื้นฐานแต่มีความสามารถน้อยลงเมื่อต้องตอบคำถามที่จำเป็นต้องใช้ความรู้ในขั้นสูงขึ้น นอกจากนี้ข้อผิดพลาดจำนวนมากที่ไม่ได้เกิดจากการขาดความรู้ แต่ปรากฏว่าเกิดจากการด่วนสรุปบนกฎของพีชคณิต

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

Luneta and Makonye (2010: 35 – 45) ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์ข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนเกรด 12 ในแอฟริกาใต้” โดยงานวิจัยได้ทำการศึกษาเพื่อตรวจสอบข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่นักเรียนได้แสดงออกในวิชาแคลคูลัส ผู้วิจัยจำแนก ข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนในการตอบสนองต่อคำถามแคลคูลัสเช่นเดียวกับอธิบายความเกี่ยวเนื่องกันระหว่างข้อผิดพลาดกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียน ซึ่งจุดประสงค์ของงานวิจัยชิ้นนี้คือ เพื่อที่จะศึกษาธรรมชาติของข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่นักเรียนตอบสนองต่อคำถามหรือโจทย์ในวิชาแคลคูลัส และจากการวิเคราะห์พบว่าข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนส่วนใหญ่เกิดจากช่องว่างทางความรู้ในเรื่องพื้นฐานทางพีชคณิต

Muzangwa and Chifamba (2012: 1 – 10) ทำการวิจัยเกี่ยวกับการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการเรียนแคลคูลัสของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในมหาวิทยาลัยเกรทซิมบับเวโดยข้อมูลได้มาจากการรวบรวมผ่านการทำแบบฝึกหัดแคลคูลัส1และ2 นักศึกษาผ่านการเรียน แคลคูลัส1 ในเทอมแรกโดยให้นักศึกษาทำแบบทดสอบก่อนเรียนในตอนเริ่มต้นเพื่อประเมินระดับของผู้เรียนในตอนแรกและเพื่อตรวจสอบว่าสาเหตุของความเข้าใจผิดบางอย่างเป็นเพราะพื้นฐานของผู้เรียนจากนั้นจะทำการทดสอบหลังเรียนเมื่อจบจบการเรียน (60 ชั่วโมง) จุดมุ่งหมายของงานวิจัยนี้ให้ความสนใจ ในเนื้อหาแคลคูลัสเบื้องต้นได้แก่ฟังก์ชันลิมิตความต่อเนื่องพื้นฐานการอนุพันธ์และพื้นฐานปริพันธ์ จากการวิจัยแสดงว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นผลมาจากพื้นฐานความรู้ของแคลคูลัสเบื้องต้นที่ไม่ดีอีกทั้งสาเหตุหลักของข้อผิดพลาดคือช่องว่าระหว่างความรู้ในพีชคณิตพื้นฐาน

Chulalongkorn University

Movshovitz and others (1987: 3 – 14) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การจำแนกหมวดหมู่สำหรับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ในโรงเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย” โดยมีจุดประสงค์ของการศึกษาคือการตรวจสอบข้อผิดพลาดทั่วไป ที่เกิดขึ้นและพยายามจัดหมวดหมู่ให้แก่ข้อผิดพลาดเหล่านั้น ซึ่งตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนเกรด 11 จำนวน 110 คน ผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีข้อผิดพลาด ตามหมวดหมู่ที่แบ่งไว้ ซึ่งสามารถเรียงตามลำดับความถี่จากน้อยไปหามาก ได้ดังนี้ ด้านการขาดการตรวจสอบวิธีการหาคำตอบ (Unverified solution)ด้านการอนุมานโดยใช้ตรรกวิทยาที่ไม่สมบูรณ์ (Logically invalid inference) ด้านการตีความด้านภาษาผิด (Misinterpreted language) ด้านการใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data) ด้านข้อผิดพลาดทางเทคนิคการทำ (Technical errors) และด้านการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted Theorem or Definition)

Radatz (1979: 163 – 172) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์ข้อผิดพลาดทางการศึกษาคณิตศาสตร์” โดยเขาได้ทำการวิเคราะห์และจัดหมวดหมู่ประเภทของข้อผิดพลาดได้ 5 รูปแบบ ดังนี้ ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากความยากทางภาษา (Errors due to language difficulties) ข้อผิดพลาดอันเกิดจากความยากลำบากในการได้รับข้อมูลเชิงพื้นที่ (Errors due to difficulties in obtaining spatial information) ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากการขาดที่จำเป็น ข้อเท็จจริง และความคิดรวบยอด (Errors due to deficient mastery of prerequisite skills, facts, and concepts) ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนกลุ่มที่ไม่ถูกต้อง หรือการยึดติดกับความคิด (Errors due to incorrect associations or rigidity of thinking) ข้อผิดพลาดอันเนื่องมาจากการใช้กฎหรือกลยุทธ์ที่ไม่สอดคล้อง (Errors due to the application of irrelevant rules or strategies)

Ryan and McCrae (2005: 641 – 648) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “ความรู้เกี่ยวกับข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ของครูฝึกสอน ซึ่งงานวิจัยชิ้นนี้ได้อธิบายถึงข้อผิดพลาดและมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของครูฝึกสอนชั้นประถมศึกษา โดยใช้การวิเคราะห์ของแลช ซึ่งผู้วิจัยพยายามที่จะเปิดเผยรายละเอียดเพิ่มเติมเกี่ยวกับการเริ่มต้นก่อนที่จะฝึกสอนในวิชาคณิตศาสตร์ รวมไปถึงแบบรูปของข้อผิดพลาดและมโนทัศที่คลาดเคลื่อน

Schnepper and Mccoy (2013: 1–7) ได้ทำวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมปลาย” ซึ่งมีนักเรียนเข้าร่วม 38 คน โดยเป็นนักเรียนชายจำนวน 19 คน และนักเรียนหญิงจำนวน 19 คน โดยผู้วิจัยทำการวิเคราะห์การทำงานของนักเรียนที่เข้าร่วมวิจัยทุกคนและคัดเลือกนักเรียนมาสัมภาษณ์ถึงคนขั้นตอนและวิธีการแก้ปัญหาจำนวน 5 คน โดยผู้เข้าร่วมจะได้รับการสอนเนื้อหาก่อนจากนั้นจะได้รับการประเมินสั้นๆ โดยการสอบย่อย จากนั้นผู้วิจัยจะทำการวินิจฉัยและวิเคราะห์หาจุดที่ผิดพลาดของนักเรียน โดยระหว่างระยะเวลาเรียนข้อผิดพลาดเหล่านี้จะได้รับการสอนใหม่อีกครั้ง และในตอนท้ายของบทเรียนนักเรียนจะได้รับการทดสอบท้ายบทซึ่งจะวัดในเรื่องของความรู้เชิงกระบวนการและความรู้เชิงมโนทัศน์ นอกจากนี้ผู้วิจัยยังทำการแบ่งประเภทของข้อผิดพลาดออกเป็น 5 ประเภท ได้แก่ คำตอบที่ไม่สมบูรณ์, การใช้ข้อมูลที่ผิด, ข้อผิดพลาดทางเทคนิค, ข้อผิดพลาดที่เกิดจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้เรียนมาก่อนหน้าและการบิดเบือนทางบทนิยาม โดยจากการวินิจฉัยพบข้อผิดพลาดที่ไม่ซ้ำกันจำนวน 143 จุดจากทั้งหมด 265 จุด ซึ่งหากเรียงลำดับข้อผิดพลาดที่พบจากมากไปน้อยเป็นร้อยละ (รวมข้อผิดพลาดจุดที่ซ้ำ) ได้ดังนี้ คำตอบที่ไม่สมบูรณ์, การใช้ข้อมูลที่ผิด, ข้อผิดพลาดทางเทคนิค,

ข้อผิดพลาดที่เกิดจากมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้เรียนมาก่อนหน้านี้และการบิดเบือนทางบทนิยามตามลำดับ

Swedosh (1996, 534 – 541) ทำวิจัยเกี่ยวกับการตรวจสอบลักษณะและความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่ตรวจพบในการทดสอบของสองสถาบันอุดมศึกษาได้แก่ University of Melbourne และLaTrobe University โดยในเอกสารได้ระบุถึงลักษณะการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนรวมไปถึงร้อยละความถี่ที่พบในโจทย์แต่ละข้อซึ่งผู้วิจัยได้อธิบายว่าความเข้าใจที่ไม่เพียงพอมีแนวโน้มที่จะส่งผลไปยังการนำทฤษฎีบทไปใช้เกินขอบเขตซึ่งการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขดูเหมือนว่าจะเป็นลักษณะหลักของการที่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนโดยผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าข้อมูลเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้จะนำไปสู่การให้ความสำคัญในการเน้นยำประเด็นเหล่านี้ให้มากขึ้นเพื่อช่วยลดความถี่ของการมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในนักเรียน

4.2 งานวิจัยภายในประเทศ

เกษสุดา บูรณพันศักดิ์ (2545: 39 – 79) ได้ทำวิจัยเรื่อง “การศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่4 ในโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา กรุงเทพมหานคร” โดยได้ทำการศึกษาใน 3 ประเด็นคือ 1) เพื่อศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 2) เพื่อศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำแนกตามระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์และ3) เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่4 ปีการศึกษา2545 จากโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษากรุงเทพมหานครจำนวน 313 คน และผู้วิจัยคัดเลือกนักเรียนที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์ต่ำที่ได้คะแนนแบบทดสอบมโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันน้อยที่สุดเพื่อสัมภาษณ์จำนวน 24 คน โดยผู้วิจัยได้ผลการศึกษาในประเด็นของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่4 มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันด้านการใช้บทนิยามสัญลักษณ์สมบัติและตัวแปรและนักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในด้านการใช้สิ่งที่โจทย์กำหนดให้การใช้สูตรการคิดคำนวณการตีความด้านภาษาการตรวจสอบการแก้ปัญหาและการเขียนกราฟ

ไข่มุก เลื่องสุนทร (2552: 1-6) ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษา

ราชบุรี เขต 1 และประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต 1 กระทรวงศึกษาธิการ ผู้วิจัยดำเนินการสุ่มแบบแบ่งชั้น (Stratified Random Sampling) โดยสุ่มโรงเรียนที่เปิดสอนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต 1 กระทรวงศึกษาธิการ ปีการศึกษา 2552 จากแต่ละอำเภอด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบง่ายโดยการจับสลากจำนวน 10 โรงเรียน โดยพิจารณาตามสัดส่วนจำนวนโรงเรียนในแต่ละอำเภอ ในแต่ละโรงเรียนที่สุ่มได้ สุ่มห้องเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนละ 1 ห้องเรียนโดยวิธีการจับสลาก จะได้ห้องเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 10 ห้อง และได้จำนวนนักเรียน 402 คน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการสัมภาษณ์เป็นนักเรียนที่มีความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเรื่องจำนวนมากที่สุด จำนวน 10 คน ซึ่งผลการวิจัยพบว่ามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในการทำแบบวัดมโนทัศน์ แบบอัตนัย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง“จำนวน”ซึ่งประกอบด้วย 3 หัวข้อ คือ สมบัติของจำนวนนับ ระบบจำนวนเต็ม และเลขยกกำลัง เรียงตามลำดับความถี่จากมากไปหาน้อย คือ ด้านการบิดเบือนทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม และสมบัติ ด้านขาดการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา ด้านข้อผิดพลาดในเทคนิคการทำ ด้านการใช้ข้อมูลผิด และด้านการตีความด้านภาษา

ดารณี คำแหง (2533) ทำการวิจัยเรื่อง “การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5” มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ลำดับอนุกรม โดยมีตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 320 คน โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบสอบเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ชนิดเลือกตอบ และชนิดความเรียง ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง โดยมีค่าความเที่ยงเป็น 0.891 และ 0.924 ตามลำดับ การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ใช้ลักษณะข้อบกพร่อง ซึ่งปรับปรุงมาจากลักษณะข้อบกพร่องของแบลนโดและคณะ และโมว์โชวิทซ์-อาดาร์และคณะ ซึ่งผลการวิจัยพบว่า

1. จากแบบสอบเพื่อศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ชนิดเลือกตอบ พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการนำความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบางประการของรูป และคุณสมบัติการเท่ากันไปใช้ในการพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้หรือวิจารณ์การพิสูจน์ได้ โดยข้อบกพร่องดังกล่าวข้างต้นมีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจาก นักเรียนประยุกต์ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้กับทฤษฎีไม่ถูกต้อง และนักเรียนมีลักษณะข้อบกพร่องในด้านต่างๆ เรียงตามลำดับค่าร้อยละโดยเฉลี่ยจากมากไปหาน้อย คือด้านการใช้ข้อมูล ด้านการคิดคำนวณหรือการพิสูจน์ ด้านการใช้คุณสมบัติ นิยาม กฎ สูตรหรือทฤษฎี การตีความด้านภาษา และด้านการใช้กราฟ ตารางหรือแผนภูมิ

2. จากแบบสอบเพื่อการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ชนิดความเรียง พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการนำความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน ไปใช้หาค่าตัวแปร พร้อมทั้งหาอินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณได้ โดยข้อบกพร่องดังกล่าวข้างต้นมีสาเหตุสำคัญเนื่องมาจากนักเรียนจำนิยามอินเวอร์สการบวก และอินเวอร์สการคูณผิดและนักเรียนมีลักษณะข้อบกพร่องในด้านต่างๆ เรียงตามลำดับค่าร้อยละโดยเฉลี่ยจากมากไปหาน้อยคือ การตีความด้านภาษา ด้านการคิดคำนวณหรือการพิสูจน์ ด้านการใช้คุณสมบัติ นิยาม กฎ สูตร หรือทฤษฎี ด้านการใช้กราฟ ตารางหรอแผนภูมิ และด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา

ทัศนาพร คลังแก้ว (2532) ทำการวิจัยเรื่อง “การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร” มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์ แบบอัตนัยชั้นมัธยมปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 70 คน โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่อง “ภาคตัดกรวย” และ “ตรีโกณมิติ” ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง โดยมีค่าความเที่ยงเป็น 0.92 และ 0.96 ตามลำดับ การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยได้ใช้เกณฑ์ซึ่งปรับปรุงมาจากเกณฑ์การพิจารณาข้อบกพร่องของแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของ นิสา โมว์โชวิทซ์-อาดาร์และคณะ โดยผลการวิจัยพบว่า ความถี่ของข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร เรียงลำดับจากมากไปหาน้อย คือ บกพร่องในเทคนิคการทำ ไม่มีการตรวจสอบในระหว่างการแก้ปัญหา การใช้ข้อมูลผิดบิดเบือนทฤษฎี กฎ สูตร และนิยาม และข้อผิดพลาดในการใช้ภาษา

Chulalongkorn University

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2546: 1 -7) ทำการวิจัยเรื่อง “การสังเคราะห์งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์” โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อสังเคราะห์งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการสังเคราะห์งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ตั้งแต่ พ.ศ. 2521 ถึง พ.ศ. 2546 โดยในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้แบ่งเนื้อหาที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็น 4 ด้าน คือ ด้านการตีความจากโจทย์ ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ บท นิยาม และสมบัติด้านการคิดคำนวณ และด้านการตรวจสอบการแก้ปัญหา ซึ่งผลการวิจัยพบว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังนี้

- ช่วงชั้นที่ 1 เรื่อง จำนวนนับและการบวก ลบ คูณ หารจำนวนนับ เวลา
- ช่วงชั้นที่ 2 เรื่อง การบวก ลบ คูณ หารจำนวนนับ เศษส่วน ทศนิยม และร้อยละ เวลา เงิน การวัด ตัวประกอบของจำนวนนับ สมการและการแก้สมการ

- ช่วงชั้นที่3 เรื่อง จำนวนเต็ม เลขยกกำลัง เศษส่วนและทศนิยม ห.ร.ม.และ ค.ร.น. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พหุนามและการแยกตัวประกอบพหุนาม อัตราส่วนและร้อยละ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง การวัด ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เส้นขนาน อสมการ ปริมาตรและพื้นที่ผิว ความคล้าย ระบบสมการกำลังสอง
- ช่วงชั้นที่ 4 เรื่อง ระบบจำนวนจริง อัตราส่วนตรีโกณมิติและการนำไปใช้ เรขาคณิตวิเคราะห์ ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เซต เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์ จำนวนเชิงซ้อน เวกเตอร์ในสามมิติ ฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์

ศิริเดช สุชีวะ (2538: 1- 4) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การพัฒนาวิธีการวินิจฉัยสำหรับตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์” โดยมีวัตถุประสงค์ของการทำวิจัยเพื่อพัฒนาวิธีการวินิจฉัยเพื่อตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ และเปรียบเทียบผลการวินิจฉัยกับวิธีการ Rule Space Model โดยแบ่งประชากรและกลุ่มตัวอย่าง: แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม คือ

