

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยขอเสนอเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ซึ่งมีเนื้อหาตามลำดับ
ต่อไปนี้

1. หลักการและเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์
2. ปัญหาการสอนคณิตศาสตร์
3. ลักษณะ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา
4. องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
5. วิธีสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
6. ความหมายและหลักการแก้ปัญหา
7. การเรียนการสอนกับการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์
8. สื่อกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
9. ภาพกับการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์

1. หลักการและเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์

วิชาคณิตศาสตร์มีความจำเป็นและมีบทบาทที่สำคัญยิ่งในการดำเนินชีวิตของมนุษย์ ได้มีผู้กล่าวถึงหลักการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

บุญทัน อยู่ช่มบุญ (2521) กล่าวว่า หลักการสอนคณิตศาสตร์ ควรสอนโดยคำนึงถึงความพร้อม ความแตกต่างระหว่างบุคคลของเด็ก ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรให้เหมาะสมกับวัย ความต้องการ ความสนใจ ความสามารถและเป็นไปตามลำดับขั้นตอนตรงตามจุดประสงค์ที่วางไว้ การสอนที่ดีควรเปิดโอกาสให้นักเรียนเลือกทำกิจกรรมได้ตามความพอใจ ให้อิสระในการทำงาน มีการวางแผนร่วมกับครูและเพื่อน โดยที่ไม่ควรจำกัดวิธีคิด คำนำวนหาคำตอบของเด็ก และควรมีการประเมินผลการเรียนการสอนอย่างต่อเนื่อง เพื่อทราบข้อบกพร่องของนักเรียนและการสอนของครู

ยุพิน พิพิธกุล (2530) ได้ให้ความคิดเห็นเกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ไว้ว่า การสอนคณิตศาสตร์นั้นควรสอนจากเรื่องง่ายไปสู่ยาก จากรูปธรรมไปสู่นามธรรม โดยใช้ความสนใจของนักเรียนเป็นจุดเริ่มต้น คำนึงถึงประสบการณ์เดิมที่นักเรียนมีอยู่ ให้นักเรียนลงมือปฏิบัติในสิ่งที่ทำได้ และสามารถสรุปความคิดรวบยอดหรือแนวคิด (Concept) ได้เอง ทั้งนี้ครูผู้สอนจะต้องเปลี่ยนวิธีการสอน ไม่ซ้ำซากน่าเบื่อ มีความกระตือรือร้น แลวงหาความรู้เพิ่มเติม สร้างบรรยากาศในห้องเรียน และเรื่องที่สัมพันธ์กันก็ควรจะสอนไปพร้อม ๆ กัน

นอกจากจะมีความรู้ด้านหลักการสอนแล้ว ครูจะต้องมีเทคนิคในการสร้างความสนใจให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดี สนใจเรียน และอยากเข้าร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน ดังที่มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

อยู่ชาติ เสงี่ยมลาด (2521) ได้กล่าวถึงเทคนิคการสอนในวิชาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า เทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ ได้แก่ การสอนแบบเอกัตภาพที่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลร่วมกันวางแผนการสอน การเรียนเป็นทีมที่มีการแบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่มตามระดับความสามารถการสอนโดยใช้สื่อต่าง ๆ เช่น คู่มือการเรียน ชุดการสอน หน่วยการเรียนรู้ เป็นต้น การสอนซ่อมเสริมเพื่อแก้ไขข้อบกพร่อง การสอนคณิตศาสตร์สนทนาการใช้ เกม ละคร หรือทนายปัญหา

บุญทัน อยู่ข่มบุญ และยุพิน พิพิธกุล (2530) ได้ให้ความคิดเห็นที่ใกล้เคียงกันเกี่ยวกับเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ว่า เทคนิคการสอนที่สามารถสร้างความสนใจของนักเรียนในวิชาคณิตศาสตร์มีวิธีการดังนี้ คือ

1. เทคนิคการยกตัวอย่างและการให้โจทย์ปัญหา ผู้สอนควรยกตัวอย่างได้ทันทีทันใด โดยไม่ต้องดูหนังสือแบบเรียน หรือหนังสืออื่น โดยยกตัวอย่างจากสิ่งแวดล้อมในชีวิตประจำวัน และควรหากวิธีในการยกตัวอย่างให้แปลก ๆ

2. เทคนิคการใช้วัสดุประกอบการสอน ครูควรให้นักเรียนช่วยทำวัสดุประกอบการสอนโดยใช้วัสดุจากสิ่งแวดล้อมในท้องถิ่นที่หาง่ายและประหยัด เพื่อช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจและเกิดมโนมตดีขึ้น

3. เทคนิคการใช้และสร้างภาพประกอบการสอน ผู้สอนควรจะฝึกการวาดภาพลายเส้นง่าย ๆ เพราะเมื่อสอนไป วาดภาพไป หรือใช้ภาพสำเร็จ เพื่อจะทำให้ผู้เรียนสนใจและเข้าใจมากยิ่งขึ้น

4. เทคนิคในด้านนันทนาการ โดยการใช้เพลง คำประพันธ์ประเภทร้อยกรอง เกมสับสมอง ประกอบการสอนเพื่อสร้างมโนมต หรือใช้ฝึกทักษะก็ได้

จะเห็นได้ว่าหลักการและเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์ที่ดีจะต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ความสนใจของเด็ก และการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของครู

จิตวิทยาสำหรับการสอนคณิตศาสตร์

ในด้านการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์นั้น นักการศึกษาได้พยายามที่จะศึกษาทฤษฎีทางจิตวิทยาที่จะนำมาใช้ให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น เพราะในการสอนครูจะต้องเข้าใจนักเรียน เข้าใจระบบพัฒนาการด้านสติปัญญาของเด็กเพื่อนำมาใช้ให้เหมาะสมกับวัยและความสามารถของเด็ก การจัดกิจกรรมต่าง ๆ จึงจะเกิดผล แนวคิดทางจิตวิทยาที่มีอิทธิพลต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ มีดังนี้

ลูร์ฮัย ฮวีญเมือง (2522) ได้กล่าวถึงจิตวิทยาในการสอนคณิตศาสตร์พอสรุปได้ดังนี้คือ ให้เด็กเรียนมีความพร้อมก่อนที่จะสอน สอนจากสิ่งที่เด็กมีประสบการณ์หรือได้พบเห็น อยู่เสมอ สอนให้เด็กเข้าใจและมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างส่วนย่อยกับส่วนย่อย และส่วนใหญ่กับส่วนย่อย สอนจากง่ายไปหายาก จากรูปรธรรมไปสู่นามธรรม ให้เด็กเรียนเข้าใจในหลักการ

และรู้วิธีที่จะใช้หลักการ ได้ฝึกหัดทำซ้ำ ๆ และให้กำลังใจแก่เด็กทั้งนี้ต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล

ยุพิน พิพิธกุล (2530) กล่าวว่า การสอนนั้นครูจะต้องรู้จิตวิทยาในการสอนจึงจะทำให้การสอนลุ่มปุรณยิ่งขึ้น จิตวิทยาที่ครูควรทราบคือ ความแตกต่างระหว่างบุคคล จิตวิทยาในการเรียนรู้ จิตวิทยาในการฝึก การเรียนโดยการกระทำ การเรียนเพื่อรู้ ความพร้อม และการเสริมแรงใจ

สรุปได้ว่าในการสอนคณิตศาสตร์นั้น ครูควรรู้จักจิตวิทยาการเรียนรู้ จิตวิทยาในการฝึกทักษะ ความแตกต่างระหว่างบุคคล และการเสริมแรงใจ

2. ปัญหาการสอนคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญยิ่ง เนื่องจากผู้เรียนจะต้องใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการดำรงชีวิต จากการรายงานผลการประเมินคุณภาพของนักเรียนประถมศึกษาพบว่า กลุ่มทักษะ (คณิตศาสตร์) นักเรียนได้คะแนนต่ำสุด ได้มีผู้กล่าวถึงปัญหาการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

สมจิต ชิวปรีชา (2529) ได้ระบุถึงปัญหาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์พอสรุปไว้ดังนี้

1) ปัญหาทางด้านผู้เรียน คือ นักเรียนคิดแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่เป็น ทำแบบฝึกหัดหรือการบ้านไม่ได้ ขาดทักษะทางการคิดคำนวณ มีทัศนคติไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่สนใจและไม่ตั้งใจเรียน นักเรียนมีความพร้อมในการเรียนรู้ต่างกัน

2) ปัญหาทางด้านครูผู้สอน พบว่าครูใช้วิธีสอนแบบบรรยายอย่างเดียว สอนเร็วเกินไป และไม่ใช้สื่อการสอน ไม่มีเวลาเตรียมการสอน ครูดูเข้มงวด ไม่สนใจนักเรียนอ่อนและลุ่มปุรณมุ่งเน้นคำตอบมากกว่ากระบวนการ

ยุพิน พิพิธกุล (2530) ได้กล่าวถึงปัญหาการสอนคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) ด้านผู้บริหาร คือ ผู้บริหารไม่เข้าใจธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ ไม่สนใจติดตามข่าวความเคลื่อนไหวในทางคณิตศาสตร์ทั้งด้านหลักสูตรและวิธีสอน ไม่จัดสรรงบประมาณให้ เพราะมองไม่เห็นความจำเป็น ที่จะต้องใช้สื่อการเรียนการสอน จัดครูเข้าสอนไม่เหมาะสมและจัดชั่วโมงสอนให้ครูมากเกินไปจนไม่มีเวลาตรวจแบบฝึกหัด

- 2) ด้านตัวครู ครูมีทัศนคติไม่เพียงพอกับงานที่จะสอนเนื้อหา ไม่มีจิตวิทยาในการสอน ครูใช้วิธีการสอนแบบเก่าซ้ำซากน่าเบื่อ ครูเข้มงวดในการสอนมากเกินไป
- 3) ด้านหลักสูตร การที่เปลี่ยนแปลงหลักสูตรบ่อย ๆ อาจจะทำให้ครูปรับตัวไม่ทัน
- 4) ด้านนักเรียน นักเรียนมีเจตคติที่ไม่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ มีความบกพร่องทางร่างกาย ขาดความพร้อม ความเชื่อมั่นในตัวเอง และวิธีการเรียนแบบท่องจำ
- 5) ด้านสภาพแวดล้อม บรรยากาศในห้องเรียน สภาพความเป็นอยู่และความอบอุ่นในครอบครัว

กองวิจัยการศึกษา กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ (2531) ระบุถึงปัญหาในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาไว้ว่า

