บทที่ 2

หลักการพื้นฐานและสมการที่เกี่ยวข้อง

หลักการพื้นฐาน

การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของการไหลเวียนของน้ำที่เกิดจากลมในอ่าวไทย จำเป็นต้องอาศัยหลักการทางคณิตศาสตร์ช่วยในการแก้สมการต่างๆ เพื่อที่จะคำนวณหาค่าตัวแปรที่ต้องการคือความเร็วของกระแสน้ำในแต่ละระดับทั้งในแนวทิศเหนือใต้และทิศตะวันออกตะวันตก ค่าความเค็มของน้ำทะเลและสามารถแปลงสภาพสมการทางคณิตศาสตร์เข้าอยู่ในรูปสมการที่เขียนขึ้นได้โดยภาษาทางคอมพิวเตอร์ หลักการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมแบบจำลองนี้ เรียกว่า ไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ (Finite Different) โดยการคำนวณหาค่าตัวแปรที่ต้องการทราบจากตัวแปรที่ทราบค่าแล้ว จากความสัมพันธ์หรือสมการทางคณิตศาสตร์ภายใต้สภาวะการณ์ที่กำหนด เช่น

เมื่อกำหนดให้ f(x,y) มีค่า $\frac{dy}{dx} = K$

โดยกำหนดระยะห่างจากจุด U(1,1) ถึงจุด U(2,1) มีค่าเท่ากับ 1

ฉะนั้นจะได้ว่า $U(1,1) = K.1+U(2,1)$

หรือในวิธีเดียวกันหากระยะห่างจากจุด U(x,y) ถึง U(x+1,y) มีค่าเท่ากับ 1

ก็จะได้ว่า

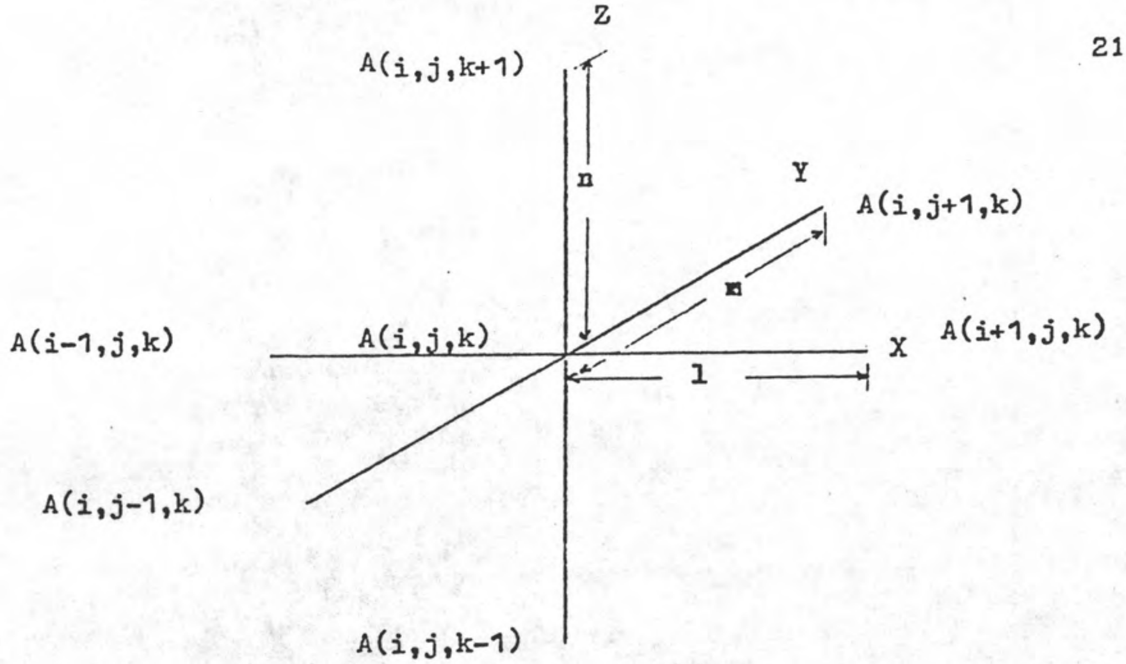
$$U(x,y) = K.1+U(x+1,y)$$

พิจารณารูปที่ 2.1

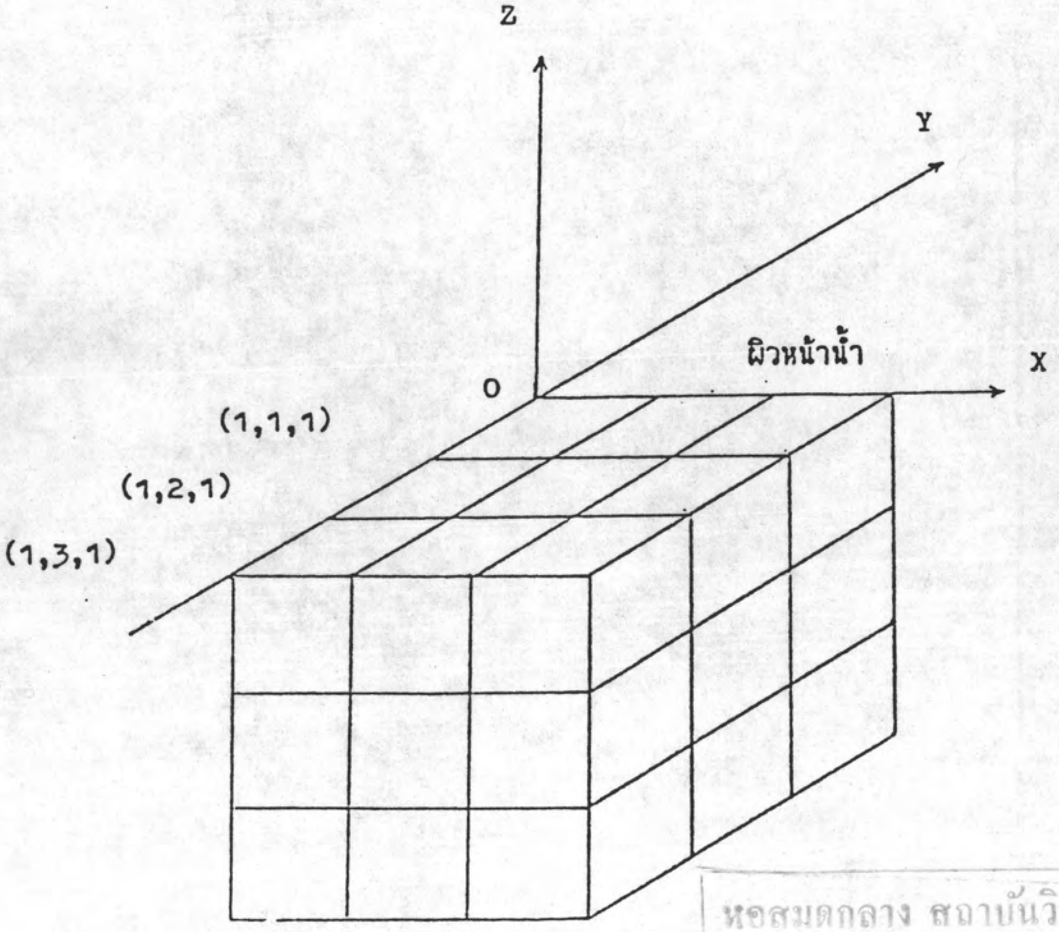
กำหนดให้ A (i,j,k) เป็นค่าใดๆ ที่จุด i,j,k, ของฟังค์ชัน (x, y, z)

