บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

ในการนำเสนองานวิจัยที่เกี่ยวข้อง สำหรับวรรณคดีวิจัยครั้งนี้ จำแนกการนำเสนอเป็น 3 ตอนดังนี้

1. สถิติทดสอบในงานวิจัยนี้
2. การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับสถิติทดสอบที่ใช้ในการวิจัย
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สถิติทดสอบในงานวิจัยครั้งนี้

สถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบ ความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนของประชากรที่มากกว่า 2 กลุ่ม มีสถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบหลายแบบ สถิติทดสอบแบบพาราเมตริก (Parametric statistics) คือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต ซึ่งมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ และสถิติทดสอบเลอรีน ที่มีการแจกแจงแบบเอฟ สำหรับสถิติทดสอบแบบนอนพาราเมตริก (Nonparametric statistics) นั้นมีหลายวิธีที่อาจนำมาใช้ได้แต่ในงานวิจัยนี้ จะนำเสนอเพียงวิธีเดียวคือ สถิติทดสอบสแควร์แรงค์ ที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ซึ่งสถิติทดสอบแต่ละแบบมีรายละเอียดในการใช้ และพัฒนาสถิติทดสอบดังนี้

1.1 สถิติทดสอบบาร์ตเลต (Bartlett's test)

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากร k กลุ่ม
2. ประชากรทั้ง k กลุ่ม เป็นอิสระต่อกัน
3. การแจกแจงของประชากรของข้อมูลเป็นการแจกแจงแบบปกติ

สถิติทดสอบ

$$B = \frac{\sum^{k} (n_i - 1) \ln S^2 - \sum^{k} (n_i - 1) \ln S^2_i}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum (n_i - 1)} \right]}$$

เมื่อ $S_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum (X_{ij} - X_{i.})^2$

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, k$

$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n_i$

$$S^2 = \frac{\sum (n_i - 1) S^2_i}{\sum (n_i - 1)}$$

n_i = ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ i

k = จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

เกณฑ์การตัดสิน

จะปฏิเสธ Ho เมื่อสถิติทดสอบบาร์ตเลตมีค่ามากกว่าค่าวิกฤตจากตาราง การแจกแจงไคสแควร์ที่มี df = k-1

สถิติทดสอบบาร์ตเลต ได้พัฒนามาจากตัวสถิติของ Neyman และ Pearson (1931) ที่ใช้ในการทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรมากกว่า 2 กลุ่ม ซึ่งมีสมมติฐานในการทดสอบ คือ

Ho : $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = \ldots\ldots = \sigma^2_k$

Hi : Ho ผิด

โดยที่ Neyman ได้สร้างตัวสถิติทดสอบโดยใช้ Maximum Likelhood Ratio ดังนี้

$$\lambda = \frac{L(\omega)}{L(\Omega)}$$

เมื่อ $L(\omega)$ เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ parameter Space ภายใต้ Ho

$L(\Omega)$ เป็นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของ parameter Space ภายใต้ Hi

ถ้ากำหนดให้ X_{ij} ; $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, n_i$ มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_i และความแปรปรวน σ^2_i หรือ $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2_i)$ ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น (probability density function)หรือ pdf. ของ X_{ij} คือ

$$P(X_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-(X_{ij} - \mu_i)^2 / 2\sigma_i^2}$$

ฟังก์ชั่นความน่าจะเป็น คือ

$$L = \prod_{j=1}^{n_i} p(X_{ij})\, p(X_{2j}) \ldots\ldots p(X_{kj})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\, \sigma_1^{n} \ldots \sigma_k^{n}} \exp\left[\frac{-1}{2} \sum\sum \frac{(X_{ij} - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right] \quad \text{----(1)}$$

เมื่อ , $\sum n_i = n$

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - n_1 \ln\sigma_1 - \ldots - n_k \ln\sigma_k - \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1} \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{i=1} (X_{ij} - \mu_i)^2\right] \quad \text{---(2)}$$

018437

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma^2_i} \sum_{j=1} (X_{ij} - \mu_i) = 0 \qquad \text{------------(3)}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_i} = \frac{-n_i}{\sigma_i} + \frac{1}{\sigma_i^3} \sum_{j=1} (X_{ij} - \mu_i)^2 = 0 \qquad \text{------------(4)}$$