1. กลุ่มตัวอย่างสำหรับทดลองใช้วิธีการวินิจฉัย เป็นนักเรียน ม.2 ตัวแทนของนักเรียน ในเมือง (กทม.) และนักเรียนชานเมือง(นนทบุรี) จำนวน 940 คน
2. กลุ่มตัวอย่างที่วินิจฉัยเพื่อใช้เป็นเกณฑ์ตรวจสอบความตรง เป็นครูที่สอนคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง 940 คนในปัจจุบัน จำนวน 10 คน
3. กลุ่มตัวอย่างสำหรับประเมินวิธีการที่พัฒนาขึ้น ได้แก่ ครูที่ร่วมทดลองใช้วิธีการวินิจฉัย 7 คน ผู้ทรงคุณวุฒิมีทางการวัดและประเมินผล 7 คน กลุ่มตัวอย่างได้จากการเลือกอย่าง เฉพาะเจาะจงตามเกณฑ์ที่ผู้วิจัยตั้งไว้เพราะการวิจัยนี้จำเป็นต้องได้รับความร่วมมือจากกลุ่มตัวอย่างเป็นอย่างสูง จึงต้องเป็นผู้ที่เต็มใจร่วมมือเท่านั้น

ซึ่งผลการทดลองที่ได้วิธีการที่พัฒนาขึ้นมีความตรงเชิงเกณฑ์สัมพันธ์ เพื่อตรวจสอบความสัมพันธ์กับผล การวินิจฉัยของครูด้วย Chi-Square Test มีนัยสำคัญที่ .01 ขนาดความสัมพันธ์ Cramer's V เป็น .98 มีความเที่ยงจากสัดส่วนความสอดคล้องของผลการวินิจฉัยจาก ข้อสอบที่มีรูปแบบข้อสอบเดียวกันเป็น .86 เมื่อ เทียบกับผลการวินิจฉัยจากวิธีการของ Rule Space Model พบว่ามีนัยสำคัญที่ .01 โดยมีขนาดความสัมพันธ์ Cramer's Vเป็น.98 ความเที่ยงแตกต่างกันอย่างไม่

มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นสามารถใช้งานได้ตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

อภิญญา ตังประพฤธิกุล (2543) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “วิธีการวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการหารในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3” ซึ่งมีวัตถุประสงค์ เพื่อศึกษาวิธีการวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการหารจำนวนที่ตัวตั้งเป็นเลข 3 หลัก ตัวหารเป็นเลขจำนวน หลักเดียว และเพื่อประเมินคุณภาพของวิธีการวินิจฉัย ได้แก่ ความตรง ความเที่ยง และความสามารถในการนำไปใช้ โดยมีกลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนที่ได้ผ่านการเรียน เรื่อง การหารในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 สังกัดสำนักงานการประถมศึกษาอำเภอท่าบ่อ จังหวัดหนองคาย จำนวน 352 คน ซึ่งมีเครื่องมือคือแบบวัดเพื่อสำรวจข้อบกพร่อง แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน แบบวัดเพื่อย้อนรอยการคิด แบบวัดพื้นฐานความเข้าใจ แบบสัมภาษณ์ วิธีการวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประกอบไปด้วย ขั้นตอนสำรวจข้อบกพร่อง เพื่อสร้างเป็นแบบการคิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเนื้อหาที่ต้องการวินิจฉัย การวินิจฉัยโดยเปรียบเทียบชุดคำตอบของนักเรียนกับชุดคำตอบของแบบการคิดในแบบทดสอบด้วยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และแบบวัดเพื่อย้อนรอยการคิดกรณีที่ไม่สามารถวินิจฉัยได้ด้วยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน การวินิจฉัยนักเรียนในกลุ่มที่เรียนอ่อน ซึ่งตอบแบบวัดทั้งสองฉบับ ดังกล่าวแบบเดาสุ่มด้วยการทดสอบจากแบบวัดพื้นฐานความเข้าใจ ผลการวินิจฉัย พบว่า มีแบบการคิดทั้งหมด 15 แบบการคิด นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจากการใช้แบบการคิดที่ 1 คือ ไม่เข้าใจการกระจายเศษ เป็นจำนวนมากที่สุด การวินิจฉัยนักเรียนในกลุ่มเดาสุ่ม พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความบกพร่องในการหารเหลือเศษ กรณีตั้ง 1 ที่มีค่าน้อยกว่าตัวหาร การหารเหลือเศษกรณีตัวตั้ง 2 หลัก ผลหาร 2 หลัก มีการกระจายเศษ และการหารลงตัวกรณีตัวตั้ง 2 หลัก เป็นจำนวนเต็มสิบ ผลหาร 2 หลัก มีการกระจายเศษ

อัมพร ม้าคนอง (2536) ได้ทำการวิจัยเรื่อง “การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย” การวิจัยครั้งนี้มีจุดประสงค์ เพื่อวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เรื่อง ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ตรีโกณมิติและการประยุกต์ เมตริกซ์ กำหนดการเชิงเส้น เวกเตอร์ จำนวนเชิงซ้อน และสถิติ (2) ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/3 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จำนวน 21 คน โดยเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แบบฝึกหัดในหนังสือเรียน และแบบฝึกหัดประจำบท โจทย์ประยุกต์ และแบบทดสอบย่อยประจำบท ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยเครื่องมือทั้งหมดเป็นโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ชนิดความเรียง ให้แสดงวิธีทำในการแก้ปัญหา ซึ่งผลการวิจัย สรุปได้ดังนี้

1. นักเรียนมีข้อผิดพลาดด้านการใช้ ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตีความจากโจทย์ตามลำดับ

2. ความถี่ของข้อผิดพลาดในแต่ละส่วนประกอบของแต่ละด้านมีดังนี้

ด้านการตีความโจทย์ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วน การนำข้อมูลมาใช้ผิดมาที่สุด รองลงมาคือ แปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง

ด้านการใช้ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติ มากที่สุด รองลงมาคือ ประยุกต์ใช้ข้อมูลกับทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติไม่ถูกต้อง จำทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติผิด และขาดทักษะในการเลือกทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยาม และสมบัติที่เหมาะสมมาใช้ ตามลำดับ

ด้านการคำนวณ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วน สรุปผลไม่ถูกต้องหรือสรุปผลไม่ครบทุกกรณีมากที่สุด รองลงมาคือ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ ขาดทักษะในหลักพีชคณิตเบื้องต้นในการแก้สมการและอสมการ ทำผิดขั้นตอนที่ถูกต้องในการคำนวณ และขาดความเข้าใจในหลักเลขคณิตเบื้องต้นตามลำดับ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ผู้วิจัยมีวิธีการดำเนินการวิจัยดังนี้

1. การศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
5. การเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล

1. การศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยต่างๆ ทั้งในและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยดังต่อไปนี้

1. ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยต่างๆ ทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับความหมายและลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ รวมไปถึงข้อแตกต่างระหว่างมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เพื่อใช้เป็นแนวทางในการวิจัย

2. ศึกษาขอบเขตเนื้อหาสาระจำนวนและการดำเนินการ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 - 6) จากหนังสือคู่มือครู หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551)

3. ศึกษาเนื้อหาเรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ซึ่งประกอบไปด้วย 7 หัวข้อ คือ ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง การไม่เท่ากัน ค่าสัมบูรณ์ รากที่ n ของจำนวนจริง และเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 1 เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551) หนังสือคู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีกระทรวงศึกษาธิการ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2553)

4. ศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการวิจัย วิธีการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ และการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงสำรวจ (survey research) โดยศึกษาในประเด็นดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconceptions) ซึ่งสามารถแบ่งประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

    1.1 การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations)

    1.2 ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Defective understanding about mathematics truths)

    1.3 การตีความผิด (Mistranslations)

    1.4 การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited conceptions)

2. ข้อผิดพลาด (Mistakes) ซึ่งสามารถแบ่งประเภทของข้อผิดพลาดเป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

2.1 การใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data)

2.2 ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ (Errors in language and symbols)

2.3 ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ (Errors in operation and computation)

2.4 การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted theorem or definition)

โดยใช้แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ในปีการศึกษา 2557 จำนวน 397 คน โดยผู้วิจัยดำเนินการสุ่มกลุ่มตัวอย่างโดยดำเนินการสุ่มแบบชั้นภูมิ (stratified random sampling) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย

1.1 สำรวจโรงเรียนในจังหวัดกรุงเทพมหานคร ซึ่งเป็นโรงเรียนในสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1และเขต 2 พบว่ามีโรงเรียนที่เปิดสอน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่5 จำนวน 119 โรงเรียน และมีนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 42,378 คน โดยมีรายละเอียดดัง ตารางที่ 1ต่อไปนี้

ตารางที่ 1 จำนวนโรงเรียนที่เปิดสอนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 จำแนกตามขนาดของโรงเรียน

ขนาดโรงเรียน	เขต 1	เขต 2
ขนาดเล็ก	4	0
ขนาดกลาง	24	5
ขนาดใหญ่	20	22
ขนาดใหญ่พิเศษ	19	25
รวม	67	52

หมายเหตุ: เกณฑ์การแบ่งขนาดของโรงเรียน (โดยกลุ่มนโยบายและแผน สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาเขต 1) 1. ขนาดเล็ก (น้อยกว่า 500 คน), 2. ขนาดกลาง (500 – 1,499 คน), 3. ขนาดใหญ่ (1,500 – 2,499 คน), 4. ขนาดใหญ่พิเศษ (ตั้งแต่ 2,500 คนขึ้นไป)

1.2 กำหนดขนาดของกลุ่มตัวอย่างให้มีขนาดใหญ่พอที่จะเป็นตัวแทนของประชากร จากตารางสำเร็จรูปของยามาเน (Yamane, 1973: 1088) ที่ระดับความเชื่อมั่น 95% ซึ่งสามารถเกิดความคลาดเคลื่อนได้ ± 5% จะได้ว่ากลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนประชากรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 397 คน

1.3 กำหนดจำนวนห้องเรียนที่ใช้ในการวิจัยให้มีจำนวนนักเรียนรวมเพียงพอที่จะใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างได้ เนื่องจากจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยเฉลี่ยคือ 40 คน/ ห้องเรียน ผู้วิจัยจึงทำการสุ่มห้องเรียนทั้งหมด 11 ห้องเรียน โดยมีรายละเอียดขั้นตอน การสุ่มในข้อถัดไป

1.4 สุ่มตัวอย่าง โดยใช้วิธีการสุ่มแบบชั้นภูมิ (stratified random sampling) ซึ่งมีลำดับขั้นดังต่อไปนี้

1.4.1 สุ่มโรงเรียนที่เปิดสอนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มโดยจับสลาก โดยพิจารณาตามสัดส่วนจำนวนโรงเรียนที่แบ่งตามขนาดของโรงเรียนในแต่ละเขต (อัตราส่วนระหว่างจำนวนโรงเรียนที่แบ่งตามขนาด: จำนวนโรงเรียนที่เลือกศึกษา คือ 10:1) ดังนั้นผู้วิจัยจึงสุ่มห้องเรียนทั้งหมด 11 ห้องเรียน ซึ่งจะได้จำนวนกลุ่มตัวอย่าง 397 คน โดยแสดงรายละเอียดตามตารางที่ 2 ต่อไปนี้

ตารางที่ 2 จำนวนโรงเรียนที่เลือกศึกษา

เขต	**จำนวนโรงเรียนที่เลือกศึกษา**			
	ขนาดเล็ก	**ขนาดกลาง**	**ขนาดใหญ่**	**ขนาดใหญ่พิเศษ**
1	0	2	2	2
2	0	1	2	2

1.4.2 ในแต่ละโรงเรียนที่สุ่มได้ สุ่มห้องเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามจำนวน โรงเรียนที่เลือกศึกษา จากห้องเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมด โดยใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มโดยวิธีจับสลาก และใช้นักเรียนทุกคนในห้องที่สุ่มมาเป็นกลุ่มตัวอย่าง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตารางที่ 3 ผลการสุ่มกลุ่มตัวอย่าง

เขต	ขนาด	โรงเรียน	ห้อง	จำนวนนักเรียน
1	ใหญ่พิเศษ	สามเสนวิทยาลัย	1	47
		ศึกษานารี	2	49
	ใหญ่	สันติราษฎ์วิทยาลัย	2	34
		สุวรรณารามวิทยาคม	1	44
	กลาง	มัธยมวัดนายโรง	1	26
		วัดราชาธิวาส	2	36
2	ใหญ่พิเศษ	เศรษฐบุตรบำเพ็ญ	2	41
		หอวัง	4	36
	ใหญ่	ปทุมคงคา	2	34
		ราชวินิตบางเขน	1	26
	กลาง	พุทธจักรวิทยา	2	24
รวม				397

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แบ่งเป็น 2 ชนิด คือ

1. แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์
2. แบบวัดข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

โดยผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดซึ่งครอบคลุมเนื้อหาสาระจำนวนและการดำเนินการ ประกอบด้วย จำนวนจริง และเลขยกกำลัง ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเองโดยมีขั้นตอนการดำเนินการ ดังนี้

1. วิเคราะห์ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทุกประเภท เพื่อศึกษาลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแต่ละประเภทและความแตกต่างกัน เพื่อใช้ในการจำแนกลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบออกเป็นประเภทต่างๆ

2. ศึกษาขอบเขตของเนื้อหาสาระจำนวนและการดำเนินการ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 - 6) จากหลักสูตร คู่มือครู หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เป็นหลักขอบเขตของเนื้อหาเพื่อที่จะนำมโนทัศน์ย่อยทั้งหมดออกมาและเชื่อมโยงไปยังมโนทัศน์ย่อยส่วนที่จะนำไปสู่มโนทัศน์ที่คลาดคลาดเคลื่อนโดย สามารถจำแนกมโนทัศน์ย่อยได้ ดังตารางที่ 3 ต่อไปนี้

ตารางที่ 4 มโนทัศน์เรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง

เนื้อหาเรื่อง	หัวข้อย่อย
จำนวนจริง	1. ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง 2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและ การคูณ 3. การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง 4. การไม่เท่ากัน 5. ค่าสัมบูรณ์
เลขยกกำลัง	1. รากที่ n ของจำนวนจริง 2. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

3. แบ่งลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ออกเป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations) เป็นการนำทฤษฎี บท กฎ สูตร หรือนิยามไปใช้ในกรณีอื่นทั่วไป ซึ่งเกินกว่าขอบเขตหรือเงื่อนไขที่ได้ระบุไว้
2. ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Defective Understanding about mathematics truths) เป็นความเข้าใจที่มีพื้นฐานจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิด
3. การตีความผิด (Mistranslations) เป็นการแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง
4. การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited conceptions) เป็นการมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง

4. สร้างแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ให้สอดคล้องและครอบคลุมตามตารางเนื้อหา โดยแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนนี้ให้นักเรียนแสดงวิธีทำตามลำดับขั้นตอนที่นักเรียนคิดลงในกระดาษคำตอบ

5. นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบและให้คำปรึกษาเพื่อแก้ไขปรับปรุงให้ดีขึ้น แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจความตรงเชิงเนื้อหา (Content validity) ความถูกต้องของภาษา ความเป็นปรนัยของคำตอบและพิจารณาข้อคำถามในแต่ละข้อว่าเป็นแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ได้หรือไม่โดยใช้เกณฑ์จากความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิมีความคิดเห็นสอดคล้องกันอย่างน้อย 2 ใน 3

6. นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มเล็กจำนวน 5 คน ซึ่งได้เรียนเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังมาแล้ว และไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง แล้วนำมาปรับปรุงความเหมาะของเวลาที่ใช้ทำแบบวัดและด้านการใช้ภาษา

7. นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มใหญ่ จำนวน 40 คน ซึ่งได้เรียนเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง และไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กจำนวน 5 คนที่ใช้ในการตรวจสอบความเหมาะสมด้านเวลาและด้านการใช้ภาษาไปแล้ว

8. นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ของนักเรียนทั้ง 40 คน มาตรวจหามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้ง 4 ลักษณะ โดยผู้วิจัยทำการบันทึกความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบในแต่ละประเภท

9. นำความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลโดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักเรียนที่ทำในแต่ละข้อ และความถี่ของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแต่ละประเภท

10. นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่ผ่านการคัดเลือกไปใช้ทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

แบบวัดข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

โดยผู้วิจัยได้สร้างแบบวัดซึ่งครอบคลุมเนื้อหาเนื้อหาสาระจำนวนและการดำเนินการ ประกอบด้วยเรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง ซึ่งมีขั้นตอนการดำเนินการ ดังนี้

1. วิเคราะห์ลักษณะของข้อผิดพลาดทุกประเภท เพื่อศึกษาลักษณะของข้อผิดพลาดแต่ละประเภทและความแตกต่างกัน เพื่อใช้ในการจำแนกลักษณะของข้อผิดพลาดที่พบออกเป็นประเภทต่างๆ

2. ศึกษาขอบเขตของเนื้อหาสาระจำนวนและการดำเนินการ ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4-6) จากหลักสูตร คู่มือครู หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เป็นหลักขอบเขตของเนื้อหาเพื่อที่จะนำมโนทัศน์ย่อยทั้งหมดออกมาและเชื่อมโยงไปยังมโนทัศน์ย่อยส่วนที่จะนำไปสู่ข้อผิดพลาด โดยสามารถจำแนกมโนทัศน์ย่อยได้ ดังตารางที่ 3