ในแกน x จะได้ว่า $\frac{\partial f}{\partial x} \cong \frac{A(i+1,j,k)-A(i-1,j,k)}{2.1}$

และ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{(A(i+1,j,k)-A(i,j,k))}{1}-\frac{(A(i,j,k)-A(i-1,j,k))}{1}}{1}$$



รูปที่ 2.1 แสดงการเรียกชื่อและระยะห่างระหว่างกริด



รูปที่ 2.2 ตำแหน่งการวางแกนของแบบจำลอง

จะได้ว่า $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong \frac{(A(i+1,j,k)-2.A(i,j,k)+A(i-1,j,k))}{l^2}$$

และในแกน y $$\frac{\partial f}{\partial y} \cong \frac{A(i,j+1,k)-A(i,j-1,k)}{2.m}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cong \frac{(A(i,j+1,k)-2.A(i,j,k)+A(i,j-1,k))}{m^2}$$

และในแกน z $$\frac{\partial f}{\partial z} \cong \frac{A(i,j,k+1)-A(i,j,k-1)}{2.n}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cong \frac{(A(i,j,k+1)-2.A(I,J,K)+A(i,j,k-1))}{n^2}$$

ในบางครั้งพบว่าในการกำหนดกลับกับทิศทางของแบบจำลองที่สร้างขึ้น จึงจะต้องกลับแกนหรือเปลี่ยนทิศทางการคำนวณ (Backward) ซึ่งในแบบจำลองได้กำหนดทิศทางของแกนและการวางกริดดังแสดงในรูปที่ 2.2 ซึ่งจะทำให้วิธีการคำนวณในแกน x และแกน y เปลี่ยนไปเป็น

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cong \frac{A(i,j-1,k)-A(i,j+1,k)}{2.m}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cong \frac{(A(i,j-1,k)-2.A(i,j,k)+A(i,j+1,k))}{m^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cong \frac{A(i,j,k-1)-A(i,j,k+1)}{2.n}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cong \frac{(A(i,j,k-1)2.A(i,j,k)+A(i,j,k-1))}{n^2}$$

สมการของแรงที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของน้ำ

แรง (Force) ที่กระทำและมีผลต่อการเคลื่อนที่ของมวลน้ำ เป็นกระแสน้ำในทะเลประกอบด้วยแรง 3 ชนิด คือ แรงเฉือน (Shear Force) แรงดัน (Pressure Force) และแรงโคริโอลิส (Coriolis Force)

1. แรงเฉือน

แรงเฉือน คือแรงที่กระทำต่อพื้นผิวในแนวสัมผัส ทำให้วัตถุเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปทรงเชิงมุม (Angular Deformation) แรงเฉือนที่กระทำต่อหน่วยพื้นที่ผิว เรียกว่า ความเค้นเฉือน (Shear Stress) ซึ่งจากสมการ Newton Law of Viscosity

$$\tau = \mu \frac{dU}{dz} \qquad (2.1)$$

เมื่อ $\frac{dU}{dz}$ = อัตราการเปลี่ยนรูปทรงเชิงมุม

τ = ความเค้นเฉือน (นิวตัน/ม.^{2})

μ = ความหนืดของของเหลว (กก./ม.วินาที)

ในทะเลแรงเฉือนจะทำให้ เกิดการไหลเวียนของมวลน้ำนั้น ได้จากกระแสลมซึ่งจะขึ้นกับความเค้นเฉือนและความหนืดของน้ำทะเล และถ้าในกรณีที่ทะเลมีความลึกเท่ากันและกว้างมากๆ ไม่มีขอบเขตจำกัด จะได้การกระจายของกระแสน้ำมีค่ามากที่สุดที่ผิวหน้าน้ำและลดลงตามความลึกดังรูปที่ 2.3 แต่ในสภาพที่เป็นจริงนั้นจะมีขอบเขตเป็นตัวขวางกั้นทำให้มวลน้ำไปรวมตัวกันและไหลย้อนกลับเนื่องจากกระแสน้ำที่เกิดจากแรงดันจากความแตกต่างของผิวหน้าน้ำทะเล

ความหนืดของน้ำทะเลที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองนั้น เป็นค่าคงที่ที่กำหนดขึ้นและทำการทดลองปรับแก้ค่าจนได้ค่าความหนืดที่เหมาะสม โดยค่าความหนืดของน้ำในขณะที่มีการเคลื่อนที่จะต้องใช้ความหนืดที่ปรากฏ (Appearance Viscosity) ซึ่งจะไม่สามารถใช้ค่า Kinetics Visconity หรือ Dynamics Viscosity ได้

จากรูปที่ 2.5 พิจารณามวลน้ำในขนาด $\delta x.\delta y.\delta z$ ที่อยู่ใน Steady Flow Field ในตามแกน x จะได้ว่า