- 1) ด้านหลักสูตร เนื้อหาหลักสูตรกว้างเกินไป มีเนื้อหาบางอย่างมากเกินไป เช่น วิธีคูณ หหาร เวลา การชั่ง ตวง วัด
- 2) ด้านสื่อการเรียน การสอนและอุปกรณ์ การออกแบบสื่อไม่เอื้อต่อการใช้เป็นกลุ่ม สื่อบางชิ้นใช้ได้เพียงครั้งเดียว ขาดสื่อต้านเกม สื่อในเนื้อหาวิชาพื้นฐาน สื่อไม่เหมาะสมกับหลักสูตรและสภาพของเด็ก
- 3) ด้านคู่มือครู ครูส่วนใหญ่สอนโดยไม่ใช้แนวทางการสอนในคู่มือครู มีครูเพียงส่วนน้อยที่เตรียมการสอนล่วงหน้า ครูมีปัญหาเรื่องใช้เวลาสำหรับอธิบายคณิตศาสตร์แต่ละบทตลอดจนครูยังไม่เข้าใจการสอนคณิตศาสตร์โดยทดลองสำริด อภิปรายและสรุปเชิงกฎเกณฑ์
- 4) ด้านวิธีสอน ครูไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ด้านคณิตศาสตร์ที่ศึกษามากับคณิตศาสตร์ประถมศึกษาในปัจจุบัน นอกจากนั้นครูขาดตัวอย่างรูปแบบการสอนที่ดีหรือตัวอย่างการสอนเนื้อหาที่ครูส่วนใหญ่เห็นว่าสอนยาก ซึ่งส่วนมากครูจะสอนไปตามแบบเรียนโดยอธิบายตัวอย่างในหนังสือแล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด
- 5) ด้านการวัดผล ครูจำนวนน้อยมากที่ทำการศึกษาประเมินผลก่อนเรียน ซึ่งเป็น การตรวจสอบพัฒนาการของนักเรียน ครูส่วนใหญ่ใช้แบบทดสอบเป็นเครื่องมือสำหรับวัดผลระหว่างเรียน ไม่นิยมวัดผลโดยการสังเกต การสัมภาษณ์ และการตรวจผลงาน

จะเห็นได้ว่าปัญหาการล่อนคืดคำลัศร์ในระดับประถมศึกษาป้ปัจฉัยที่ล้าศัญได้แก่
ผู้บริหาร ครู นักเรียน หลัศกูตร และล่ภาพแวดล้อม ซึ่งปัจฉัยเหล่านี้ล่่งผลให้ผลลัสมฤทธิ์
ในการเรียนวิชาคณิศคำลัศร์ของนักเรียนต่ำ

3. ลัษณะโจทยัปัญหาคณิศคำลัศร์ ในระดับประถมศึกษา

โจทยัปัญหาคณิศคำลัศร์ที่ครูผู้ล่อนจะนำปล่อนนั้นจะต้องสร้างโจทยัปัญหาให้หน้าล่สนใจ
เพื่อนักเรียนจะได้มีความกระตือรือร้นที่จะแก้ปัญหานั้น ได้มีผู้กล่าวถึงลัษณะของโจทยัปัญหา
คณิศคำลัศร์ไว้ดังนี

นิพนธ์ ฉิตภักดี (2517) ได้ล่อนอแนะวิธีการสร้างโจทยัปัญหา คณิศคำลัศร์ให้
หน้าล่สนใจ ดังต่อไปนี้

- 1) สร้างโจทยัปัญหาให้ตรงกับความล่สนใจของเด็ก โดยใช้ความรู้ทางจิตวิทยา
และล่่งเกตความล่สนใจของเด็กด้วยวิธีการต่าง ๆ ได้แก่ ให้วาดภาพ ให้ล่เลือกของเล่น ลัสมภาษณ์
ให้เล้าเรื่องล่สนใจ
- 2) สร้างโจทยัปัญหาให้เหมาะล่สมกับล่ภาพของท่งถื่น
- 3) สร้างโจทยัปัญหาให้ลัสมพันธ์กับเหตุการณ์ล่เกิดขึ้นจริง ๆ
- 4) สร้างโจทยัปัญหาให้เห็นความลัสมพันธ์ระหว่างการบวกลบกับการลอบ และการคูณ
กับการหาร
- 5) สร้างโจทยัปัญหาในหลาย ๆ ลัษณะ เพื่อจะช่วยให้เด็กรู้ลัศกพิจารณา แยกแยะ
ปัญหา และสามารถสร้างโจทยัปัญหาได้เอง เช่น โจทยัที่ขาดตัวเลข โจทยัที่มีลัศข้อความไม่
ลัสมบูรณ์ โจทยัที่มีลัศข้อความบางตอนไม่เกี่ยวลัชองกับการหาค่าตอบ และโจทยัที่ขาดคำถาม
มีแต่เรื่องหรือลัศที่โจทยักำหนดให้ เป็นต้น

Clyde (1967) ได้ล่อนอแนะถึงการสร้างโจทยัปัญหาคณิศคำลัศร์ให้หน้าล่สนใจว่า
ควรมีลัษณะดังนี

- 1) ให้มีความใกล้เคียงกับ ปัญหาในชีวิตประจ้ววัน และมีความลัสมพันธ์กับผู้แก้ปัญหามาก
ที่สุด โดยอาจเป็นเรื่องราวหรือเหตุการณ์ล่เกิดขึ้นกับผู้แก้ปัญหาในชีวิตประจ้ววันหรือมัก
เกิดกับบุคคลท้ว ๆ ไป หรือมีลัษณะคล้ายกับลัสถานการณ์ในชีวิตจริง

2. สถานการณ์ที่สร้างขึ้นเป็นปัญหา ควรใช้ภาษาหรือการบรรยายในลักษณะที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์มาก่อน ไม่ควรเป็นปัญหาทั่วไป

Russell and Le Blance (1977) ได้แบ่งลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. โจทย์ที่มีรูปแบบ โจทย์ปัญหาลักษณะนี้ต้องการคำตอบที่ถูกต้อง เพียงอย่างเดียว ได้แก่ โจทย์ปัญหาที่ปรากฏอยู่ในหนังสือแบบเรียน และหนังสือทัว ๆ ไป การหาคำตอบของโจทย์ลักษณะนี้ ใช้วิธีการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยตรง เช่น "นายวิชัยต้องการจัดน้อยหน้า จำนวน 486 ผล ใส่ในกระถางโดยใส่กระถางละ 6 ผล เท่า ๆ กัน อยากทราบว่าต้องใช้กระถางกี่ใบ"

2. โจทย์ที่ไม่มีรูปแบบ โจทย์คณิตศาสตร์ลักษณะเช่นนี้ ต้องการให้นักเรียนแสดงกระบวนการหรือขั้นตอนในการหาคำตอบ ซึ่งอาจต้องใช้แผนภาพ แผนภูมิ หรือรูปภาพแสดงกระบวนการหรือขั้นตอนในการหาคำตอบ โจทย์ปัญหาลักษณะนี้มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น "มีผู้ขาย 8 คน ในงานเลี้ยง ถ้าผู้ขายคนหนึ่งจะต้องจับมือกับคนอื่น ๆ ให้ครบทุกคนแล้ว อยากทราบว่าจะมีการจับมือทั้งหมดกี่ครั้ง"

สรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา ควรมีลักษณะที่ เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน ตรงตามความสนใจ และนักเรียนมีประสบการณ์เดิมมาก่อน อีกทั้ง ควรใช้ภาษาที่ง่ายต่อการ เข้าใจ เหมาะสมกับความรู้พื้นฐานของนักเรียนด้วย

4. องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์ที่ประกอบไปด้วยภาษาและตัวเลข ที่ต้องการ คำตอบ โดยผู้แก้ปัญหาคงต้องหาวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เลือก ตัดสินใจและลงมือ แก้ปัญหา ในการแก้โจทย์ปัญหาคงต้องอาศัยองค์ประกอบหลายอย่าง เพื่อช่วยในการแก้ปัญหามีผู้กล่าวถึงองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

Polya (1957) ได้ให้ความเห็นว่า ความสามารถในการแก้ปัญหานั้นสัมพันธ์กับความรูสึกของผู้แก้ปัญหาวาปัญหานั้นมีความเป็นไปได้แค่ไหน อย่างไร สัมพันธ์กับยุทธวิธีการแก้ปัญหาและสัมพันธ์กับความผิดพลาดที่มีโอกาสเกิดขึ้นในการแก้ปัญหาหรือไม่

Mc Swain and Cooke (1964) กล่าวว่า มีองค์ประกอบหลายประการที่มีอิทธิพลต่อพฤติกรรมทางความคิดของผู้แก้ปัญหา เช่น ประสบการณ์ ภูมิหลัง ความลึกซึ้งในสัมฤทธิ์ผล ความสนใจ วัตถุประสงค์ ลู่ลภาพจิต บรรยากาศคำในชั้นเรียน ความเข้าใจ แนวคิด และหลักการทางคณิตศาสตร์ การอ่านอย่างระมัดระวัง คิดละเอียดรอบคอบ เพื่อหาสิ่งทีุ่จกทย์กำหนดให้ สิ่งที่ต้องการทราบและคำถามคืออะไร เพื่อหาลมมุติฐาน หรือคาดคะเนคำตอบโดยประมาณ เป็นต้น

Johnson and Rising (1967) กล่าวว่า การแก้ปัญหาจะต้องประกอบด้วย

- 1) การมองเห็นภาพ ซึ่งหมายความว่า ผู้ที่แก้ไขจะมองทะลุและกว้างไกลมองเห็นแนวทางทีุ่จะแก้ปัญหา
- 2) การจินตนาการ ในการแก้ปัญหานั้นจะต้องรู้จักจินตนาการว่าควรจะเป็นอย่างไรเพื่อเป็นแนวทางในการคิดแก้ปัญหา
- 3) การจัดทำอย่างมีทักษะ เมื่อมองเห็นแนวทางแล้วก็ลงมือทำอย่างมีระบบมีขั้นตอน ทำด้วยความชำนาญ
- 4) การวิเคราะห์ จะต้องรู้จักวิเคราะห์ตามขั้นตอนที่กระทำนั้น
- 5) การสรุป เมื่อลงมือกระทำจนมองเห็นรูปแบบแล้วก็สามารถสรุปได้
- 6) การโยงความคิด การสัมพันธ์ความคิดเป็นเรื่องราวเป็นอย่างไรในการแก้ปัญหาเมื่อโจทย์พูดถึงเรื่องอะไร ก็สามารถสัมพันธ์ถึงเรื่องต่อไป และมองเห็นแนวทางได้

Henney (1971) ได้ศึกษาองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า ความสามารถในการเข้าใจคำพูด ความเข้าใจในแนวคิดของปัญหา การตีความของปัญหาอย่างมีเหตุผล และการคิดคำนวณ เป็นองค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับ John J. Kinsella (1975) ที่ว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนขึ้นอยู่กับความสามารถในการอ่านและความรู้เกี่ยวกับศัพท์ทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการคำนวณและเจตคติของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ Thomas J. Cooney, Edward J. Davis and K.B. Henderson (1975) ได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยสรุป ได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับเนื้อหาโจทย์ปัญหา ซึ่งอาจจะมีวิธีคิดแตกต่างกันตาม ลักษณะแต่ละปัญหา นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับตัวนักเรียนและครู ผู้ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจปัญหาอย่างแจ่มชัดแล้วสามารถวางแผนแก้ปัญหาได้

Krulik and Reys (1977) ได้กล่าวถึงการสร้างโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้ที่น่าสนใจ ว่าควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้ คือ ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของผู้แก้ปัญหา, กลวิธีที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหา และความสามารถในการใช้ภาษาของผู้แก้ปัญหา

Lester (1977) ได้กล่าวโดยสรุปว่า ธรรมชาติของกระบวนการแก้ปัญหาเป็นเรื่องที่ซับซ้อน ซึ่งไม่สามารถกล่าวได้ว่าควรใช้วิธีใดวิธีหนึ่งในการเพิ่มความสามารถในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียน นอกจากนี้เขาได้กล่าวถึงผลงานของ Simon (1975) ผู้ซึ่งศึกษาเรื่องการแก้ปัญหาและได้เสนอแนวคิดการแก้ปัญหาโดยสรุปดังนี้

