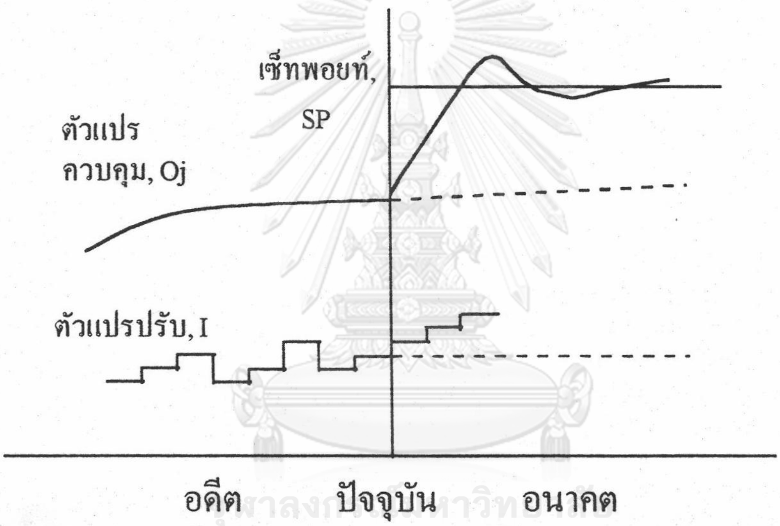
บทที่ 3
ทฤษฎี

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะเป็นการอธิบายหลักการของดีเอ็มซี ที่จะนำมาใช้ในการสร้างตัวควบคุมสำหรับการทดสอบในงานวิจัย โดยจะกล่าวตั้งแต่พื้นฐานของการสร้างโมเดล ตลอดจนถึงแนวคิดในการคำนวณและการนำมาประยุกต์ใช้

3.1 แนวคิดของการควบคุมแบบโมเดลทำนาย

การควบคุมแบบโมเดลทำนายเป็นอัลกอริธึมการควบคุมโดยคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาการควบคุมที่ซับซ้อนโดยอาศัยการทำนายค่าตัวแปรเอาท์พุทในอนาคตจากพฤติกรรมในอดีต และลักษณะไดนามิกของระบบซึ่งเป็นหลักการของมูฟวิ่งฮอไรซัน แสดงไว้ในรูปที่ 3.1 นำมาใช้ในการคำนวณหาค่าการเปลี่ยนแปลงที่เหมาะสมของตัวแปรปรับ ณ ช่วงเวลาปัจจุบันรวมถึงช่วงเวลาในอนาคต และเคลื่อนที่ไปข้างหน้าเรื่อยๆ หลังจากการนำค่าการปรับตัวแปรปรับค่าแรกไปอิมพลีเม็นต์กับระบบแล้ว โดยอัลกอริธึมของการควบคุมแบบโมเดลทำนายที่จะนำมาศึกษาในวิทยานิพนธ์นี้ คือการควบคุมแบบไดนามิกแมทริกซ์

จากการนิยามความหมายของคำว่า ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (Objective Function) สำหรับการควบคุมแบบดีเอ็มซี ตัวแปรที่ใช้ในการออพติไมซ์ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ ค่าความผิดพลาดระหว่างค่าทำนาย (Predicted Value) และเซ็ทพอยท์ของตัวแปรควบคุม จากนั้นดีเอ็มซีก็จะถูกจัดรูปให้เป็นเครื่องควบคุมที่ให้ค่าความผิดพลาดน้อยที่สุดโดยการคำนวณเซตของการเปลี่ยนแปลงในอนาคตของตัวแปรปรับ ซึ่งทำให้ได้ค่าผิดพลาดของตัวแปรเอาท์พุทยกกำลังสองตลอดช่วงเวลาในการทำนายมีค่าน้อยที่สุด



รูปที่ 3.1 แสดงลักษณะของมูฟวิ่งฮอไรซัน

วิธีการของดีเอ็มซีสามารถนำไปใช้กับตัวแปรแบบป้อนหน้า (Feedforward Variables) จำนวนกี่ตัวแปรก็ได้สำหรับตัวควบคุมแบบเอสไอเอสโอ หรือตัวควบคุมแบบเอ็มไอเอ็มโอ ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับปัญหาการควบคุมแบบเอ็มไอเอ็มโอยังสามารถนำลักษณะไดนามิกอินเตอร์แอกชัน (Dynamic Interactions) ระหว่างตัวแปรเข้ามาใช้ในการคำนวณได้ด้วย จุดเด่น

ของโครงสร้างแบบดีเอ็มซีประการหนึ่งคือ รูปแบบที่ไม่ซับซ้อนและยุ่งยากเมื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาของการควบคุมแบบหลายตัวแปร (Multivariable Control)

สิ่งที่แตกต่างจากเทคนิคการควบคุมแบบพีไอดี ก็คือ ไม่จำเป็นต้องมีการวิเคราะห์ความเสถียรของเครื่องควบคุม เนื่องจากปัจจัยเพียงข้อเดียวในการทำให้เกิดความเสถียรก็คือ การทำให้ลักษณะทางไดนามิกของระบบเข้าสู่สถานะคงตัวภายหลังจากการปรับตัวแปรปรับในอนาคต ดังนั้น ถ้ามีปัญหาเรื่องความเสถียรของระบบเกิดขึ้นภายหลังจากมีการนำดีเอ็มซีเข้าใช้งาน แสดงว่ามีความผิดพลาดเกิดขึ้นกับโมเดลของลักษณะทางไดนามิกของกระบวนการ แต่อย่างไรก็ตาม ตัวควบคุมดีเอ็มซีจะสามารถยอมให้มีความผิดพลาดของโมเดลได้ระดับหนึ่ง โดยสามารถปรับแต่งการควบคุมได้ด้วยตัวแปรของดีเอ็มซี ได้แก่ คาบการเก็บตัวอย่าง (Time Interval) จำนวนช่วงเวลาในการปรับตัวแปรปรับในอนาคต (Control Horizon) จำนวนช่วงเวลาที่ทำนายค่าตัวแปรเอาท์พุท (Prediction Horizon) และแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting Factor)