ดังนั้นตัวประมาณความน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimators) สำหรับ Ω คือ

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1} X_{ij} = \bar{X}_{i.} \qquad \text{------------(5)}$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 \qquad \text{------------(6)}$$

แทน (5) และ (6) ใน (1) จะได้

$$L(\hat{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\, \hat{\sigma}_1^{n_1} \ldots \hat{\sigma}_k^{n_k}} \exp\left[\frac{-1}{2} \sum\sum \left[\frac{(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2}{\sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 / n_i}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\, \sigma_1^{n} \ldots \sigma_k^{n}} \exp\left[\frac{-1}{2} \sum \left[\frac{\sum (X_{ij} - X_{i.})^2}{\sum (X_{ij} - X_i)^2 / n_i}\right]\right]$$

$$L(\hat{\Omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\, \sigma_1^{n} \ldots \sigma_k^{n}} \exp\left(\frac{-1}{2} \sum n_i\right)$$

$$= \frac{-e^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}\, \sigma_1^{n} \ldots \sigma_k^{n}} \quad , \quad \left(\sum n_i = n\right) \qquad \text{------------(7)}$$

$L(\omega)$ ภายใต้ Ho ซึ่ง U_i มีค่าแปรเปลี่ยน (vary) แต่ $\sigma^2_i = \sigma^2$ จะได้

$$L(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,\sigma^{\sum n_i}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}\left[\sum\sum (X_{ij} - \mu_i)^2\right]\right]$$

$$L(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,\sigma^n} \exp\left[-\frac{\sum\sum (X_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad \text{------------(8)}$$

$$\ln L(\omega) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum\sum (X_{ij} - \mu_i)^2\right] \qquad \text{------------(9)}$$

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \mu_i} = \frac{1}{\sigma^2}\sum (X_{ij} - \mu_i) = 0 \qquad \text{------------(10)}$$

$$\frac{\partial \ln L(\ )}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}\sum_{j=1} (X_{ij} - \mu_i)^2 = 0 \qquad \text{------------(11)}$$

ตัวประมาณความน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับ ω คือ

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1} X_{ij} = \bar{X}_i \qquad \text{------------(12)}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}\sum_{j=1} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \qquad \text{------------(13)}$$

แทนค่า (6) ใน (13) จะได้

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1} n_i\,\hat{\sigma}_i^2 \qquad \text{------------(14)}$$

แทนค่า (12) และ (14) ใน (8)

$$L(\hat{w}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\sum n_i \hat{\sigma}^2_i / n\right)^{n/2}} \exp\left[(-1/2)\frac{\sum\sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2}{\sum\sum (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 / n}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left(\sum n_i \hat{\sigma}^2_i / n\right)^{n/2}} \exp(-n/2)$$

$$= \frac{e^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left(\sum n_i \hat{\sigma}_i^2 / n\right)^{n/2}} \qquad \text{------------(15)}$$

อัตราส่วนความน่าจะเป็นสูงสุด คือ

$$\lambda = \frac{L(\hat{w})}{L(\hat{\Omega})}$$

$$= \frac{e^{n/2}}{(2\pi)^{n/2}\left(\sum n_i \hat{\sigma}_i^2 / n\right)^{n/2}} \cdot \frac{(2\pi)^{n/2}\, \hat{\sigma}_1^{n} \ldots \hat{\sigma}_k^{n}}{e^{n/2}}$$

$$= \frac{\hat{\sigma}_1^{n_1} \ldots \hat{\sigma}_k^{n_k}}{\left(\sum n_i \hat{\sigma}_i^2 / n\right)^{n/2}}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k} \hat{\sigma}_i^{n_i}}{\hat{\sigma}^{n}}, \qquad \text{------------(16)}$$