1) องค์ประกอบที่สำคัญของทักษะการแก้ปัญหาคือความสามารถในการรู้ถึงลักษณะเด่นชัดของปัญหานั้นได้อย่างรวดเร็ว และความสามารถในการเชื่อมโยงลักษณะนี้เข้ากับขั้นตอนของการแก้ปัญหา

2) ความเข้าใจปัญหาอยู่ที่การมีความสามารถสร้างปัญหาจากลักษณะนามธรรมให้อยู่ในรูปธรรมได้ ซึ่งปัญหาส่วนใหญ่ที่เป็นนามธรรมสามารถนำมาสร้างเป็นรูปธรรมได้หลายวิธี

Heimer and Trueblood (1977) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบที่สำคัญบางประการ
ที่มีผลต่อความสามารถของนักเรียนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับภาษาหรือคำพูด
ได้ดังนี้

1. ความรู้เกี่ยวกับศัพท์เฉพาะ
2. ความสามารถในการคำนวณ
3. ความสามารถในการรวบรวมความรู้รอบตัว
4. ความสามารถในการรับรู้ถึงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่กำหนดให้
5. ความสามารถในการให้เหตุผลสำหรับคำตอบที่ตั้งจุดมุ่งหมายไว้
6. ความสามารถในการเลือกวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง
7. ความสามารถในการค้นหาข้อมูลที่ขาดหายไป
8. ความสามารถในการเปลี่ยนปัญหาที่เป็นประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์

ทางคณิตศาสตร์

ทั้งนี้องค์ประกอบดังกล่าวสอดคล้องกับความคิดเห็นของ Zalewsky (1978)
ซึ่งได้ศึกษาองค์ประกอบที่ช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหา คือ ความสามารถในการ
ในการเข้าใจสัญลักษณ์ ความสามารถในการจัดกระทำ ความสามารถในการอ่านและตีความ
การมีความคิดรวบยอดในทางคณิตศาสตร์และการมีทักษะในการคำนวณ

สรุปได้ว่าองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้แก่ ความสามารถ
ทางสติปัญญา ความสามารถในการอ่านและตีความทำความเข้าใจ ความเข้าใจในสัญลักษณ์
ทางคณิตศาสตร์ การมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการเปลี่ยนข้อความจาก
นามธรรมเป็นรูปธรรมได้ มีความสามารถในการจัดกระทำข้อมูลที่กำหนดให้แล้วค้นหาสิ่งที่โจทย์
ต้องการ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง โดยที่องค์ประกอบเหล่านี้จะเป็นแนวทางให้นักเรียนสามารถ
สร้างกระบวนการในการคิดแก้ปัญหาอย่างมีขั้นตอนที่ถูกต้อง

5. วิธีสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

การล่อนกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา เป็นกระบวนการที่เป็นไปอย่างมีลำดับขั้นตอน ถ้าโครงการล่อนดีและมีทักษะ จะทำให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาได้ดีขึ้น ผู้ศึกษาเกี่ยวกับวิธีสอนแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ไว้หลายท่านดังนี้

โกลอง บำรุงสงฆ์ และ สัมหวัง ไตรตันวงศ์ (2520) ให้ความเห็นเรื่องการล่อน โจทย์ปัญหาว่าจำเป็นต้องล่อนไปตามลำดับขั้นตอนคือ ล่อนจากปัญหาจริงที่นักเรียนประสบอยู่เสมอ ในชีวิตประจำวัน โดยให้นักเรียนได้อภิปราย แสดงความคิดเห็นในโจทย์ปัญหาต่าง ๆ แล้วแปลง เป็นประโยคคณิตศาสตร์ ให้นักเรียนแสดงเหตุผลต่าง ๆ ก่อน แล้วจึงสรุปกฎเกณฑ์ หรือที่เรียกว่า อุปมาน (inductive) นอกจากนี้ครูไม่ควรจำกัดวิธีคิดคำนวณของนักเรียน แต่ควรแนะวิธีที่ดี และรวดเร็วที่สุด ให้นักเรียนรู้จักการตรวจสอบคำตอบด้วยตนเอง และเมื่อเข้าใจดีแล้ว หาทางส่งเสริมให้นักเรียนนำเอาความรู้หรือหลักเกณฑ์นั้น ๆ ไปใช้ หรือที่เรียกว่า วิธีอนุมาน (deductive)

อุทัย เพียรช่วย (2530) ได้เสนอแนะวิธีสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่าการล่อนแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์นั้น ควรมีขั้นตอนในการล่อนดังนี้

1. ควรเริ่มต้นล่อนโดยใช้ประสบการณ์พื้นฐานจากการใช้ของจริงหรือของจำลอง ก่อน พยายามฝึกให้เด็กทำข้อความที่เป็นโจทย์ปัญหาง่าย ๆ แล้วให้เด็กปฏิบัติตามข้อความใน โจทย์ปัญหานั้น เพื่อให้เด็กคุ้นเคยกับภาษาที่ใช้ในโจทย์ปัญหา และสามารถเชื่อมโยงไปสู่รูปภาพ กึ่งรูปภาพ หรือสัญลักษณ์ได้ในที่สุด
2. ควรล่อนทั้งวิธีการและหลักการที่อยู่เบื้องหลังวิธีการนั้น
3. ควรล่อนโดยยกตัวอย่าง โจทย์ปัญหาที่สอดคล้องกับชีวิตประจำวันของเด็ก โดยเปิดโอกาสให้เด็กได้อภิปราย แสดงความคิดเห็นในโจทย์ปัญหานั้นด้วย
4. ควรฝึกให้เด็กแต่ง โจทย์ปัญหาขึ้นมาเอง และควรฝึกให้เด็กใช้วิธีการในการแก้ โจทย์ปัญหาหลาย ๆ วิธี โดยไม่จำกัดรูปแบบ หรือวิธีการใดวิธีหนึ่ง

น้อมศรี เคท (2530) ได้กล่าวถึงการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ว่าจำเป็นต้องเน้นการพัฒนาความสามารถของนักเรียนในการแก้ปัญหา โดยเปิดโอกาสและสร้างสภาพการณ์ให้นักเรียนได้พบปัญหา และศึกษาแนวทางในการแก้ปัญหาหลาย ๆ แบบ และมีจำนวนมาก ซึ่งในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องมีความสามารถในด้านต่าง ๆ คือ สามารถมองเห็นและเข้าใจสภาพปัญหา คำนวณโดยใช้ตัวเลขคร่าว ๆ กะประมาณและพิจารณาคำตอบอย่างมีเหตุผล และคิดวิธีทำในใจได้ ครูควรสอนให้นักเรียนเข้าใจว่าการแก้ปัญหาย่อยใดข้อหนึ่งอาจมีวิธีแก้หลายวิธี ซึ่งมีขั้นตอนในการแก้ปัญหา คือ ทำความเข้าใจสภาพและลักษณะปัญหา ศึกษาปัญหาว่ามีความแตกต่างหรือคล้ายกับปัญหาที่เคยพบมาแล้วอย่างไร เลือกกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา แสดงวิธีทำ พิจารณาและตรวจคำตอบที่ได้จากการคำนวณ

Le Blanc Troutman and Lichtenberg (1977) ได้เสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาที่คล้ายกัน พอสรุปได้ คือ ความเข้าใจปัญหา การวางแผนเพื่อแก้ปัญหา การแก้ปัญหา และการทบทวนปัญหาและคำตอบ

นอกจากนี้ Le Blanc และคณะยังเห็นว่า ในการสอนให้เด็กแก้ปัญหานั้นไม่ควรให้เด็กสังเกต หรือจดจำวิธีแก้ปัญหากจากข้ออื่น ๆ แต่ควรให้เด็กคำนึงถึงเหตุผลความเป็นจริงเป็นสำคัญ ในการแก้โจทย์ปัญหานั้น การจัดกิจกรรมที่เหมาะสมพร้อมกับการใช้คำถามต่าง ๆ ก็จะสามารถจะพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี

Mark (1965) ได้กล่าวว่า ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนจะต้องทำสิ่งต่อไปนี้เป็นอันดับแรก คือ ค้นหาว่าให้ข้อมูลอะไรบ้าง และให้หาอะไร ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มา เพื่อจะไปสู่สิ่งที่ต้องการให้หา วิเคราะห์ข้อมูลและความสัมพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์ และตรวจสอบผลเพื่อความมั่นใจว่าถูกต้อง อย่างไรก็ตาม ลำดับขั้นตอนอาจจะเปลี่ยนแปลงได้ ขึ้นอยู่กับผู้แก้ปัญหาและตัวปัญหา

นอกจากนี้ Fehr (1977) ยังได้กล่าวถึงสิ่งที่จะต้องกระทำในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ประกอบด้วย

1. การคาดคะเนคำตอบ สิ่งที่นักเรียนใช้ในการคาดคะเน คือ การประมาณอย่างคร่าว ๆ นักเรียนที่รู้จักคาดคะเนจะสามารถหลีกเลี่ยงจากคำตอบที่คลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงมาก ๆ ได้

2. การตีความคำตอบ เป็นสิ่งที่สำคัญพอ ๆ กับการหาคำตอบ เมื่อนักเรียนหาคำตอบที่เป็นตัวเลขของปัญหาได้ แต่ไม่รู้ว่าจะนำตัวเลขซึ่งได้มาไปตอบปัญหาได้อย่างไร

จากที่กล่าวมาพอสรุปได้ว่า วิธีสอนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น จะประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นที่ 1 เป็นขั้นตีความและทำความเข้าใจปัญหา

ขั้นที่ 2 เป็นขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 เป็นขั้นหาคำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ที่สุดของปัญหา

6. ความหมายและหลักการแก้ปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา ปัญหาบางเรื่องก็เป็นทฤษฎี บางเรื่องก็เกี่ยวกับการปฏิบัติ การเรียนแก้ปัญหาก็เป็นเรื่องที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ เพราะเป็นกระบวนการที่ประยุกต์ความรู้ที่ได้รับมาตอนแรกหรือความรู้เดิมกับสถานการณ์ใหม่ที่ยังไม่คุ้นเคย การแก้ปัญหานั้นจะต้องใช้หลาย ๆ มโนคติหรือหลายทฤษฎี หลายสูตรมาผสมผสานกันจึงจะแก้ปัญหาได้

Mark (1965) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับการแก้ปัญหาไว้ว่า "การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการสำรวจและค้นพบ ซึ่งอาจก่อให้เกิดการพัฒนาความสามารถหรือความคิดใหม่ ๆ ได้"

May (1970) ได้กล่าวว่า "การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการซับซ้อนทางสมอง ซึ่งเกี่ยวข้องกับการจินตนาการ การจัดกระทำ และการรวบรวมความคิด"

Lyle E. Bourne, Bruce R. Ekstrand and Roger L. Dominoski (1971) ได้ให้แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาไว้ว่า "การแก้ปัญหาเป็นกิจกรรมที่เป็นทั้งการแสวงหาความรู้ ความคิดจากประสบการณ์ก่อน ๆ และส่วนประกอบของสถานการณ์ที่เป็นปัญหาในปัจจุบัน โดยนำมาจัดเรียงลำดับใหม่ เพื่อผลของความสำเร็จในจุดมุ่งหมายเฉพาะอย่าง"