ความสำเร็จในหลักการของดีเอ็มซี ยืนยันได้จากผลการนำเทคนิคนี้ไปประยุกต์ใช้ในการควบคุมอุณหภูมิขาออกของเตาเผาให้ความร้อนขนาดใหญ่ (Cutler, 1979) ซึ่งมีอุณหภูมิขาเข้าเป็นตัวแปรรบกวน คุณภาพของการควบคุมแบบดีเอ็มซีถูกนำมาเปรียบเทียบกับการควบคุมแบบป้อนกลับที่เป็นสัญญาณอะนาล็อกแบบดั้งเดิม และกับการควบคุมแบบป้อนกลับ/ป้อนล่วงหน้า (Feedforward/Feedback Control) ที่เป็นสัญญาณดิจิตอลคอมพิวเตอร์ โดยศึกษาผลการตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงค่าเซ็ทพอยท์และอุณหภูมิขาเข้าหรือตัวแปรรบกวน

3.2 โมเดลของตัวควบคุมดีเอ็มซี

3.2.1 ระบบดีสครีตไทม์

เนื่องจากการนำดีเอ็มซีไปประยุกต์ใช้กับกระบวนการผลิตต่างๆ จะต้องอิมพลีเม็นต์ด้วยระบบคอมพิวเตอร์ ดังนั้น การศึกษาระบบควบคุมจึงต้องใช้โมเดลแบบดีสครีตไทม์ ซึ่งหมายถึงโมเดลที่มีอินพุทและเอาท์พุทเป็นซีเคว็นซ์ของข้อมูล หรือสัญญาณดีสครีต โดยสามารถแสดงโมเดลในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$X = \{X[k]\} \; , \; -\infty < k < \infty \qquad (3\text{-}1)$$

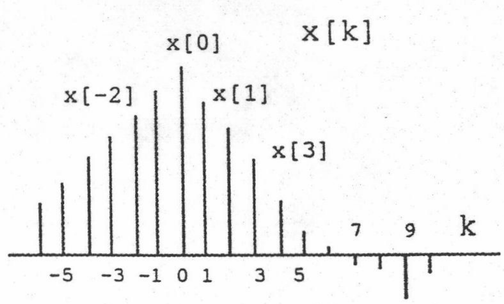
เมื่อ X : สัญญาณ k : เลขจำนวนเต็ม

โดยกระบวนการผลิตสัญญาณนี้จะได้มาจากการเก็บตัวอย่างจากสัญญาณอะนาล็อก ซึ่งก็คือค่าที่วัดจากกระบวนการผลิต โดยมีคาบการเก็บตัวอย่างหรือ T ดังนั้นอาจเขียนได้ว่า

$$X[k] = X_a(kT) \qquad (3\text{-}2)$$

เมื่อ X_a : สัญญาณอะนาล็อก

และจะวาดรูปสัญญาณดีสครีตออกมาได้ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงตัวอย่างสัญญาณดีสครีตไทม์

ส่วนนิยามเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างซีเควิ้นซ์ของสัญญาณอินพุท : X[k] และซีเควิ้นซ์ของสัญญาณ เอาท์พุท : Y[k] สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$Y[k] = F\{X[k]\} \tag{3-3}$$

3.2.2 โมเดลเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Linear Time Invariant Models)

โมเดลที่นำมาใช้กับการควบคุมแบบดีเอ็มซี คือโมเดลเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา อธิบายได้ด้วยคุณสมบัติการซ้อนทับ (Superposition) 2 ข้อ ซึ่งเป็นคุณสมบัติของระบบเชิงเส้น คือ

(1) คุณสมบัติในการรวมกัน (additivity property)

$$F\{X_1[k] + X_2[k]\} = F\{X_1[k]\} + F\{X_2[k]\} = Y_1[k] + Y_2[k] \tag{3-4}$$

(2) คุณสมบัติทางด้านความสม่ำเสมอหรือการทวีค่า (homogeneity or scaling property)

$$F\{aX[k]\} = aF\{X[k]\} = aY[k] \tag{3-5}$$

สำหรับระบบที่มีหลายอินพุท ก็จะได้ว่า

$$X[k] = \sum_{n} a_n X_n [k] \tag{3-6}$$

$$Yk] = \sum_{n} a_n Y_n [k] \tag{3-7}$$

โดย $Y_n[k]$ คือ สัญญาณตอบสนองต่ออินพุท $X_n[k]$

ส่วนคุณสมบัติที่ไม่เปลี่ยนตามเวลา ก็คือ การตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุทลักษณะหนึ่ง จะเหมือนกันไม่ว่าจะป้อนสัญญาณนั้นเข้าไปที่เวลาใดๆ

คุณสมบัติทั้งสองประการนี้ ทำให้การสร้างโมเดลเพื่อการวิเคราะห์ และทำนายระบบสามารถทำได้ง่าย ถึงแม้ว่ากระบวนการผลิตจะไม่เป็นระบบเชิงเส้นและเปลี่ยนไปตามเวลาก็ตาม เนื่องจากการสร้างโมเดลของระบบ โดยใช้เทคนิคไม่เป็นเชิงเส้น และเปลี่ยนตามเวลายังอยู่ระหว่างการพัฒนาทางทฤษฎี อีกทั้งยุ่งยากต่อการนำมาประยุกต์ใช้งาน

3.2.3 โมเดลการตอบสนองต่อสเต็พ (Step Response Model)

ลักษณะไดนามิกของกระบวนการสามารถจะแสดงหรือประมาณค่าได้โดยระบบดีสครีตไทม์ และโมเดลเชิงเส้นไม่ขึ้นกับเวลาระหว่างตัวแปรเอาท์พุทและตัวแปรอินพุท พิจารณาเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงแบบสเต็พของตัวแปรอินพุท สัญญาณการตอบสนองต่อสเต็พของตัวแปรเอาท์พุทใดๆ สามารถจะเขียนเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 3.3 โดยสัญญาณการตอบสนองนี้จะแปรผันตามขนาดของการปรับตัวแปรปรับแต่ละสเต็พ ดังนั้นจะแสดงได้ด้วยเซตหรือเวกเตอร์ของเลขจำนวนที่แต่ละช่วงเวลา โดยสมาชิกแต่ละค่าในเวกเตอร์เป็นแฟกเตอร์ของการแปรผันของความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงสะสมของตัวแปรเอาท์พุทกับการเปลี่ยนแปลงแบบสเต็พของตัวแปรอินพุท