3. แบ่งลักษณะของข้อผิดพลาดออกเป็น 4 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. การใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ใช้ข้อมูลอื่นที่ไม่สอดคล้องต่อการใช้แก้ปัญหา ไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน เลือกใช้หน่วยของตัวแปรผิด หรือการลอกรายละเอียดเกี่ยวกับโจทย์ผิด โดยข้อผิดพลาดอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มต้น หรืออาจเกิดขึ้นในช่วงระหว่างการดำเนินการกับข้อมูล
2. ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ (Errors in language and symbols) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ภาษา สัญลักษณ์หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้องรวมไปถึงการนำเสนอข้อมูลจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ สมการแผนภาพ ตารางหรือกราฟไม่ถูกต้อง
3. ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ (Errors in operation and computation) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณหรือการเลือกการดำเนินการที่ไม่สอดคล้องในการแก้ปัญหา
4. การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted theorem or definition) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยามที่เฉพาะเจาะจง ผิดไปจากความเป็นจริง

4. สร้างแบบวัดข้อผิดพลาด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาเรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ให้สอดคล้องและครอบคลุมตามตารางเนื้อหา โดยแบบวัดข้อผิดพลาดนี้ให้นักเรียนแสดงวิธีทำตามลำดับขั้นตอนที่นักเรียนคิดลงในกระดาษคำตอบ

5. นำแบบวัดข้อผิดพลาด ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบและให้คำปรึกษาเพื่อแก้ไขปรับปรุงให้ดีขึ้น แล้วนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่านตรวจความตรงเชิงเนื้อหา (Content validity) ความถูกต้องของภาษา ความเป็นปรนัยของคำตอบ และพิจารณาข้อคำถามในแต่ละข้อว่าเป็นแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบอัตนัยได้หรือไม่ โดยใช้เกณฑ์จากความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิมีความคิดเห็นสอดคล้องกันอย่างน้อย 2 ใน 3

6. นำแบบวัดข้อผิดพลาดที่ได้ปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มเล็กจำนวน 5 คน ซึ่งได้เรียนเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังมาแล้ว และไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างแล้วนำมาปรับปรุงความเหมาะสมของเวลาที่ใช้ทำแบบวัดและด้านการใช้ภาษา

7. นำแบบวัดข้อผิดพลาด ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มใหญ่ จำนวน 40 คน ซึ่งได้เรียนเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง และไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กจำนวน 5 คน ที่ใช้ในการตรวจสอบความเหมาะสม ด้านเวลาและด้านการใช้ภาษาไปแล้ว

8. นำแบบวัดข้อผิดพลาด ของนักเรียนทั้ง 40 คน มาตรวจหาข้อผิดพลาดทั้ง 4 ลักษณะโดยผู้วิจัยทำการบันทึกความถี่ของข้อผิดพลาดที่พบในแต่ละลักษณะ

9. นำความถี่ของข้อผิดพลาดที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลโดยพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนนักเรียนที่ทำในแต่ละข้อ และความถี่ของการเกิดข้อผิดพลาดแต่ละประเภท

10. นำแบบวัดข้อผิดพลาด ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่มี ที่ผ่านการคัดเลือกไปใช้ทดสอบกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

5. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ผู้วิจัยนำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ไปทดสอบกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยผู้วิจัยดำเนินการทดสอบด้วยตนเองทั้งหมดและอยู่ภายใต้การดูแลของอาจารย์ผู้สอนประจำวิชา

2. ภายหลังดำเนินการทำแบบวัดตามที่กำหนดไว้ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมด มาทำการวิเคราะห์เพื่อตรวจหาความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ และแบ่งแยกตามประเภทที่กำหนดไว้พร้อมทั้งวิเคราะห์ถึงลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดในแต่ละประเภท

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดของกลุ่มตัวอย่างมาวิเคราะห์ เพื่อศึกษาในประเด็นต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน (Misconceptions)

    1.1 วิเคราะห์ความถี่ (Frequency) ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยจำแนกไว้ทั้ง 4 ประเภท เป็นจำนวนร้อยละ

    1.2 วิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) โดยพิจารณาลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์แต่ละประเภทว่าเกิดขึ้นและมีลักษณะเป็นอย่างไร

2. ประเด็นของข้อผิดพลาด (Mistakes)

    1.1 วิเคราะห์ความถี่ (Frequency) ประเภทของข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยจำแนกไว้ทั้ง 4 ประเภท เป็นจำนวนร้อยละ

    1.2 วิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) โดยพิจารณาลักษณะของข้อผิดพลาดแต่ละประเภทว่าเกิดขึ้นและมีลักษณะเป็นอย่างไร

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 โดยใช้กลุ่มตัวอย่างทั้งสิ้น 397 คน ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 ตอนดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

1.1 ความถี่และร้อยละของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 397 คน ที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง จำแนกตามประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งแสดงในตารางที่ 5

1.2 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งแสดงในตารางที่ 6 - 9

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

2.1 ความถี่และร้อยละของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 397 คน ที่เกิดข้อผิดพลาดในเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังจำแนกตามประเภทของข้อผิดพลาด ซึ่งแสดงในตารางที่ 10

2.2 ลักษณะของข้อผิดพลาดที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งแสดงใน ตารางที่ 11 - 14

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลในแต่ละตอนมีรายละเอียดดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์

1.1 ความถี่และร้อยละของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 397 คน ที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ในเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง จำแนกตามประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ซึ่งแสดงในตารางที่ 5

ตารางที่ 5 จำนวนนักเรียนและร้อยละของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนจำแนกตามประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์และเนื้อหาคณิตศาสตร์

เนื้อหาเรื่อง	หัวข้อย่อย	จำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน	ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน							
			การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข		ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์		การตีความผิด		การมีมโนทัศน์ที่จำกัด	
			ความถี่	ร้อยละ (%)	ความถี่	ร้อยละ (%)	ความถี่	ร้อยละ (%)	ความถี่	ร้อยละ (%)
จำนวนจริง	1. ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง	661 (n = 321)	13	1.97	320	52.37	93	15.22	235	38.46
	2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ	291 (n = 265)	36	12.37	32	11	36	12.37	187	64.26
	3. การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง	278 (n = 301)	135	48.56	5	1.80	3	1.08	135	48.56
	4. การไม่เท่ากัน	531 (n = 276)	262	49.34	174	32.77	17	3.20	78	14.70
	5. ค่าสัมบูรณ์	90 (n = 127)	13	14.44	21	23.33	20	22.22	36	40
	รวม	1,851	459	24.80	552	29.82	169	9.13	671	36.25
เลขยกกำลัง	1. รากที่ n ของจำนวนจริง	482 (n = 289)	3	0.62	102	21.16	31	6.43	346	71.78
	2. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	443 (n = 257)	31	7.00	21	4.74	21	4.74	370	83.52
	รวม	925	34	3.68	123	13.30	52	5.62	716	77.41
รวม		2,776	493	17.76	675	24.32	221	7.96	1,387	49.96

จากตารางที่ 5 พบว่า นักเรียนทั้งหมดจำนวน 397 คน นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์มากที่สุดคือความคลาดเคลื่อนประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัด โดยมีความถี่ 1,387 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 49.96 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้น รองลงมาคือประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ โดยมีความถี่ 675 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 24.32 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้น รองลงมาคือประเภทการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข โดยมีความถี่ 493 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 17.76 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้น และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภทการตีความผิด โดยมีความถี่ 221 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 7.96 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้น ซึ่งไม่เป็นไปตามสมมติฐาน

นอกจากนี้ตารางที่ 5 ได้แสดงการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ ในแต่ละหัวข้อดังต่อไปนี้

หัวข้อความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 321 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 52.37 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือการมีมโนทัศน์ที่จำกัด คิดเป็นร้อยละ 38.46 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข คิดเป็นร้อยละ 1.97 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 265 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัด คิดเป็นร้อยละ 64.26 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขและการตีความผิด คิดเป็นร้อยละ 12.37 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ความเข้าในที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 11 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อการนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 301 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือ ประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข และการมีมโนทัศน์ที่จำกัด คิดเป็นร้อยละ 48.56 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 1.80 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท การตีความผิด คิดเป็นร้อยละ 1.08 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อการไม่เท่ากัน มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 276 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข คิดเป็นร้อยละ 49.34 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 32.77 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท การตีความผิด คิดเป็นร้อยละ 3.20 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อค่าสัมบูรณ์ มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 127 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การมีมโนทัศน์ที่จำกัด คิดเป็นร้อยละ 40 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 23.33 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข คิดเป็นร้อยละ 14.44 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อรากที่ n ของจำนวนจริง มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 289 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การมีมโนทัศน์ที่จำกัด คิดเป็นร้อยละ 71.78 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ คิดเป็นร้อยละ 21.16 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือ

ประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข คิดเป็นร้อยละ 0.62 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้จำนวน 357 คน โดยประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การมีมโนทัศน์ที่จำกัด คิดเป็นร้อยละ 83.52 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข คิดเป็นร้อยละ 7.00 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ และการตีความ คิดเป็นร้อยละ 4.74 ของจำนวนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

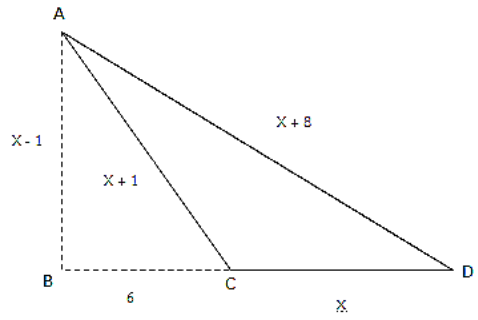
1.2 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งแสดงใน ตารางที่ 6 - 9

1.2.1 การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข (Overgeneralizations)

เป็นการนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือนิยามไปใช้ในกรณีอื่นทั่วไป ซึ่งเกินกว่าขอบเขตหรือเงื่อนไขที่ได้ระบุไว้ ตัวอย่างลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัดมีรายละเอียดดัง ตารางที่ 6

ตารางที่ 6 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนนับ ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก ..... $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{81}}{3} = \sqrt{27}$	นักเรียนควรจัดรูปจาก $\sqrt{27}$ เป็น $3\sqrt{3}$ จากนั้นเมื่อนำไปหารด้วย $\sqrt{3}$ จะได้คำตอบคือ 3 ซึ่งเป็นจำนวนนับ เป็นการหารจำนวนอตรรกยะด้วยจำนวนอตรรกยะ แต่นักเรียนกลับไม่ได้ทำเช่นนี้เนื่องจากนักเรียนอ้างอิงการหารจำนวนเต็มด้วยจำนวนเต็มไปใช้ในการหารจำนวนอตรรกยะด้วยจำนวนเต็ม
ทุกๆจำนวนในระบบจำนวนจริง จะมีอินเวอร์สการคูณ ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก ..... ทุกจำนวนจะมีอินเวอร์สการคูณ	นักเรียนควรอธิบายว่า เนื่องจาก 0 ไม่มีอินเวอร์สการคูณ จึงทำให้ข้อความที่กล่าวว่าทุกๆจำนวนในระบบจำนวนจริงจะมีอินเวอร์สการคูณ เป็นเท็จ แต่นักเรียนกลับอ้างอิงอินเวอร์สการบวกมาใช้แทนอินเวอร์สการคูณ

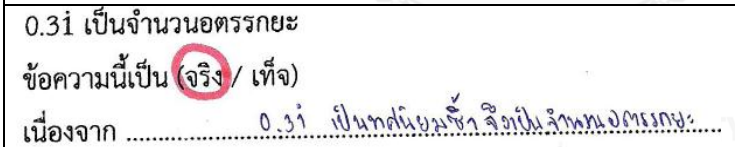
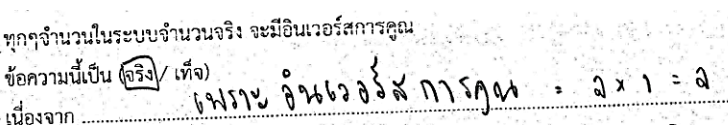
ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
นักเรียนคิดว่าสามารถแก้สมการข้างต้นเพื่อหาค่า x โดยใช้สูตร ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) ได้หรือไม่ ถ้าได้จงแสดงวิธีหาค่า x โดยการใช้สูตร ถ้าไม่ได้ จงแสดงเหตุผลประกอบ ได้ $x^3 + x^2 - 6x = 0$ $a = 1, \quad b = 1, \quad c = -6$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2(1)}$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$ $x = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $x = 2, -3$	สมการข้างต้นไม่สามารถหาค่า x โดยใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ได้ เนื่องจากสมการไม่ได้เขียนอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ แต่นักเรียนอ้างอิงสูตรมาใช้กับสมการ $x^3 + x^2 - 6x = 0$ ซึ่งเป็นสมการที่นอกเหนือจากเงื่อนไขที่สามารถใช้สูตรได้
เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้ $(X+8)^2 = (X+1)^2 + (X)^2$ เมื่อโจทย์ให้แสดงวิธีหาความยาวด้าน AD จากรูปที่กำหนดให้  	อ้างอิงทฤษฎีบทพิทาโกรัสไปใช้กับรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน
$x^2 + x - 6 > 0$ $(x+3)(x-2) > 0$ $x + 3 > 0$ และ $x - 2 > 0$ $x > -3$ และ $x > 2$	นักเรียนนำวิธีการแก้สมการพหุนามกำลังสองตัวแปรเดียวที่ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $ab = 0$ แล้ว a หรือ b อย่างน้อยหนึ่งตัวต้องเป็นศูนย์มาใช้อ้างอิงในการแก้อสมการ

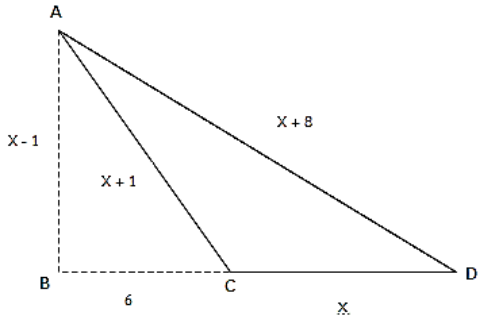
ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
จะได้ว่า $-10 < x < -2$ $-10+y < x+y < -2+y$ $\lvert -10+y \rvert < \lvert x+y \rvert < \lvert -2+y \rvert$	นักเรียนนำสมบัติการไม่เท่ากันมาอ้างอิงโดยการใส่ค่าสัมบูรณ์ในอสมการทั้งหมด
ค่าหลักของรากที่สองของ 13 คือ 3 เนื่องจาก 3.605^2 มีค่าประมาณ 13 ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก รากที่สอง ต้อง สมเหตุสมผลกันกันกัน	ค่าหลักของรากที่สองของ 13 คือ $\sqrt{13}$ แต่นักเรียนกลับให้เหตุผลในการพิจารณาโดยอ้างอิงเกี่ยวกับการทำฐานให้เหมือนกันของเลขยกกำลังมาใช้ในการอธิบาย ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับค่าหลักของรากที่สอง
บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้ $\frac{b \pm \sqrt{a^2+4ac}}{2c}$ เมื่อโจทย์ต้องการให้เขียน $64a^{\frac{1}{2}}$ ให้อยู่ในรูปกรณฑ์ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่า 0 พร้อมทั้งบทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้	บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้คือ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ แต่นักเรียนกลับนำสูตรการหาคำตอบของสมการกำลังสองในรูป $ax^2 + bx + c$ มาอ้างอิงซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับโจทย์ข้างต้น อีกทั้งยังบิดเบือนสูตรจาก $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ เป็น $\frac{b \pm \sqrt{a^2+4ac}}{2c}$ อีกด้วย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

1.2.2 ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ (Defective understanding about mathematics truths) เป็นความเข้าใจที่มีพื้นฐานจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิด ตัวอย่างลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดัง ตารางที่ 7

ตารางที่ 7 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
	$-\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนเต็มลบเนื่องจากเป็นจำนวนอตรรกยะ แต่นักเรียนเข้าใจผิดว่าเมื่อจำนวนจริงมีเครื่องหมายลบข้างหน้าจะทำให้จำนวนจริงนั้นกลายเป็นจำนวนเต็มลบ
	ทศนิยมซ้ำสามารถเขียนเป็นเศษส่วนได้ จึงเป็นจำนวนตรรกยะ แต่นักเรียนเข้าใจผิดว่าทศนิยมซ้ำเป็นจำนวนอตรรกยะ
	เนื่องจาก 0 ไม่มีอินเวอร์สการคูณ จึงทำให้ข้อความที่ว่าทุกๆจำนวนในระบบจำนวนจริงจะมีอินเวอร์สการคูณเป็นเท็จ แต่นักเรียนสับสนระหว่างอินเวอร์สและเอกลักษณ์การคูณ จึงเข้าใจผิดว่าอินเวอร์สการคูณของจำนวนจริงคือ 1

