บทที่ 5

การวิเคราะห์ระบบควบคุมอัตโนมัติแบบป้อนกลับ

<u>ผลตอบสนองเชิงเวลา</u>

ในบทที่ 3 และบทที่ 4 เราได้หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลที่เคลื่อนที่ตามและหาสัญญาณควบคุมอัตโนมัติในรูปของเมตริกซ์ของค่าเกน เพื่อให้ระบบควบคุมอัตโนมัติแบบป้อนกลับควบคุมให้แขนกลที่เคลื่อนที่ตามมีผลตอบสนองเชิงเวลาตามที่ต้องการ ในบทนี้ จะได้วิเคราะห์ในรายละเอียดเกี่ยวกับผลตอบสนองเชิงเวลาต่อสัญญาณเข้าชนิดต่าง ๆ ของระบบควบคุมอัตโนมัติที่เราได้ออกแบบไว้ โดยจะเห็นได้จากสมการที่ (4.6) ซึ่งเป็นสมการที่แสดงถึงคุณลักษณะของระบบควบคุมว่า

$$\ddot{x}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 = \omega_1^2x_{d1} + (2\zeta_1\omega_1+a_{33})\dot{x}_{d1}$$
$$\ddot{x}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2x_2 = \omega_2^2x_{d2} + (2\zeta_2\omega_2+a_{44})\dot{x}_{d2}$$

ในการหากฎการควบคุม (CONTROL LAW) นั้น เราจะต้องทราบสเตทของระบบแขนกลทุก ๆ สเตท เพื่อใช้ป้อนกลับมาเปรียบเทียบ ในทำนองเดียวกัน สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้าที่ต้องการก็จะต้องมีทั้งตำแหน่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมของแขนกลที่เคลื่อนที่นำ อย่างไรก็ตาม ในการวิเคราะห์ทางทฤษฎีนั้น เราจะเปรียบเทียบระบบควบคุมเป็น 2 กรณี คือ

1. กรณีที่สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้ามีทั้งตำแหน่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุม เขียนสมการได้เป็น

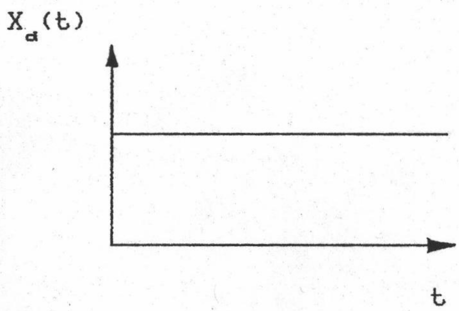
$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2x_d + (2\zeta\omega+c)\dot{x}_d \qquad (5.1)$$

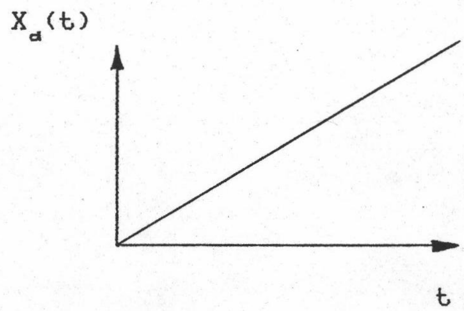
โดยที่ $c = a_{33}$ หรือ a_{44} แล้วแต่ว่าพิจารณาข้อต่อที่ 1 หรือ ข้อต่อที่ 2

2. กรณีที่สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้ามีเพียงตำแหน่งเชิงมุม เขียนสมการได้เป็น

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_d \qquad \text{\_\_\_(5.2)}$$

ซึ่งเราจะวิเคราะห์เพื่อหาผลตอบสนองเชิงเวลาเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณเข้าที่เป็น UNIT STEP INPUT และ RAMP INPUT (ดูรูปที่ 5.1) ต่อไป





รูปที่ 5.1 แสดงลักษณะของสัญญาณเข้าที่ใช้ในการวิเคราะห์

1. <u>กรณีที่สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้ามีทั้งตำแหน่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุม</u>

1.1 <u>กรณีที่สัญญาณเข้าเป็น UNIT STEP INPUT</u>

ใช้การแปลงลาปลาซ (LAPLACE TRANSFORM) กับสมการที่ (5.1) ได้

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{(2\zeta\omega+c)s + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

สำหรับ UNIT STEP INPUT ; $x_d(s) = 1/s$ ได้

$$x(s) = \frac{(2\zeta\omega+c)s + \omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

ดังนั้น ผลตอบสนองเชิงเวลาจะเป็น

$$x(t) = 1 + \frac{\sqrt{1+2c\zeta/\omega+c^2/\omega^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega t}\sin[\omega\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi_1]$$

$; \zeta < 1$ __(5.3ก)

โดยที่

$$\phi_1 = \tan^{-1}\frac{(2\zeta+c/\omega)\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2-c\zeta/\omega} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$$

$$x(t) = 1 + [(\omega+c)t - 1]e^{-\omega t}$$

$; \zeta = 1$ __(5.3ข)

$$x(t) = 1 + \frac{a(1+cb/\omega^2)e^{-at}}{b-a} - \frac{b(1+ca/\omega^2)e^{-bt}}{b-a}$$

$; \zeta > 1$ __(5.3ค)

