บทที่ 5

การวิเคราะห์ผลทางสถิติหลังการปรับแก้

<u>กล่าวนำ</u>

ผลจากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ประกอบด้วยค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่มต่าง ๆ (พารามิเตอร์หรือค่าสังเกต หรือทั้งสองอย่าง) พร้อมด้วยค่าคาดคะเนของเมตริกซ์ของความแปรปรวนของปริมาณเหล่านั้น หลังจากการปรับแก้แล้วอาจจะใช้เทคนิคทางสถิติวิเคราะห์และประเมินผลลัพธ์ที่ได้ ถึงแม้ว่าการคาดคะเนด้วยลีสท์สแควร์ ไม่จำเป็นต้องทราบการแจกแจงเหล่านั้นแต่ในการวิเคราะห์ทางสถิติ จำเป็นต้องรู้การแจกแจงจึงจะทำการทดสอบได้ ดังนั้นในที่นี้จะสมมุติว่าค่าสังเกตมีการแจกแจงแบบปกติ (normally distributed) และการคาดคะเนด้วยลีสท์สแควร์กระทำต่อฟังก์ชันนอลโมเดลที่เป็นเชิงเส้น (linear)

จาก Mikhail (1976), P. 294 และ Baarda (1963), PP. 12-16 พอจะสรุปการวิเคราะห์ทางสถิติได้ดังนี้

<u>การทดสอบค่าความแปรปรวน</u> (Tests on the Reference Variance)

การทดสอบทางสถิติของการปรับแก้โดยรวมเป็นการทดสอบเกี่ยวกับความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยก่อนการปรับแก้ (σ_o^2) และหลังการปรับแก้ ($\hat{\sigma}_o^2$)

การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์สามารถทราบค่า V^TPV ที่ลำดับชั้นความอิสระ r จะได้ว่า

$$\hat{\sigma}_o^2 = V^TPV/r$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_o^2$ เป็นค่าคาดคะเนที่ไม่ลำเอียง (unbiased estimator) ของ σ_o^2

การทดสอบทางสถิติเกี่ยวกับ $\hat{\sigma}_o^2$ เปรียบเทียบกับ σ_o^2 ใช้ χ^2 - test (Chi-Square-test) โดยที่

$$\chi_r^2 = r.\hat{\sigma}_o^2/\sigma_o^2 = V^TPV/\sigma_o^2 \quad (5-1)$$

มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยลำดับชั้นความอิสระ r ในที่นี้เป็นการทดสอบแบบ "one-tail upper-bound test" เพื่อต้องการตรวจสอบว่ามีสิ่งผิดปกติเกิดขึ้นในโครงข่ายหรือไม่ ถ้ามีสิ่งผิดปกติจะทำให้ V^TPV มีค่าสูงเช่นเดียวกับค่า $\hat{\sigma}_o^2$ การทดสอบจะใช้ระดับนัยสำคัญ (α) เท่ากับ 0.05 ในการตัดสินใจสมมุติฐาน

$H_o : \hat{\sigma}_o^2 = \sigma_o^2$. $H_1 : \hat{\sigma}_o^2 > \sigma_o^2$

จะปฏิเสธ H_o เมื่อ

$\chi_r^2 > \chi^2\alpha,r$

เพราะว่า $P\{r\hat{\sigma}_o^2/\sigma_o^2 > \chi^2\alpha,r\} = \alpha$

ในการทดสอบทางสถิติของค่า $\hat{\sigma}_o^2$ เป็นการบอกความน่าจะเป็น (probability) ของผลการปรับแก้ ถ้าผลการทดสอบไม่ผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ แสดงว่าผลของการปรับแก้นั้นไม่ดีหรือยังใช้ไม่ได้ ควรที่จะมีการตรวจสอบสิ่งต่าง ๆ ดังนี้