-2 ln จะมีแนวโน้มเข้าสู่การแจกแจงแบบ χ^2 ถ้ากลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่เพียงพอ ดังนั้น

$$-2\ln = -2\ln \frac{\prod_{i=1}^{k} \hat{\sigma}_i^{n}}{\hat{\sigma}^{n}}$$

$$= -\sum n_i \ln \hat{\sigma}^2_i + n \ln \hat{\sigma}^2$$

$$= - \sum n_i \ln \hat{\sigma}^2_i + \sum n_i \ln \hat{\sigma}^2$$

$$= - \sum_{i=1} n_i \ln \frac{\hat{\sigma}^2_i}{\hat{\sigma}^2} \sim \chi^2_{k-1} \qquad \text{------------(17)}$$

Bartlett ได้ปรับปรุงสถิติทดสอบของ Neyman และ Pearson ในสมการที่ 16 และสมการที่ 17 โดยการแทนตัวประมาณความน่าจะเป็นสูงสุดที่ลำเอียง (biased maximum likelyhood estimators)ด้วยตัวประมาณที่ไม่ลำเอียง(unbiased estimators) ของ variances และเปลี่ยนชั้นความเป็นอิสระจาก n_i เป็น n_i-1 จะได้สถิติทดสอบบาร์ตเลตที่ใช้อัตราส่วนของค่ากลางเรขาคณิตของความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ถ่วงน้ำหนักกับค่ากลางเลขคณิตของความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ถ่วงน้ำหนัก โดยที่น้ำหนักที่ถ่วงน้ำใช้ค่าชั้นความเป็นอิสระ ดังนั้น

$$b = \frac{[(S^2_1)^{n1-1} (S^2_2)^{n2-1} \ldots . (S^2_k)^{nk-1}]^{1/(N-k)}}{S^2_p} \qquad \text{---------(18)}$$

เมื่อ $$S^2_p = \frac{\sum (n_i - 1) S^2_i}{N - k}$$

$S^2_1 , S^2_2 , \ldots . S^2_k$ คือ ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่าง

$n_1 , n_2 , \ldots \ldots . n_k$ คือ ขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

k คือ จำนวนกลุ่มตัวอย่าง

$\sum n_i = N$

b มีลักษณะการแจกแจงแบบบาร์ตเลต (Bartlett distribution) ซึ่ง Dyer D.D และ Keating, J.P. (1980) ได้สร้างตารางแสดงค่าวิกฤติของสถิติทดสอบบาร์ตเลต และ Walpole (1982) ได้ใช้เกณฑ์ในการตัดสินดังนี้

1. ถ้า $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$ จะปฏิเสธ Ho ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$b < b_k(\alpha ; n),$$

2. ถ้าขนาดของกลุ่มตัวอย่างไม่เท่ากัน จะปฏิเสธ Ho ที่ระดับนัยสำคัญ α เมื่อ

$$b < b_k(\alpha ; n_1, n_2, \ldots, n_k),$$

เมื่อ

$$b_k(\alpha; n_1, n_2, \ldots n_k) \approx \frac{[n_1 b_k(\alpha;n_1) + n_2 b_k(\alpha;n_2) + \ldots + n_k b_k(\alpha;n_k)]}{N}$$

$b(\alpha;n_i)$ คือ ค่าวิกฤติเมื่อขนาดกลุ่มตัวอย่างเป็น n_i จากตารางค่าวิกฤติซึ่งมีค่า

α มีค่าเท่ากับ .01 และ .05

k = 2, 3,...., 10

n มีค่าตั้งแต่ 3 ถึง 100

จากสมการ (18)

$$\ln L = \frac{1}{N - k} \sum(n_i - 1) \ln S^2_i - \ln S^2_p$$

$$-(N - k)\ln L = (N - k)\ln S^2_p - \sum(n_i - 1)\ln S^2_i$$

$-(N - k) \ln L$ จะประมาณด้วยการแจกแจงแบบไคสแควร์ ซึ่งจะมีมากกว่าค่า X^2 เล็กน้อยจึงใช้ค่า C เป็นค่าแก้ เมื่อ

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum (n_i - 1)} \right]$$

ดังนั้นสถิติทดสอบ Bartlett คือ

$$B = \frac{1}{C} \left[(N-k)\ln S^2_p - \sum_{i=1} (n_i - 1) \ln S^2_i \right]$$

หรือในกรณีที่ใช้ลอการิทึมฐานสิบ (Common Logarithm) จะได้

$$B = \frac{2.3026}{C}\left[(N-k)\log S^2_p - \sum_{i=1}(n_i - 1)\log S^2_i\right]$$