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
จะได้ AD ยาว $A \rightarrow B = x - 1$ $B \rightarrow C = 6$ ดังนั้น AD 6 AD = 6 // เมื่อโจทย์ให้แสดงวิธีหาความยาวด้าน AD จากรูปที่กำหนดให้  	นักเรียนแสดงวิธีหาความยาวของด้าน AD จากการให้เหตุผลที่ผิดและไม่สมเหตุสมผล
$-(-10) - y < z$ $10 < z + y$ $\quad 2 < z+y < 10$ —(2) $-(-2) - y < z$ $2 < z + y$	นักเรียนสรุปความสัมพันธ์ของ z + y โดยให้เหตุผลที่ผิด เนื่องจาก z + y มีค่ามากกว่า 10 และมากกว่า 2 แต่กลับสรุปความสัมพันธ์ของ z + y ว่ามีค่าระหว่าง 2 กับ 10 ซึ่งไม่ถูกต้อง
วิธีที่ 1 เมื่อพิจารณาฐานของเลขยกกำลังพบว่า $2 < 4$ **ดังนั้นเลขชี้กำลังของ 2 จึงควรมีมากกว่า เลขชี้กำลังของ 4** **นั่นคือ** $x^2 + 2x + 8 > x + 14$ **จะได้ว่า** $x^2 + 2x + 8 > x + 14$ $x^2 + x - 6 > 0$ $(x+3)(x-2) > 0$	การพิจารณาอสมการควรเริ่มโดยการทำฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากันก่อนแล้วจึงพิจารณาเลขชี้กำลัง แต่นักเรียนกลับเลือกแสดงเหตุผลว่าเนื่องจาก $2 < 4$ ดังนั้นเลขชี้กำลังของ 2 จึงควรมีค่ามากกว่า เลขชี้กำลังของ 4 ซึ่งเป็นการแสดงความเข้าใจที่บกพร่องโดยมีพื้นฐานจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
	นักเรียนควรแสดงคำตอบเป็น $\frac{2\sqrt{2}a^2}{\lvert b\rvert}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่อยู่ในรูปอย่างง่าย แต่นักเรียนกลับเข้าใจผิดว่า $\frac{\sqrt{8}\sqrt{(a^2)^2}}{\sqrt{b^2}}$ เป็นคำตอบที่อยู่ในรูปอย่างง่ายแล้ว ซึ่งความจริงแล้วยังสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อีก

1.2.3 การตีความผิด (Mistranslations) เป็นการแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง ตัวอย่างลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดัง ตารางที่ 8

ตารางที่ 8 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบการตีความผิด

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
1. $\sqrt{x^2}$ เป็นจำนวนตรรกยะทุกๆค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$; x เป็นได้ทุกค่า	โจทย์ต้องการทราบว่า $\sqrt{x^2}$ นั้นเป็นจำนวนตรรกยะเท่านั้นหรือไม่ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง แต่นักเรียนตีความผิดจากประเด็นที่โจทย์ต้องการถาม โดยนักเรียนกลับสนใจประเด็นที่ว่า x ล้วนแล้วแต่เป็นจำนวนจริง ไม่ว่าจะเป็นจำนวนอตรรกยะหรือจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
กำหนดให้ A = {a, b, c} มี b เป็นเอกลักษณ์การคูณ จะได้ว่า ab = a และ cb = c ข้อความนี้เป็น (จริง)/ เท็จ) เนื่องจาก b=1	โจทย์ต้องการให้พิจารณาว่า หาก b เป็นเอกลักษณ์การคูณแล้ว ข้อความที่ให้มานั้นเป็นจริงหรือเท็จ แต่นักเรียนกลับตีความหมายของโจทย์ผิด โดยเข้าใจว่าโจทย์ต้องการทราบค่าของ b ซึ่งเป็นเอกลักษณ์การคูณ
จงแสดงวิธีการแก้สมการข้างต้นโดยวิธีแยกตัวประกอบ $x^3 + x^2 - 6x \neq x(x^2+x-6)$ $0 \neq x(x+3)(x-2)$ $x \neq 0, 2, -3$ $\therefore x = R - \{0, 2, -3\}$	โจทย์ให้นักเรียนแสดงวิธีแก้สมการที่กำหนดให้โดยวิธีแยกตัวประกอบ แต่นักเรียนตีความผิดจากประเด็นที่โจทย์ต้องการสื่อ และแสดงวิธีคิดที่ไม่สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ
จะได้ 30 เหรียญ = 750 บาท 1 km. = 5 บาท 750 บาท จะวิ่งได้ = $5 = \frac{750}{x}$ $x = \frac{750}{5}$ $x = 150$ km.	โจทย์ต้องการทราบว่ารถที่เช่าจากบริษัทไทยทัวร์ จะวิ่งได้กี่กิโลเมตรจึงจะไม่เกินค่าใช้จ่ายวันละ 30 เหรียญ (SGD) ซึ่งบริษัทไทยทัวร์คิดค่าเช่ารถดั๊กทัวร์เที่ยวละ 650 บาท ดังนั้นจึงต้องหาระยะทางที่รถสามารถวิ่งได้เพิ่มและไม่เกิน 30 เหรียญ (SGD) แต่จากภาพตัวอย่างแสดงให้เห็นว่านักเรียนตีความโจทย์ผิด โดยนำราคา 30 เหรียญ (SGD) มาคิดหาระยะทางที่รถสามารถวิ่งได้

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
$\|x+y\| < z$ สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ได้ดังนี้ $-z < x+y < z$ จะได้ว่า $-z-y < x < z-y$ ① $-10 < x < -2$ ② จาก ①, ② $-z-y = -10$ $z-y = -2$ $\therefore z = 4$ $y = 6$ $\therefore$ z และ y เป็นจำนวนเต็มบวก	โจทย์ต้องการให้นักเรียนเขียนคำตอบในรูปอสมการค่าสัมบูรณ์ $\|x+y\| < z$ เมื่อ z เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งนักเรียนควรเขียนคำตอบเป็น $\|x+6\| < 4$ แต่นักเรียนกลับตีความโจทย์ผิดและแสดงวิธีพิสูจน์ว่า z และ y เป็นจำนวนเต็มบวกแทน
ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า1 a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b = \sqrt[n]{a}$ ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ เนื่องจาก ตามนิยาม $a = \sqrt[n]{b}$	ตีความโจทย์ผิดโดยสับสนระหว่าง b เป็นรากที่ n ของ a กับ a เป็นรากที่ n ของ b
จะได้ว่า $64a^{\frac{1}{2}}$ = แทน $a = 2$ $64 \times (2)^{\frac{1}{2}} = 64 \times 1 = 64$	โจทย์ต้องการให้เขียนในรูปกรณฑ์ ซึ่งจะได้คำตอบคือ $64\sqrt{a}$ แต่นักเรียนกลับตีความโจทย์ผิดโดยเข้าใจว่าโจทย์ต้องการให้หาค่า a

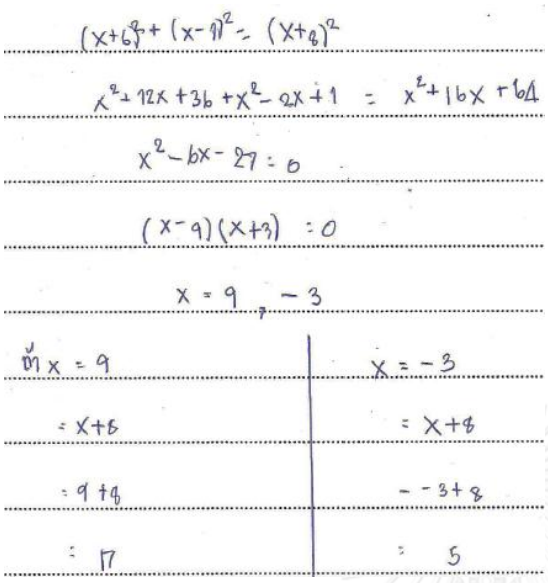
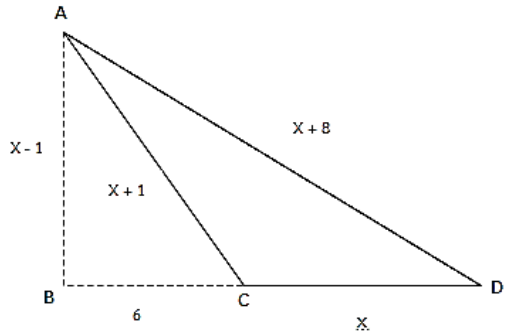
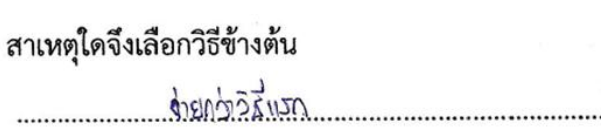
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

1.2.4 การมีมโนทัศน์ที่จำกัด (Limited conceptions) เป็นการมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนซึ่งไม่เพียงพอต่อการนำไปใช้ได้อย่างถูกต้อง ตัวอย่างลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดัง ตารางที่ 9

ตารางที่ 9 ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริง และเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบการมีมโนทัศน์ที่จำกัด

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
7π เป็นจำนวนนับ ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก $7\pi = 7 \times \frac{22}{7} = 22$ เป็นจำนวนนับ	เนื่องจาก π เป็นจำนวน อตรรกยะ 7π จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ แต่นักเรียนกลับมีมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนตรรกยะถูกต้องเพียงบางส่วนโดยไม่ได้คำนึงถึงกรณีที่เป็นเพียงค่าประมาณ ซึ่งความจริงแล้ว $\frac{22}{7}$ เป็นเพียงค่าประมาณของ π เท่านั้น
{-1, 0, 1} มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก $(-1+0)=-1$, $(-1\times0)=0$, $(0\times1)=0$, $(0+1)=1$, $(-1+1)=0$, $(-1\times1)=-1$	เมื่อพิจารณาการบวกและการคูณของสมาชิกที่ซ้ำกันภายในเซตบางจำนวน จะพบว่าผลลัพธ์ที่ได้ไม่ได้เป็นสมาชิกในเซต ดังนั้นเซตดังกล่าวจึงไม่มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ แต่นักเรียนเข้าใจเกี่ยวกับการพิจารณาสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณของสมาชิกภายในเซตเพียงบางส่วน โดยแสดงการแจงผลคูณและผลบวกของสมาชิกทุกตัวที่ไม่ซ้ำ แต่ไม่ได้พิจารณาการบวกและการคูณของจำนวนสมาชิกที่ซ้ำกันภายในเซต

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
 เมื่อโจทย์ให้แสดงวิธีหาความยาวด้าน AD จากรูปที่กำหนดให้ 	ค่าความยาวด้านไม่สามารถมีค่าเป็นลบได้ แต่นักเรียนเลือกใช้ค่า x ที่หาได้ทั้งสองค่าคือ x = -3 และ x = 9 โดยไม่ได้พิจารณากรณีที่ค่า x ที่ได้ทำให้ค่าความยาวของด้านสามเหลี่ยมมีค่าน้อยกว่าศูนย์แสดงให้เห็นว่ามีความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการพหุนามแต่ไม่ได้พิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้ x ที่ได้ไม่สอดคล้องกับสมการ
 เมื่อโจทย์ให้แสดงเหตุผลในการเลือกระหว่างวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 ในการแสดงวิธีทำ	นักเรียนควรเลือกวิธีที่ 2 และแสดงเหตุผลว่าจากการพิจารณาอสมการควรเริ่มโดยการทำฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากันก่อนแล้วจึงเปรียบเทียบเลขชี้กำลัง ไม่ใช่เพียงว่าวิธีที่ 2 ง่ายกว่าวิธีแรก ในที่นี้นักเรียนเลือกวิธีในการหาเซตคำตอบของอสมการได้ถูกต้อง แต่นักเรียนมีมโนทัศน์ที่ไม่เพียงพอในการแสดงเหตุผลที่ถูกต้อง

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน
$\|x+y\| < z$ สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ได้ดังนี้ $x+y < z$	$\|x+y\| < z$ สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ได้เป็น $-z < x+y < z$ แต่นักเรียนมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง โดยไม่ได้พิจารณาถึงกรณีที่ $-z < (x+y)$
รากที่ 2 ของ 64 คือ 8 ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก $8 \times 8 = 64$	รากที่ 2 ของ 64 คือ 8 และ -8 เนื่องจากทั้ง 8 และ -8 ต่างยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากับ 64 ซึ่งนักเรียนมีมโนทัศน์เพียงบางส่วนเกี่ยวกับรากที่สองของ 64 แต่ไม่ได้ครอบคลุมไปถึงกรณีที่รากเป็นจำนวนจริงลบ โดยเข้าใจว่ารากที่สองของ 64 คือ 8 เพียงค่าเดียว
สมบัติของรากที่ n และสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้ $\sqrt[n]{a^n} = a$ จะได้ว่า $\sqrt{2a^2}\sqrt{8a^4}$ = $\sqrt{2}a(2\sqrt{2}a^2) = 4a^3$	สมบัติของรากที่ n ที่ใช้ควรเป็น $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่บวก} \\ \|a\| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่บวก} \end{cases}$ แต่นักเรียนแสดงคำตอบเป็น $\sqrt[n]{a^n} = a$ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนทัศน์เกี่ยวกับค่าหลักของรากเพียงบางส่วน โดยเข้าใจว่าค่าหลักของรากที่ n ของจำนวนจริงใดๆยกกำลัง n ย่อมมีค่าเท่ากับจำนวนจริงนั้น แต่ยังนำไปประยุกต์ใช้ไม่ถูกต้อง โดยในตัวอย่างนักเรียนแสดงคำตอบเป็น $4a^3$ ซึ่งความจริงแล้วคำตอบต้องติดอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์คือ $4\|a^3\|$

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

2.2 ความถี่และร้อยละของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 397 คน ที่เกิดข้อผิดพลาดในเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังจำแนกตามประเภทของข้อผิดพลาด ซึ่งแสดงในตารางที่ 10

ตารางที่ 10 จำนวนนักเรียนและร้อยละของข้อผิดพลาดจำแนกตามประเภทของข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์และเนื้อหาคณิตศาสตร์

เนื้อหาเรื่อง	หัวข้อย่อย	จำนวนข้อผิดพลาด	ประเภทของข้อผิดพลาด							
			การใช้ข้อมูลที่ผิด		ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์		ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ		การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม	
			ความถี่	ร้อยละ (%)	ความถี่	ร้อยละ (%)	ความถี่	ร้อยละ (%)	ความถี่	ร้อยละ (%)
จำนวนจริง	1. ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆ ในระบบจำนวนจริง	191 (n = 321)	48	25.13	69	36.13	25	13.09	49	25.65
	2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ	215 (n = 265)	118	54.88	6	2.79	51	23.72	40	18.60
	3. การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง	517 (n = 301)	369	71.37	35	6.77	74	14.31	39	7.54
	4. การไม่เท่ากัน	579 (n = 276)	193	33.33	309	53.37	70	12.09	7	1.21
	5. ค่าสัมบูรณ์	124 (n = 127)	37	29.84	15	12.10	2	1.61	70	56.45
	รวม	1,626	765	47.05	434	26.69	222	13.65	205	12.61
เลขยกกำลัง	1. รากที่ n ของจำนวนจริง	332 (n = 289)	84	25.30	187	56.33	13	3.92	48	14.46
	2. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ	1,083 (n = 257)	454	41.92	255	23.55	210	19.39	164	15.14
	รวม	1,415	538	38.02	442	31.24	223	15.76	212	14.98
รวม		3,041	1,303	42.85	876	28.81	445	14.63	417	13.71

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จากตารางที่ 10 พบว่า นักเรียนทั้งหมดจำนวน 397 คน นักเรียนเกิดข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์มากที่สุดคือความคลาดเคลื่อนประเภทการใช้ข้อมูลที่ผิด โดยมีความถี่ 1,303 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 42.85 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้น รองลงมาคือประเภทข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ โดยมีความถี่ 876 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 28.81 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้น รองลงมาคือประเภทข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ โดยมีความถี่ 445 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 14.63 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้น และประเภทของข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภทการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม โดยมีความถี่ 417 ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 13.71 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้น ซึ่งไม่เป็นไปตามสมมติฐาน

นอกจากนี้ตารางที่ 10 ได้แสดงการเกิดข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ในแต่ละหัวข้อดังต่อไปนี้

หัวข้อความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 321 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านภาษาและสัญลักษณ์ คิดเป็นร้อยละ 36.13 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ การบิดเบือนทฤษฎีบท หรือนิยาม คิดเป็นร้อยละ 25.65 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ คิดเป็นร้อยละ 13.09 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อสมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 265 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิด คิดเป็นร้อยละ 54.88 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ คิดเป็นร้อยละ 23.72 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านภาษาและสัญลักษณ์ คิดเป็นร้อยละ 2.79 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อการนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 301 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิด คิดเป็นร้อยละ 71.37 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ คิดเป็นร้อยละ 14.31 ของจำนวนข้อผิดพลาด

ทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านภาษาและสัญลักษณ์ คิด เป็นร้อยละ 6.77 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อการไม่เท่ากัน มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 276 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านภาษาและสัญลักษณ์ คิดเป็นร้อยละ 53.37 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ การใช้ข้อมูลผิด คิดเป็นร้อยละ 33.33 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม คิดเป็นร้อยละ 1.21 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อค่าสัมบูรณ์ มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 127 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม คิดเป็นร้อยละ 56.45 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ การใช้ข้อมูลผิด คิดเป็นร้อยละ 29.84 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ คิดเป็นร้อยละ 1.61 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

หัวข้อรากที่ n ของจำนวนจริง มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 289 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านภาษาและสัญลักษณ์ คิดเป็นร้อยละ 56.33 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ การใช้ข้อมูลผิด คิดเป็นร้อยละ 25.30 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ คิดเป็นร้อยละ 3.92 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