1. ตรวจสอบการคำนวณต่าง ๆ ถูกต้องทุกขั้นตอนหรือไม่
2. ตรวจสอบความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่ (gross error) ที่อาจหลงเหลืออยู่
3. ตรวจสอบดูว่าความคลาดเคลื่อนเป็นระบบต่าง ๆ ถูกกำจัดออกไปจากค่าสังเกตเพียงพอหรือไม่
4. ตรวจสอบดูว่าเงื่อนไขต่าง ๆ (สมการ) ถูกต้องหรือไม่ และค่าสังเกตที่มีอยู่เหมาะสมกับกรณีที่ศึกษาอยู่หรือไม่
5. ตรวจสอบความเหมาะสมของแบบจำลองมีความถูกต้องและสมบูรณ์พอหรือไม่

การทดสอบค่าผลต่างของเส้นฐานเป็นคู่ ๆ

ในการทำงานวิจัยครั้งนี้ส่วนหนึ่งจะศึกษาถึงผลกระทบของค่าสหสัมพันธ์ที่มีต่อเส้นฐานในการคำนวณปรับแก้โครงข่าย โดยการเปรียบเทียบเส้นฐานเป็นคู่ ๆ (Paired Comparisons) เพื่อสรุปผลของการคำนวณในกรณีที่พิจารณาว่าเส้นฐานแต่ละเส้นไม่มีค่าสหสัมพันธ์ต่อกัน กับกรณีที่พิจารณาว่าเส้นฐานแต่ละเส้นมีค่าสหสัมพันธ์ต่อกันในการปรับแก้ จะให้ผลแตกต่างกันอย่างไร ซึ่งจะดำเนินการทดสอบสมมุติฐานดังนี้

ถ้าให้ X_1 เป็นความยาวของเส้นฐานที่ได้จากการปรับแก้โครงข่ายโดยไม่มีค่าสห-สัมพันธ์และมีค่าความแปรปรวนเป็น σ_1^2

X_2 เป็นความยาวของเส้นฐานที่ได้จากการปรับแก้โครงข่ายโดยมีค่าสหสัมพันธ์และมีค่าความแปรปรวนเป็น σ_2^2

ต้องการทดสอบว่าค่า X_2 ต่างจากค่า X_1 หรือไม่

สมมุติฐาน

$H_o : X_2 = X_1$

$H_a : X_2 \neq X_1$

ถ้าถือว่าความยาวของเส้นฐานมีการกระจายแบบปกติ ในการทดสอบจะคำนวณค่า

$$z = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

เกณฑ์การตัดสิน ถ้าเลือกระดับนัยสำคัญของการทดสอบเป็น 5% ค่าจุดวิกฤตของ $z_{0.025} = \pm 1.96$

ดังนั้น ถ้าคำนวณ $|z| > 1.96$ จะปฏิเสธ H_o

วงรีของความคลาดเคลื่อน

ในการศึกษาความคลาดเคลื่อนของค่าพิกัดได้แยกออกเป็นค่าพิกัดทางราบ และค่าพิกัดทางดิ่งหรือความสูง การศึกษาความคลาดเคลื่อนของค่าพิกัดทางราบใช้วงรีของความคลาดเคลื่อน ส่วนการศึกษาความคลาดเคลื่อนของความสูงใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในการปรับแก้โครงข่าย GPS นั้น ใช้ระบบพิกัดฉาก XYZ ที่เรียกว่าระบบพิกัดฉากยึดติดโลก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีการแปลงค่ามาเป็นพิกัดทางราบ (ϕ, λ) และความสูง (h) เสียก่อน (ดู ชูเกียรติ วิเชียรเจริญ, 2532) สำหรับความแปรปรวนของค่าพิกัดทางราบและทางดิ่งก็หามาจากความแปรปรวนของค่าพิกัด XYZ ตามหลักการแพร่กระจายความแปรปรวนนั่นเอง

การแปลงค่าพิกัดจาก X,Y,Z เป็นค่าพิกัด ϕ, λ, h บนพื้นหลักฐานดาวเทียม WGS 84 กระทำดังนี้