Polya (1957) ได้ให้ความหมายการแก้ปัญหาว่า การแก้ปัญหาคือ การหาวิธี การที่ยังไม่รู้ เพื่อให้ได้คำตอบที่ชัดเจน วิธีแก้ปัญหาคือ การหาวิธีหรือหนทาง โดยที่หนทาง เหล่านั้นมิใช่ได้มาอย่างง่ายดายน ในการแก้ปัญหานักเรียนต้องใช้เวลาความสามารถในทุก ๆ ด้าน การวิเคราะห์ข้อมูลปัญหา การเชื่อมโยงข้อมูล และทักษะการคิดคำนวณต่าง ๆ ในหนังสือ แบบเรียนนั้น โจทย์ปัญหาต่าง ๆ มักจะง่ายไม่ซับซ้อน จนทำให้นักเรียนไม่ให้ความสำคัญกับการแก้ปัญหามากนัก โจทย์ส่วนใหญ่เป็นการฝึกตามกฎเกณฑ์ ซึ่งผลตามมาก็คือ นักเรียนคิดว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาทักษะอย่างเดียว ถ้าฝึกมาก ๆ ก็จะมีบรรลุผลทำให้แนวคิดเกี่ยวกับการค้นพบ การคิดค้นของนักเรียนลดลงไป

Polya เน้นว่าการแก้ปัญหานั้น เป็นกระบวนการที่บางทีมิใช่หนทางที่จะ ให้ได้มาซึ่งคำตอบง่าย ๆ หากแต่ช่วยนำไปสู่คำถาม และปัญหาอื่น ๆ อีก ครูควรสอนให้นักเรียน รู้จักคิด อย่างมีวัตถุประสงค์ ซึ่งครูสามารถทำได้โดยไม่พยายามบอกข้อมูลทุกอย่างให้นักเรียน นักเรียนควรหาวิธีทำความเข้าใจกับข้อมูลที่กำหนดให้โดยใช้ความรู้ ความสามารถที่ได้เรียนมา หรือมีประสบการณ์มาช่วย ในบางกรณีครูต้องสอนให้นักเรียนรู้จักเดาอย่างมีเหตุผล นอกจากนั้น ยังสรุปว่านักเรียนที่มีทักษะการแก้ปัญหานี้ คือ คนที่มีโอกาสแก้ปัญหาย่อย ๆ และมีกระบวนการ เป็นขั้นตอน

สรุปได้ว่า การแก้ปัญหานั้นเป็นกระบวนการที่แต่ละคนใช้ความรู้ ทักษะ ความเข้าใจ และประสบการณ์ เพื่อที่จะทำให้เกิดความพึงพอใจหรือคำตอบ และผลของความสำเร็จใน จุดมุ่งหมาย

ลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหตามแนวคิดของ โพลยา

Polya (1957) ได้จัดลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the Problem) สิ่งแรกที่จะต้องทำความเข้าใจคือ สัญลักษณ์ต่าง ๆ ในปัญหา นักเรียนต้องสามารถสรุปปัญหาออกมาใน ปรภาษาของตนเองได้ โดยบอกได้ว่าประเด็นปัญหาอยู่ตรงไหน โจทย์ถามอะไร อะไร เป็นสิ่งที่ โจทย์กำหนดให้ โจทย์ให้เงื่อนไขอะไรบ้าง และถ้าจำเป็นจะต้องใช้ข้อมูลต่าง ๆ นักเรียน ควรเลือกสัญลักษณ์ที่เหมาะสม โดยพิจารณาอย่างรอบคอบแล้วสรุปออกมา

2. **ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา (Devising a Plan)** นักเรียนจะต้องมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ในปัญหาอย่างชัดเจนเสียก่อน สิ่งที่ต้องการหาความสัมพันธ์กับข้อมูลที่ให้มาอย่างไร สิ่งที่สำคัญในขั้นนี้คือ นักเรียนต้องฝึกทบทวนความรู้ที่มีว่า มีความรู้อะไรบ้าง และเป็นความรู้ที่สัมพันธ์กับปัญหาหรือไม่ เทคนิคอย่างหนึ่งที่จะช่วยในการวางแผนแก้ปัญหา คือ การพยายามนึกถึงปัญหาที่เคยแก้มาก่อน ซึ่งมีลักษณะปัญหาใกล้เคียงกับปัญหาปัจจุบัน ฉะนั้น จะช่วยให้สามารถวางแผนแก้ปัญหาได้ใกล้เคียงกัน ในการวางแผนควรแบ่ง เป็นขั้นตอน โดยแบ่งเป็นขั้นตอนใหญ่ ๆ และในขั้นตอนแต่ละขั้นจะแบ่งออกเป็นขั้นตอนย่อย ๆ อีกมากมาย นอกจากนี้ จะต้องมองเห็นว่า ถ้าต้องการสิ่งหนึ่ง จะต้องใช้เหตุผลหรือข้ออ้างอะไรบ้างเพื่อให้ได้สิ่งนั้นตามต้องการ ซึ่งในขั้นนี้นักเรียนอาจใช้เทคนิควิธีหลาย ๆ อย่างช่วยวางแผน ได้แก่ วาดภาพ วาดแผนผัง ใช้กรณีตัวอย่าง ทำตาราง เขียนประโยคสัญลักษณ์

3. **ขั้นลงมือทำตามแผน (Carry out the Plan)** ขั้นนี้นักเรียนลงมือทำการคิดคำนวณตามแผนการที่วางไว้ในขั้นที่ 2 เพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา สิ่งที่ต้องใช้ในขั้นนี้ คือ ทักษะการคิดคำนวณ การรู้จักเลือกวิธีคำนวณที่เหมาะสม

4. **ขั้นตรวจวิธีการและคำตอบ (Looking back)** ขั้นนี้เป็นขั้นตรวจสอบเพื่อแน่ใจว่า คำตอบนั้นถูกต้องสมบูรณ์ โดยการพิจารณาและสำรวจจุดผล ตลอดจนกระบวนการในการแก้ปัญหา นักเรียนต้องรวบรวมความรู้ที่มีอยู่ และพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเข้าด้วยกัน เพื่อทำความเข้าใจและปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้น

สรุปได้ว่าขั้นตอนในการแก้ปัญหามาตามแนวคิดของ โพลยา นั้น ประกอบด้วย ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา ขั้นลงมือทำตามแผน และขั้นตรวจวิธีการและคำตอบ ซึ่งขั้นตอนดังกล่าวจะช่วยให้ผู้แก้ปัญหาสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

7. การเรียนการสอนกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

สำหรับการจัดการเรียนการสอนเพื่อแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น ได้มีผู้ทำการวิจัยเกี่ยวกับองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ในลักษณะของการหาความสัมพันธ์ และการเปรียบเทียบการ lösen พอสรุปได้ดังนี้

Hall (1977) ได้ศึกษาผลของการสอนการวิเคราะห์การแก้ปัญหา
 คิดค่าลัดร และความสามารถในการวิเคราะห์ ผลปรากฏว่า นักเรียนที่มีความสามารถใน
 การวิเคราะห์สูง มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าลัดรสูงกว่านักเรียนที่มีความ
 สามารถในการวิเคราะห์ต่ำ

แก่นน้อย ทองรวี (2526) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความ
 สามารถด้านเหตุผลเชิงถ้อยคำ และความสามารถในการใช้นิยามและทฤษฎีบทกับความสามารถ
 ในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าลัดรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 พบว่า ความสามารถด้าน
 เหตุผลเชิงถ้อยคำมีความสัมพันธ์ทางบวกกับความสามารถในการแก้ปัญหา คิดค่าลัดร ซึ่งสอดคล้อง
 กับงานวิจัยของ Mavis Doughtly Martin (1964) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความเข้าใจ
 ในการอ่าน การให้เหตุผลเชิงถ้อยคำ และการคำนวณพบว่า ความสามารถด้านเหตุผล
 เชิงถ้อยคำมีความสัมพันธ์ทางบวกกับโจทย์ปัญหา คิดค่าลัดร

จรรุวรรณ สิงห์ม่วง (2528) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาการทำนายผลสัมฤทธิ์ทาง
 การเรียนคิดค่าลัดรของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เขตการศึกษา 9 ผลการวิจัยพบว่า
 คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหา คิดค่าลัดรมีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 คิดค่าลัดร ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ จรรยา ภูอดม (2524) ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง
 ความสามารถในการแก้ปัญหา คิดค่าลัดร และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ผลการวิจัย
 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหา คิดค่าลัดรมีความสัมพันธ์กับคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
 วิชาภาษาไทยและคิดค่าลัดร

Clarkson (1979) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทักษะในการแปล
 ความหมายในวิชา คิดค่าลัดรกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าลัดร พบว่า ทักษะใน
 การแปลความหมาย เป็นองค์ประกอบหนึ่งของความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าลัดร
 ความเข้าใจในการอ่าน เป็นองค์ประกอบหนึ่งที่สำคัญในการแก้โจทย์ปัญหา เพราะการที่นักเรียน
 จะหาวิธีแก้โจทย์ปัญหาได้นั้น นักเรียนจะต้องอ่านโจทย์ปัญหาแล้วสามารถมองเห็นความสัมพันธ์
 ของสิ่งที่โจทย์กำหนดจากนั้น จึงจะหาวิธีการมาแก้ปัญหานั้น

Treacy (1966) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ของทักษะการอ่านที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่าการอ่านมีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับการวิจัยของ บุญรวย ฟูรักษา (2524) และ Elliot Vuzuru Koyanaki (1970) ที่ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจในการอ่านกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า ความเข้าใจในการอ่านกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กัน

Tucker (1975) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของความสามารถเบื้องต้น 3 ประการ ได้แก่ ความสามารถด้านการอ่าน การคำนวณ และทักษะในการให้ความหมายของรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่สนับสนุนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่า ความสามารถในการอ่าน ทักษะการคำนวณ และทักษะในการให้ความหมายของรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับปัญหา มีความสัมพันธ์กับความสามารถทางด้านความคิดแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นภาษา และที่เป็นรูปภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Vergineer Sho Marasgy (1979) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลของการแสดงออกทางการอ่านในคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยศึกษาทักษะ 5 ประการ คือ การจำสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์โครงสร้าง การทำนายเหตุการณ์ การวินิจฉัยเรื่องราวอย่างมีเหตุผล และการคิดประเมินค่า ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองซึ่งได้รับทักษะ 5 ประเภทข้างต้น มีคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ความสามารถในการเข้าใจหลักคณิตศาสตร์พื้นฐาน (การบวก ลบ คูณ หาร) ก็เป็นองค์ประกอบที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง ที่มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เพราะในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น นักเรียนจะต้องอาศัยทักษะในการ บวก ลบ คูณ และหารมาคำนวณในการหาคำตอบ ทั้งนี้ยืนยันได้จากผลการศึกษาของ Pace (1958) ที่ได้ทำการศึกษาผลของความเข้าใจหลักเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์ คือ การ บวก ลบ คูณ และหาร ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งสรุปผลการศึกษาได้ว่าความเข้าใจหลักคณิตศาสตร์พื้นฐานทั้งสิ้นเป็นองค์ประกอบที่สำคัญเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งผลการศึกษานี้สอดคล้องกับการศึกษาของ ลูมาลี รัตนพันธุ์ (2524) ที่ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์

ระหว่างทักษะคณิตศาสตร์ขั้นมูลฐานกับความล่ามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า ทักษะคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานมีความสัมพันธ์กับความล่ามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ วิมล ต้นลู่กุล (2527) ซึ่งได้ศึกษาความสัมพันธ์ ระหว่าง เชาวน์ปัญญา ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ความล่ามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นิสัยในการเรียน และทัศนคติในการเรียนกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการวิจัยพบว่า ความล่ามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์ในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