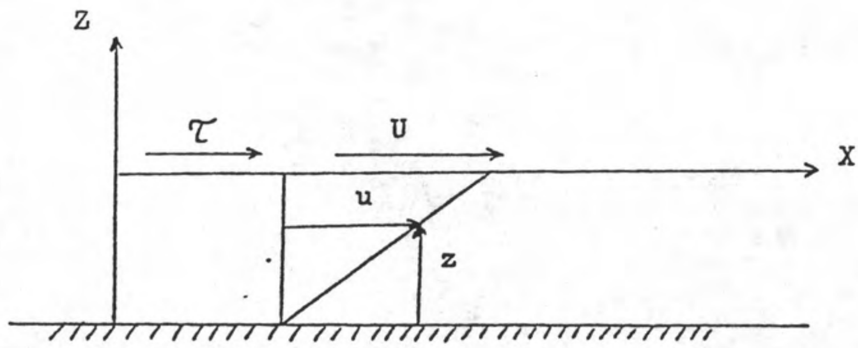
$$\text{Shear Force} = (\tau_{xy}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}.\delta z).\delta x.\delta y-\tau_{xy}.\delta x.\delta y+(\tau_{xz}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}.\delta y).\delta x.\delta z-\tau_{xz}.\delta x.\delta z$$

$$= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}.\delta z.\delta x.\delta y+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y}.\delta y.\delta x.\delta z$$

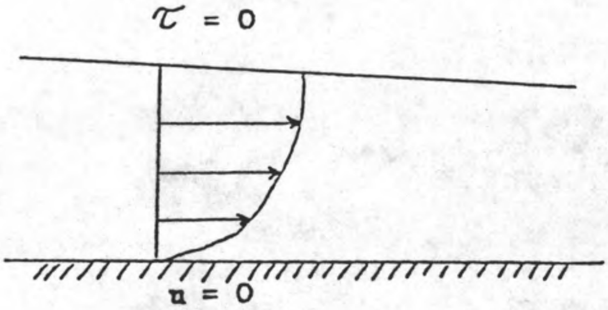
จากสมการ 2.1 จะได้

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial}\frac{(\mu \partial u)}{(\partial z)}$$

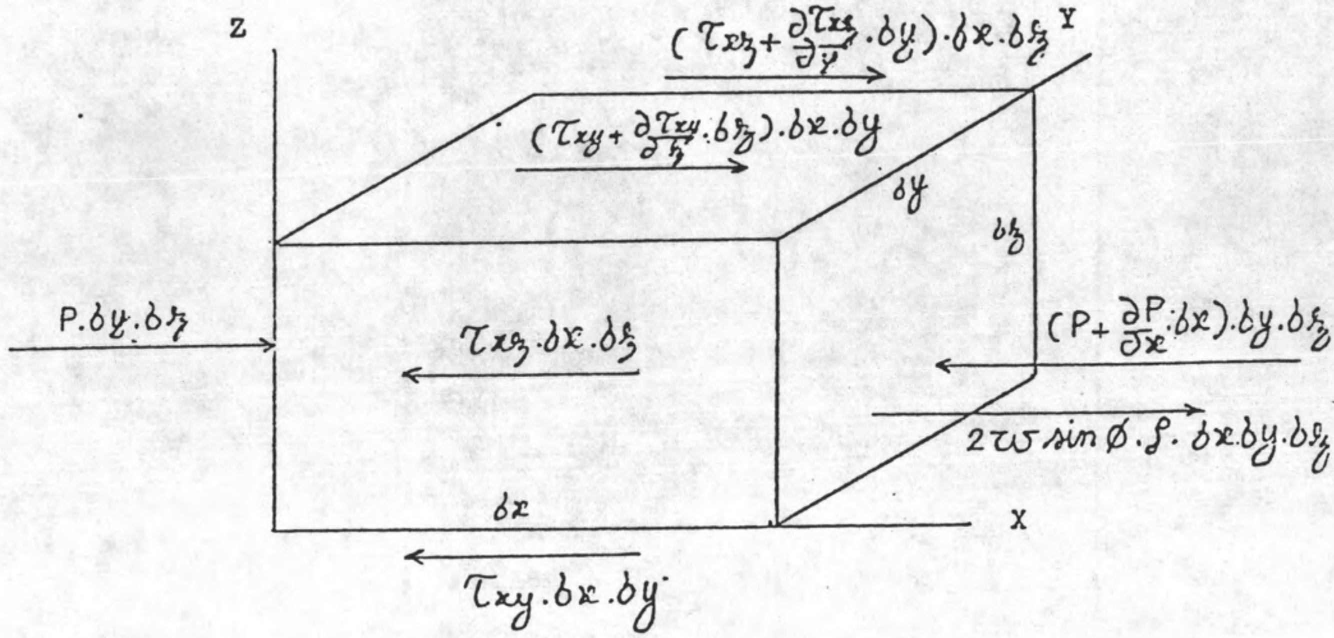
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



รูปที่ 2.3 โปรไฟล์ของความเร็วกระแสน้ำที่เกิดจากแรงเฉือนของลมที่ผิวหน้าน้ำ



รูปที่ 2.4 โปรไฟล์ของความเร็วกระแสน้ำที่เกิดจากแรงดันของมวลน้ำ



รูปที่ 2.5 แรงลัพธ์ต่างๆ ที่กระทำต่อมวลน้ำในแกน x

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{Shear Force} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.\delta z.\delta x.\delta y + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\delta y.\delta x.\delta z \qquad (2.2)$$

ในแกน y

$$\text{Shear Force} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.\delta z.\delta x.\delta y + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\delta x.\delta y.\delta z \qquad (2.3)$$

เมื่อ u = ความเร็วตามแกน x (ม./วินาที)

v = ความเร็วตามแกน y (ม./วินาที)

2. แรงดัน

แรงดันเป็นแรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของน้ำเนื่องจากความแตกต่างของระดับผิวหน้าน้ำทะเลและความแตกต่างของความหนาแน่นของน้ำ จากกฎทรงพลังงาน โดยที่น้ำที่อยู่ในระดับสูงกว่าจะไหลไปสู่ที่มีระดับต่ำกว่า ดังรูปที่ 2.4 โดยที่

$$P = -\int_{h_1}^{h_2} \rho g \, dh$$

$$= -\rho g (h_2 - h_1)$$

$$P = -\rho g \eta \qquad (2.4)$$

เมื่อ P = ความดันหรือแรงดันที่กระทำต่อพื้นที่ (นิวตัน/ม.^{2})

ρ = ความหนาแน่นของน้ำ (กก./ม.^{3})

g = อัตราเร่งโน้มถ่วงของโลก (ม./วินาที^{2})

h_1 = ระดับความลึกของน้ำ (ม.)

h_2 = $h_1 + \eta$

z = ระดับความแตกต่างของผิวหน้าน้ำ (ม.)