เมื่อ k = จำนวนของกลุ่มตัวอย่าง

N = ผลรวมของขนาดกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

S^2_i = ความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ i

$$= \frac{1}{n_i - 1}\sum (X_{ij} - X_i)^2$$

$$S^2_p = \frac{1}{N-k}\sum (n_i - 1) S^2_i$$

1.2 สถิติทดสอบเลอวีน (Levene's test)

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากร k กลุ่ม
2. ประชากรทั้ง k กลุ่มเป็นอิสระต่อกัน
3. ลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติ

สถิติทดสอบ

$$L = \frac{\sum n_i (\bar{Z}_{i.} - \bar{Z}_{..})^2 \;/\; (k-1)}{\sum\sum (Z_{ij} - \bar{Z}_{i.})^2 \;/\; \sum (n_i - 1)}$$

โดยที่ $Z_{ij} = \left| X_{ij} - \bar{X}_{i.} \right|$ เมื่อ $\bar{X}_{i.}$ = ค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่างที่ i

$$\bar{Z}_{i.} = \sum Z_{ij} / n_i$$

$$\bar{Z}_{..} = \sum \sum Z_{ij} \; / \; \sum n_i$$

L มีการแจกแจงแบบเอฟ (F - Distribution) มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ k - 1 และ $\sum(n_i - 1)$

Levene (1960) ได้สร้างสถิติทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนโดยอาศัยวิธีการการคำนวณจากอัตราส่วนของความแปรปรวนระหว่างกลุ่มและความแปรปรวนภายในกลุ่มของ Z เช่นเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One - Way Analys of Variance)

ถ้า $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}$ เป็นตัวอย่างสุ่มของค่าสังเกตสำหรับตัวแปรกลุ่ม X_i

โดย $X_{ij} \sim N(\mu_i , \sigma^2_i)$ $\quad i = 1, 2, \ldots k$

$\quad j = 1, 2, \ldots n_i$

ในการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรจำนวน k กลุ่ม

กำหนด $Z_{ij} = \left| X_{ij} - \bar{X}_{i.} \right|$

ให้ U คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดขึ้นระหว่าง k กลุ่ม (mean square error between k samples)

V คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดขึ้นภายในกลุ่ม (mean square error within samples)

เมื่อสมมติฐานคือ $H_0 : \sigma_i = b$

$H_1 : \sigma_i = a_i \cdot b$ a_i คือ ค่าคงที่

$$U(z, H_i) = \frac{1}{k-1} \sum \left[a_i \bar{z}_{i.} - \left(\frac{1}{k} \sum a_i \bar{z}_{i.} \right) \right]^2$$

$$V(z, H_i) = \frac{1}{k-1} \sum \sum \left[\frac{a^2_i (z_{ij} - \bar{z}_{i.})^2}{n_i - 1} \right]$$

โดยที่ $F = \frac{\text{ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดขึ้นระหว่างกลุ่ม}}{\text{ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองที่เกิดขึ้นภายในกลุ่ม}}$

$$F = \frac{U}{V}$$

ดังนั้นสถิติทดสอบเลอวีน คือ

$$L = \frac{\sum n_i (\bar{z}_{i.} - \bar{z}_{..})^2 / (k-1)}{\sum \sum (z_{ij} - \bar{z}_{i.})^2 / \sum (n_i - 1)}$$

1.3 สถิติทดสอบสแควร์แรงค์ (Squared Ranks Test)

ข้อทดสอบเบื้องต้น

1. ข้อมูลประกอบด้วยกลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มที่สุ่มมาจากประชากร k กลุ่ม
2. กลุ่มตัวอย่างทั้งหมดเป็นอิสระต่อกัน
3. ระดับการวัดของข้อมูลอย่างน้อยอยู่ในมาตราอันตรภาค (Interval Scales)