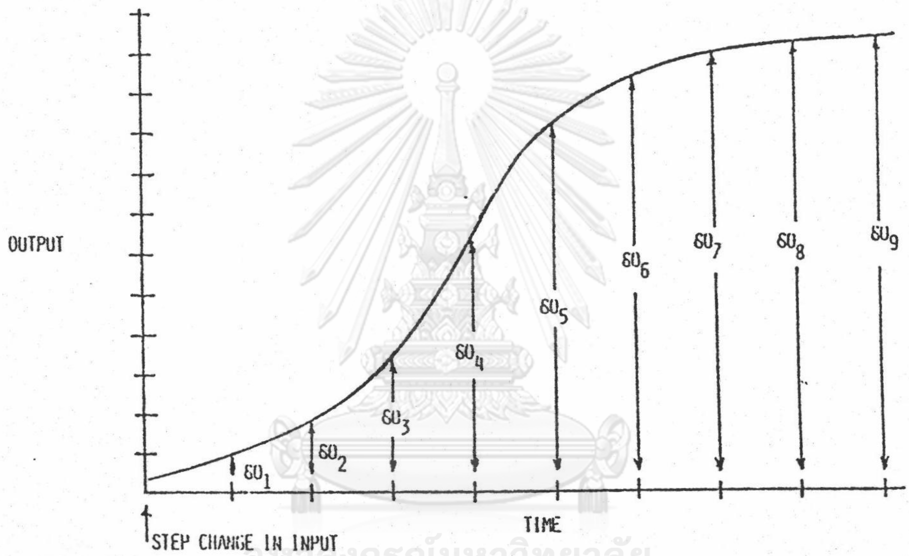
$$a_i = \frac{\delta O_i}{\Delta I} \tag{3-8}$$

เมื่อ a_i คือ แฟกเตอร์ของการแปรผันระหว่างตัวแปรอินพุทและตัวแปรเอาท์พุท หรือค่าสัมประสิทธิ์ทรานส์เฟอร์เชิงตัวเลขที่ช่วงเวลา i

δO_i คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงสะสมของตัวแปรเอาท์พุทที่สิ้นสุดของช่วงเวลา i

Δ I คือ ค่าการเปลี่ยนแปลงแบบสเต็พของตัวแปรอินพุทที่เวลาเริ่มต้นเท่ากับศูนย์

จะสังเกตได้ว่า เครื่องหมาย δ ในกรณีตัวแปรเอาท์พุท และ Δ ในกรณีตัวแปรอินพุท แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงทั้งคู่ แต่ δ จะหมายถึงการเปลี่ยนแปลงสะสมจากเวลาเริ่มต้นที่ศูนย์ถึงสิ้นสุดเวลา i ในขณะที่ Δ หมายถึง การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นทันทีทันใดในช่วงเวลาเริ่มต้นเท่านั้น



รูปที่ 3.3 แสดงสัญญาณตอบสนองต่อสเต็พของอินพุทต่อเอาท์พุท

สมการ (3-8) สามารถเขียนในรูปเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\delta \underline{O} = \underline{a}\Delta I \qquad (3\text{-}9)$$

ซึ่งจะใช้ได้เฉพาะเวลาในอนาคตของตัวแปรเอาท์พุท ถ้า Δ I เป็นการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรอินพุทแบบสเต็พที่ช่วงเวลาศูนย์

เมื่อเวลาผ่านไปหลังจากช่วงเวลา S ค่าสัญญาณตอบสนองของตัวแปรเอาท์พุทจะเข้าสู่สถานะคงตัว หรือมีอัตราการเปลี่ยนแปลงคงที่ ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์โดยประมาณที่สอดคล้องกับสถานะนี้คือ

$$a_S = a_{S+1} \quad \text{หรือ} \quad (a_S - a_{S-1}) = (a_{S+1} - a_S)$$

จำนวนของช่วงเวลา S หมายถึง ช่วงเวลาที่จะทำการทำนายค่าไดนามิกของกระบวนการ โดย a ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของค่าแฟกเตอร์ของการแปรผัน อาจหมายถึงทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันเชิงตัวเลขของระบบ โดยสำหรับระบบเชิงเส้นซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์คงที่ ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นกับเวลา

สมการ (3-9) ซึ่งแสดงในรูปของกราฟ การเริ่มต้นของช่วงเวลาแรกถูกกำหนดไว้ที่เวลาเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงตัวแปรอินพุทเกิดขึ้น การเปลี่ยนแปลงสะสมของตัวแปรเอาท์พุทจะวัดค่าที่สิ้นสุดช่วงเวลาแรกและที่สิ้นสุดของแต่ละช่วงเวลา ถ้าขนาดของการสเต็พตัวแปรอินพุทในรูปที่ 3.3 มีค่าเท่ากับหนึ่งหน่วย ดังนั้นค่าการเปลี่ยนแปลงสะสมของตัวแปรเอาท์พุท δO_i ในสมการ (3-9) จะมีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ทรานเฟอร์เชิงตัวเลข a_i ดังจะสังเกตได้จากรูปที่ 3.3 เวกเตอร์ a_i สามารถหาได้โดยตรงจากข้อมูลของสัญญาณการตอบสนองต่อสเต็พของตัวแปรเอาท์พุท ผลที่จะได้รับคือ การเปลี่ยนแปลงค่าสะสมของตัวแปรเอาท์พุทของระบบที่เวลาซึ่งระบุไว้จะแปรผันตรงกับการเปลี่ยนแปลงค่าเริ่มต้นของตัวแปรอินพุท

สมการ (3-9) สามารถจะจัดรูปใหม่เพื่อจะใช้ในกรณีตัวแปรอินพุทหลายตัวแปรได้ ดังนี้

$$\delta O_i = (a_i)_1 \Delta I_1 + (a_i)_2 \Delta I_2 + (a_i)_3 \Delta I_3 + \ldots \quad (3\text{-}10)$$

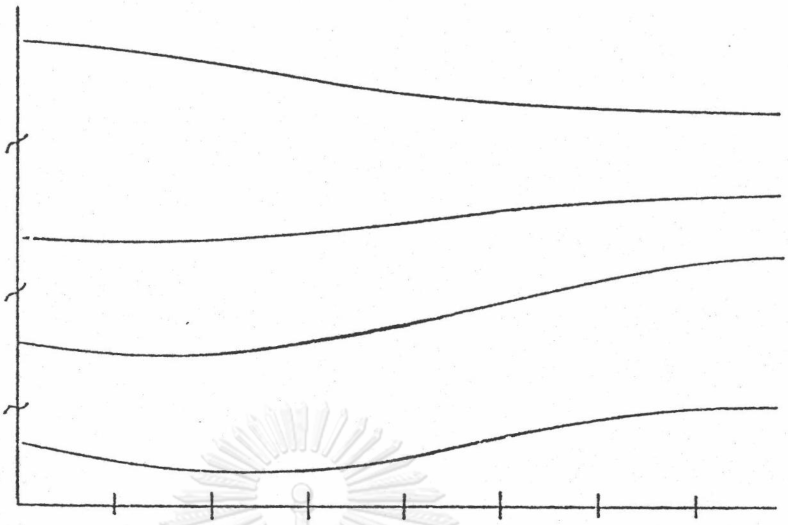
เมื่อตัวเลขกำกับท้ายของตัวแปรอินพุท I หมายถึงตัวแปรอินพุทต่างๆ และตัวเลขกำกับท้ายของวงเล็บ a_i หมายถึง แฟกเตอร์ของการแปรผันสำหรับตัวแปรอินพุทแต่ละตัว