จากรูปที่ 2.5 จะได้ว่า

ในแกน x สามารถคำนวณ Net pressure force ที่กระทำต่อมวลน้ำขนาด $\delta x.\delta y.\delta z$

$$\text{Net Pressure Force} = -\frac{\partial P}{\partial x}.\delta x.\delta y.\delta z$$

$$= -g\left(\rho\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \rho}{\partial x}\right).\delta x.\delta y.\delta z \qquad (2.5)$$

ในแกน y สามารถคำนวณ Net pressure force ที่กระทำต่อมวลน้ำขนาด $\delta x.\delta y.\delta z$

$$\text{Net Pressure Force} = -g\left(\rho\frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta\frac{\partial \rho}{\partial y}\right).\delta x.\delta y.\delta z \qquad (2.6)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของผิวหน้าน้ำทะเลนั้นสามารถคำนวณได้จาก

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t}(x,y,t) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\eta} u(x,y,z)\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\eta} v(x,y,z)\,dy \qquad (2.7)$$

ด้วยวิธีทางไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \eta}{\partial t} = \; & n\Big(\sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{(u(i+1,j,k)+u(i,j,k))}{4}-\frac{(u(i,j,k)+u(i-1,j,k))}{4}\Big)+ \\
& \sum_{k=2}^{hh-1}\Big(\frac{(u(i+1,j,k)+u(i,j,k))}{2}-\frac{(u(i,j,k)+u(i,j-1,k))}{2}\Big)+ \\
& \sum_{k=hh-1}^{hh}\Big(\frac{(u(i+1,j,k)+u(i,j,k))}{4}-\frac{(u(i,j,k)+u(i-1,j,k))}{4}\Big)\Big)+ \\
& n\Big(\sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{(v(i,j-1,k)+v(i,j,k))}{4}-\frac{(v(i,j,k)+v(i,j+1,k))}{4}\Big)+ \\
& \sum_{k=2}^{hh-1}\Big(\frac{(v(i,j-1,k)+v(i,j,k))}{2}-\frac{(v(i,j,k)+v(i,j+1,k))}{2}\Big)+ \\
& \sum_{hh-1}^{hh}\Big(\frac{(v(i,j-1,k+v(i,j,k))}{4}-\frac{(v(i,j,k)+v(i,j+1,k))}{4}\Big)\Big) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

เมื่อ hh = จำนวนระดับชั้นความลึกของกริด

$\frac{\partial \eta}{\partial t}$ = อัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับผิวหน้าน้ำ ในแต่ละรอบของการคำนวณ

3. แรงโคริโอลิส

แรงโคริโอลิส เป็นแรงที่กระทำต่อการเคลื่อนของวัตถุเนื่องมาจากการหมุนรอบตัวเองของโลก โดยจะทำให้ทิศทางของการเคลื่อนที่ในซีกโลกภาคเหนือเบี่ยงเบนไปทางขวา และในซีกโลกภาคใต้เบี่ยงเบนไปทางซ้าย

ในแกน x แรงโคริโอลิสที่กระทำต่อมวล 1 หน่วยจะได้ว่า

$$\text{Coriolis Force} = 2.\omega\sin\phi.v \qquad (2.9)$$

ในแกน y

$$\text{Coriolis Force} = -2.\omega\sin\phi.u \qquad (2.10)$$

เมื่อ ω = อัตราเร็วเชิงมุมของโลก (เรเดียน/วินาที)

ϕ = เส้นรุ้งขนานที่วัตถุอยู่ (องศา)

พิจารณาจากรูปที่ 2.5 จะได้ว่า

แกน x

$$\text{Coriolis Force} = 2.\omega\sin\phi.v(i,j,k).\rho.\delta x.\delta y.\delta z \qquad (2.11)$$

แกน y

$$\text{Coriolis Force} = -2.\omega\sin\phi.u(i,j,k).\rho.\delta x.\delta y.\delta z \qquad (2.12)$$

สมการการเคลื่อนที่ของน้ำ (Equation of Motion)

สมการนี้เป็นการรวบควมแรงทั้งหมดที่กระทำต่อมวลน้ำ ดังแสดงในรูปที่ 2.3 ซึ่งเป็นแรงที่กระทำในแกน x ต่อมวลน้ำปริมาตร $\delta x.\delta y.\delta z$ ในสภาพ Steady State ที่จะเป็นไปตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้ว่า

แรงลัพธ์ทั้งหมด = แรงเฉือน + แรงดัน + แรงโคริเอลิส (2.13)

และ $$\sum F_x = ma_x \qquad (2.14)$$

เมื่อ m = มวลของวัตถุ

$= \rho.\delta x.\delta y.\delta z$

a_x = อัตราเร่งของวัตถุในแกน x

ภายใต้สภาวะที่คงที่ และ อัตราการเปลี่ยนแปลงในแกน z มีค่าน้อยมาก ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{du}{dt} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \\
F_x &= \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right).\rho.\delta x.\delta y.\delta z \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

จากสมการ 2.2 ถึง 2.15 และหารด้วย $\delta x.\delta y.\delta z$ จะได้

ในแกน x

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - g\left(\rho\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + 2.\rho.\omega\sin\phi.v \qquad (2.16)$$

ในทำนองเดียวกัน ในแกน y

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - g\left(\rho\frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta\frac{\partial \rho}{\partial y}\right) - 2.\rho.\omega\sin\phi.u \qquad (2.17)$$