สถิติทดสอบ

$$SR = \frac{1}{D^2}\left[\sum \frac{S^2_j}{n_j} - N(\bar{S})^2\right]$$

โดยที่

n_j = ขนาดของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มที่ j

N = ผลรวมของขนาดกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด k กลุ่ม

$= \sum_{j=1} n_j$

S_j = ผลรวมของค่าอันดับกำลังสองของค่าสังเกตลบด้วยค่าเฉลี่ย ในกลุ่มตัวอย่างที่ j

$= \sum_{i=1} R^2_i$

R_i = ค่าของอันดับของข้อมูลที่ i

$$D^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum R^4_i - N(\bar{S})^2\right]$$

$\bar{S}$ = ค่าเฉลี่ยของผลงานของค่าอันดับกำลังสองทั้งหมด

$= \frac{1}{N}\sum S_j$

สถิติทดสอบสแควร์แรงค์ เป็นสถิติสำหรับทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรตั้งแต่ 2 กลุ่มขึ้นไป ซึ่ง Taha (1964) เป็นผู้เสนอการทดสอบนี้โดยแนะนำให้ใช้ผลบวกกำลังสองของอันดับ ซึ่งเกิดจากการเรียงอันดับค่าสังเกตของกลุ่มตัวอย่างทั้งหมดแทนที่จะใช้ผลรวมของอันดับเหมือนสถิติทดสอบอื่น ๆ Duran (1971) ได้ปรับปรุงโดยกำหนดค่าของ r_i เป็นอันดับของค่า $|X_i|$ แทนที่จะเป็นอันดับของ Xi ต่อมาสถิติทดสอบสแควร์แรงค์ได้มีการเปลี่ยนแปลงโดย Filgner และ Killeen (1976)กับ Conoverและ Iman (1978)

Conover และ Iman ได้แสนอการทดสอบสแควร์แรงค์ โดยอาศัยแนวคิดจากการทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากร ซึ่งมีสมมติฐานที่ทดสอบคือ Ho: E(x) =E(y) และสถิติทดสอบที่ใช้เป็นฟังชั่นเส้นตรงของอันดับ ซึ่งเกิดจากการเรียงอันดับรวมกันของกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม พิจารณาความแปรปรวนของประชากรซึ่งเป็นค่าคาดหวังของ $(X-\mu)$ โดย u เป็นค่าเฉลี่ยของประชากร ดังนั้น การทดสอบสมมติฐาน Ho: $E(X-\mu_x)^2 = E(Y-\mu_y)^2$ ก็จะอาศัยหลักการเกี่ยวกับการทดสอบสมมติฐาน Ho:E(x) = E(y)แต่จะพิจารณาจากอันดับของ $(X_i-\mu_x)^2$ และ $(Y_i-\mu_y)^2$ และสถิติที่ใช้ทดสอบก็ควรจะอยู่ในรูปของผลรวมของอันดับ เช่นเดียวกับการทดสอบค่าเฉลี่ยแต่จากการศึกษาของ Duran และ Mielke (1968) พบว่าการศึกษาเกี่ยวกับความแปรปรวนของประชากร สถิติทดสอบที่ใช้ผลรวมกำลังสองของอันดับจะได้ประสิทธิภาพสูงกว่าสถิติทดสอบที่ใช้ผลรวมของอันดับ

สำหรับการทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรที่มากกว่า 2 กลุ่ม ก็ใช้หลักเดียวกันการทดสอบจาก 2 กลุ่ม โดยใช้อันดับของค่าผลต่างของค่าสังเกตกับค่าเฉลี่ยของกลุ่มตัวอย่าง (Conover 1980) ซึ่งได้สถิติทดสอบดังนี้

$$T = \frac{1}{D^2}\left[\sum \frac{S_i^2}{n_i} - N(\bar{S})^2\right]$$

เมื่อ n_i = ขนาดของกลุ่มตัวอย่างกลุ่มที่i

$N = n_1 + n_2 + n_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + n_k$

S_i = ผลรวมของกำลังสองของอันดับกลุ่มที่ i

$$S = \frac{1}{N}\sum S_i$$

$$D^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum R_i^4 - N(\bar{S})^2\right]$$

<u>การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับสถิติทดสอบในงานวิจัยนี้</u>

เนื่องจากสถิติทดสอบเลอวีน มีการแจกแจงแบบเอฟ ส่วนสถิติทดสอบมาร์ตเลต และสถิติทดสอบสแควร์แรงค์ มีการแจากแจงไคสแควร์ ในส่วนนี้จึงเสนอการแจกแจงแบบเอฟและการแจกแจงไคสแควร์ตามลำดับดังนี้