ค่าครึ่งแกนยาวรูปทรงรี $a = 6378137$ เมตร

ค่าอัตราการยุบตัว $f = 1/298.2572236$

$$N = a/\sqrt{(1-e^2\sin^2\phi)} \quad ; \quad e^2 = 2f - f^2$$

$$\phi = \arctan\{(Z + e^2N\sin\phi)/R\}$$ [คำนวณโดยวิธีวนซ้ำ]

$$\lambda = \arctan(Y/X)$$

$$h = R/\cos\phi - N$$

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$$

ในการคำนวณวงรีของความคลาดเคลื่อนจะพิจารณาจากเมตริกซ์ของ VCV ของพารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว ดังนั้นจะต้องอาศัยกฎของการแพร่กระจายค่าจาก VCV(XYZ) เป็น VCV($\phi\lambda h$) จาก (Bruce R. Harvey, 1986)

$$VCV(\phi\lambda h) = J \; VCV(XYZ) \; J^T$$

เมื่อ J คือ เมตริกซ์จาโคเบียน มีค่าเท่ากับ

$$\begin{bmatrix} A & YA/X & B \\ -Y/R^2 & X/R^2 & 0 \\ (X/R\cos\phi) + AC & (Y/R\cos\phi) + YAC/X & BC \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}3)$$

โดยที่

$$A \simeq X\tan\phi/R^2(e^2 - \sec^2\phi)$$

$$B \simeq 1/(R\sec^2\phi - e^2N\cos\phi)$$

$$C = R\sin\phi/\cos^2\phi - Ne^2\sin\phi\cos\phi/(1-e^2\sin^2\phi)$$

สมการ (5-3) เป็นการแพร่ค่า VCV เพียงจุดเดียว หากต้องการแพร่หลาย ๆ จุด สามารถกระทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งเมตริกซ์จาโคเบียน จะมีลักษณะดังนี้

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & J_2 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & J_3 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & J_n \end{bmatrix}$$

ค่าของ VCV(øλh) ที่ได้คือ

$$\begin{bmatrix} \sigma^2(\varnothing) & \sigma(\varnothing\lambda) & \sigma(\varnothing h) \\ \sigma(\lambda\varnothing) & \sigma^2(\lambda) & \sigma(\lambda h) \\ \sigma(h\varnothing) & \sigma(h\lambda) & \sigma^2(h) \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีองค์ประกอบของวงรีความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณดังนี้

$$\sigma_u = \sqrt{((\sigma^2(\varnothing) + \sigma^2(\lambda) + W)/2)}$$

$$\sigma_v = \sqrt{((\sigma^2(\varnothing) + \sigma^2(\lambda) - W)/2)}$$

$$\theta = \tan^{-1}((2\sigma(\varnothing\lambda)/(\sigma^2(\varnothing) - \sigma^2(\lambda))))/2$$

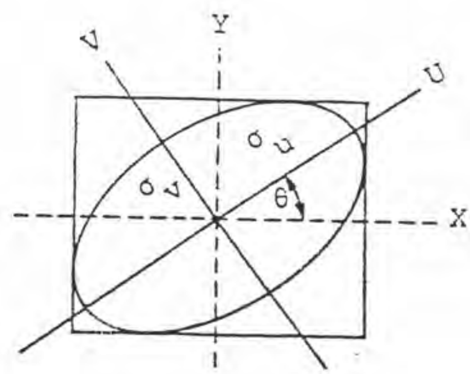
$$\rho = \sigma(\varnothing\lambda)/(\sigma(\varnothing).\sigma(\lambda))$$

โดยที่

$$W = \sqrt{(\sigma^2(\varnothing) + \sigma^2(\lambda) - 4(\sigma^2(\varnothing).\sigma^2(\lambda) - \sigma(\varnothing\lambda).\sigma(\lambda\varnothing)))}$$

ความสูงของวงรีหาได้จาก

$$\sigma_h = \sqrt{(\sigma^2(h))}$$



รูปที่ 5.1 วงรีของความคลาดเคลื่อน

วงรีของความคลาดเคลื่อนสามารถสร้างขึ้นได้ตามขนาดของ θ, σ_u, σ_v และ σ_h ที่ได้จากการคำนวณ ซึ่งจะนำไปใช้สำหรับการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนของค่าพิกัดในโครงข่าย GPS