ซึ่งสมการที่ 2.16 และ 2.17 จะเรียกว่าสมการการเคลื่อนที่ของน้ำ (Equation of Motion) โดยใช้วิธีทางไฟไนท์ดิฟเฟอเรนท์ ดัดแปลงสมการ แก้สมาการดังรูปที่ 2.7 และ

กำหนดให้ $C1 = \frac{\mu}{l^2}$ $C2 = \frac{\mu}{m^2}$ $C3 = \frac{\mu}{n^2}$

ดังแสดงในรูปที่ 2.6

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\rho(i,j,k).u(i,j,k).\frac{(u(i+1,j,k)-u(i-1,j,k))}{2.l} + \rho(i,j,k).v(i,j,k) \\
&.\frac{(u(i,j-1,k)-u(i,j+1,k))}{2.m} = \mu\frac{(u(i,j,k-1)-2.u(i,j,k)+u(i,j,k+1))}{n^2} \\
&+ \mu\frac{(u(i,j-1,k)-2.u(i,j,k)+u(i,j+1,k))}{m^2} - g\Big(\rho(i,j,k).\frac{(\eta(i+1,j,k)-\eta(i-1,j,k))}{2.l} \\
&+ \eta(i,j,k).\frac{(\rho(i+1,j,k)-\rho(i-1,j,k))}{2.l}\Big) + 2.\rho(i,j,k).\omega\sin\phi.v(i,j,k) \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

$$\rho(i,j,k).u(i,j,k).\frac{(v(i+1,j,k)-v(i-1,j,k))}{2.l}+\rho(i,j,k).v(i,j,k)$$

$$.\frac{(v(i,j-1,k)-v(i,j+1,k))}{2.m} = \mu\frac{(v(i,j,k-1)-2.v(i,j,k)+v(i,j,k+1))}{n^2}+\mu\frac{(v(i+1,j,k)-2,v(i,j,k)+v(i-1,j,k))}{l^2}- g(\rho(i,j,k).\frac{(\eta(i,j-1,k)-\eta(i,j+1,k))}{2.m}+\eta(i,j,k).\frac{(\rho(i,j-1,k)-\rho(i,j+1,k))}{2.m})$$

$$2.\ (i,j,k).\omega\sin\phi.u(i,j,k) \qquad (2.19)$$

จากสมการที่ 18 แก้สมการหาค่า u (i,j,k) แทนค่า C1 C2 C3

$$u(i,j,k) = (\rho(i,j,k).v(i,j,k).\frac{(u(i,j-1,k)-u(i,j+1,k))}{2.m}-$$

$$C3.(u(i,j,k-1)+u(i,j,k+1))-C2.(u(i,j-1,k)+u(i,j+1,k))+\frac{g}{2.l}$$

$$.(\rho(i,j,k).(\eta(i+1,j,k)-\eta(i-1,j,k))+\eta(i,j,k).\frac{(\rho(i+1,j,k)-\rho(i-1,j,k))}{2.l})-2.\rho(i,j,k).v(i,j,k).\omega\sin\phi)/(\rho(i,j,k).$$

$$\frac{(u(i-1,j,k)-u(i+1,j,k))}{2.l}-2.C3-2.C2 \qquad (2.20)$$

จากสมาการที่ 19 แก้สมการหาค่า v (i,j,k) แทนค่า C1 C2 C3

$$v(i,j,k) = (\rho(i,j,k).u(i,j,k).\frac{(v(i+1,j,k)-v(i-1,j,k))}{2.l}-$$

$$C3.(v(i,j,k-1)+v(i,j,k+1))-C1.(v(i+1,j,k)+v(i-1,j,k))+\frac{g}{2.m}$$

$$.(\rho(i,j,k).(\eta(i,j-1,k)-\eta(i,j+1,k))+\eta(i,j,k).\frac{(\rho(i,j-1,k)-\rho(i,j+1,k))}{2.m})+2.\rho(i,j,k).u(i,j,k).\omega\sin\phi)/(\rho(i,j,k).$$

$$\frac{(v(i,j+1,k)-v(i,j-1,k))}{2.m}-2.C3-2.C1 \qquad (2.21)$$

$$\frac{\mu}{n^2}(u_{k-1}-2u_k+u_{k+1})+\frac{\mu}{n^2}(u_{j-1}-2u_j+u_{j+1})-\frac{g}{2l}(\rho(\eta_{i+1}-\eta_{i-1})+\eta(\rho_{i+1}-\rho_{i-1}))+2\rho v\omega\sin\phi = \rho u\frac{(u_{i+1}-u_{i-1})}{2l}+\rho v\frac{(u_{j-1}-u_{j+1})}{2m}$$

$$\frac{\mu}{n^2}(v_{k-1}-2v_k+v_{k+1})+\frac{\mu}{l^2}(v_{i+1}-2v_i+v_{i-1})-\frac{g}{2m}(\rho(\eta_{j-1}-\eta_{j+1})+\eta(\rho_{j-1}-\rho_{j+1}))-2\rho u\omega\sin\phi = \rho u\frac{(v_{i+1}-v_{i-1})}{2l}+\rho v\frac{(v_{j-1}-v_{j+1})}{2m}$$

$$-2C3.u-2C2.u-\rho u\frac{(u_{i+1}-u_{i-1})}{2l} = \rho v\frac{(u_{j-1}-u_{j+1})}{2m}-C3(u_{k-1}+u_{k+1})-C2(u_{j-1}+u_{j+1})+\frac{g}{2l}(\rho(\eta_{i+1}-\eta_{i-1})+\eta(\rho_{i+1}-\rho_{i-1}))-2\rho v\omega\sin\phi$$

$$-2C3.v-2C1.v-\rho v\frac{(v_{j-1}-v_{j+1})}{2m} = \rho u\frac{(v_{i+1}-v_{i-1})}{2l}-C3(v_{k-1}+v_{k+1})-C1(v_{i+1}+v_{i-1})+\frac{g}{2m}(\rho(\eta_{j-1}-\eta_{j+1})+\eta(\rho_{j-1}-\rho_{j+1}))+2\rho u\omega\sin\phi$$