8. สื่อกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

สื่อการเรียนการสอนเป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างยิ่งที่จะทำให้กระบวนการเรียนการสอนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพและบรรลุเป้าหมายของการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยธรรมชาติแล้วเป็นวิชาที่มีลักษณะเป็นนามธรรมซึ่งค่อนข้างยากต่อการทำความเข้าใจ (ยุพิน พิพิธกุล, 2523 : 1) การใช้รูปธรรมอธิบายนามธรรมจะทำให้มองเห็นภาพพจน์ เกิดความเข้าใจง่ายขึ้น นอกจากนี้สื่อการเรียนการสอนยังช่วยทำให้เกิดการรับรู้หลายทาง เช่น โสตทัศนูปกรณ์ และยังมีสื่อการเรียนการสอนที่จัดขึ้นเพื่อนันทนาการ เช่น เกม กลอน เพลง ปริศนาคำทาย อีกด้วย ดังนั้น สื่อการเรียนการสอนจึงมีบทบาทต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง ดังที่ พิชากร แปลงประสพโชค (2525 : 64) ได้กล่าวไว้ว่า สื่อการเรียนการสอนมีบทบาทในการเตรียมความพร้อม เสริมสร้าง ความเข้าใจฝึกฝนทบทวน เสริมประสบการณ์และสร้างเจตคติที่ดีด้วย สื่อการเรียนการสอนนี้มักจะได้รับผลโดยตรงจากการเปลี่ยนแปลงหลักสูตร และความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ซึ่งต้องมีการปรับปรุงสื่อการเรียนการสอนและผลิตสื่อการสอนใหม่ ๆ อยู่เสมอ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ครูจะต้องมีความรู้ความสามารถไม่ว่าจะเป็นในด้านการใช้ การผลิตและสิ่งสำคัญคือต้องรู้จักเลือกและประยุกต์ใช้สื่อการเรียนการสอนให้สอดคล้องกับเนื้อหาและวิธีการสอน

ในปัจจุบันยังมีครูคณิตศาสตร์เป็นจำนวนมากที่ละเลยไม่สนใจต่อการนำสื่อการเรียนการสอนมาใช้ โดยอ้างว่าเสียเวลา ซึ่งความจริงแล้วถ้ารู้จักเลือกใช้ให้เหมาะสมแล้วจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจดียิ่งขึ้น บางคนก็อ้างว่าไม่มีงบประมาณซื้อหรือทำ ซึ่งถ้าได้ศึกษาค้นคว้าแล้วสื่อการเรียนการสอนที่มาจากสิ่งแวดลอม วัสดุหาง่ายและประหยัดมีอีกมากที่ครูสามารถจัดทำขึ้น และนำมาใช้ประกอบการเรียนการสอนได้

ความหมายของสื่อการสอน

ลู่นัท บัทมาคม (2520) ใหัความเห็นสรุปไต้ว่า สื่อการสอนสััดเป็นเทคโนโลยีทางการเรียนการสอนลั่วนหนึ่งที่จะช่วยใหัผู้ลัอนประลัผลลัาเรีจในการลัอน ทำใหัผู้เรียนลันใจพอใจ และลันุกลัานาน สื่อการสอนจะเป็นสื่อกลางที่ใหัเนื้อหาของบทเรียนที่ยากกลัอง่ายขึ้น ทำใหับทเรียนที่ซับซ้อนซััดเจเนยั้งขึ้น

Gerlach and Ely (1971) ไต้กล่าวสรุปไต้ว่า บุคคล วัลดู หรือเหตุการณั์ต่าง ๆ ซึ่จะทำใหันักเรียนไต้รับความรุ้ ทักษะ และที่คัณคัดิ ครู หนัังสื่อ และลัิ่งแวดลัอมของโรงเรียน สััดเป็นสื่อการสอนทังลัิน

Shores (1980) กล่าวว้า สื่อการสอน คือ เครื่องมือช่วยในการสื่อความหมาย สััดขึ้นโดยครู และนักเรียน เช่น หนัังสื่อในห้องลัมุด โล้ดที่คัณวัลดูต่าง ๆ เช่น ฟิล์มลัตรีป ลัไลด้ แผนทึ ของจรัจ และทรัพยากรจากขุ่มนัชน เป็นตััน

จากความหมายของสื่อการสอนทังหมตพอสรุปไต้ว่า สื่อการสอน คือ วัลดู อุปรณั์ หรือเทคนัคต่าง ๆ ที่จะยั้เป็นสื่อกลางในการถัายทอดความรุ้จากผู้ลัอนไปยั้งผู้เรียน ช่วยใหัเนื้อหาวิชาที่ยากกลัอง่ายขึ้น และเป็นลัิ่งเร้าที่ ทำใหัผู้เรียนเกัิดความลันใจ พอใจ และลันุกลัานานในการเรียน

ประ เภทของสื่อการสอน

เนื่องจากสื่อการสอนมีมากมายหลายยัณด ในโรงเรียนต่าง ๆ ซึ่จมักเก็บสื่อการสอนแยกเป็นประ เภท ๆ เพื่อลัะดวทกัแก่การนำม้ายั้ การจ้าแนทประ เภทของสื่อการสอนนี้ไต้มีการจ้าแนทไว้หลายแบบโดยยั้ดหลักการที่แตกต้างกันออกไป

Gerlach และ Ely (1971) ไต้จ้าแนทสื่อการสอนออกเป็น 8 ประ เภท ดังนี้

1. ของจรัจ ตัวบุคคล รวมทั้งลัภาพการณั์ที่เกัิดขึ้นจรัจ ๆ เช่น การลัาไรด้ การทลลอง การลัักขานอกลัถานที่
2. สื่อการสอนประ เภทภาษาพูด หรือภาษาเขียน หมายถึง คำพูด ตัาร้า วัลดูตั้ทิมทึ คำอธิบายในลัไลด้ ฟิล์มลัตรีป แผนโปรงัลั

3. วัสดุกราฟฟิค เช่น แผนภูมิ แผ่นภาพ สไลด์ แผ่นโฆษณา การ์ตูน แผนที่ ลูกโลก ภาพวาด วัสดุประเภทนี้นอกจากจะนำมาใช้โดยตรงแล้วยังปรากฏอยู่ในตำราแบบเรียน หนังสืออ้างอิงต่าง ๆ บนแผ่นภาพโปร่งใส ในฟิล์มสไลด์ สไลด์ เป็นต้น

4. ภาพนิ่ง เป็นภาพที่ได้จากการถ่ายภาพ ได้แก่ ภาพถ่ายทั่ว ๆ ไป อาจใช้โดยลำพัง หรือใช้กับเครื่องฉายภาพทึบแสงให้มีขนาดตามต้องการ

5. ภาพเคลื่อนไหว ได้แก่ ภาพยนตร์ โทรทัศน์

6. การบันทึกเสียง ได้แก่ เสียงจากเทปบันทึกเสียง จากแผ่นเสียง จากร่องเสียงของฟิล์มภาพยนตร์ ฯลฯ

7. สื่อประเภทโปรแกรม เป็นสื่อการสอนที่แสดงขั้นตอนในสิ่งที่จะสอน อาจใช้สื่อประเภทสัญลักษณ์ ทicker วัสดุหรือสไลด์ที่ค้นวัสดุรวมกัน เช่น บทเรียนแบบโปรแกรม บทเรียนสำเร็จรูปที่ใช้กับเครื่องช่วยสอนหรือใช้กับคอมพิวเตอร์

8. สื่อประเภทสถานการณ์จำลองและชุดการสอน ได้แก่ การแสดงบทบาท ละคร

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (2525 : 31 - 40) กล่าวถึงการแบ่งประเภทของสื่อการสอนไว้ดังนี้

ก. จัดแบ่งประเภทตามลักษณะการใช้

1. แบ่งตามลักษณะการฉาย แบ่งเป็น

1.1 วัสดุฉายได้ เช่น สไลด์ ภาพยนตร์ แผ่นโปร่งใส

1.2 วัสดุฉายไม่ได้ เช่น รูปภาพ โปสเตอร์ แผนภูมิต่าง ๆ

2. แบ่งตามลักษณะการใช้เสียง แบ่งเป็น

2.1 แผ่นเสียง

2.2 เทปบันทึกเสียง

2.3 เทปโทรทัศน์

3. แบ่งตามความคงทนและความสิ้นเปลือง แบ่งเป็น

3.1 วัสดุ ได้แก่ สื่อประเภทสิ้นเปลืองซึ่งใช้หมดไป

3.2 อุปกรณ์ ได้แก่ เครื่องมือต่าง ๆ ทั้งเครื่องฉาย เครื่องเสียง

ซึ่งไม่สิ้นเปลืองได้ง่าย

4. แบ่งตามจำนวนสื่อที่ใช้ แบ่งเป็น

4.1 สื่อเดี่ยว คือ ใช้สื่อแต่ละอย่างเพียงอย่างเดียว

4.2 สื่อประสม คือ การใช้สื่อตั้งแต่ 2 อย่างขึ้นไป

5. แบ่งตามลักษณะการจัดสื่อเป็นชุด แบ่งได้เป็น

5.1 ชุดอุปกรณ์ คือ ชุดสื่อการสอนที่ใช้สื่อชนิดหลายเรื่อง เช่น ชุดอุปกรณ์วิทยาศาสตร์

5.2 ชุดการสอน คือ ชุดสื่อการสอนที่จัดขึ้นมีวัตถุประสงค์เดียว

ข. จัดรูปแบบตามกิจกรรม แบ่งเป็น

1. สื่อช่วยครูสอน หมายถึง สื่อที่ครูเป็นผู้ใช้ เช่น ฟิล์ม กระดานดำ แผนที่ รูปภาพ ฯลฯ ที่ครูเป็นผู้ใช้แต่เพียงผู้เดียว

2. สื่อช่วยนักเรียนเรียน หมายถึง สื่อที่เตรียมไว้ให้เด็กเป็นผู้หยิบใช้ เช่น สื่อสำหรับกิจกรรมกลุ่ม หรือสื่อการสอนตามเอกัตภาพ

3. สื่อที่ช่วยให้ครูและนักเรียนช่วยกัน หมายถึง สื่อที่ทำให้ครูและนักเรียนได้ช่วยประกอบกิจกรรมการเรียน เช่น การเล่นเกม การสาธิต ทดลอง เป็นต้น

ค. จัดรูปแบบตามประสบการณ์ แบ่งเป็น

1. สื่อประสบการณ์นามธรรม หมายถึง สื่อที่ใช้ประสบการณ์ทางอ้อมที่เรียนรู้ให้เข้าใจได้น้อย เช่น สื่อประเภทหนังสือ แบบเรียน ตำรา แผ่นเสียง เทปเสียง รายการวิทยุ ฯลฯ

2. สื่อประสบการณ์รูปธรรม หมายถึง สื่อที่ใช้ประสบการณ์ตรง ซึ่งเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ฟัง ได้เห็น และลงมือกระทำ เช่น การจำลองสถานการณ์ การแสดงละคร การเข้าไปอยู่ในสถานการณ์จริง เป็นต้น

การแบ่งประเภทของสื่อการสอนนี้แม้ได้จัดหลายแนว แต่ก็สามารถสรุปได้เป็น

3 ประเภท คือ

1. สื่อการสอนประเภทวัสดุ หมายถึง สื่อการสอนที่เป็นวัสดุสิ้นเปลือง ไข่แล้วหมดไป หรือดูฟังได้ง่าย เช่น สิ่งพิมพ์ ภาพชุด แผนภูมิ แผนภาพ สไลด์ ฟิล์มลึตรูป เทปชุดการสอน เป็นต้น