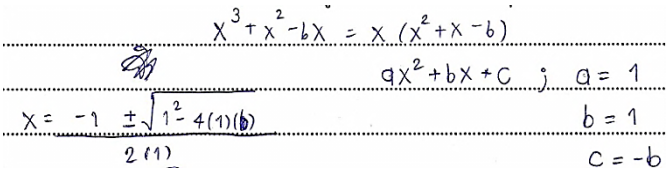
หัวข้อเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ มีนักเรียนที่ทำแบบทดสอบในหัวข้อนี้ จำนวน 357 คน โดยประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นมากที่สุดคือประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิด คิดเป็นร้อยละ 41.92 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ รองลงมาคือ ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ คิดเป็นร้อยละ 23.55 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้ และประเภทของข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นน้อยที่สุดคือประเภท การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม คิดเป็นร้อยละ 15.14 ของจำนวนข้อผิดพลาดทั้งหมดที่เกิดขึ้นในหัวข้อนี้

2.2 ลักษณะของข้อผิดพลาดที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งแสดงในตารางที่ 11 - 14

2.2.1. การใช้ข้อมูลที่ผิด (Misused data) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ใช้ข้อมูลอื่นที่ไม่สอดคล้องต่อการใช้แก้ปัญหา ไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน เลือกใช้หน่วยของตัวแปรผิด หรือการลอกรายละเอียดเกี่ยวกับโจทย์ผิด โดยข้อผิดพลาดอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มต้น หรืออาจเกิดขึ้นในช่วงระหว่างการดำเนินการกับข้อมูล ตัวอย่างลักษณะข้อผิดพลาดของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดัง ตารางที่ 11

ตารางที่ 11 ลักษณะของข้อผิดพลาดของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เกิดข้อผิดพลาดแบบการใช้ข้อมูลที่ผิด

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
7π เป็นจำนวนนับ ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก π ไม่เป็นจำนวน	เนื่องจาก π เป็นจำนวน อตรรกยะ 7π จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ แต่นักเรียนเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม โดยข้อมูลที่เลือกใช้ยังไม่เพียงพอต่อการแสดงเหตุผล
อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}+1$ คือ $\sqrt{2}-1$ ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก อินเวอร์สของบวก คือ ลบ	เนื่องจาก $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$ $=1$ ซึ่ง 1 เป็นเอกลักษณ์ของการคูณ ดังนั้น $\sqrt{2}-1$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}+1$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการใช้ข้อมูลเป็นอินเวอร์สการบวก

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
	นักเรียนแสดงวิธีการแทนสูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ เพื่อหาค่า x โดยสามารถระบุค่าของ a, b และ c ได้ถูกต้อง แต่เมื่อนำไปแทนค่าในสูตรพบว่านักเรียนเกิดข้อผิดพลาดในการแทนค่าจาก c = - 6 เป็น c = 6
จงแสดงวิธีการแก้สมการข้างต้นโดยวิธีแยกตัวประกอบ วิธีทำ $x(x^2+x-6) = 0$ $x(x+3)(x-2) = 0$ $x = 0 \mid x+3=0 \mid x-2=0$ $x = -3 \quad x = 2$ $x = 0, 2$ และ -3	โจทย์มีข้อกำหนดว่า $x \neq 0$ แต่หลังจากแก้สมการข้างต้นแล้ว นักเรียนผิดพลาดในการเลือกใช้ข้อมูล โดยรวม 0 อยู่ในเซตคำตอบด้วย ซึ่งไม่สอดคล้องกับที่โจทย์กำหนดไว้
นักเรียนแสดงวิธีคิดทั้งสองวิธี ทั้งๆที่โจทย์ให้เลือกวิธีการแก้อสมการที่ให้มาเพียง 1 วิธี จากวิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 วิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้น	นักเรียนไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน
$-z < x+y < z$ $-z-y < x < z-y$ $-z-y = -10$ $\therefore z+y = 10$ -① $z-y = -2$ -② $2z = 8$ $z = 4$ $y = 6$	โจทย์ต้องการให้นักเรียนเขียนคำตอบในรูปอสมการค่าสัมบูรณ์ $\lvert x+y \rvert < z$ เมื่อ z เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งนักเรียนควรเขียนคำตอบเป็น $\lvert x+6 \rvert < 4$ แต่นักเรียนกลับแสดงวิธีทำหาค่า y และ z เท่านั้น ไม่ได้ตอบคำถามโดยการเขียนคำตอบตามที่โจทย์ต้องการ

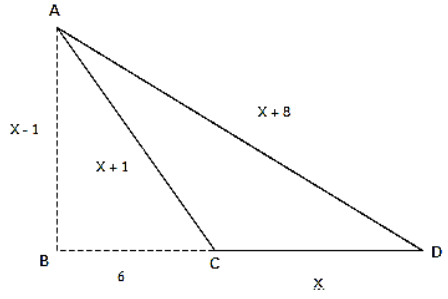
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

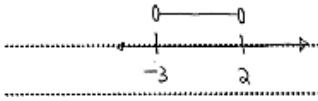
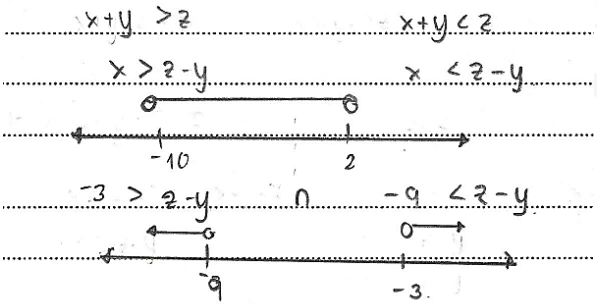
ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
$\sqrt{16} = 4, -4$ ข้อความนี้เป็น จริง / (เท็จ) เนื่องจาก ..... $\sqrt{16}$	เนื่องจาก $\sqrt{16}$ แทนค่าหลักรากที่ 2 ของ 16 ซึ่งมีค่าเพียง 4 เท่านั้น แต่นักเรียนเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม โดยข้อมูลที่นักเรียนเลือกใช้ยังไม่เพียงพอต่อการแสดงเหตุผล
บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้..... $\sqrt[3]{27^2}$	บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้คือ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ แต่นักเรียนแสดงคำตอบที่ได้จากการคำนวณผิดที่โดยนักเรียนเขียนคำตอบนั้นในช่องว่างที่ให้แสดงบทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.2.2 ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ (Errors in language and symbols) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ภาษา สัญลักษณ์หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ไม่ถูกต้องรวมไปถึงการนำเสนอข้อมูลจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ สมการ แผนภาพ ตารางหรือกราฟไม่ถูกต้อง ตัวอย่างลักษณะข้อผิดพลาดของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดังตารางที่ 12

ตารางที่ 12 ลักษณะของข้อผิดพลาดของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เกิดข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
0.3i เป็นจำนวนอตรรกยะ ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก ..... i เป็นรูปหนึ่งของเซตของจำนวนจินตภาพ	เนื่องจาก 0.3i เป็นทศนิยมซ้ำ ซึ่งทศนิยมซ้ำเป็นจำนวนตรรกยะ แต่นักเรียนผิดพลาดในการใช้สัญลักษณ์ โดยแปลความจาก 0.3i (ทศนิยมซ้ำ) เป็น i ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ
{-1, 0, 1} มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก ..... เพราะว่า เลขนี่ เป็นเครื่องหมายปีกกา { } คือสัญลักษณ์ตารางปิด	ผิดพลาดในการใช้ สัญลักษณ์ โดยแปลความจากเครื่องหมาย { } ซึ่งแสดงถึงเซต เป็นเครื่องหมายที่แสดงถึงสมบัติปิด
เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้ ..... x = □ เมื่อโจทย์ให้แสดงวิธีหาความยาวด้าน AD จากรูปที่กำหนดให้  	โจทย์ข้อนี้สามารถเขียนประโยคสัญลักษณ์ได้คือ $(x+8)^2 = (x-1)^2 + (x+6)^2$ แต่นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์ไม่สอดคล้องกับข้อมูลซึ่งโจทย์ต้องการหาความยาวด้าน AD

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
จะได้ว่า $x^2+x-6 > 0$ $(x+3)(x-2) > 0$ เขียนแสดงช่วงคำตอบของอสมการบนเส้นจำนวนได้ดังนี้  $\therefore x \in (-3,2)$	เขียนแผนภาพแสดงช่วงคำตอบของอสมการบนเส้นจำนวนไม่สอดคล้องกับข้อมูล
 	เขียนแผนภาพไม่สอดคล้องกับข้อมูล

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
รากที่ 2 ของ 64 คือ 8 ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก $\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{64}$ แทนค่าหลักของรากที่ 2 ของ 64 แต่นักเรียนใช้สัญลักษณ์ผิด
บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้ $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ จะได้ว่า $64a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64a} = 8\sqrt{a}$	$64a^{\frac{1}{2}}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปกรณฑ์ได้ $64\sqrt{a}$ แต่นักเรียนเกิดข้อผิดพลาดในการใช้สัญลักษณ์ จึงทำให้ได้คำตอบเป็น $8\sqrt{a}$ ทั้งที่เลือกใช้บทนิยามและสมบัติของเลขยกกำลังได้ถูกต้องแล้ว

3. ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ (Errors in operation and computation)

เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณหรือการเลือกการดำเนินการที่ไม่สอดคล้องในการแก้ปัญหา ตัวอย่างลักษณะข้อผิดพลาดของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดัง ตารางที่ 13

ตารางที่ 13 ลักษณะของข้อผิดพลาดของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เกิดข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนนับ ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก $\frac{\sqrt{-3 \cdot -3 \cdot 3}}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -3$	-3 x -3 x 3 มีค่าเท่ากับ - 27 แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณเป็น 27 ซึ่งไม่ถูกต้อง

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}+1$ คือ $\sqrt{2}-1$ ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = (4-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1) = 3$	$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}^2 - 1$ = 2 - 1 = 1 ซึ่ง 1 เป็นเอกลักษณ์ของการคูณ ดังนั้น $\sqrt{2}-1$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}+1$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณ
$\therefore$ ด้าน AD = x+9 = (9+8) = 11	9 + 8 มีค่าเท่ากับ 17 แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณ ทำให้ได้คำตอบของความยาวด้าน AD ไม่ถูกต้อง
เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้ $650+5x \leq 750$ จะได้ $5x \leq 100$ $x \leq 200$	คำตอบที่ถูกต้องคือ $x \leq 20$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณ โดยหาค่าผลหารระหว่าง 100 กับ 5 ได้ 200 ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง
$-x < y+z$ $x > y+z$	เนื่องจาก $-x < y + z$ จะได้ว่า $x > -y - z$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณ แม้ว่าจะมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องในการแก้อสมการโดยการคูณจำนวนลบทั้งสองข้างของอสมการแล้วต้องเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการ
รากที่ 2 ของ 64 คือ 8 ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก $\sqrt{64} = 8^2$	เนื่องจาก $\sqrt{64} = 8$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณ นอกจากนี้ยังใช้สัญลักษณ์ผิด เนื่องจาก $\sqrt[n]{a}$ แทนค่าหลักของรากที่ n ของ a ไม่ใช่รากที่ n ของ a
จะได้ว่า $\sqrt[3]{-64}\sqrt{2^6} = (-4)(8) = 32$	ผลคูณระหว่าง - 4 กับ 8 มีค่าเท่ากับ -32 แต่นักเรียนผิดพลาดในการคำนวณ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

2.2.4 การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม (Distorted theorem or definition) เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยามที่เฉพาะเจาะจงผิดไปจากความเป็นจริง ตัวอย่างลักษณะข้อผิดพลาดของนักเรียนที่ปรากฏจากการทำแบบวัด มีรายละเอียดดัง ตารางที่ 14

ตารางที่ 14 ลักษณะของข้อผิดพลาดของนักเรียนจากการทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ที่เกิดข้อผิดพลาดในด้านการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
$\sqrt{x^2}$ เป็นจำนวนตรรกยะทุกๆค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ) เนื่องจาก $\sqrt{x^2} = x$	เนื่องจาก $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการใช้สมบัติของรากที่ n โดยกล่าวว่า $\sqrt{x^2} = x$
กำหนดให้ A = {a, b, c} มี b เป็นเอกลักษณ์การคูณ จะได้ว่า ab = a และ cb = c ข้อความนี้เป็น (จริง) / เท็จ) เนื่องจาก เอกลักษณ์การคูณต้อง 1 คนอื่นไม่ได้	เอกลักษณ์การคูณคือจำนวนที่ไปคูณกับจำนวนใดๆ แล้วมีค่าเท่ากับจำนวนนั้นๆแต่นักเรียนผิดพลาดในการใช้นิยามของเอกลักษณ์การคูณ โดยกล่าวว่าเอกลักษณ์การคูณคือ 1 เมื่อคูณจำนวนใดๆย่อมได้ 1
เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้ $(x+8)^2 = (x-1)^2 + (8+x)^2$ จะได้ $x^2+64 = (x^2-1)+(64+x^2)$	เนื่องจากการแยกตัวประกอบรูปแบบกำลังสองสมบูรณ์ $(น+ ล)^2 = น^2 + 2 น ล + ล^2$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการแยกตัวประกอบเป็น $(น+ ล)^2 = น^2 + ล^2$
$x^2 - 20 > 0$ $(x-20)(x+20) > 0$	ผิดพลาดในการแยกตัวประกอบของผลต่างกำลังสองจาก $น^2 - ล^2 = (น - ล)(น + ล)$ เป็น $น^2 - ล^2 = (น - ล^2)(น + ล^2)$

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ตัวอย่างคำตอบ	ลักษณะของข้อผิดพลาด
$\lvert x+y\rvert < z$ สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ได้ดังนี้ $-\sqrt{z} < x+y < \sqrt{z}$	เนื่องจาก $\lvert x+y\rvert$ < z สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ได้เป็น − z < x + y < z แต่นักเรียนผิดพลาดในการถอดค่าสัมบูรณ์โดยใช้นิยาม
บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้ $x^{\frac{1}{n}} = -\sqrt{x^n}$	เนื่องจาก $x^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ แต่นักเรียนผิดพลาดในการใช้สมบัติของเลขยกกำลัง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัย เพื่อศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2557 ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบชั้นภูมิ (stratified random sampling) โดยสุ่มโรงเรียนที่เปิดสอนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มโดยจับสลากจำนวน 11 โรงเรียน โดยพิจารณาตามสัดส่วนจำนวนโรงเรียนที่แบ่งตามขนาดของโรงเรียนในแต่ละเขต (อัตราส่วนระหว่างจำนวนโรงเรียนที่แบ่งตามขนาด : จำนวนโรงเรียนที่เลือกศึกษา คือ 10 : 1) ในแต่ละโรงเรียนที่สุ่มได้ สุ่มห้องเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามจำนวนโรงเรียนที่เลือกศึกษา จากห้องเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ทั้งหมด จะได้ห้องเรียนที่ใช้เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 11 ห้อง และได้กลุ่มตัวอย่างจำนวน 397 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง โดยผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลจากการให้นักเรียนทำแบบทดสอบ แล้วนำข้อมูลที่ได้ทั้งหมด มาตรวจหาความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและการเกิดข้อผิดพลาดตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และวิเคราะห์ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดที่พบ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 สรุปผลวิจัยดังนี้

1. นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนมากที่สุดคือประเภท การมีมโนทัศน์ที่จำกัด รองลงมาคือ ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขและการตีความผิด ตามลำดับ

2. ลักษณะของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนที่พบบ่อยของการมีมโนทัศน์ที่จำกัด คือ

1) นักเรียนมีมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนตรรกยะเพียงบางส่วน โดยไม่ได้คำนึงถึงกรณีที่เป็นเพียงค่าประมาณ
2) นักเรียนมีมโนทัศน์ที่จำกัดเกี่ยวกับรากที่สอง แต่ไม่ครอบคลุมไปถึงกรณีที่รากเป็นจำนวนจริงลบ
3) นักเรียนมีมโนทัศน์เกี่ยวกับสมบัติของของรากเพียงบางส่วน ทำให้นำไปประยุกต์ใช้ไม่ถูกต้อง

3. นักเรียนมีข้อผิดพลาดมากที่สุดคือประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิด รองลงมาคือ ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ และการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม ตามลำดับ

4. ลักษณะของข้อผิดพลาดที่พบบ่อยของการใช้ข้อมูลผิด คือ

1) นักเรียนแสดงแนวคิดหาคำตอบที่ถูกต้อง แต่นักเรียนผิดพลาดในการเลือกใช้ข้อมูล
2) นักเรียนไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน
3) นักเรียนแสดงคำตอบที่ได้จากการคำนวณผิดตำแหน่ง

อภิปรายผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 และเขต 2 ในการทำแบบวัดมโนทัศน์และข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่อง “จำนวนจริงและเลขยกกำลัง” ซึ่งประกอบด้วย 7 หัวข้อ คือ ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง การไม่เท่ากัน ค่าสัมบูรณ์ รากที่ n ของจำนวนจริง และเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. เมื่อพิจารณาโดยภาพรวมของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบวัดมโนทัศน์และข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่อง “จำนวนจริงและเลขยกกำลัง” เรียงตามลำดับความถี่ของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแต่ละประเภทจากมากไปหาน้อย คือ การมีมโนทัศน์ที่จำกัด ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข และการตีความผิด ดังรายละเอียดของแต่ละประเภทที่จะนำมาอภิปราย ดังนี้