คุณสมบัติการซ้อนทับสำหรับระบบเชิงเส้นทำให้สามารถจะเพิ่มสัญญาณตอบสนองของตัวแปรเอาท์พุทสำหรับตัวแปรอินพุทเข้าในรูปสมการ (3-10) ได้ โดยรูป (3.4) เป็นกราฟที่แสดงหลักการของการซ้อนทับสำหรับตัวแปรอินพุท 3 ตัวแปร กราฟเส้นล่างสุดในรูปเป็นผลรวมของกราฟ 3 เส้นบน ซึ่งเป็นสัญญาณตอบสนองของตัวแปรเอาท์พุทที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอินพุทแต่ละตัว

สมการ (3-10) จะแสดงผลรวมของการเปลี่ยนแปลงในกราฟ 3 เส้นบนที่แต่ละช่วงเวลาซึ่งสามารถทำการทำนายสัญญาณตอบสนองของตัวแปรเอาท์พุทที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้โดยการคำนวณ หลักการของเวกเตอร์ในการทำนายค่าของตัวแปรเอาท์พุท นำไปสู่การพัฒนาอัลกอริธึมของการควบคุมแบบดีเอ็มซี

เพื่อที่จะจัดรูปแบบของเวกเตอร์ของค่าทำนาย พิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอินพุทสำหรับกรณีที่มีตัวแปรอินพุทเพียงหนึ่งตัวแปร ที่ช่วงเวลาศูนย์สัญญาณตอบสนองของตัวแปรเอาท์พุท O_0 เป็นค่าที่เกิดขึ้นตามสมการต่อไปนี้

$$O_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{s} a_i \, \Delta I_{(-i)} \quad (3\text{-}11)$$



รูปที่ 3.4 แสดงคุณสมบัติการซ้อนทับของระบบเชิงเส้น

เมื่อ S ครอบคลุมเวลาที่จะทำให้สัญญาณการตอบสนองแบบสเต็พของตัวแปรเอาท์พุทต่อตัวแปรอินพุท $\Delta I_{(-s)}$ เข้าสู่สถานะคงตัวได้ โดยสังเกตว่าดัชนีของ ΔI จะย้อนหลังไป ในขณะที่ดัชนีของค่าสัมประสิทธิ์ทรานส์เฟอร์เชิงตัวเลขจะล่วงหน้าเวลาไป สัญญาณตอบสนองของค่าทำนายที่ช่วงเวลา j จากการเปลี่ยนแปลงก่อนหน้านั้นทั้งหมดจะเขียนได้ว่า

$$O_j \quad = \quad a_o + \sum_{i=1}^{S} a_{(i+j)} \Delta I_{(-i)} \qquad (3\text{-}12)$$

เมื่อ $a_{(S+j)} = a_S$ และค่าสูงสุดของ j คือ S เนื่องจาก O_S จะเป็นค่าตัวแปรเอาท์พุทที่สถานะคงตัวสำหรับ $\Delta I_{(-1)}$ และ $O_S = O_{(S+1)}$ รวมสมการ(3-11) และ (3-12) เข้าด้วยกันเพื่อจะกำจัดค่าออฟเซ็ต a_0 จะได้สมการของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุทในรูปของตัวแปรเอาท์พุทที่

วัดค่าได้ที่ช่วงเวลาเป็นศูนย์ คือ

$$O_j = O_0 + \sum_{i=1}^{S} ([a_{(j+i)} - a_i] \, \Delta I_{(-i)}) \quad (3\text{-}13)$$

โดย $a_{(j+i)} = a_S$ เมื่อ $j+i > S$

สมการที่ (3-13) แสดงให้เห็นว่าจากข้อมูลของค่าสัมประสิทธิ์ทรานส์เฟอร์เชิงตัวเลข และค่าการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นในอดีต สำหรับเวลาที่ต้องรอเพื่อให้ระบบเข้าสู่สถานะคงตัว สามารถจะนำไปใช้ในการทำนายของระบบในอนาคตสัมพัทธ์กับช่วงเวลาขณะปัจจุบันได้

3.2.4 เทคนิคกำลังสองน้อยที่สุดและฟังก์ชันวัตถุประสงค์

(Least Square Method and Objective Function)

จากหลักการของดีเอ็มซี ต้องการหาค่าการเปลี่ยนแปลงที่เหมาะสมที่สุดของตัวแปรปรับที่จะทำให้ค่าความผิดพลาดของตัวแปรควบคุมมีค่าน้อยที่สุด วิธีการกำลังสองน้อยที่สุดคือเทคนิคในการหาค่าตัวแปรปรับของสมการที่ดีที่สุดสำหรับกรณีที่มีการทำนายค่าของตัวแปร X ในอนาคต NP สมการประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า NC ค่า และตัวแปรปรับ NC ค่า ยกตัวอย่างเช่น

$$\overline{X_1} = \Delta I_1 a_{11} + \Delta I_2 a_{12} \quad (3\text{-}14)$$

$$\overline{X_2} = \Delta I_1 a_{21} + \Delta I_2 a_{22}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\overline{X_i} = \Delta I_1 a_{i1} + \Delta I_2 a_{i2}$$

ต้องการหาค่าตัวแปรปรับ ΔI_1 และ ΔI_2 ที่ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ; J คือค่าผลรวมของกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าที่วัดได้จริง X_i (Actual Data) และค่าทำนายของตัวแปร X_i มีค่าน้อยสุด

$$J = \sum_{i=1}^{NP} (X_i - \overline{X_i})^2 \qquad (3\text{-}15)$$

แทนค่า $\overline{X_i}$ ในสมการของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ จะได้

$$J = \sum_{i=1}^{NP} (X_i - (\Delta I_1 \ a_{i1} + \Delta I_2 \ a_{i2}))^2 \qquad (3\text{-}16)$$