2. สื่อการสอนประเภทอุปกรณ์ หมายถึง สื่อประเภทเครื่องมือซึ่งรวมเครื่องมือที่ใช้ประกอบการสอนโดยตรง เช่น ของจริงหรือหุ่นจำลองต่าง ๆ และเครื่องมือสำหรับเล่นอวัสดุ เช่น เครื่องฉายทั้งหลาย สื่อประเภทอุปกรณ์ยังหมายถึง กระดานดำ ขาดัง ภาพพลิก หูฟังและคู่มือหูฟัง เครื่องมือทดลองวิทยาศาสตร์ และครุภัณฑ์ทุกประเภทในห้องเรียนและห้องปฏิบัติการ

3. สื่อการสอนประเภทวิธีการ หมายถึง วิธีการและกิจกรรมทุกอย่างที่ครูและนักเรียนจัดขึ้นทั้งในและนอกห้องเรียน วิธีการเป็นสื่อการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอนอย่างกระฉับกระเฉง และมีประสบการณ์ตรงจากการลงมือปฏิบัติงาน วิธีการที่ใช้กันมากมี 9 ประเภท คือ

3.1 การเล่าเรื่อง

3.2 การทดลอง

3.3 เกม

3.4 การแสดงบทบาทสมมติ

3.5 การจำลองสถานการณ์

3.6 การฝึกปฏิบัติจริงหลังจากเรียนทฤษฎี

3.7 หัดค้นศึกษา

3.8 กิจกรรมอิสระ

3.9 กิจกรรมที่ทำขึ้นตามโครงการ

หลักการเลือกใช้สื่อการสอน

การเลือกสื่อการสอนนับว่ามีความสำคัญมากต่อการเรียนการสอน ครูจะต้องเลือกวัสดุหรืออุปกรณ์ที่จะสามารถนำไปสู่วัตถุประสงค์ที่ต้องการ วิรุทธิ สลาพัทธิ (2522 : 23) ได้ให้ข้อเสนอแนะในการเลือกสื่อการสอนไว้ 5 ประการ ดังนี้

1. สื่อนั้นเหมาะสำหรับสอนเพื่อบรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้หรือไม่
 2. สื่อนั้นถึงผลยังระดับความเข้าใจของนักเรียนหรือไม่
 3. ค่าใช้จ่ายในการใช้สื่อการสอนนั้นคุ้มกับผลลัพธ์ที่ได้จากการเรียนของนักเรียนหรือไม่
 4. สื่อนั้นหามาใช้ได้สะดวกหรือไม่ในเวลาที่ต้องการ
 5. คุณภาพทางเทคนิคของสื่อ เช่น วัสดุสื่อความหมายได้ชัดเจนหรือไม่
- Wittich and Schuller (1982) เสนอเกณฑ์ในการเลือกสื่อการสอนไว้

3 ประการ ดังนี้

1. สื่อการสอนนั้นต้องมีความเหมาะสมต่อระดับชั้นและวัยของผู้เรียน
2. สื่อการสอนนั้นให้ความรู้ที่แน่นอนและถูกต้อง
3. พิจารณาปัจจัยเกี่ยวกับเสียง การสื่อความหมาย สี และปัจจัยเกี่ยวกับการเห็น และการได้ยิน

สื่อการสอนที่มีประสิทธิภาพจะช่วยให้การเรียนรู้ของผู้เรียนดีกว่าสื่อการสอนที่ด้อยประสิทธิภาพ ลักษณะของสื่อการสอนที่มีประสิทธิภาพจึงเป็นเกณฑ์อย่างดีในการเลือกใช้สื่อการสอน ดังที่ Elizabeth G. Noel and Paul J. Leonard (1982) ได้ให้เกณฑ์ไว้ดังนี้

1. มีความเหมาะสมกับระดับอายุและระดับสติปัญญาของนักเรียน
2. เหมาะสมกับประสบการณ์เดิมของนักเรียน
3. เหมาะสมกับความต้องการและความสนใจของนักเรียน
4. เหมาะสมกับเรื่องที่สอน
5. มีลักษณะที่น่าสนใจ
6. ตรงกับจุดมุ่งหมายในการสอน

7. ไม่ทำให้เสียเวลาในการใช้มากเกินไป
8. ให้ความคิดรวบยอดที่ง่ายและไม่ซับซ้อนจนเกินไป
9. เป็นแบบง่าย ๆ
10. ช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาวิชาดีขึ้น
11. ช่วยในการเสริมสร้างทัศนคติที่ดีแก่นักเรียน
12. ช่วยเพิ่มทักษะให้นักเรียน
13. ให้ผลดีต่อการสอนมากที่สุด
14. ราคาไม่แพงจนเกินไป

หลักการใช้สื่อการสอน

สื่อการสอนเป็นองค์ประกอบหนึ่งของระบบการเรียน การใช้สื่อการสอนจึงต้องมีการวางแผนโดยดูว่าต้องการสอนหัวข้ออะไร เมื่อเรียนแล้วผู้เรียนจะมีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมอย่างไรบ้าง เนื้อหาที่เรียนมีอะไรบ้าง มีวิธีการเรียนอย่างไรบ้าง มีการแบ่งกลุ่ม การจัดสถานที่เรียน และเวลาที่กำหนดให้เรียนอย่างไร วิธีการเรียนหรือกิจกรรมการเรียน ต้องอาศัยสื่อการเรียนอะไรจึงจะเหมาะสม เมื่อเป็นเช่นนี้ตัวกำหนดว่าสื่อการเรียนควรเป็นอะไร มีลักษณะอย่างไร มีวิธีการอย่างไร ก็คือกิจกรรมการเรียน เนื้อหาที่เรียน พื้นฐานของผู้เรียน ขนาดของกลุ่มผู้เรียน เวลา และสถานที่ของการเรียน ทั้งหมดนี้กล่าวในหัวข้อการเรียนที่กำหนดขึ้น นอกจากนี้ยังมีข้อพิจารณาอย่างอื่นเกี่ยวกับสื่อการเรียนดังนี้

1. สื่อการเรียนช่วยครูหรือช่วยนักเรียน บางครั้งครูนำสื่อมาแต่ครูเป็นผู้อธิบายสื่อทั้งหมด โดยผู้เรียนไม่ได้มีส่วนร่วมอยู่ด้วยเลย แทนที่ครูจะให้ให้นักเรียนค้นหาคำตอบจากสื่อ
2. สื่อการเรียนที่เหมาะสมทุกด้านคงไม่มีหรือหายากมาก ความเหมาะสมที่ควรพิจารณา เช่น เหมาะสมกับจุดมุ่งหมายของการเรียน เนื้อหาที่จะเรียน วิธีการเรียน พื้นฐานของผู้เรียน สถานที่การณ์ และเวลาที่กำหนดให้เรียน นอกจากนี้ยังมีปัญหาเรื่องทุน แรงงาน เวลา ความทนทาน รวมทั้งหลักทางจิตวิทยา เมื่อพูดถึงความเหมาะสมคงได้แก่สื่อการเรียนที่เหมาะสมมากที่สุดในบรรดาความเหมาะสมทั้งหลายที่ตั้งไว้
3. สื่อการเรียนไม่อาจกล่าวได้ว่าถูกหรือแพงดีกว่ากัน แต่ขึ้นอยู่กับผลสัมฤทธิ์ที่ได้จากการใช้สื่อ ถ้าสื่อใดมีผลสัมฤทธิ์ดีกว่าก็ถือว่าเป็นสื่อที่ดีกว่า มีคุณภาพมากกว่า

4. ใช้สื่อหลายอย่างดีกว่าการใช้สื่ออย่างเดียว เพราะสื่อชนิดเดียวกันยังไม่สมบูรณ์ (ทางการให้ความรู้) ในตัวของมันเอง จึงควรมีสื่อหลายชนิด เพื่อเสริมให้สมบูรณ์ขึ้นในที่สุด (เปรื่อง กุมุท 2526 : 18 - 19)

สุภาพ วาดเขียน (2520) ได้ให้คำแนะนำในการใช้สื่อการสอน ดังนี้

1. สื่อการสอนที่นำมาใช้ต้องเหมาะสมกับเนื้อหาที่จะสอน และใช้ประกอบการสอนอย่างจริงจังโดยมีการตระเตรียมล่วงหน้าเป็นอย่างดี
2. สื่อการสอนที่นำมาใช้จะต้องปรับให้เหมาะสมกับความสนใจ ประสบการณ์ และระดับสติปัญญาของผู้เรียน
3. คำนวณระยะเวลาการใช้สื่อการสอนให้เหมาะสม กำหนดเวลาให้แน่นอนว่าจะใช้เมื่อใด เป็นเวลาเพียงใด อย่าให้เป็นการถ่วงการอ่านหรือรวดเร็วเกินไปจนนักเรียนตามไม่ทันและไม่เข้าใจ
4. วางแผนการใช้สื่อการสอนไว้ล่วงหน้าอย่างรอบคอบว่าจะเลือกใช้สื่อใดกับเนื้อหาตอนใด และจะใช้อย่างไร
5. ชักซ้อมการใช้สื่อที่เตรียมไว้ให้คล่องแคล่ว ใหม่นั้นใจ ถ้าการใช้สื่อต้องมีผู้ช่วย ก็ควรชักซ้อมไว้ให้พร้อมเช่นกัน
6. ขนาดของสื่อควรมีขนาดใหญ่พอให้เห็นทั่วกัน ถ้าเป็นสิ่งที่จะให้ฟัง ก็ควรตั้งพอได้ยินทั่วกัน ชัดเจน และสม่ำเสมอ
7. ขณะใช้สื่ออย่ายืนบังนักเรียน ควรยืนอยู่ด้านหลังหรือด้านข้าง การชี้หรืออธิบายสื่อควรใช้ไม้ชี้จะไม่เป็นการบังผู้ดู
8. สื่อที่นำมาให้ดูควรอ่านเข้าใจและรู้เรื่องสำคัญได้ทันที ซึ่งไม่ควรบรรจุนายละเอียดลงในสื่ออย่างใดอย่างหนึ่งมากเกินไป ถ้ามีรายละเอียดมากควรแบ่งเล่นเป็นส่วน ๆ และคัดรายการ ปักย้อยที่ไม่จำเป็นออกเสียเพื่อไม่ให้นักเรียนเกิดสับสน