$$u = \left(\rho v\frac{(u_{j-1}-u_{j+1})}{2m}-C3(u_{k-1}+u_{k+1})-C2(u_{j-1}+u_{j+1})+\frac{g}{2l}(\rho(\eta_{i+1}-\eta_{i-1})+\eta(\rho_{i+1}-\rho_{i-1}))-2\rho v\omega\sin\phi\right) / \left(\rho\frac{(u_{i-1}-u_{i+1})}{2l}-2C3-2C2\right)$$

$$v = \left(\rho u\frac{(v_{i+1}-v_{i-1})}{2l}-C3(v_{k-1}+v_{k+1})-C2(v_{i+1}+v_{i-1})+\frac{g}{2m}(\rho(\eta_{j-1}-\eta_{j+1})+\eta(\rho_{j-1}-\rho_{j+1}))+2\rho u\omega\sin\phi\right) / \left(\rho\frac{(v_{j+1}-v_{j-1})}{2m}-2C3-2C1\right)$$

รูปที่ 2.6 ขั้นตอนรายละเอียดการแก้สมการควบคุมการเคลื่อนที่ของน้ำ

สมการการขนส่ง (Diffusion and Avection Equation)

สมการการขนส่งเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการแพร่กระจายตัวของความเค็มในแบบจำลอง โดยปรกติการวัดอัตราของสารจากแหล่งสะสมหนึ่งไปยังอีกแหล่งหนึ่งและจากสถานะทางฟิสิกส์หรือเคมีหนึ่งไปอีกสถานะหนึ่ง เรียกว่า ฟลักซ์ (Flux) ซึ่งนิยามโดยทั่วไปเขียนได้ว่า

พลักซ์ = Proportionality Factor X Driving Force

โดยที่ Propartionality Factor จะขึ้นกับพลักซ์แต่ละชนิด ส่วนแรงขับ (Driving Force) เป็นกลไกที่ทำให้มีฟลักซ์ ซึ่งกลไกลของฟลักซ์ของความเค็มของแบบจำลองจะพิจารณาสองกลไก คือ การแอดเวคชัน และการฟุ้งกระจาย

1. การแอดเวคชัน (Advection)

เป็นการไหลการโยกย้ายหรือกล่าวโดยทั่วไปคือ เป็นการขยับที่ (Displacement) ของชิ้นส่วนหนึ่งของสารภายใต้อิทธิพลของแรงต่างๆ กับผู้สังเกต เช่น การไหลของน้ำและลม เป็นต้น

แอดเวดทีฟฟลักซ์ (Advective Flux) (Fa) ของการไหลของที่มีความหนาแน่น ด้วยความเร็ว U เป็นผลให้ฟลักซ์เท่ากับ

$$Fa = \rho U \qquad (2.22)$$

หรือถ้าเป็นฟลักซ์ของความเข้มข้น C ของสาร ก็จะได้ว่า

$$Fa = CU \qquad (2.23)$$

2. การฟุ้งกระจาย (Diffusion)

คือการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของสารหนึ่งที่อยู่ภายในอีกสารหนึ่งอย่างตามบุญกรรมที่ถูกเหนี่ยวนำโดยความร้อน หรือการเคลื่อนไหวอย่างตามบุญกรรมของชิ้นส่วนเล็กๆ ของตัวกลางที่ทำให้เกิดการแตกซ่านเซ็นและการอพยพย้ายถิ่น Proportionality Factor ของฟลักซ์ที่เกิดจากการฟุ้งกระจายมีชื่อว่า สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจาย (Diffusion Coefficient) โดยใน 1

มิติ จาก Fick's First Law of Diffusion Equation

$$Fd = -D \frac{dC}{dZ} \qquad (2.24)$$

เมื่อ Fd = ฟลักซ์ของการฟุ้งกระจาย (กก./ม.วินาที)

D = สัมประสิทธิ์การฟุ้งกระจาย (ม.^{2}/วินาที)

$\frac{dC}{dZ}$ = การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นต่อระยะทาง

3. สมการการขนส่งของความเค็ม

เมื่อสารละลายเกิดการฟุ้งกระจายในน้ำที่กำลังไหลอยู่ ฟลักซ์รวม Ft ที่ผ่านระนาบตั้งฉากกับการไหลจะเป็นผลรวมของฟลักซ์การฟุ้งกระจายและฟลักซ์ของการแอดเวคชัน คือ

$$Ft = Fd+Fa \qquad (2.25)$$

และจากสมการที่ 2.23 และ 2.24

$$Ft = -D \frac{dC}{dZ}+CU \qquad (2.26)$$

ซึ่งสมการนี้จะเป็นค่าคงที่ที่สภาวะคงที่ และจาก Fick's Second Law of Diffusion Equation กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงใดๆภายใต้ชั้นระหว่าง Z และ Z+dZ เป็นเหตุในการเปลี่ยนแปลงความเข้มเข้นในชั้นนั้นคือ

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{dFt}{dZ}$$

ภายใต้ระยะทางที่คงที่และเวลาคงที่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial Ft}{\partial z} \qquad (2.27)$$

จากสมการ 2.26

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial c}{\partial z}\right) - \frac{\partial (CU)}{\partial z} \qquad (2.28)$$

ในกรณีที่เป็น 3 มิติ การพิจารณาก็จะเป็นแบบเดียวกันและหากมีปฏิกริยาเคมีหรือขบวนการอื่นที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของสารละลายที่อยู่ในน้ำ ค่าอัตราดังกล่าวก็จะถูกใส่ไว้ในด้านขวาของสมการ ซึ่งสมการที่ได้จะเป็นสมการการขนส่งของสาร (Diffusion and Advection

Equation)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = Dx\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + Dy\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + Dz\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{\partial Cu}{\partial x} - \frac{\partial Cv}{\partial y} \pm R \qquad (2.29)$$

เมื่อ Dx, Dy, Dz = ค่าสัมประสิทธิ์ของการฟุ้งกระจายในแกน x, y, z (ม.^{2}/วินาที)

R = อัตราผลิตหรือย้ายออกของสาร

C = ความเข้มข้นของเกลือในน้ำ (กก./ม.^{3}วินาที)