1.1 นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัดมากที่สุด ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ว่า นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ในด้านการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไขมากที่สุด ซึ่งสามารถอภิปรายได้ว่า เนื่องจากเนื้อหาเรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังนั้น มีหลายประเด็นที่นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่จำกัด จึงทำให้ความถี่ของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัด เกิดขึ้นมากที่สุด โดยประเด็นที่นักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่จำกัด เช่น มีมโนทัศน์เพียงบางส่วนเกี่ยวกับรากที่สองของ 16 โดยให้เหตุผลว่าทั้ง 4 และ -4 ต่างยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากับ 16 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้องหากโจทย์ถามว่ารากที่สองของ 16 คือ 4 และ -4 แต่ $\sqrt{16}$ เป็นค่าหลักของรากที่สองของ 16 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่ไม่ครอบคลุมเกี่ยวกับค่าหลักของรากที่สองของ 16 ซึ่งสอดคล้องกับที่สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2552: 29 – 32) ได้กล่าวถึงเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ครูและนักเรียนมักมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน เช่น

เข้าใจว่า$\sqrt{4}$ = ±2 ซึ่งเป็นความเข้าใจที่ไม่ถูกต้องเกี่ยวกับการใช้เครื่องหมายกรณฑ์ โดยครูส่วนใหญ่อาจไม่ได้เน้นในขณะสอนว่าเครื่องหมาย $\sqrt{4}$ ใช้แทนรากที่สองที่เป็นบวกของ 4

สาเหตุอาจเนื่องมาจากการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ประเภทการมีมโนทัศน์ที่จำกัด ส่วนหนึ่งมาจากนักเรียนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องเพียงบางส่วนและสั่งสมประสบการณ์จากการประยุกต์ใช้มโนทัศน์ที่ไม่สมบูรณ์ จนกระทั่งเกิดเป็นความเคยชินและก่อให้เกิดความเข้าใจที่ฝังลึกว่ามโนทัศน์ที่ตนมีนั้นเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับที่ Mestre (1987) ได้กล่าวว่า นักเรียนสะสมข้อมูลถูกต้องเพียงบางส่วนจากประสบการณ์ในแต่ละวัน จนกระทั่งสร้างเป็นความเข้าใจที่ฝังลึกซึ่งกลายเป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน และอาจรวมไปถึงการจัดเรียนการสอนในห้องเรียนบางครั้งด้วยเวลาที่จำกัด ทำให้ครูอาจไม่มีโอกาสได้เน้นย้ำในประเด็นสำคัญบางประเด็นให้แก่นักเรียน

1.2 นักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอันดับรองลงมา คือ ประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ โดยมีความเข้าใจที่มีพื้นฐานจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิด จากการวิจัยครั้งนี้พบตัวอย่าง นักเรียนที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภท ความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ เช่น มีความคิดว่าทศนิยมซ้ำ เป็นทศนิยมไม่รู้จบ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งความจริงแล้วทศนิยมซ้ำเป็นจำนวนตรรกยะ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ โดยสอดคล้องกับงานวิจัยของ Wylie and Ciofalo (2008) ที่กล่าวไว้ว่าข้อความจริงที่มีพื้นฐานจากสัญชาติญาณเพียงอย่างเดียวหรือจากการให้เหตุผลที่ผิดพลาดจะทำให้เกิดความเข้าใจผิดได้

ผู้วิจัยอภิปรายว่า สาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภทความเข้าใจที่บกพร่องเกี่ยวกับข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์อาจเนื่องมาจาก การจัดการเรียนการสอนรวมไปถึงข้อสอบหรือแบบฝึกหัดในชั้นเรียน เน้นไปที่ความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการซึ่งเป็นความรู้เกี่ยวกับการคำนวณ และขั้นตอนในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ มากกว่าการมุ่งเน้นเรื่องมโนทัศน์ โดยสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2554: 6 – 7) ได้กล่าวไว้ว่า ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ทั่วไป มักเน้นการสอนความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ ส่วนการสอนความรู้เชิงมโนทัศน์มีน้อยมากรวมไปถึงการจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนบางครั้งมีเวลาที่จำกัด ทำให้ครูไม่มีโอกาสได้เน้นย้ำเรื่องมโนทัศน์ที่ถูกต้องให้แก่นักเรียน

1.3 ประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ที่มีความถี่เป็นอันดับถัดมา คือการอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข โดยนำทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือนิยามไปใช้ในกรณีอื่นทั่วไป ซึ่งเกินกว่าขอบเขตหรือเงื่อนไขที่ได้ระบุไว้ ตัวอย่างที่พบจากการวิจัยครั้งนี้ ที่แสดงว่านักเรียนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภท การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข

เช่น จาก $(x - \sqrt{20})(x+\sqrt{20}) > 0$

จะได้ว่า $(x - \sqrt{20}) > 0$ หรือ $(x +\sqrt{20}) > 0$

ดังนั้น $x > \sqrt{20}$ หรือ $x > -\sqrt{20}$

โดยนำวิธีการแก้สมการพหุนามกำลังสองตัวแปรเดียวมาใช้ในการแก้อสมการโดยอ้างอิงจากข้อความจริงที่ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ ab = 0 แล้ว a หรือ b อย่างน้อยหนึ่งตัวต้องเป็นศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Graeber (1992) ที่พิจารณาถึงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในระดับมัธยมศึกษา และแยกประเภทของมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนซึ่งสังเกตได้ออกเป็น 4 ประเภท โดยหนึ่งในนั้น คือ การอ้างอิงเกินขอบเขตหรือเงื่อนไข โดยให้นิยามว่า นักเรียนนำหลักการ ความคิดรวบยอด หรือขั้นตอนกระบวนการที่เป็นจริงสำหรับโดเมนหนึ่งแต่นักเรียนนำไปใช้ในโดเมนอื่น ซึ่งนอกเหนือจากนั้น พร้อมยกตัวอย่าง เช่น การแยกตัวประกอบพหุนาม $(x – 3)(x + 5) = 0$ หมายถึง $(x – 3) = 0$ หรือ $(x + 5) = 0$ แต่มีนักเรียนบางคนประยุกต์ทฤษฎีผลคูณเป็นศูนย์กับการแยกตัวประกอบอื่นที่ได้ผลลัพธ์มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ เช่น $(x – 3)(x + 5) = 9$ ว่า $(x – 3) = 9$ หรือ $(x + 5) = 9$ ด้วย โดยสาเหตุอาจเนื่องมาจากนักเรียนขาดความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือนิยาม อย่างถ่องแท้ว่ามีเงื่อนไขอย่างไรบ้าง

1.4 มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภทที่มีความถี่เป็นอันดับสุดท้ายจากทั้ง 4 ประเภท คือ การตีความผิด ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ ไข่มุก เลื่องสุนทร (2552) ในการศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยผลการวิจัยพบว่าความถี่ของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ด้านการตีความด้านภาษามีความถี่น้อยที่สุด การวิจัยครั้งนี้พบลักษณะของการตีความผิดคือนักเรียนแปลความหมายหรือสื่อความหมายของข้อมูลไม่ถูกต้องตามความเป็นจริง เช่น จากโจทย์ถามว่า ถ้าเช่ารถจากบริษัทไทยทัวร์ รถที่เช่าจะวิ่งได้กี่กิโลเมตร จึงจะไม่เกินค่าใช้จ่ายวันละ 30 เหรียญ (SGD) โดยมี

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ข้อมูลให้ว่าสิงคโปร์ทัวร์ คิดค่าเช่ารถดั๊กทัวร์เที่ยวละ 30 เหรียญ (SGD) โดยไม่คิดค่าใช้จ่ายอื่น ในขณะเดียวกันบริษัทไทยทัวร์คิดค่าเช่ารถดั๊กทัวร์เที่ยวละ 650 บาท แต่คิดค่าเช่าเพิ่มจากจำนวนกิโลเมตรที่พาทัวร์อีกกิโลเมตรละ 5 บาท โดยกำหนดให้ 1 เหรียญ (SGD) มีค่าเท่ากับ 25 บาท จากโจทย์ต้องการทราบว่า รถที่เช่าจากบริษัทไทยทัวร์ จะวิ่งได้กี่กิโลเมตรจึงจะไม่เกินค่าใช้จ่ายวันละ 30 เหรียญ (SGD) แต่นักเรียนตีความโจทย์ผิด โดยนำราคา 30 เหรียญ (SGD) มาคิดหาระยะทางที่รถสามารถวิ่งได้ ในความจริงแล้วนักเรียนต้องคิดส่วนต่างที่สามารถวิ่งได้เพิ่มจาก 650 บาท

ผู้วิจัยอภิปรายสาเหตุของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภท การตีความผิด อาจเนื่องมาจากการที่นักเรียนขาดการฝึกฝนในด้านการตีความโจทย์ที่อาจมีเนื้อหาซับซ้อน โดยไม่ได้ให้ข้อมูลที่ใช้แก้ปัญหาเพื่อหาคำตอบได้โดยตรง จำเป็นที่นักเรียนจะต้องพิจารณาและตีความโจทย์อย่างละเอียด โดยสอดคล้องกับที่ อัมพร ม้าคนอง (2536: 66) กล่าวไว้ว่า นักเรียนขาดทักษะในการตีความจากโจทย์ โจทย์ที่มีระดับความยากสูง มักจะไม่ให้ข้อมูลที่นักเรียน ต้องการใช้โดยตรง แต่มักให้มาในรูปความสัมพันธ์กับตัวแปรอื่น ซึ่งนักเรียนต้องพยายามตีความในส่วนนี้ เพื่อให้ได้ข้อมูลตรงกับที่ต้องการใช้ โดยอ่านโจทย์หลายๆครั้งให้เข้าใจ

2. เมื่อพิจารณาผลจากการวิเคราะห์การทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่อง “จำนวนจริงและเลขยกกำลัง” พบว่าการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนแบบ การมีมโนทัศน์ที่จำกัด เป็นมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนประเภทที่มีความถี่มากที่สุด สามารถอภิปรายลักษณะที่พบบ่อย ได้ดังต่อไปนี้

1) นักเรียนเข้าใจว่า 7π เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะคิดว่า π มีค่า $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 แล้วนำไปคูณกับ 7 ซึ่งความจริงแล้ว π เป็นจำนวนอตรรกยะ โดย $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 เป็นเพียงค่าประมาณของ π เท่านั้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวนตรรกยะเพียงบางส่วน โดยไม่ได้คำนึงถึงกรณีที่เป็นเพียงค่าประมาณ โดยอาจมีสาเหตุมาจากนักเรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับค่า π ตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรื่องรูปวงกลม สอดคล้องกับในหนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ป.6 (2555: 199) กล่าวว่า π มีค่าประมาณ 3.14 หรือ $\frac{22}{7}$

โดยนักเรียนได้ฝึกการใช้ค่า π มาประยุกต์ในการหาความยาวรอบรูปและพื้นที่ของวงกลม ตั้งแต่นั้นมา ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดความเคยชินและปลูกฝังความเข้าใจว่า π มีค่าเท่ากับ 3.14 หรือ $\frac{22}{7}$ สอดคล้องกับที่ Hansen (2011: 8) กล่าวถึงการเกิดองค์ความรู้ว่า เมื่อนำความรู้ใหม่ไปประยุกต์ใช้สักระยะเวลาหนึ่ง ความรู้นั้นจะเปลี่ยนแปลงเป็นองค์ความรู้ที่ยาวนาน

2) นักเรียนมีมโนทัศน์ที่จำกัดเกี่ยวกับรากที่สอง แต่ไม่ครอบคลุมไปถึงกรณีที่รากเป็นจำนวนจริงลบ เช่น นักเรียนกล่าวว่ารากที่สองของ 64 คือ 8 เพียงค่าเดียว ซึ่งความจริงแล้วทั้ง 8 และ – 8 เป็นรากที่ 2 ของ 64 เนื่องจาก ทั้ง 8 และ -8 ต่างยกกำลังสองแล้วมีค่าเท่ากันคือ 64 โดยสาเหตุอาจเนื่องมาจากนักเรียนมักคุ้นชินกับจำนวนจริงบวกมากกว่าจำนวนจริงลบ จึงทำให้นักเรียนนึกถึงจำนวนจริงบวกเพียงอย่างเดียว และเลือกตอบแต่เพียงจำนวนจริงรากที่เป็นจำนวนจริงบวกเท่านั้น

3) นักเรียนมีมโนทัศน์เกี่ยวกับสมบัติของค่าหลักของรากเพียงบางส่วน ซึ่งนำไปประยุกต์ใช้ไม่ถูกต้อง เช่น นักเรียนเข้าใจว่าค่าหลักของรากที่ n ของจำนวนจริงใดๆที่ยกกำลัง n ย่อมมีค่าเท่ากับจำนวนจริงนั้น เช่น นักเรียนแสดงแนวคิดว่า $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$ ซึ่งความจริงแล้ว $\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,|a|$ โดยอาจมีสาเหตุมาจากการจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนอาจถูกมองข้ามประเด็นสำคัญที่นักเรียนควรระมัดระวัง ซึ่งนักเรียนอาจเข้าใจว่าตนมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องแล้ว แต่ความจริงแล้วนักเรียนมีมโนทัศน์เพียงบางส่วน ที่นำไปประยุกต์ใช้ไม่ถูกต้อง โดยสอดคล้องกับที่ Allen (2007, 4) กล่าวไว้ว่า นักเรียนหลายคนเข้าใจผิดและมีปัญหาเกี่ยวกับการใช้นิยาม $\sqrt{a^2} = |a|$

3. เมื่อพิจารณาโดยภาพรวมของการเกิดข้อผิดพลาดของนักเรียนที่ได้จากการทำแบบวัดมโนทัศน์และข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่อง “จำนวนจริงและเลขยกกำลัง” เรียงตามลำดับความถี่ของการเกิดข้อผิดพลาดแต่ละประเภทจากมากไปหาน้อย คือ การใช้ข้อมูลที่ผิด ข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ ข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและคำนวณ และการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม ดังรายละเอียดของแต่ละประเภทที่จะนำมาอภิปราย ดังนี้

3.1 นักเรียนมีข้อผิดพลาดประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิดมากที่สุด เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการเลือกใช้ข้อมูลที่ไม่เหมาะสม ใช้ข้อมูลอื่นที่ไม่สอดคล้องต่อการใช้แก้ปัญหา ไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน เลือกใช้หน่วยของตัวแปรผิด หรือการลอกรายละเอียดเกี่ยวกับโจทย์ผิด โดยข้อผิดพลาดอาจเกิดขึ้นตั้งแต่เริ่มต้น หรืออาจเกิดขึ้นในช่วงระหว่างการดำเนินการกับข้อมูล ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ว่า นักเรียนมีข้อผิดพลาดในด้านการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยามมากที่สุด สามารถอภิปรายได้ว่า เนื่องจากแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลังนี้ มีบางประเด็นที่นักเรียนจำนวนมากมักเกิดข้อผิดพลาดประเภทการใช้ข้อมูลที่ผิด จึงทำให้ความถี่ของการเกิดข้อผิดพลาดประเภทนี้มีมากที่สุด โดยตัวอย่างที่พบจากการวิจัยครั้งนี้ เช่น นักเรียนไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน โดยนักเรียนแสดงวิธีคิดทั้งสองวิธี ทั้งๆที่โจทย์ให้นักเรียนเลือกวิธีการแก้อสมการที่ให้มาเพียง 1 วิธี จากวิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 วิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้นซึ่งสอดคล้องคล้องกับผลการวิจัยของ Schnepper and Mccoy (2013) ที่พบว่าประเภทของข้อผิดพลาดที่มีความถี่มากที่สุดคือการใช้ข้อมูลที่ผิดจากข้อผิดพลาดที่ถูกแบ่งออกเป็น 5 ประเภท

สาเหตุของการเกิดข้อผิดพลาดประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิดอาจเนื่องมาจาก นักเรียนขาดความระมัดระวังในการอ่านข้อมูล หรือสิ่งที่โจทย์ระบุ ทำให้นักเรียนไม่ทำตามสิ่งที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน โดยอาจเกิดจากสภาวะทางอารมณ์หรือสถานการณ์ในขณะที่นักเรียนทำแบบทดสอบด้วย เช่น เวลาในการทำอาจเป็นข้อจำกัดอย่างหนึ่งที่ทำให้นักเรียนเร่งรีบจนขาดความระมัดระวัง ซึ่งสอดคล้องกับที่ Carpmail and others (2013: 2 – 7) กล่าวไว้ว่า ถ้านักเรียนไม่อยู่ในภาวะทางอารมณ์ที่พร้อมทำงานหรือทำงานอย่างเร่งรีบ อาจก่อให้เกิดข้อผิดพลาดที่เกิดจากการไม่ระวังหรือสะเพร่า

3.2 นักเรียนมีข้อผิดพลาดอันดับรองลงมา คือ ประเภทข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์ เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการใช้ภาษาสัญลักษณ์หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้องรวมไปถึงการนำเสนอข้อมูลจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ สมการ แผนภาพ ตารางหรือกราฟไม่ถูกต้อง เช่น นักเรียนเขียนประโยคสัญลักษณ์ไม่