9. เมื่อยังไม่ถึงเวลาจะไขสื่อก ควรจะซ่อนหรือปิดบังไว้เสียก่อน ถ้าเปิดหรือทิ้งไว้ให้เห็น อาจทำให้ความสนใจของนักเรียนลดลงไปได้
10. ในขณะที่ไขสื่อกการซ่อน ต้องหันหรืออำเสื่องดูนักเรียนอยู่เล่มมอ อย่าเพลลนอธิบายและดูอยู่แต่สื่อกการซ่อน จะไม่ทราบว่่านักเรียนมีปฏิกริยาใดในขณะนั้น
11. ตัวอักษรและข้อความที่เขียนอธิบายประกอบ แผนภูมิ โตอะแกรม ฯลฯ ควรมีข้อความกระทัดรัด ขนาดตัวอักษรใหญ่พอเห็นได้ชัดเจนทั่วไป
12. อย่าปล่อยให้ผู้เรียนต้องรอคอยการบรรยายนานเกินไป เนื่องจากผู้ล่อนมั่วแต่เตรียมการล่อนอยู่ ผู้เรียนอาจหมดความสนใจ และจะยากแก่การทำให้้่นักเรียนกลับมามีสนใจอีก
13. อย่านำสื่อกมาเล่นจนกว่าจะถึงโอกาสที่ไข หรือเมื่อไขล่เสร็จ เรียบร้อยแล้ว ควรมำออกไปให้ทันหรือปิดซ่อนให้ทันล่ายตาเสีย เพื่อที่ขณะไม่ไขจะไม่แย่งความสนใจขณะล่อน
14. ตามปกติโต๊ะครผู้ล่อนเป็นที่เหมาะที่จะเล่นอล่ประกอบคำบรรยายหากล่อบางอย่างต้องไขที่วางตั้ง เป็นพิเศษ เช่น โต๊ะ ขาหย่ง เวทียกพื้น ตลอดจนล่พิเศษ เช่น ล่ายไฟ มำนบงแสง ฯลฯ ต้องเตรียมไว้ให้พร้อม
15. การให้้่นักเรียนดูสื่อกการล่อนเป็นรายบุคคลในระหว่างการล่อนโดยล่งผ่านต่อ ๆ กันไปจนครบนั้นหากไม่จำเป็นแล้วไม่ควรไข เพราะจะเสียเวลามาก และนักเรียนที่ไม่ได้กำล่งดูอยู่จะเสียความสนใจและอาจเอะอะโกลาหลขึ้นได้ ในกรณีที่มีล่อย่างเดียวกันนั้น จำนวนเพียงพอที่จะแยกดูเป็นรายบุคคลได้ ควรจะหาผู้ช่วยแจกในระหว่างที่ผู้ล่อนหยุดพูดแล้ว และในขณะเดียวกันควรชี้แจงล่น ๆ ให้ผู้ดูเข้าใจด้วยว่าล่ที่แจกไปล่นนั้นเกี่ยวกับเรื่องที่จะล่อนอย่างไร และขอให้เก็บไว้ก่อนจนกว่าจะถึงเวลาไข

จากหลักการไขสื่อกการล่อนซึ่งได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ หากครูให้้่นความสนใจและนำไปเป็นหลักปฏิบัติเกี่ยวกับการไขสื่อกการล่อนแล้ว ก็เชื่อว่าจะทำให้การเรียนการล่อนบรรลุตามเป้าหมายที่ได้ตั้งไว้ได้อย่างแน่นอน

ผลของการใช้สื่อการสอนในการเรียนการสอน

ความสำคัญของสื่อการสอนเป็นสิ่งที่ไม้อาจปฏิเสธได้ เนื่องจากมีทฤษฎีการเรียนรู้หลายประการที่สนับสนุนบทบาทของสื่อการสอน โดยเฉพาะทฤษฎีที่สนับสนุนแนวคิดที่ว่า การเรียนรู้เกิดจากประสบการณ์และการเรียนรู้เกิดจากการปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเอง (ชียยงค์ พรหมวงศ์, . 2525) ในปัจจุบันทฤษฎีการเรียนรู้แนวนี้กำลังเป็นที่นิยมและเชื่อว่าได้ผลดี กิจกรรม และสื่อการสอนจึงมีความสำคัญมาก Richey (1978) ให้ความเห็นว่า สื่อการสอนจึงมีความจำเป็นเพราะสังคมมีความเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ ความรู้ใหม่ ๆ เกิดขึ้นมาก ทำให้ครูต้องสอนเนื้อหาวิชามากขึ้น จำนวนนักเรียนเพิ่มขึ้น สื่อการสอนเป็นสิ่งสำคัญในการสอนที่จะเน้นให้เอกัตบุคคล ให้มีประสิทธิภาพ ช่วยแก้ปัญหานักเรียนที่มีภูมิหลังและพื้นฐานการเรียนที่แตกต่างกัน รวมทั้งนักเรียนที่เสียเปรียบทั้งทางด้านสติปัญญา และเศรษฐกิจ

De. Kieffer (1976) กล่าวว่า มีการวิจัยหาประสิทธิภาพของการใช้สื่อการเรียนการสอน และผลของการศึกษาได้แสดงถึงคุณค่าที่ได้รับจากสื่อการสอน ดังนี้

1. กระตุ้นความสนใจแก่ผู้เรียน และเน้นปัจจัยสำคัญในการเรียนรู้
2. สร้างความเข้าใจที่เป็นรูปธรรม
3. สัดการเรียนรู้ที่เน้นพัฒนาการ และทำให้ความรู้นั้นคงทนถาวร
4. สัดประสบการณ์ให้มีส่วนช่วยในการเรียนรู้อย่างลึกซึ้ง
5. ช่วยให้ความเข้าใจมากขึ้น
6. ให้ประสบการณ์จริงซึ่งกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดกิจกรรม
7. รุจใจผู้เรียนให้สืบล้วนค้นคว้าโดยการอ่าน

สมหญิง กลิ่นศิริ (2521) ได้สรุปผลวิจัยของนักการศึกษาทั้งในประเทศและต่างประเทศเกี่ยวกับผลของการใช้สื่อการสอน ดังนี้

1. ช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้ดีขึ้นอย่างแน่นอน
2. ช่วยให้ผู้เรียนจดจำเรื่องราวต่าง ๆ ได้มากขึ้นและจำได้ทันาน
3. ช่วยให้ผู้เรียนเกิดความสนใจ และขยันให้กระทำกิจกรรมด้วยตนเอง

4. คุณลักษณะที่เป็นรูปธรรมและเป็นจริง ช่วยให้นักเรียนเข้าใจความหมายในสิ่งนั้นได้กว้างขวาง และเป็นแนวทางที่จะช่วยให้เข้าใจสิ่งอื่น ๆ ได้ดียิ่งขึ้นด้วย

5. ช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ทันทีได้ดียิ่งขึ้น
6. ช่วยลดคำตอบหรือคำบรรยายที่เป็นคำพูดของผู้สอน
7. ช่วยให้ผู้เรียนเรียนได้เร็วและมากขึ้น
8. ใช้สื่อการสอนเป็นประจำสามารถเปลี่ยนแนวคิดและทัศนคติได้
9. ช่วยส่งเสริมการคิดและการแก้ปัญหา
10. ใช้สื่อการสอนช่วยเร่งทักษะการเรียนรู้

ผลของการใช้สื่อการสอนที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่าสื่อการสอนมีคุณค่าอย่างมากต่อการเรียนการสอน มีงานวิจัยที่แสดงให้เห็นถึงคุณค่าและผลของการใช้สื่อการสอน เช่น

สุปาณี อุณหโศคา (2519 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่สี่ จากชุดสื่อการสอนด้วยตนเองในวิชาวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนศิริกุลพิทยภา ปีการศึกษา 2519 จำนวน 2 กลุ่ม กลุ่มละ 15 คน ซึ่งมีความรู้วิชาวิทยาศาสตร์ระดับเดียวกัน กลุ่มทดลองสอนเป็นรายบุคคลด้วยชุดสื่อการสอนรายบุคคล กลุ่มควบคุมสอนนักเรียนเป็นกลุ่มในชั้นเรียนโดยวิธีบรรยาย ผลการทดลองปรากฏว่ากลุ่มที่สอนโดยใช้ชุดสื่อการสอนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่สอนแบบบรรยายอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

อัจฉราพรธณ เกิดแก้ว (2524 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการสอนมโนทัศน์พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ด้วยชุดสื่อการสอน และการบรรยายสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนพิบูลอุปถัมภ์ สังกัดสำนักงานการประถมศึกษากรุงเทพมหานคร จำนวน 2 ห้อง ห้องละ 30 คน รวม 60 คน ผลการวิจัยปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดสื่อการสอน มีสัมฤทธิ์ผลในการเรียนมโนทัศน์พื้นฐานทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมที่ได้รับการสอนโดยวิธีบรรยาย

Bright, Harvey and Wheeler (1980) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการใช้ เกมสร้างพื้นฐานในการเรียนการคูณ โดยทำการทดลองกับเด็กเล็กที่เริ่มเรียนในชั้นประถม ซึ่งการทดลองครั้งนี้จะไม่ทำให้นักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่นักเรียนมีอยู่เดิมเปลี่ยนแปลงไป ผลปรากฏว่า เกมที่ใช้มีประสิทธิภาพต่อการเรียนอย่างมาก เพราะทำให้ผู้เรียนมีทักษะทางคณิตศาสตร์ที่คงทนถาวร

มิล (Mills 1980 : 974A) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลของการใช้สื่อการล่อน ซึ่งสร้างจากคอมพิวเตอร์ให้ปรากฏเสียงและภาพเพื่อฝึกทักษะเบื้องต้น ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยทำการทดลองกับนักเรียนระดับ 4 และระดับ 5 ผลปรากฏว่านักเรียนระดับ 4 และ 5 ที่ใช้สื่อการล่อนชนิดนี้ในการเรียนคณิตศาสตร์มีสัมฤทธิ์ผลในการเรียนทักษะเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้ใช้

9. ภาพกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์ที่มีลักษณะเป็นนามธรรมที่ยากจะอธิบายให้เข้าใจ และแก้ปัญหาก็ ต้องใช้สื่อการล่อนที่เป็นรูปธรรมมาช่วยในการแก้ปัญหา ภาพเป็นสื่อการล่อนที่สามารถเปลี่ยนเรื่องราวในโจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ให้ง่ายต่อการเข้าใจและได้มีผู้กล่าวถึงภาพกับการแก้โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

ลูว์ร กาญจนมยุร (2533) กล่าวว่า การวาดภาพประกอบโจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ ทำให้ข้อความในโจทย์ปัญหาชัดเจน เพราะมีภาพประกอบ นักเรียนหลายคนเข้าใจข้อความของโจทย์ปัญหาหลังจากวาดภาพประกอบเสร็จแล้ว

เขอรี อยู่ดี (2531) กล่าวว่า เทคนิควิธีการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา คณิตศาสตร์ที่จะเป็นประโยชน์สำหรับครู ได้แก่ เขียนออกมาว่าอะไร เป็นสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สิ่งที่ได้จากโจทย์ สิ่งที่ต้องการ แต่กโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ออกเป็นโจทย์ปัญหาขั้นตอนเดียว เขียนโจทย์ขึ้นพื้นฐาน ตั้งสิ่งที่ซ่อนอยู่ออกมา เขียนภาพ ทำย้อนกลับ และสร้างตาราง

บุญทิม อยู่่มบุญ และ ยุพิน พิพิธกุล (2530) กล่าวว่า การใช้และสร้างภาพประกอบการล่อนแก้โจทย์ปัญหา ผู้ล่อนควรจะฝึกการวาดภาพสายเส้นง่าย ๆ เพราะเมื่อล่อนไป วาดภาพไป หรือใช้ภาพสำเร็จ จะทำให้ผู้เรียนสนใจ และเข้าใจมากขึ้น

Polya (1973) บิดาแห่งการแก้ปัญหา ได้เสนอกลยุทธในการแก้ปัญหาวัวหลายกลยุทธ์ ได้แก่ เต่าและทดลอบ ใช้ตัวแปร ค้นหากระส่วน แก้ปัญหาที่ง่ายกว่า วาดภาพวาดแผนผัง แก้ปัญหาที่เหมือนกัน ท้าย้อนกลับ ใช้กรณีตัวอย่าง แก่สมการ ทำเหตุการณ์จำลอง เป็นต้น