และสภาวะที่คงที่ (Steady State) $\frac{\partial C}{\partial t}$ มีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของไฟไนท์คิฟเฟอเรนท์ ได้ว่า

$$Dx\left(\frac{C(i+1,j,k)-2.C(i,j,k)+C(i-1,j,k)}{l^2}\right)+Dy\left(\frac{C(i,j-1,k)-2.C(i,j,k)+C(i,j+1,k)}{m^2}\right)+Dz\left(\frac{C(i,j,k-1)-2.C(i,j,k)+C(i,j,k+1)}{n^2}\right)-\left(C(i,j,k).\frac{(u(i+1,j,k)-u(i-1,j,k))}{2.l}+u(i,j,k).\frac{(C(i+1,j,k)-C(i-1,j,k))}{2.l}\right)-\left(C(i,j,k).\frac{(v(i,j-1,k)-v(i,j+1,k))}{2.m}+v(i,j,k).\frac{(C(i,j-1,k)-C(i,j+1,k))}{2.m}\right) \pm R \qquad (2.30)$$

แก้สมการดังแสดงในรูปที่ 2.7 จะได้ว่า

$$C(i,j,k) = \left(Dx\frac{(C(i+1,j,k)+C(i-1,j,k))}{l^2}+Dy\frac{(C(i,j-1,k)+C(i,j+1,k))}{m^2}+Dz\frac{(C(i,j,k-1)+C(i,j,k+1))}{n^2}-\left(u(i,j,k).\frac{(C(i+1,j,k)-C(i-1,j,k))}{2.l}+v(i,j,k).\frac{(C(i,j-1,k)-C(i,j+1,k))}{2.m}\right) \pm R\right)\Big/\left(2\left(\frac{Dx}{l^2}+\frac{Dy}{m^2}+\frac{Dz}{n^2}\right)+\frac{(u(i+1,j,k)-u(i-1,j,k))}{2.l}+\frac{(v(i,j-1,k)-v(i,j+1,k))}{2.m}\right) \qquad (2.31)$$

สภาวะขอบเขต (Boundary Condition)

จากสมการที่ใช้ในแบบจำลองซึ่งได้แก่ สมการควบคุมการเคลื่อนที่ของน้ำ สมาการการขนส่งความเค็ม จะเห็นได้ว่าในการประมวลผลเพื่อหาค่าความเร็วของน้ำหรือค่าความเค็มของน้ำทะเล ต้องการข้อมูลจากกริดที่รู้ค่าทั้งหมดรอบตัวเองของแต่ละกริดนั้น แต่จะพบว่าในแบบจำลองนี้

$$\frac{Dx}{l^2}(C_{i+1}-2C_i+C_{i-1})+\frac{Dy}{m^2}(C_{j-1}-2C_j+C_{j+1})+\frac{Dz}{n^2}(C_{k-1}-2C_k+C_{k+1})-(C\frac{(u_{i+1}-u_{i-1})}{2l}+u\frac{(C_{i+1}-C_{i-1})}{2l})-(C\frac{(v_{j-1}-v_{j+1})}{2m}+v\frac{(C_{j-1}-C_{j+1})}{2m})\pm R = 0$$

$$-2C(\frac{Dx}{l^2}+\frac{Dy}{m^2}+\frac{Dz}{n^2})-C\frac{(u_{i+1}-u_{i-1})}{2l}-C\frac{(v_{j-1}-v_{j+1})}{2m} = \frac{-Dx}{l^2}(C_{i+1}+C_{i-1})-\frac{Dy}{m^2}(C_{j-1}+C_{j+1})-\frac{Dz}{n^2}(C_{k-1}+C_{k+1})+u\frac{(C_{i+1}-C_{i-1})}{2l}+v\frac{(C_{j-1}-C_{j+1})}{2m}\pm R$$

$$C = (\frac{Dx}{l^2}(C_{i+1}+C_{i-1})+\frac{Dy}{m^2}(C_{j-1}+C_{j+1})+\frac{Dz}{n^2}(C_{k-1}+C_{k+1})-(u\frac{(C_{i+1}-C_{i-1})}{2l}+v\frac{(C_{j-1}-C_{j+1})}{2m})\pm R)/(2(\frac{Dx}{l^2}+\frac{Dy}{m^2}+\frac{Dz}{n^2})+\frac{(u_{i+1}-u_{i-1})}{2l}+\frac{(v_{j-1}-v_{j+1})}{2m})$$

รูปที่ 2.7 ขั้นตอนรายละเอียดการแก้สมการการขนส่งความเค็ม

จะมีแนวชายฝั่ง พื้นท้องทะเล ผิวหน้าน้ำ แนวขอบเขตของพื้นที่ศึกษา เป็นตัวกำหนดขอบเขตของโปรแกรม ซึ่งในกรณีที่มีสิ่งขวางกั้นที่แน่นอน ได้แก่แนวชายฝั่งทะเล จะเรียกว่า ขอบเขตปิด (Close Boundary) แต่ในกรณีที่เป็นแนวเขตที่กำหนดขึ้นเอง ได้แก่ แนวขอบเขตบริเวณพื้นที่ศึกษา จะเรียกว่า ขอบเขตเปิด (Open Boundary) ซึ่งทั้งบริเวณที่เป็นขอบเขตปิดและเปิดนั้นจะไม่สามารถคำนวณค่าตัวแปรที่ต้องการได้จากสมการหลักโดยตรง จึงต้องมีวิธีการคำนวณหาค่าตัวแปรในแต่ละอย่างและแต่ละบริเวณที่แตกต่างกัน ซึ่งจะสามารถอธิบายตามสมการหลักได้ดังนี้

1. สมการการเคลื่อนที่ของน้ำ

สมการควบคุมการเคลื่อนที่ของน้ำคำนวณได้จากแรงลัพธ์ของแรงเฉือน แรงดัน แรงโคริโอลิส ซึ่งอิทธิพลของขอบเขตทั้งเปิดและปิดที่มีต่อแรงทั้งสามไม่เหมือนกัน