โดยที่

$a = \zeta\omega - \omega\sqrt{\zeta^2-1}$

$b = \zeta\omega + \omega\sqrt{\zeta^2-1}$

จะเห็นว่า ในกรณีที่สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้ามีทั้งตำแหน่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมนั้น เทอมที่สองในสมการที่ (5.3ก) และสมการที่ (5.3ข) และ เทอมที่สองและสามในสมการที่ (5.3ค) จะเป็นศูนย์เมื่อเวลามีค่ามาก ดังนั้น ระบบจะตอบสนองต่อสัญญาณเข้าที่เป็น UNIT STEP INPUT โดยไม่มีความผิดพลาดเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะสมดุลแล้ว (STEADY-STATE ERROR) เกิดขึ้น

1.2 <u>กรณีที่สัญญาณเข้าเป็น RAMP INPUT</u>

ใช้การแปลงลาปลาซ (LAPLACE TRANSFORM) กับสมการที่ (5.1) ได้

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{(2\zeta\omega+c)s + \omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

สำหรับ RAMP INPUT ; $x_d(s) = 1/s^2$ ได้

$$x(s) = \frac{(2\zeta\omega+c)s + \omega^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

ดังนั้น ผลตอบสนองเชิงเวลาจะเป็น

$$x(t) = t + c/\omega^2 + \frac{\sqrt{1+2c\zeta/\omega+c^2/\omega^2}}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega t}\sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi_1')$$

$; \zeta < 1$ __(5.4ก)

โดยที่

$$\phi_1' = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} + \tan^{-1}\frac{-(2\zeta+c/\omega)\sqrt{1-\zeta^2}}{1-2\zeta^2-c\zeta/\omega}$$

$$x(t) = t + c/\omega^2 - (t+ct/\omega+c/\omega^2)e^{-\omega t} \qquad ; \zeta = 1 \text{ \_\_(5.4ข)}$$

$$x(t) = t + c/\omega^2 + \frac{(1+cb/\omega^2)e^{-at}}{b-a} + \frac{(1+ca/\omega^2)e^{-bt}}{b-a}$$

$; \zeta > 1$ __(5.4ค)

จะเห็นว่า ในกรณีที่สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้ามีทั้งตำแหน่งเชิงมุมและความเร็วเชิงมุมนั้น เทอมที่สามในสมการที่ (5.4ก) และสมการที่ (5.4ข) และ เทอมที่สามและสี่ในสมการที่ (5.4ค) จะเป็นศูนย์เมื่อเวลามีค่ามาก ดังนั้น ระบบจะตอบสนองต่อสัญญาณเข้าที่เป็น RAMP INPUT โดยมีความผิดพลาดเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะสมดุลแล้ว (STEADY-STATE ERROR) เกิดขึ้นเท่ากับ c/ω^2

2. <u>กรณีที่สเตทเวคเตอร์ของสัญญาณเข้ามีเพียงตำแหน่งเชิงมุม</u>

2.1 <u>กรณีที่สัญญาณเข้าเป็น UNIT STEP INPUT</u>

ใช้การแปลงลาปลาซ (LAPLACE TRANSFORM) กับสมการที่ (5.2) ได้

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

สำหรับ UNIT STEP INPUT ; $x_d(s) = 1/s$ ได้

$$x(s) = \frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

ได้ผลตอบสนองเชิงเวลาเป็น

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin[\omega\sqrt{1-\zeta^2}t + \cos^{-1}\zeta] \qquad ; \zeta < 1 \quad \_\_(5.5\text{ก})$$

$$x(t) = 1 - (1+\omega t)e^{-\omega t} \qquad ; \zeta = 1 \quad \_\_(5.5\text{ข})$$

$$x(t) = 1 - \frac{b}{b-a}e^{-at} + \frac{a}{b-a}e^{-bt} \qquad ; \zeta > 1 \quad \_\_(5.5\text{ค})$$

จะเห็นว่า ในกรณีนี้จะไม่มีความผิดพลาดเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะสมดุลแล้ว (STEADY -STATE ERROR) เกิดขึ้นเช่นกัน

2.2 <u>กรณีที่สัญญาณเข้าเป็น RAMP INPUT</u>

ใช้การแปลงลาปลาซ (LAPLACE TRANSFORM) กับสมการที่ (5.2) ได้

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

สำหรับ RAMP INPUT ; $x_d(s) = 1/s^2$ ได้

$$x(s) = \frac{\omega^2}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$$

ดังนั้น ผลตอบสนองเชิงเวลา จะเป็น

$$x(t) = t - 2\zeta/\omega + \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}} \sin[\omega\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi_2'] \quad ; \zeta < 1 \quad \_\_(5.6ก)$$

โดยที่

$$\phi_2' = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$$

$$x(t) = t - 2/\omega + (t+2/\omega)e^{-\omega t} \quad ; \zeta = 1 \quad \_\_(5.6ข)$$

$$x(t) = t - \frac{a+b}{ab} + \frac{b}{a(b-a)} e^{-at} - \frac{a}{b(b-a)} e^{-bt} \quad ; \zeta > 1 \quad \_\_(5.6ค)$$

จะเห็นว่า ในกรณีนี้จะมีความผิดพลาดเมื่อระบบเข้าสู่สภาวะสมดุลแล้ว (STEADY -STATE ERROR) เกิดขึ้น กล่าวคือ

$$e_{ss} = 2\zeta/\omega \quad ; \zeta < 1$$

$$e_{ss} = 2/\omega \quad ; \zeta = 1$$

$$e_{ss} = (a+b)/ab = 2\zeta/\omega \quad ; \zeta > 1$$