Lesh and Zawojewski (1992) กล่าวว่า ยุทธศาสตร์ที่นำมาใช้ได้ง่ายไม่มีขั้นตอนที่ยุ่งยาก สำหรับช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียน ได้แก่ การให้นักเรียนวาดภาพ วิธีนี้สามารถช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งที่เกี่ยวข้องกับโจทย์ปัญหา เป็นการรวบรวมข้อมูลที่กระจัดกระจายออกมาให้เห็นเป็นเรื่องเป็นราวที่สั้น กระทัดรัด ได้ใจความ ช่วยให้นักเรียนเห็นภาพการเรียงลำดับเหตุการณ์ในโจทย์ปัญหาได้ ภาพทำให้นักเรียนได้ใช้จินตนาการทำซ้ำอีกครั้งในการแสดงถึงข้อมูล และการกระทำที่จะเกิดขึ้น สิ่งทำให้นักเรียนมองเห็นแนวทางแก้ปัญหาได้ชัดเจน ครูควรใช้สถานการณ์ที่นักเรียนคุ้นเคยและไม่ยุ่งยากซับซ้อน ในการสร้าง โจทย์ปัญหาให้นักเรียนวาดภาพ

Marks และคณะ (1952, อ้างถึงใน ลู่ชัย เหมะประสิทธิ์, 2533) ได้เสนอแนะวิธีการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าสูตรอย่างมีประสิทธิภาพว่า ควรสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาความสัมพันธ์ ครูควรใช้เทคนิคการวาดภาพ โดยครูอาจล่อนให้นักเรียนเห็นปัญหา โดยการวาดภาพ และต่อไปอาจให้นักเรียนตั้งโจทย์ปัญหาโดยการวาดภาพ ซึ่งจะทำให้นักเรียนมองเห็นว่าข้อมูลใดที่รู้และไม่รู้ และยังมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ

ดังนั้น ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าสูตรนั้น ครูจำเป็นต้องใช้เทคนิคและวิธีการต่าง ๆ รวมทั้งสื่อการล่อนมาช่วย ซึ่งการเขียนภาพ ก็เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าสูตรของนักเรียนได้

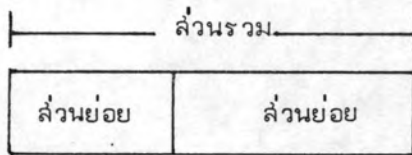
จากการเห็นความสำคัญของการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าสูตร โดยใช้ภาพ สถาบันพัฒนาหลักสูตรของสิงคโปร์ จึงได้ทำการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับภาพพบว่า ภาพเป็นสื่อการล่อนอย่างหนึ่งที่จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นสู่ทาง ในการเปลี่ยนนามธรรมในโจทย์ปัญหาให้เป็นรูปธรรม เปลี่ยนเรื่องราวของ โจทย์ปัญหาให้ง่ายต่อการเข้าใจ ทราบความสัมพันธ์ของ

จำนวนและข้อความที่โจทย์กำหนดให้ ช่วยในการวินิจฉัยความคิดรวบยอดของ โจทย์ปัญหา ช่วยในการวางแผนเพื่อแก้ปัญหา คิดค่าลัทร้อย่าง เป็นระบบ ขั้นตอน นอกจากนี้สถาปนพัฒนาหลักสูตรของ สิ่งคปรัยงได้พัฒนา รูปแบบของภาพที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา คิดค่าลัทรไว้ 3 รูปแบบ คือ

1. ภาพแสดงส่วนย่อย ส่วนรวม (The Part - Whole Model) คือ เมื่อโจทย์ กำหนดหรือบอกส่วนย่อยมาก็สามารถเขียนภาพเพื่อหาส่วนรวมได้โดยการบวก เช่น

ตัวอย่าง มีนามีเงิน 250 บาท มานะมีเงิน 575 บาท ล่องคนมีเงินรวมกัน

เท่าไร



$$250 + 575$$

$$\text{ส่วนย่อย} + \text{ส่วนย่อย} = \text{ส่วนรวม}$$

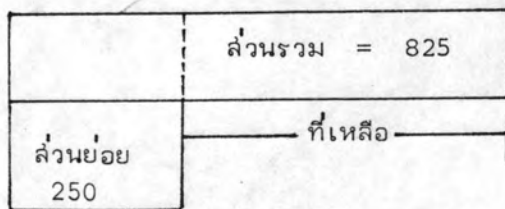
$$250 + 575 = 825$$

ดังนั้นล่องคนมีเงินรวมกัน .. 825 บาท

ในทางตรงกันข้ามถ้าทราบส่วนรวมและส่วนย่อยบางส่วน ก็สามารถหาส่วนย่อย ที่เหลือได้โดยการลบ เช่น

มีนาและมานะมีเงินรวมกัน 825 บาท ถ้ามีนามีเงิน 250 บาท มานะจะมีเงิน

เท่าไร



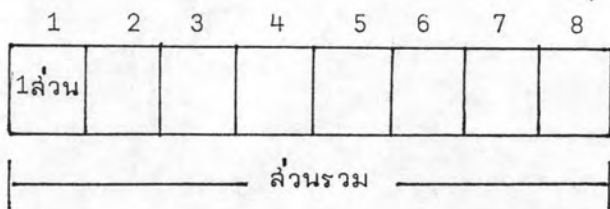
$$\text{ส่วนรวม} - \text{ส่วนย่อย} = \text{ส่วนย่อย}$$

$$825 - 250 = 575$$

ดังนั้นมานะมีเงิน .. 575 บาท

ภาพแสดงส่วนย่อย ส่วนรวมนี้ อาจถูกแบ่งออกได้มากกว่า 2 ส่วนก็ได้ และ เมื่อทุก ๆ ส่วนมีค่า เท่ากัน สามารถหาส่วนรวมได้โดยการคูณ โดยคูณ 1 ส่วนกับจำนวนของ แต่ละส่วน เช่น

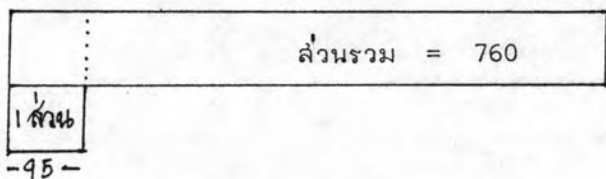
ตัวอย่าง ล้มศรีซื้อเสื้อมา 8 ตัว ราคาตัวละ 95 บาท ล้มศรีต้องจ่ายเงิน
ค่าเสื้อเท่าไร



$$\begin{aligned} \text{ส่วนย่อย} \times \text{จำนวนส่วนย่อย} &= \text{ส่วนรวม} \\ 95 \times 8 &= 760 \\ \text{ดังนั้นล้มศรีต้องจ่ายเงินค่าเสื้อ} & 760 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ในทางตรงกันข้ามถ้าทราบส่วนรวม และค่าส่วนย่อย 1 ส่วน ก็สามารถหาจำนวน
ของส่วนย่อยได้โดยการหาร เช่น

ตัวอย่าง ล้มศรีซื้อเสื้อเงิน 760 บาท เสื้อราคาตัวละ 95 บาท ล้มศรีซื้อเสื้อ
ได้กี่ตัว



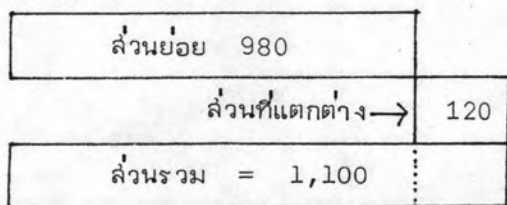
$$\begin{aligned} \text{ส่วนรวม} \div \text{ส่วนย่อย} &= \text{จำนวนของส่วนย่อย} \\ 760 \div 95 &= 8 \\ \text{ดังนั้นล้มศรีจะซื้อเสื้อได้} & 8 \text{ ตัว} \end{aligned}$$

2. ภาพแสดงการเปรียบเทียบ (The Comparison Model) ภาพลักษณะเช่นนี้ใช้

แสดงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน 2 จำนวนหรือมากกว่า เมื่อทั้งสองจำนวนถูกนำมาเปรียบเทียบ
กัน ซึ่งอาจเปรียบเทียบจำนวน 2 จำนวน โดยการแสดงส่วนที่แตกต่างกัน เช่น

ตัวอย่าง ล้มศรีมีเงินมากกว่าล้มศักดิ์ 120 บาท ถ้าล้มศักดิ์มีเงิน 980 บาท

ล้มศรีมีเงินเท่าไร



$$\begin{aligned} \text{ส่วนย่อย} + \text{ส่วนที่แตกต่าง} &= \text{ส่วนรวม} \\ 980 + 120 &= 1100 \\ \text{ดังนั้นล้มศรีมีเงิน} & 1100 \text{ บาท} \end{aligned}$$

ในทางตรงกันข้าม ถ้าทราบจำนวน 2 จำนวน และต้องการทราบส่วนที่แตกต่าง
ก็สามารถหาส่วนที่แตกต่างได้โดยการลบ เช่น

ตัวอย่าง ล้มศรีมีเงิน 1100 บาท ล้มศักดิ์มีเงิน 980 บาท ล้มศรีมีเงินมากกว่า
ล้มศักดิ์กี่บาท

จำนวนที่ 1 = 1,100	ส่วนที่ แตกต่าง
จำนวนที่ 2 = 980	

$$\begin{aligned} \text{จำนวนที่ 1} - \text{จำนวน 2} &= \text{จำนวนที่แตกต่าง} \\ 1,100 - 980 &= 120 \end{aligned}$$

ดังนั้นส้มคำรีมีเงินมากกว่าส้มคักดี 120 บาท

3. ภาพแสดงการเปลี่ยนแปลง (The Change Model) ภาพลักษณะนี้ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าใหม่ของจำนวนและค่าเดิม หลังจากมีการเปลี่ยนแปลง โดยการเพิ่มขึ้นหรือลดลง โดยการบวก ลบ คูณ และหาร เช่น

ตัวอย่าง เทพไท่ทำงานได้รับเงินเดือน 8,390 บาท ทำงานพิเศษในวันหยุดได้เงินอีก 2,500 บาท นำไปซื้อเครื่องซักผ้าราคา 5,500 บาท ขณะนี้เทพไท่มีเงินเท่าไร

ค่าเดิม 8,390	เพิ่มขึ้น 2,500
ค่าใหม่ 10,890	
ลดลง 5,500	ที่เหลือ

$$\begin{aligned} \text{ค่าเดิม} + \text{เพิ่มขึ้น} &= \text{ค่าใหม่} \\ 8,390 + 2,500 &= 10,890 \\ \text{ค่าใหม่} - \text{ลดลง} &= \text{ที่เหลือ} \\ 10,890 - 5,500 &= 5,390 \end{aligned}$$

ดังนั้นเทพไท่มีเงิน 5,390 บาท

นอกจากนี้สถาบันพัฒนาหลักสูตรของสิงคโปร์ ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับภาพ โดยได้นำรูปแบบของภาพทั้ง 3 รูปแบบ ไปทดลองใช้ในการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์กับนักเรียนระดับ 4 ของประเทศสิงคโปร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้ภาพ มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ได้สูงขึ้น และรูปแบบของภาพทั้ง 3 รูปแบบถูกนำไปใช้ในแบบเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนระดับ 4 ของประเทศสิงคโปร์ และได้รับการยอมรับเป็นอย่างดี