หาค่าอนุพันธ์แบบแยกส่วน (Partial Derivative) ของ J เทียบกับ ΔI_1 และ ΔI_2 และกำหนดให้เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \Delta I_1} &= 2\sum_{i=1}^{NP}(X_i - \Delta I_1 a_{i1} - \Delta I_2 a_{i2})(-a_{i1}) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \Delta I_2} &= 2\sum_{i=1}^{NP}(X_i - \Delta I_1 a_{i1} - \Delta I_2 a_{i2})(-a_{i2}) = 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}17)$$

จัดรูปสมการ

$$\begin{aligned} \Delta I_1 \sum_{i=1}^{NP}(a_{i1})^2 + \Delta I_2 \sum_{I=1}^{NP}(a_{i1} a_{i2}) &= \sum_{i=1}^{NP}(X_i a_{i1}) \\ \Delta I_1 \sum_{i=1}^{NP}(a_{i1} a_{i2}) + \Delta I_2 \sum_{i=1}^{NP}(a_{i2})^2 &= \sum_{i=1}^{NP}(X_i a_{i2}) \end{aligned} \qquad (3\text{-}18)$$

สามารถจัดสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปของแมทริกซ์ จะได้

$$A^T A(\Delta I) = A^T X \qquad (3\text{-}19)$$

โดย $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{NP,1} & a_{NP,2} \end{bmatrix}$

$$\Delta I = \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \vdots \\ \overline{X}_{NP} \end{bmatrix}$$

สามารถหาค่าตัวแปรปรับ ΔI ได้โดยอาศัยคณิตศาสตร์ของแมทริกซ์

$$\Delta I = [A^T A]^{-1} A^T X \tag{3-20}$$

และสำหรับกรณีของตัวแปรปรับ NC ค่าจะได้

$$\Delta I \qquad \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \vdots \\ \Delta I_{NC} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,NC} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1,NC} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{NP,1} & a_{NP,2} & \cdots & a_{NP,NC} \end{bmatrix}$$

ถ้าต้องการรวมเทอมในการควบคุมการปรับขนาดของตัวแปรปรับ ΔI เข้าในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ด้วย จะได้

$$J = \sum_{i=1}^{NP} (X_i - X_i)^2 + w^2 \sum_{i=1}^{NC} (\Delta I_i)^2 \tag{3-21}$$

โดย w คือค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก

ด้วยเทคนิคการหาค่าอนุพันธ์แบบแยกส่วนของ J เทียบกับตัวแปรปรับ ΔI_i จะได้

$$[A^T A + w^2 I]\,\Delta I = A^T X \qquad (3\text{-}22)$$

และเช่นเดียวกัน สามารถหาค่าการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรปรับ ΔI ได้จาก

$$\Delta I = [A^T A + w^2 I]^{-1} A^T X \qquad (3\text{-}23)$$

สำหรับกรณีของดีเอ็มซีนั้น ตัวแปรที่ใช้ในการออพติไมซ์ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือค่าความผิดพลาดระหว่างค่าทำนายและเซ็ทพอยท์ของตัวแปรควบคุม ดังนั้น

$$J = \sum_{i=1}^{NP} [X_{sp} - \bar{X}_i]^2 + w^2 \sum_{j=1}^{NC} [\Delta I_j]^2 \qquad (3\text{-}24)$$

และ

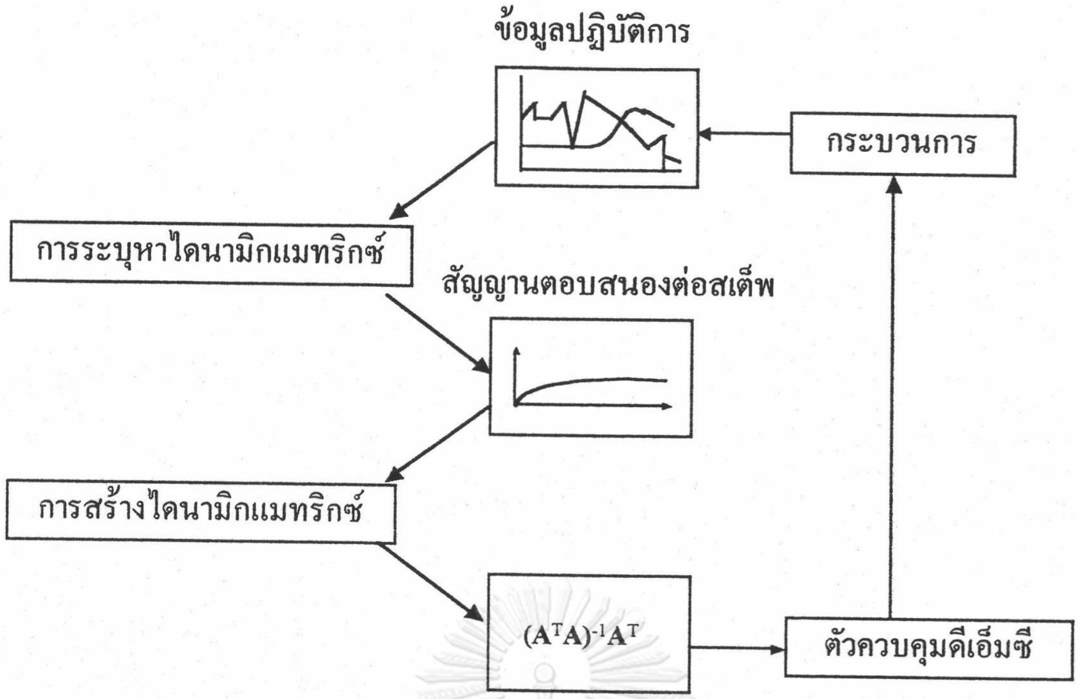
$$\Delta \underline{I} = [A^T A + w^2 I]^{-1} A^T \underline{e} \qquad (3\text{-}25)$$

เมื่อ

$\underline{e}$ คือ เวกเตอร์ของค่าความผิดพลาด

3.3 การแก้ปัญหาการควบคุมของระบบเอสไอเอสโอด้วยดีเอ็มซี

เนื่องจากการดำเนินการของแมทริกซ์ $(A^T A)^{-1}\ A^T$ ให้ผลเป็นแมทริกซ์ที่มีค่าคงที่ มีเพียงด้านซ้ายมือของสมการ (3-25) และเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาดเท่านั้นที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา แมทริกซ์ของค่าคงที่สามารถคำนวณได้แบบออฟไลน์ ซึ่งจะลดขั้นตอนการคำนวณแบบเรียลไทม์ลง ในการคูณระหว่างแมทริกซ์คงที่กับเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาด



รูปที่ 3.5 แสดงอัลกอริธึมในการสร้างตัวควบคุมดีเอ็มซี

สำหรับปัญหาการควบคุมแบบเอสไอเอสโอจะมีเพียงแถวแรกของแมทริกซ์คงที่เท่านั้นที่ใช้งาน เนื่องจากจะมีเพียงค่าการปรับตัวแปรปรับค่าแรกสุดเท่านั้นที่จะต้องคำนวณออกมา รูปที่ 3.5 จะแสดงอัลกอริธึมพื้นฐานของการสร้างตัวควบคุมดีเอ็มซี ซึ่งมีวิธีการอิมพลีเม็นต์การคำนวณโปรแกรมควบคุม อธิบายได้ดังนี้

ก. การจะเริ่มต้นของขั้นตอนการคำนวณหาเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุทค่าปัจจุบันของตัวแปรเอาท์พุทจะถูกเก็บค่าไว้เป็นสมาชิกในเวกเตอร์ของค่าทำนาย เช่นกันค่าปัจจุบันของตัวแปรอินพุทก็จะถูกเก็บค่าไว้เป็นข้อมูลไว้สำหรับใช้ในช่วงเวลาถัดไป

ข. เวลาจะผ่านไปตามช่วงเวลาที่ใช้ในการควบคุม สมการ (3-10) จะใช้ในการหาเวกเตอร์ของค่าทำนายของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเอาท์พุท ซึ่งขึ้นกับการเปลี่ยนแปลง

ของตัวแปรอินพุทในช่วงเวลาการควบคุมที่ผ่านมา

ค. เวกเตอร์ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเอาท์พุทจะนำมารวมเข้าในเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรออก

ง. สมาชิกในเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุทจะถูกขยับไปข้างหน้าหนึ่งช่วงเวลา ยกเว้น สมาชิกตัวสุดท้ายในเวกเตอร์ ถ้าที่สถานะคงตัวของระบบมีค่าตัวแปรเอาท์พุทคงที่ แล้วสมาชิกตัวสุดท้ายของเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุทจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ถ้าที่สถานะคงตัวค่าตัวแปรเอาท์พุทมีอัตราการเปลี่ยนแปลงคงที่แล้วสมาชิกตัวสุดท้ายเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุท สามารถคำนวณได้จากสมการ

$$O_S = O_{S-1} + (O_{S-1} - O_{S-2}) \tag{3-26}$$

เมื่อ O คือ ตัวแปรเอาท์พุท โดยมีเครื่องหมายกำกับท้ายแสดงช่วงเวลา

S คือ จำนวนสมาชิกในเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุท

จ. ค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุทสำหรับช่วงเวลาปัจจุบัน จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าตัวแปรเอาท์พุทที่วัดได้ ถ้ามีค่าแตกต่างก็จะถูกนำไปบวกกับสมาชิกทุกตัวในเวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุท เพื่อจะทำให้ค่าทำนายสอดคล้องกับค่าที่วัดได้ โดยกลไกแบบป้อนกลับเพื่อจะแก้ไขค่าผิดพลาดของข้อมูล สำหรับกรณีที่มีผลจากตัวแปรรบกวนที่วัดค่าไม่ได้ และกรณีที่เป็นลักษณะไม่เป็นเชิงเส้นที่อาจเกิดขึ้นได้

ค่าปัจจุบันของตัวแปรอินพุทจะถูกเก็บข้อมูลไว้ เมื่อเวลาผ่านไปถึงช่วงเวลาต่อไปในการควบคุม และการคำนวณค่าเวกเตอร์ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเอาท์พุท โดย

สมการ (3-10) ก็จะเริ่มซ้ำกับอัลกอริธึมเดิมอีกรอบ จนกระทั่งหลังจากเวลาเท่ากับช่วงเวลาที่ทำนาย ค่าตัวแปรเอาท์พุทข้อมูลทั้งหมดที่เกิดขึ้นกับระบบก่อนหน้านั้นจะถูกกำจัดออกไป ตัวแปร อินพุทในสมการ (3-10) สามารถจะควบคุมหรือไม่ควบคุมก็ได้ ซึ่งจะทำให้เวกเตอร์ของค่าทำนายของตัวแปรเอาท์พุทเป็นค่าประมาณที่ดีที่สุดที่เป็นไปได้จากข้อมูลที่มีอยู่

การปรับตัวแปรอินพุทลำดับต่อไปที่คำนวณหลังจากผลของการปรับครั้งแรกจะถูกรวมเข้าไปในเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาด $\underline{e}$ และมีวิธีการคำนวณเหมือนกับในขั้นตอนแรกสำหรับการประยุกต์ในเชิงปฏิบัติ อย่างไรก็ตาม ค่าจำนวนช่วงเวลาในการปรับตัวแปรปรับ C จะเป็นค่าคงที่ ซึ่งจะส่งผลให้ค่าการปรับตัวแปรปรับต่อเนื่องกันตามช่วงเวลาในการปรับ เช่นเดียวกับที่ค่าช่วงเวลาในการทำนายไดนามิกของกระบวนการจะค่อยๆ ขยับไปทีละขั้น การเลือกค่าจำนวนช่วงเวลาในการปรับตัวแปรปรับสำหรับลักษณะไดนามิกของกระบวนการที่มีอยู่จึงมีความสำคัญมาก

ความเสถียรของดีเอ็มซีไม่จำเป็นต้องพิจารณา ถ้าไดนามิกของกระบวนการและระยะเวลาของเวกเตอร์ทรานส์เฟอร์สำหรับตัวแปรปรับในอนาคตสามารถเข้าหาสถานะคงตัวได้ แต่ถ้าไดนามิกของกระบวนการไม่สามารถรู้ได้แน่ชัด ขนาดของตัวแปร w ในแมทริกซ์ซัพเพรสชัน สามารถจะเพิ่มค่าได้เพื่อรักษาเสถียรภาพไว้ในขณะที่จะทำให้คุณภาพของข้อมูลลักษณะไดนามิกลดลง การปรับค่า w จะเป็นวิธีการลองผิดลองถูก เนื่องจากค่าผิดพลาดลักษณะไดนามิกไม่รู้แน่ชัด ถ้าหากเมื่อค่า w เพิ่มขึ้นถึงจุดที่ดีเอ็มซีไม่สามารถควบคุมได้แล้ว ควรจะมีการวิเคราะห์หาลักษณะไดนามิกของกระบวนการใหม่