สอดคล้องกับข้อมูลที่โจทย์ให้มาโดยโจทย์กล่าวว่า ถ้าเช่ารถจากบริษัทไทยทัวร์ รถที่เช่าจะวิ่งได้กี่กิโลเมตร จึงจะไม่เกินค่าใช้จ่ายวันละ 30 เหรียญ (SGD) จากการวิจัยพบว่านักเรียนส่วนใหญ่เขียนประโยคสัญลักษณ์โดยใช้เครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งความจริงแล้วควรใช้เครื่องหมายน้อยกว่าเท่ากับ ในการเขียนประโยคสัญลักษณ์จึงจะสอดคล้องกับข้อมูลที่โจทย์ให้มา ซึ่งสอดคล้องกับคำอธิบายของ Movshovitz and others (1987: 3 – 12) ที่กล่าวว่า ข้อผิดพลาดด้านการตีความด้านภาษาผิดรวมไปถึงการแปลความจากภาษาพูดไปสู่ประโยคสัญลักษณ์คณิตศาสตร์หรือสมการไม่ถูกต้อง

โดยการเกิดข้อผิดพลาดทางด้านภาษาและสัญลักษณ์อาจมีสาเหตุมาจากนักเรียนขาดการฝึกฝนในการเขียนประโยคสัญลักษณ์ หรือนำเสนอข้อมูลรูปแบบสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ รวมไปถึงการไม่เข้าใจความหมายของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หรือคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์บางคำ ซึ่งสอดคล้องกับที่ Egodawatte (2011: 3) กล่าวไว้ว่า การแปลจากภาษาพูดในธรรมชาติเป็นภาษาทางพีชคณิตเป็นเรื่องยาก และ Radatz (1979: 163 – 170) ได้กล่าวไว้ว่า สัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเปรียบเสมือนการเรียนภาษาต่างประเทศ การไม่เข้าใจความหมายของข้อความทางคณิตศาสตร์มักเป็นที่มาของข้อผิดพลาดของนักเรียน

3.3 ประเภทของข้อผิดพลาด ที่มีความถี่เป็นอันดับถัดมา คือข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและการคำนวณ เป็นข้อผิดพลาดที่เกิดจากการคำนวณหรือการเลือกการดำเนินการที่ไม่สอดคล้องในการแก้ปัญหา เช่น นักเรียนแสดงผลคูณระหว่าง $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt{2}$ เป็น 4 ซึ่งความจริงแล้วผลคูณระหว่าง $\sqrt{2}$ กับ $\sqrt{2}$ มีค่าเท่ากับ 2

ซึ่งสาเหตุการเกิดข้อผิดพลาดประเภทนี้อาจเนื่องมาจาก การที่นักเรียนขาดการระมัดระวัง และไม่ได้ตรวจคำตอบอีกครั้ง ซึ่งสอดคล้องกับคำอธิบายของ Movshovitz and others (1987: 3 – 12) ซึ่งกล่าวว่า นักเรียนไม่ได้ตรวจสอบระหว่างทำ จึงทำให้ไม่เห็นข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้น รวมไปถึงการ สะเพร่า ไม่ระมัดระวังในการคำนวณ ซึ่งอาจมีสาเหตุเช่นเดียวกับการเกิดข้อผิดพลาดประเภท การใช้ข้อมูลที่ผิด คือเกิดจากสภาวะทางอารมณ์หรือสถานการณ์ในขณะที่นักเรียน ทำแบบทดสอบด้วย เช่นเวลาในการทำอาจเป็นข้อจำกัดอย่างหนึ่งที่ทำให้นักเรียนเร่งรีบจน ขาดความระมัดระวัง โดยสอดคล้องกับที่ Carpmail

and others (2013: 2 – 7) กล่าวไว้ว่า ถ้านักเรียนไม่อยู่ในภาวะทางอารมณ์ที่พร้อมทำงาน หรือทำงานอย่างเร่งรีบ อาจก่อให้เกิดข้อผิดพลาดที่เกิดจากการไม่ระวังหรือสะเพร่า

3.4 ข้อผิดพลาดประเภทที่มีความถี่เป็นอันดับสุดท้ายจากทั้ง 4 ประเภท คือ การบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม ซึ่งนักเรียนใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยามที่เฉพาะเจาะจงผิดไปจากความเป็นจริง โดยการวิจัยครั้งนี้พบตัวอย่างการเกิดข้อผิดพลาด ประเภทการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม เช่น นักเรียนแสดงแนวคิด $(x + 8)^2 = x^2 + 8^2$ ซึ่งสอดคล้อง ซึ่งสอดคล้องกับที่ Movshovitz and others (1987: 3 – 12) ได้ยกตัวอย่างว่า $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ เป็นการบิดเบือนทฤษฎีบทหรือนิยาม

ซึ่งอาจมีสาเหตุของการเกิดมาจากการที่นักเรียนขาดการเน้นย้ำและฝึกฝนการใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยาม ในห้องเรียน ซึ่งส่งผลให้กระทบต่อนักเรียน แม้บางประเด็นที่นักเรียนเรียนมาแล้วแต่หากไม่ได้ฝึกฝนการใช้ ก็จะทำให้นักเรียนใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยามที่เฉพาะเจาะจงผิดไปจากความเป็นจริง อีกทั้งวิชาคณิตศาสตร์มีหลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยาม มากมายหลากหลาย อาจทำให้นักเรียนบิดเบือนในการนำไปใช้ หากขาดการฝึกฝนและทำความรู้จักจนคุ้นเคยแม่นยำ โดยผลการวิจัยนี้ยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Schnepper and Mccoy (2013) ที่พบว่าประเภทของข้อผิดพลาดที่มีความถี่น้อยที่สุด คือ การบิดเบือนทางบทนิยาม จากข้อผิดพลาดที่ถูกแบ่งออกเป็น 5 ประเภท

4. เมื่อพิจารณาผลจากการวิเคราะห์การทำแบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ แบบอัตนัย เรื่อง “จำนวนจริงและเลขยกกำลัง” พบว่าการเกิดข้อผิดพลาดแบบการใช้ข้อมูลที่ผิด เป็นข้อผิดพลาดประเภทที่มีความถี่มากที่สุด โดยสามารถอภิปรายลักษณะที่พบบ่อย ได้ดังต่อไปนี้

1) การที่นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 6x = 0$ ได้ถูกต้อง แต่นักเรียน ผิดพลาดในการเลือกใช้ข้อมูล เนื่องจากนักเรียนรวม 0 อยู่ในเซตคำตอบด้วย ซึ่งโจทย์มีข้อกำหนดว่า $x \neq 0$ สาเหตุที่นักเรียนรวม 0 อยู่ในเซตคำตอบด้วย อาจเนื่องมาจาก

นักเรียน มุ่งมั่นในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบตามคำสั่งโจทย์เพียงอย่างเดียว โดยละเลยเงื่อนไขที่โจทย์ตั้งต้นระบุไว้

2) นักเรียนไม่ทำตามที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน แต่เลือกทำสิ่งที่โจทย์ไม่ได้ระบุแทน โดยนักเรียนแสดงวิธีคิดทั้งสองวิธี ในขณะที่โจทย์กำหนดให้นักเรียนเลือกวิธีการแก้อสมการที่ให้มาเพียง 1 วิธี จากวิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 วิธีใด วิธีหนึ่งเท่านั้น สาเหตุอาจเนื่องมาจากนักเรียนเกิดความเคยชินกับการแสดงวิธีทำตามช่องว่างที่กำหนดให้ โดยไม่ได้พิจารณาคำสั่งโจทย์

3) นักเรียนแสดงคำตอบที่ได้จากการคำนวณผิดตำแหน่ง โดยนักเรียนเขียนคำตอบนั้นในช่องว่างที่ให้แสดงบทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้ สาเหตุอาจเนื่องมาจากนักเรียน เกิดความเคยชินกับการเติมคำตอบในช่องว่าง โดยขาดความระมัดระวังในการเลือกแสดงคำตอบตามตำแหน่งที่โจทย์กำหนดไว้

จากลักษณะการเกิดข้อผิดพลาดประเภท การใช้ข้อมูลผิดข้างต้น อาจกล่าวได้ว่าพื้นฐานของสาเหตุการเกิดสอดคล้องกันคือ เกิดจากนักเรียนขาดความระมัดระวังใน การอ่านข้อมูล หรือสิ่งที่โจทย์ระบุ ทำให้นักเรียนไม่ ทำตามสิ่งที่โจทย์ระบุอย่างชัดเจน ซึ่งสอดคล้องกับที่ Drews (2011: 12) กล่าวไว้ว่า ผลของการขาดความระมัดระวัง สะเพร่า และขาดการตรวจทานคำตอบกับข้อมูลที่ให้มา ต่างทำให้เกิดข้อผิดพลาด

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะ ดังนี้

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ มีข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้ ดังต่อไปนี้

1. ครูควรพยายามจัดการเรียนการสอนที่มุ่งเน้นเรื่องการสอนความรู้เชิงมโนทัศน์ให้มากขึ้น รวมถึงออกแบบทดสอบหรือมอบหมายงานที่วัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนทราบถึงข้อบกพร่องเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของตนเอง รวมไปถึงเป็นข้อมูลสำหรับครูว่านักเรียนมีจุดบกพร่องตรงส่วนไหน และนำไปปรับปรุงการสอนของตน

2. ครูควรจัดการเรียนการสอนที่สร้างเสริมประสบการณ์ และการนำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ไปประยุกต์ใช้ เพื่อเน้นย้ำและปลูกฝังมโนทัศน์ที่ถูกต้องให้แก่นักเรียน เช่น อธิบายพร้อมยกตัวอย่างเป็นรูปธรรม

3. ครูสามารถนำลักษณะมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นซึ่งได้จากผลการวิจัยครั้งนี้ ไปประยุกต์ใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานสำหรับการจัดการเรียนการสอน เพื่อระมัดระวังและเน้นย้ำในประเด็นที่นักเรียนมักเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อน ให้แก่นักเรียน ซึ่งจะทำให้ความถี่ของการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในจุดนั้นลดลง

4. ครูควรยกตัวอย่างโจทย์ที่มีความซับซ้อน เพื่อให้นักเรียนได้มี ส่วนร่วมในการฝึกตีความแปลความหมายของโจทย์ ในชั้นเรียนร่วมกับครูและเพื่อนร่วมชั้น และมอบหมายงานหรือให้นักเรียนทำแบบทดสอบที่โจทย์มีความซับซ้อนและจำเป็นต้องอ่าน ทำความเข้าใจหลายครั้ง เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ฝึกฝนการตีความและแปลความหมายจากโจทย์มากยิ่งขึ้น

5. หลังจากเรียนจบเนื้อหาหนึ่งก่อนที่จะขึ้นเนื้อหาต่อไป ครูควรตรวจสอบนักเรียนว่ามีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในประเด็นใดบ้าง ก่อนขึ้นเนื้อหาต่อไปทุกครั้ง เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์ เป็นวิชาที่มีเนื้อหาต่อเนื่อง ซึ่งหากครูสามารถให้ข้อมูลย้อนกลับเกี่ยวกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนแต่ละคนได้ในภายหลังการประเมินผลการเรียนรู้แต่ละเนื้อหาก่อนที่จะเรียนเนื้อหาถัดไป ก็จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งทั้งต่อตัวนักเรียนและครู โดยจะทำให้นักเรียนทราบถึงข้อบกพร่อง ที่เป็นอุปสรรคต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของตน และสามารถปรับปรุงแก้ไขได้ทัน ส่วนตัวครูนั้นก็จะทราบถึงข้อมูลของนักเรียนว่ามีจุดบกพร่องตรงส่วนไหน เพื่อนำไปเป็นแนวทางในการปรับปรุงการสอนของตนต่อไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ มีข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้ ดังต่อไปนี้

1. ครูควรฝึกให้นักเรียนอ่านโจทย์อย่างระมัดระวัง และระบุข้อมูลที่จำเป็นรวมถึงคำสั่งที่โจทย์ต้องการ เมื่อฝึกเช่นนี้บ่อยครั้งขึ้นจะทำให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญและระมัดระวังมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะช่วยลดความถี่ในการเกิดข้อผิดพลาด ในการใช้ข้อมูลที่ผิด

2. ครูควรอธิบายความหมายของสัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสัญลักษณ์บางสัญลักษณ์อาจเป็นสิ่งใหม่สำหรับนักเรียน และสร้างความคุ้นเคยเกี่ยวกับสัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนเพิ่งเรียนรู้โดยการมอบหมายงาน เปิดโอกาสให้นักเรียนทำความรู้จักสัญลักษณ์และคำศัพท์ทางคณิตศาสตร์มากขึ้น รวมไปถึงฝึกเขียนประโยคสัญลักษณ์ หรือนำเสนอข้อมูลในรูปแบบสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ เพื่อสร้างความคุ้นเคยให้แก่นักเรียนรวมไปถึงเน้นย้ำให้นักเรียนระมัดระวังข้อผิดพลาดที่จะเกิดขึ้นเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ จะทำให้นักเรียนมีประสบการณ์และระมัดระวังมากยิ่งขึ้น

3. ครูควรฝึกฝนให้นักเรียนทำโจทย์บ่อยๆ และส่งเสริมให้นักเรียนตรวจทานคำตอบอีกครั้ง เมื่อฝึกเช่นนี้บ่อยครั้งขึ้นจะทำให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญและระมัดระวังมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะช่วยลดความถี่ในการเกิดข้อผิดพลาดในด้านการดำเนินการและการคำนวณมากยิ่งขึ้น

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

4. ครูควรเน้นย้ำและฝึกฝนการใช้หลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยาม ในห้องเรียน เนื่องจากวิชาคณิตศาสตร์มีหลักการ กฎ ทฤษฎีบท หรือนิยาม มากมายหลากหลาย อาจทำให้นักเรียนบิดเบือนในการนำไปใช้ หากขาดการฝึกฝนและทำความรู้จักจนคุ้นเคยแม่นยำ

5. ครูสามารถนำลักษณะของข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นซึ่งได้จากผลการวิจัยครั้งนี้ไปประยุกต์ใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานสำหรับการจัดการเรียนการสอน เพื่อระมัดระวังและเน้นย้ำในประเด็นที่นักเรียนมักเกิดข้อผิดพลาด ให้แก่นักเรียน ซึ่งจะทำให้ความถี่ของการเกิดข้อผิดพลาดลดลง

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัย

1. ควรทำการวิจัยวินิจฉัยการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ให้ครบทุกเนื้อหาในแต่ละระดับ เนื่องจากแต่ละเนื้อหาจะมีลักษณะการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดที่แตกต่างกัน เพื่อเป็นข้อมูลสำหรับครูในการเตรียมการสอนของตน เพื่อป้องกันการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดของนักเรียนให้น้อยลง

2. ควรต่อยอดการวิจัยครั้งนี้ โดยศึกษาเกี่ยวกับการเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ จากนักกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดเล็กลง แต่ศึกษาในเชิงลึกมากยิ่งขึ้น โดยใช้ผลการวิจัยครั้งนี้เป็นข้อมูลพื้นฐานในการต่อยอดการวิจัยครั้งถัดไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายการอ้างอิง

al, M.-H. e. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18, 3-14.

Allen, D. G. (2007). Student thinking. Retrieved 2013 June 17 2013, from http://mtc.tamu.edu/9-12/index_9-12.htm?9-12M2L1.htm

Ashlock, R. B. (1994). *Error patterns in computation* (6th ed.). New York: Macmillan Publishing Company.

Ashlock, R. B. (2006). *Error patterns in computation using error patterns to improve instruction* (9th ed.). New Jersey: Pearson Education, Inc.

Askew and William. (1995). Recent research in mathematics education. 5-16(London: HMSO).

Backman, C. A. (1978). Analyzing children's Work Procedure. *Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics*, 177-195.

Blando J. A, K., Beth et al. (1989). Analyzing and Modeling Arithmetic Errors. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(3), 301-308.

Brown. (1992). Using examples and analogies to remediate misconceptions in physics: factors influencing conceptual change. *Journal of Research in Science and Teaching*, 17 – 34.

Carpmail, B., Chapman & Crowder. (2013). *Misconceptions with the key objectives* Retrieved from https://www.ncetm.org.uk/public/files/2042723/

Chai, C. M. a. A., B.H. (1987). Identifying the reasons underlying pupils particular errors in simple algebraic expression and equations. *Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI – SEAMS)*(1-3), 189 – 198.

Chambers. (2008). *Teaching mathematics: developing as a reflective secondary teacher*. London: SAGE Publications Ltd.

Chifamba, M. a. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia,* 5, 1–10.

Ciofalo, W. a. (2010). *DIMS Exemplar Set of Items 8th-Grade Mathematics*. Educational Testing Service.

Drews. (2011). *Children's Errors in Mathematics: Understanding common misconceptions in primaty schools* (2nd ed.). 20 Cathedral Yard: LearningMatters Ltd.

Egodawatte. (2011). *Secondary school students' misconceptions in algebra.* (the degree of Doctor of Philosophy), University of Toronto.

Engelhardt, M. J. (1977). Analysis of Children's Computational Errors: A Qualitative Approach. *British Journal of Educational Psycology,* 47, 149 - 154.

Falconwood, H. a. (2010). Teaching maths through misconception. *Harris Federation Conference*.

Fisher, K. M. (1985). A Misconception in Biology : Amino Acid and Translation. *Journal for Research in Science Teaching,* 22, 53-62.