บริเวณผิวน้ำการใช้สมการควบคุมการเคลื่อนที่ของน้ำนั้นไม่สามารถทำได้ การคำนวณหาค่าความเร็วที่ผิวหน้าน้ำจะกระทำได้โดยคิดจากค่าแรงเฉือนที่เกิดจากลมโดย

$$u(x,y,1) = \frac{\tau_x . n + u(x,y,2)}{\mu} \qquad (2.32)$$

$$v(x,y,1) = \frac{\tau_y . n + v(x,y,2)}{\mu} \qquad (2.33)$$

เมื่อ τ_x, τ_y = แรงเฉือนตามแกน x, y (นิวตัน)

โดยกำหนด $\tau_x = 0.003354.\ UW^2$

$\tau_y = 0.003354.\ VW^2$

UW = ความเร็วลมตามแกน x

VW = ความเร็วลมตามแกน y

ถ้าในกรณีของความเร็วที่ผิวหน้าน้ำที่เกิดของที่บริเวณขอบของชายฝั่งที่เป็นขอบเขตปิดจะคำนวณ - ความเร็วกระแสน้ำเฉพาะในทิศที่เกิดความเร็วได้จริงคือ บริเวณชายฝั่งที่ขนานกับทิศตะวันออกตะวันตก จะคิดเฉพาะความเร็วตามแนวแกน x ส่วนทิศเหนือใต้ก็จะคิดเฉพาะความเร็วตามแนวแกน y ส่วนในกรณีที่เป็นหัวมุมที่ยื่นเข้ามาจะคิดความเร็วทั้งสองแกนแต่ถ้าเป็นหัวมุมที่หักเข้าไปในแผ่นดินจะกำหนดให้มีความเร็วกระแสน้ำเป็นศูนย์และถ้าเป็นขอบเขตเปิดก็จะทำการคำนวณความเร็วทั้งสองแกน

บริเวณพื้นท้องทะเลจะกำหนดให้ความเร็วของกระแสน้ำบริเวณพื้นท้องทะเล มีค่าน้อยมากหรือเท่ากับศูนย์ และเป็นที่น่าสังเกตคือ ขนาดของพื้นที่หน้าตัดของทะเลจะมีขนาดที่เล็กลงตามสภาพของความลึกของน้ำ

บริเวณช่วงกลางที่หมายถึงใต้ผิวหน้าน้ำลงมาแต่เหนือพื้นทะเล ซึ่งโดยทั่วไปสามารถคำนวณตามสมการควบคุมได้ แต่ยกเว้นบริเวณที่เป็นขอบเขตที่ปิด จะพบว่าสมการคำนวณหาค่าความแตกต่างของระดับน้ำทะเลนั้นไม่สามารถทำโดยตรงได้ แต่ด้วยวิธีเดียวกับที่ผิวน้ำ คือจะมีความเร็วเฉพาะในแกน ในแนวชายฝั่งที่ขนานกับทิศตะวันออกตะวันตกและความเร็วในแนวแกน ในทิศขนานกับแนวเหนือใต้ บริเวณที่เป็นหัวมุมหรือที่ขอบเขตเปิดก็ใช้วิธีคิดแบบเดียวกับที่ผิวหน้าน้ำ

ในแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของการไหลเวียนของน้ำที่เกิดจากลมในอ่าวไทยนี้มีลักษณะเฉพาะที่คำนึงถึงปริมาณการไหลออกของน้ำจากแม่น้ำสายต่างๆ ที่จะมีผลต่อการไหลเวียน ผู้วิจัยจึงจำลองลักษณะการไหลออกของน้ำโดยการเพิ่มระดับของระดับน้ำทะเลที่กริดที่กำหนดให้เป็นบริเวณปากแม่น้ำ ซึ่งคำนวณจากปริมาณของน้ำที่ไหลออก ซึ่งได้ทำการรักษาสมดุลของปริมาตรของน้ำในแบบจำลองให้คงที่เคยคำนวณให้ปริมาณของน้ำที่ไหลเข้าให้เท่ากับน้ำที่ไหลออกจากแบบจำลองทางด้านบริเวณขอบเขตเปิดของอ่าว

2. <u>สมการการขนส่งความเค็ม</u>

ปัญหาที่เกิดขึ้นในการคำนวณในสมการขนส่งความเค็มของน้ำทะเล ก็เช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นกับสมการควบคุมการเคลื่อนที่ของน้ำ แต่การกำหนดสภาวะขอบเขตที่ปิดและเปิดนั้นจะแตกต่างกัน

บริเวณผิวหน้าน้ำ จะเป็นบริเวณขอบเขตหนึ่งที่ไม่สามารถคำนวณค่าความเค็มได้โดยตรง เพราะจะไม่มีค่าความเค็มที่อยู่ในกริดที่สูงขึ้นไป จึงกำหนดให้ว่ามีค่าของความเค็มที่อยู่ในกริดที่อยู่สูงขึ้นไปนั้นมีค่าใกล้เคียงกับกริดที่กำหนดคำนวณอยู่ด้วยวิธีเดียวกันนี้บริเวณที่เป็นชายฝั่งขอบเขตปิดและในบริเวณขอบเขตเปิดที่ขนานกับชายฝั่งทั้งสองทิศ ในกรณีที่ขาดข้อมูลจากกริดที่ใกล้เคียงก็ให้กำหนดว่ามีค่าใกล้กับกริดที่กำลังคำนวณอยู่ แต่หากสภาวะขอบเขตในบริเวณใดขาดข้อมูลมากกว่าสองจะไม่ทำการคำนวณในกริดนั้น

ในบริเวณของระดับที่อยู่ใต้ผิวน้ำลงมาจนถึงบริเวณพื้นท้องทะเลจะใช้วิธีการคำนวณสภาวะการณ์ที่ขอบเขตเช่นเดียวกันกับที่ผิวหน้าน้ำ

ในกรณีที่เป็นขอบเขตที่เป็นปากแม่น้ำ จะคำนวณสมการการขนส่งของความเค็มโดยเพิ่มอัตราการลดลงของความเค็มเนื่องจากปริมาณน้ำที่ไหลออกลงในสมการด้วย และกำหนดให้ความเค็มที่จุดปล่อยมีค่าคงที่ตลอดการคำนวณ