3.4 การนำดีเอ็มซีประยุกต์ใช้กับระบบเอ็มไอเอ็มโอ

จุดเด่นอย่างหนึ่งของดีเอ็มซีก็คือ ความสะดวกในการนำมาประยุกต์ใช้เข้ากับระบบควบคุมแบบเอ็มไอเอ็มโอจากสมการ (3-10) ซึ่งใช้ในการทำนายค่าสัญญาณตอบสนองของตัวแปรเอาท์พุท สำหรับระบบเอ็มไอเอ็มโอ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปให้รวมการปรับในอนาคตของแต่ละตัวแปรอินพุทได้

$$\delta O_j = \sum_{i=0}^{m} (a_{1\,(j-i)}\,\Delta I_{1i} + a_{2\,(j-i)}\,\Delta I_{2i} + ---) \qquad j = 1,\ldots,C+S \qquad (3\text{-}27)$$

เมื่อ $m = j-1$ ถ้า $j \le C$ และ $m = C$ เมื่อ $j > C$ โดย

C : จำนวนช่วงเวลาในการปรับตัวแปรปรับ

และเลขตัวแรกที่สัญลักษณ์ตัวห้อยของ ΔI แสดงตัวแปรอินพุทที่พิจารณา

และเลขตัวสองที่สัญลักษณ์ตัวห้อยของ ΔI แสดงช่วงเวลา

สมการ (3-27) สามารถจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับระบบเอ็มไอเอ็มโอ ได้ดังนี้

$$\delta O_{1j} = \sum_{i=0}^{m} (a_{1\,(j-i)}\,\Delta I_{1i} + a_{2\,(j-i)}\,\Delta I_{2i} + ---) \qquad (3\text{-}28)$$

$$\delta O_{2j} = \sum_{i=0}^{m} (b_{1\,(j-i)}\,\Delta I_{1i} + b_{2\,(j-i)}\,\Delta I_{2i} + ---)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

เมื่อ เลขตัวแรกของสัญลักษณ์ตัวห้อยที่ δO แสดงตัวแปรเอาท์พุท

เลขตัวสองของสัญลักษณ์ตัวห้อยที่ δO แสดงช่วงเวลา

สัมประสิทธิ์ b แสดงเซตของเวกเตอร์ทรานส์เฟอร์เชิงตัวเลขสำหรับตัวแปรเอาท์พุทตัวที่สอง

จะสังเกตได้ว่า เวกเตอร์ของตัวแปรอินพุทจะเหมือนกันสำหรับตัวแปรเอาท์พุทแต่ละตัว ในรูปของแมทริกซ์ สำหรับระบบที่มี 2 ตัวแปรอินพุท และ 2 ตัวแปรเอาท์พุท จัดได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \delta O_1 \\ \delta O_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}29)$$

โดยที่แต่ละแมทริกซ์ย่อยจะเหมือนกับรูปแบบของดีเอ็มซี ที่ใช้กับระบบเอสไอเอสโอ ดังนั้น จึงสามารถนำสมการ (3-25) มาใช้ในการแก้ปัญหาของระบบเอ็มไอเอ็มโอได้ ในการแก้สมการ (3-29) จะต้องมีจำนวนตัวแปรปรับเท่ากับหรือมากกว่าจำนวนตัวแปรเอาท์พุท เช่นเดียวกับระบบเอสไอเอสโอ ข้อมูลเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาดจะต้องถูกแทนที่สำหรับตัวแปรเอาท์พุทแต่ละตัว ซึ่งจะต้องมีเวกเตอร์ของการทำนายค่าตัวแปรเอาท์พุทล่วงหน้าอยู่ด้วย และแมทริกซ์ซัพเพรสชันสำหรับตัวแปรอินพุทแต่ละตัวก็จะต้องผนวกเข้าในสมการ (3-29) ด้วยเช่นกัน คือ

$$A = \begin{bmatrix} A1 & A2 \\ B1 & B2 \\ W1 & 0 \\ 0 & W2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}30)$$

โดย W_1, W_2 เป็นแมทริกซ์ซัพเพรสชันทะแยงมุมสำหรับตัวแปรอินพุทที่ 1, 2 ตามลำดับ สมการ (3-25) จะถูกจัดรูปใหม่สำหรับระบบ 2 อินพุท 2 เอาท์พุท ดังนี้

$$[A^T A]^{-1} A^T \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}31)$$

สำหรับปัญหาของการควบคุมแบบเอ็มไอเอ็มโอที่ไม่มีตัวแปรที่มีขอบเขตจำกัด

วิธีการคำนวณ และรูปแบบสมการจะเหมือนกับระบบเอสไอเอสโอ เวกเตอร์ของค่าตัวแปรเอาท์พุทที่ทำนายสำหรับแต่ละตัวแปรจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาดสำหรับหาคำตอบให้สมการ (3-31) สำหรับแมทริกซ์คงที่ $(A^T A)^{-1} A^T$ จะมีเพียงแถวแรกเท่านั้นที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณค่าตัวแปรปรับแต่ละตัวสำหรับการคำนวณแบบเรียลไทม์ และมีข้อพิจารณาในการเลือกตัวแปรต่างๆ เหมือนกันคือ จำนวนของช่วงเวลาในการปรับตัวแปรปรับ และค่า w ของแมทริกซ์ซัพเพรสชัน ความยุ่งยากหลักของปัญหาระบบเอ็มไอเอ็มโอก็คือการจะตัดสินใจว่าจะให้ความสัมพันธ์แต่ละตัวแปรเป็นอย่างไร เนื่องจากวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดจะออพติไมซ์ค่าการลดค่าความผิดพลาดบนพื้นฐานของค่าสัมบูรณ์ของค่าความผิดพลาด ดังนั้น เพื่อที่จะให้ตัวแปรเอาท์พุทตัวหนึ่งสำคัญกว่าอีกตัวหนึ่งจะต้องคูณเวกเตอร์ทรานส์เฟอร์เชิงตัวเลข และเวกเตอร์ของค่าความผิดพลาดด้วยจำนวนที่มีค่ามากกว่า 1 เมื่อรวบรวมแนวคิดนี้เข้ากับสมการ (3-13) และ (3-29) จะได้ความสัมพันธ์ของค่าแฟกเตอร์น้ำหนักระหว่างตัวแปรอินพุทและตัวแปรเอาท์พุทสำหรับระบบ 2x2 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} w[A1] & w[A2] \\ [B1] & [B2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w\delta O_1 \\ \delta O_2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}32)$$

เมื่อ w เป็นค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก ระหว่างค่าตัวแปรเอาท์พุท และสัญญลักษณ์ตัวห้อยหมายถึง ตัวแปรที่ต่างกัน