Graeber, O. A. (1992). Methoads and Materials for Preservice Teacher Education in Diagnostic and Prescriptive Teaching of Secondary Mathematics: Project Final Report (pp. 4-51). University of Maryland.

Hansen. (2011). *Children's Errors in Mathematics: Understanding common misconceptions in primaty schools* (2nd ed.). 20 Cathedral Yard: Learning Matters Ltd.

Higgins S, R. J., Swan M. & Williams J. (2002). PD2: Learning from mistakes and misconceptions (pp. 1-14). Retrieved from www.greatmathsteachingideas.com/wp-content/uploads/2012/03/PD2.pdf.

Jordaan. (2005). *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students.* (Master degree), University of South Africa.

Makonye, L. a. (2010). Learning errors and misconceptions in elementary analysis : a case study of a grade 12 class in south africa. *Acta Didactica Napocensia,* 3(3), 35 – 45.

Mccoy, S. a. (2013). Analysis of misconceptions in high school mathematics. *Networks: An On-line Journal for Teacher Research,* 15(1), 1-7.

McCrae, R. a. (2005). Subject matter knowledge: mathematical errors and misconceptions of beginning pre – service teacher. *MERGA*, 641- 648.

Mestre, J. (1987). Why should mathematics and science teachers be interested in cognitive research findings? *Academic Connections* (pp. 3-5). New York: The College Board.

Radatz. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 10(3), 163-172.

Riccomini. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. *Learning Disability Quarterly,* 28(3), 233 – 242.

Smith, D. R. (1993). Misconceptions reconceived: a constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of Learning Sciences,* 3(2), 115 – 163.

Swan. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. *London: RoutledgeFalmer*(Mathematics Teaching), 147 – 165.

Swan. (2005). Standards unit improving learning in mathematics: challenges and strategies. 34.

Swedosh. (1996). Mathematical misconceptions commonly exhibited by entering tertiary mathematics students. *MERGA*, 534-541.

Thangata, H. a. (2007). *Key concepts in teaching primary mathematics*. London: SAGE Publications Ltd.

Truran, K. M. (1987). Error Analysis as a Remedial Teaching Technique. *Proceedings of Fourth Southeast Asian Conference on Mathematical Education (ICMI – SEAMS)*(June), 1-3.

Wood, L. a. (2005). Working with logarithms: students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator,* 8(2), 53-70.

Yamane, T. (1973). *Statistics-An Introductory Analysis* (3 ed.). Newyork: Harper.

CHULALONGKORN UNIVERSITY

เกษสุดา บูรณพันศักดิ์. (2545). การศึกษามโนทัศน์เรื่องฟังก์ชันของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษากรุงเทพมหานคร. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ไข่มุก เลื่องสุนทร. (2552). การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาราชบุรี เขต1. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ชานนท์ จันทรา. (2555). การประเมินในชั้นเรียนคณิตศาสตร์: จากแนวคิดสู่การปฏิบัติ (พิมพ์ครั้งที่1 ed.). กรุงเทพฯ: อาร์ แอนด์ เอ็น ปริ้นท์.

ดารณี คำแหง. (2533). การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทัศนาพร คลังแก้ว. (2532). การวิเคราะห์ข้อบกพร่องในการทำแบบทดสอบคณิตศาสตร์แบบอัตนัยของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กรุงเทพมหานคร. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. (2544). การวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (พิมพ์ครั้งที่ 3 (ฉบับปรับปรุงแก้ไข) ed.). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร. (2546). การสังเคราะห์งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร. (2551). การศึกษามโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนในวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิต พิบูลบำเพ็ญ. วารสารศึกษาศาสตร์ 1, 20(1), 25 - 35.

ศิริเดช สุชีวะ. (2538). การพัฒนาวิธีการวินิจฉัยสำหรับตรวจสอบมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางคณิตศาสตร์. (วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2556). คะแนน o-net ค่าสถิติพื้นฐานทั่วประเทศ(ทุกระดับชั้น). http://www.onetresult.niets.or.th/AnnouncementWeb/Notice/FrBasicStat.aspx

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2544). คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ คุรุสภาลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2551a). สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2551b). หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). เอกสารพัฒนาวิชาชีพครู ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ. โครงการพัฒนาเครือข่ายการเรียนรู้ ผู้สอนวิทยาศษสตร์คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 1-3.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2553a). คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (พิมพ์ครั้งที่ 1 ed.). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2553b). คู่มือครูรายวิชาพื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (พิมพ์ครั้งที่1 ed.). กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

โสภาพรรณ แสงศัพท์. (2518). การสำรวจความรู้ความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนจากแบบเรียนวิทยาศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ. (2552). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (พิมพ์ครั้งที่1 ed.). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทยจำกัด.

อภิญญา ตังประพฤธิกุล. (2543). วิธีการวินิจฉัยมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องการหารในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญาโท), มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

อัมพร ม้าคนอง. (2536). การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา ปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร.

Chulalongkorn University

อัมพร ม้าคนอง. (2546). เอกสารคำสอนรายวิชา 2704686 ทฤษฎีและการประยุกต์ทางการศึกษาคณิตศาสตร์. ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2547). เอกสารประกอบการสอน รายวิชา 2704643 การพัฒนาหลักสูตรและการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2547). ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2547). คณิตศาสตร์การสอนและการเรียนรู้. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อัมพร ม้าคนอง. (2554). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ก

- รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจเครื่องมือวิจัย
- หนังสือขอเชิญผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย
- หนังสือขอทดลองใช้เครื่องมือวิจัย
- หนังสือขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัย

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจเครื่องมือวิจัย

1. ดร.ณัฐิกานต์ รักนาค	ผู้อำนวยการโรงเรียนวัดบ้านลำ
2. อาจารย์ฐิติพร ลินิฐฎา	อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนดุสิต
3. อาจารย์พิสิฐชัย เรืองนุ่น	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสตรีสมุทรปราการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ข

แบบวัดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนและข้อผิดพลาดทางคณิตศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ โดยวงกลมล้อมตัวเลือกที่จริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ

1. $\sqrt{x^2}$ เป็นจำนวนตรรกยะทุกๆค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง

   ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

   เนื่องจาก .....

2. $-|-\sqrt{2}|$ เป็นจำนวนเต็มลบ

   ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

   เนื่องจาก .....

3. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ เป็นจำนวนนับ

   ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

   เนื่องจาก .....

4. 7π เป็นจำนวนนับ

   ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

   เนื่องจาก .....

5. $0.3\dot{1}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

   เนื่องจาก .....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ โดยวงกลมล้อมตัวเลือกที่จริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ

6. ทุกๆจำนวนในระบบจำนวนจริง จะมีอินเวอร์สการคูณ

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

7. อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}+1$ คือ $\sqrt{2}-1$

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

8. ถ้า b เป็นอินเวอร์สการบวกของ a และ 3a – b = 8 แล้ว a = 2

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

9. {-1, 0, 1} มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

10. กำหนดให้ A = {a, b, c} มี b เป็นเอกลักษณ์การคูณ จะได้ว่า ab = a และ cb = c

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง

11. กำหนดให้ x เป็นคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 6x = 0$ โดยที่ $x \neq 0$ ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

11.1 จงแยกตัวประกอบ ของ $x^3 + x^2 - 6x$

.....

.....

11.2 จงแสดงวิธีการแก้สมการข้างต้นโดยวิธีแยกตัวประกอบ

.....

.....

11.3 นักเรียนคิดว่าสามารถแก้สมการข้างต้นเพื่อหาค่า x โดยใช้สูตร ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) ได้หรือไม่ ถ้าได้จงแสดงวิธีหาค่า x โดยการใช้สูตร ถ้าไม่ได้ จงแสดงเหตุผลประกอบ

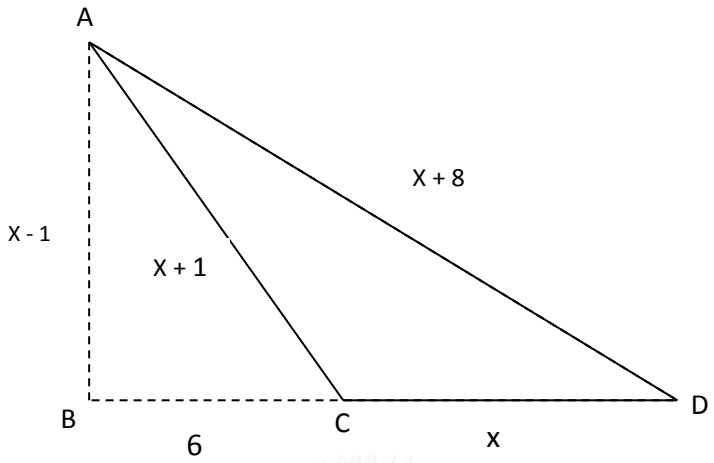
.....

.....

.....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

12. จงแสดงวิธีหาความยาวด้าน AD จากรูปที่กำหนดให้



วิธีทำ เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้ .....

จะได้.....

.....

การไม่เท่ากัน

13. บริษัท สิงคโปร์ทัวร์ คิดค่าเช่ารถตั๊กทัวร์เที่ยวละ 30 เหรียญ (SGD) โดยไม่คิดค่าใช้จ่ายอื่น ในขณะเดียวกันบริษัทไทยทัวร์คิดค่าเช่ารถตั๊กทัวร์เที่ยวละ 650 บาท แต่คิดค่าเช่าเพิ่มจากจำนวนกิโลเมตรที่พาทัวร์ อีกกิโลเมตรละ 5 บาท ถ้าเช่ารถจากบริษัท ไทยทัวร์ รถที่เช่าจะวิ่งได้กี่กิโลเมตรจึงจะไม่เกินค่าใช้จ่าย วันละ 30 เหรียญ (SGD) โดยกำหนดให้ 1 เหรียญ (SGD) มีค่าเท่ากับ 25 บาท จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบพร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์

วิธีทำ เขียนประโยคสัญลักษณ์ได้ดังต่อไปนี้ .....

จะได้.....

.....

.....

14. จากอสมการ $2^{x^2+2x+8} > 4^{x+14}$ ให้นักเรียนแสดงวิธีหาเซตคำตอบของอสมการอย่างละเอียด พร้อมทั้งวาดเส้นจำนวนแสดงช่วงคำตอบของอสมการ โดยเลือกวิธีการแก้อสมการที่ให้มาเพียง 1 วิธี จากวิธีที่ 1 หรือวิธีที่ 2 วิธีใดวิธีหนึ่งเท่านั้นที่นักเรียนคิดว่าถูกต้องเหมาะสม เพื่อใช้ในการแก้อสมการต่อไป พร้อมบอกเหตุผลที่เลือกใช้วิธีดังกล่าว

<u>วิธีที่ 1</u> เมื่อพิจารณาฐานของเลขยกกำลังพบว่า 2 < 4

ดังนั้นเลขชี้กำลังของ 2 จึงควรมีมากกว่า เลขชี้กำลังของ 4

นั่นคือ $x^2 + 2x + 8 > x + 14$

จะได้ว่า .....

.....

.....

เขียนแสดงช่วงคำตอบของอสมการบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

.....

.....

<u>วิธีที่ 2</u> เริ่มต้นโดยทำฐานให้เท่ากัน คือ $2^{x^2+2x+8} > 2^{2(x+14)}$

นั่นคือ $x^2 + 2x + 8 > 2(x + 14)$

$x^2 + 2x + 8 > 2x + 28$

จะได้ว่า .....

.....

.....

เขียนแสดงช่วงคำตอบของอสมการบนเส้นจำนวนได้ดังนี้

.....

.....

สาเหตุใดจึงเลือกวิธีข้างต้น

.....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ค่าสัมบูรณ์

15. ช่วงของอสมการ -10 < x < -2 สามารถเขียนในรูปค่าสัมบูรณ์ $|x+y|$ < z เมื่อ y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกได้อย่างไร จงแสดงวิธีคิดอย่างละเอียด

วิธีทำ $|x+y|$ < z สามารถถอดค่าสัมบูรณ์ได้ดังนี้.....

จะได้ว่า .....

.....

.....

รากที่ n ของจำนวนจริง

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ โดยวงกลมล้อมตัวเลือกที่จริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ

16. มีจำนวนจริง x ที่ $\sqrt{x-5}$ = -5

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

17. $\sqrt{16} = 4, -4$

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

18. รากที่ 2 ของ 64 คือ 8

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

19. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า1 a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b = \sqrt[n]{a}$

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก.....

20. ค่าหลักของรากที่สองของ 13 คือ 3 เนื่องจาก 3.605^2 มีค่าประมาณ 13

ข้อความนี้เป็น (จริง / เท็จ)

เนื่องจาก .....

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

จากข้อ 21 – 22 จงแสดงแนวคิด ในการหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้ พร้อมทั้งระบุบทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้

จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกรณฑ์ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่า 0

21. $64a^{\frac{1}{2}}$

บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้.....

จะได้ว่า $64a^{\frac{1}{2}}$ =.....

22. $27\ a^{\frac{1}{3}}$

บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้.....

จะได้ว่า $27\ a^{\frac{1}{3}}$ =.....

จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

23. $\sqrt[3]{-64}\ \sqrt{2^6}$

บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้.....

จะได้ว่า $\sqrt[3]{-64}\ \sqrt{2^6}$ =.....

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

24. $(0.0016)^{\frac{-1}{2}}$

บทนิยามหรือสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้.....

จะได้ว่า $(0.0016)^{\frac{-1}{2}}$ =.....

จากข้อ 25 – 26 จงทำผลคูณต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (รูปที่ไม่สามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ได้อีก) เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

25. $\sqrt{2a^2}\sqrt{8a^4}$

สมบัติของรากที่ n และสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้

.....

จะได้ว่า $\sqrt{2a^2}\sqrt{8a^4}$ =.....

26. $\sqrt{\frac{8a^4}{b^2}}$

สมบัติของรากที่ n และสมบัติของเลขยกกำลังที่ใช้

.....

จะได้ว่า $\sqrt{\frac{8a^4}{b^2}}$ = ...

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ภาคผนวก ค

ข้อมูลเชิงคุณภาพจากการสัมภาษณ์เกี่ยวกับมโนทัศน์เรื่องจำนวนจริงและเลขยกกำลัง

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

จำนวนจริง

1.ความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริง

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่ถูกต้องเกี่ยวกับจำนวนเต็ม และจำนวนนับ แต่ยังพบว่านักเรียนบางส่วนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับจำนวนตรรกยะและอตรรกยะรวมถึงไม่สามารถจำแนกความสัมพันธ์ของจำนวนต่างๆในระบบจำนวนจริงได้

2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนบางส่วนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับนิยามของเอกลักษณ์การบวก เอกลักษณ์การคูณ อินเวอร์สการบวก อินเวอร์สการคูณ สมบัติปิดของการบวก และสมบัติปิดของการคูณ โดยนักเรียนบางคนมีความเข้าใจที่บกพร่องว่าเอกลักษณ์การบวก/คูณคืออินเวอร์สการบวก/คูณ หรือนักเรียนบางคนคิดว่าเครื่องหมายปีกกาที่ใช้แสดงเซตจำกัด คือ สมบัติปิด

3. การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่ถูกต้องในการแยกตัวประกอบพหุนาม แต่ยังคงมีนักเรียนบางส่วนที่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ เพื่อหาคำตอบของสมการ

4. การไม่เท่ากัน

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนบางส่วนมีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับการเปลี่ยนเครื่องหมายอสมการ สำหรับการแก้อสมการที่ต้องคูณด้วยจำนวนลบ

5. ค่าสัมบูรณ์

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนส่วนใหญ่เข้าใจความหมายของค่าสัมบูรณ์ แต่ใช้นิยามของค่าสัมบูรณ์ไม่ถูกต้อง โดยมักกล่าวว่า $|a|$ = a หรือ $|a|$ = $\pm a$ อีกทั้งนักเรียนส่วนใหญ่ถอดค่าสัมบูรณ์ที่อยู่ในรูปอสมการไม่ถูกต้อง

เลขยกกำลัง

6.รากที่ n ของจำนวนจริง

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเกี่ยวกับค่าหลักของราก ที่ n โดยมักเข้าใจว่าค่าหลักของรากที่ n คือค่าประมาณ หรือค่าที่ไม่เป็นทศนิยม นอกจากนี้นักเรียนส่วนใหญ่ยังผิดพลาดในการใช้สัญลักษณ์ โดยเข้าใจว่า $\sqrt[n]{a}$ แทนรากที่ n ของ a ซึ่งความจริงแล้ว $\sqrt[n]{a}$ แทนค่าหลักของรากที่ n ของ a

7. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

จากการสัมภาษณ์พบว่านักเรียนส่วนใหญ่มีมโนทัศน์ที่ถูกต้องเกี่ยวกับการเปรียบเทียบเลขยกกำลัง โดยนักเรียนส่วนใหญ่ตอบว่าการเปรียบเทียบเลขยกกำลังจำเป็นต้องทำฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากันก่อนจึงจะเปรียบเทียบเลขชี้กำลังได้

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวพรธิดา สุขกรม เกิดเมื่อวันที่ 28 พฤศจิกายน พุทธศักราช 2532 อยู่บ้านเลขที่ 3/2 หมู่ 6 ตำบลหนองขาว อำเภอท่าม่วง จังหวัดกาญจนบุรี 71000 สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จากคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2554 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2555

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University