ผลของแมทริกซ์ซัพเพรสชันทะแยงมุม ในสมการ (3-30) และค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก ในสมการ (3-32) โดยแท้จริงแล้วจะเหมือนกับผลต่อกรณีของระบบเอสไอเอสโอ จะสามารถหาได้จากสมการ

$$\Delta I \quad = \quad Q^{-1}\,\underline{b} \qquad (3\text{-}33)$$

เมื่อเวกเตอร์ b คือ

$$\underline{b} \quad = \quad \begin{bmatrix} w^2 A_1^T e1 & B_1^T e2 \\ w^2 A_2^T e1 & B_2^T e2 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}34)$$

และแมทริกซ์สมมาตร Q คือ

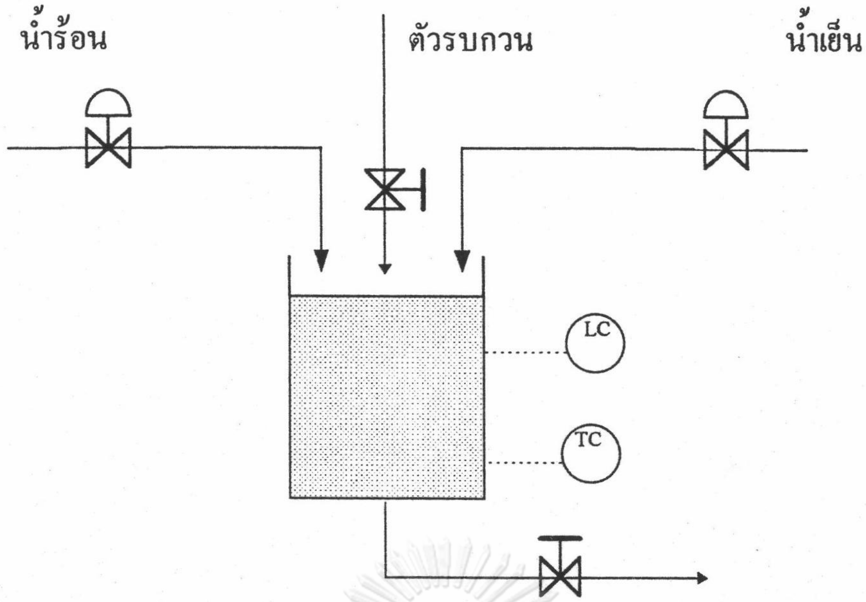
$$\begin{bmatrix} A_1^T A_1 & A_1^T A_2 \\ A_2^T A_1 & A_2^T A_2 \end{bmatrix} w^2 + \begin{bmatrix} B_1^T B_1 & B_1^T B_2 \\ B_2^T B_1 & B_2^T B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1^2 I & 0 \\ 0 & w_2^2 I \end{bmatrix}$$

3.5 การควบคุมระบบถังผสมของของเหลว

เหตุผลในการเลือกระบบถังผสมของของเหลวมาศึกษาการควบคุมดีเอ็มซีนี้ เนื่องจากต้องการระบบที่สามารถออกแบบการควบคุมแบบเอ็มไอเอ็มโอได้ และเป็นระบบที่ลักษณะอินเตอร์แอกชันระหว่างลูพการควบคุม เพื่อจะสามารถเปรียบเทียบและพิสูจน์ให้เห็นข้อดีของดีเอ็มซีซึ่งจะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ อีกทั้งระบบถังผสมเป็นระบบง่ายๆ ที่สามารถทำการทดลองและปรับตัวแปรต่างๆ ได้ค่อนข้างสะดวก ทำให้สามารถทำการทดสอบได้หลายๆ สภาวะ

สำหรับระบบถังผสมในการศึกษาจะเป็นถังผสมระบบผสมน้ำร้อน และน้ำเย็น ซึ่งมีอุณหภูมิ 60 °C และ 30 °C ตามลำดับ ตัวแปรควบคุมคืออุณหภูมิของของเหลว และระดับของเหลวภายในถังผสม โดยมีอัตราการไหลของของเหลวขาออกคงที่ค่าหนึ่ง ดังนั้นตัวแปรปรับคืออัตราการไหลของน้ำร้อนและน้ำเย็น ควบคุมผ่านวาล์วควบคุม จึงเป็นระบบเอ็มไอเอ็มโอแบบ 2 อินพุท 2 เอาท์พุท ซึ่งมีอินเตอร์แอกชันระหว่างลูพการควบคุมอย่างชัดเจน เนื่องจากทั้งอัตราการไหลของน้ำร้อนและน้ำเย็นต่างมีผลต่อตัวแปรควบคุมคืออุณหภูมิและระดับของเหลว

ในการเปรียบเทียบระหว่างการควบคุมแบบดีเอ็มซีกับพีไอดีนั้น วิธีการจับคู่การควบคุมของตัวควบคุมแบบพีไอดีนั้นจะให้หลักการของการหาค่าอะเรย์เกนสัมพันธ์ของ Bristol (Seborg, 1989) สำหรับ 2 อินพุท 2 เอาท์พุท



รูปที่ 3.6 ระบบถังผสมของเหลวและการควบคุม

$$\Lambda = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} C1 \\ C2 \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1-\lambda_{11} \\ 1-\lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$C_1 = K_{11} M_1 + K_{12} M_2$$

$$C_2 = K_{21} M_1 + K_{22} M_2$$

จะได้

$$\lambda_{11} = \frac{1}{1 - \dfrac{K_{12} K_{21}}{K_{11} K_{22}}}$$

ตัวควบคุมพีไอดีจะใช้เทคนิคการจูนของ Cohen-Coon เป็นค่าเริ่มต้นก่อนทำการจูนละเอียดเพื่อนำผลการควบคุมที่ดีที่สุดมาเปรียบเทียบกับการควบคุมดีเอ็มซี

ในขั้นแรกจะนำตัวควบคุมดีเอ็มซีมาเปรียบเทียบผลการควบคุมกับตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเอสไอเอสโอก่อนโดยทดสอบกับการควบคุมระดับของเหลวทั้งโดยอัตราการไหลของน้ำร้อนและเย็น ก่อนที่จะทำการเปรียบเทียบกันกับระบบเอ็มไอเอ็มโอ วิธีการทดสอบการควบคุมสามารถทำได้โดยการเปลี่ยนแปลงค่าเซ็ทพอยท์ของอุณหภูมิหรือระดับของเหลว และการเปลี่ยนแปลงตัวรบกวนเข้าสู่ระบบ