2.1 การแจกแจงเอฟ (F-distribution)

Sir Ronald A. Fisher เป็นบุคคลแรกที่เสนอการแจกแจงเอฟในปี ค.ศ.1934 เดิมใช้ชื่อว่าการแจกแจงซีโดยมีสูตร $Z = (1/2)\ln(S^2_1/S^2_2)$ ซึ่งค่าลอการิทึม (loganithm) ทำให้ยุ่งมากในการคำนวน Snedecorจึงปรับปรุงใหม่โดยใช้สูตร $F=S^2_1/S^2_2$ ค่า S^2_1 และS^2_2 คือความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างจากประชากรที่ 1 และกลุ่มตัวอย่างจากประชากรที่ 2 ซึ่ง Snedecor ได้ตั้งชื่อการแจกแจงใหม่นี้ว่า การแจกแจงเอฟ (F- distribution) เพื่อเป็นเกี่ยวข้องแก่ Ronald A.Fisher

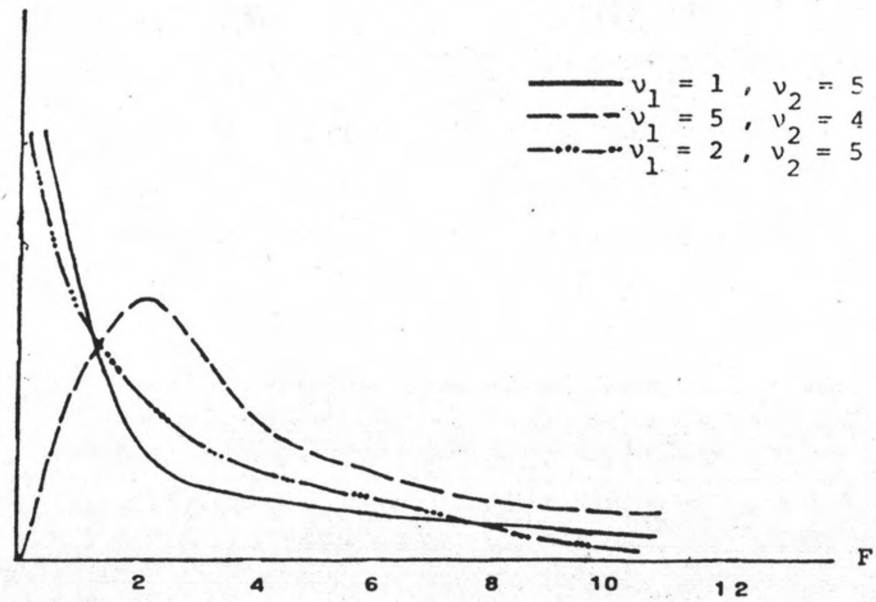
2.1.1 ฟังชั่นการแจกแจงของเอฟ

ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอฟได้จากอัตราส่วนของตัวแปรสุ่มแบบไคสแควร์ (Chi squave) 2 ตัวที่เป็นอิสระต่อกัน ซึ่งแต่ละตัวหารด้วยจำนวนชั้นความเป็นอิสระ (deqree of freedom)ของตัวมันเอง ดังนั้นฟังชั่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงเอฟ แสดงได้ดังนี้

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} . f^{\frac{\nu_1}{2}-1} . \left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}\right) . f^{-\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)} \quad ; f > 0$$

เมื่อ Γ คือ ฟังก์ชั่นแกมม่า

ν_1 และ ν_2 เป็นชั้นความเป็นอิสระแบบไคสแควร์ที่เป็นเศษและเป็นส่วนตามลำดับ



ภาพที่ 1 เปรียบเทียบการแจกแจงเอฟที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ ($\nu_1 = 2, \nu_2 = 5$), ($\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 5$) และ ($\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 4$)

2.1.2 คุณสมบัติของการแจกแจงเอฟ

1. รูปการแจกแจงขึ้นอยู่กับ v_1 และ v_2 และพิสัยของค่า F อยู่ระหว่าง $0 \leq F \leq \alpha$

2. การแจกแจงมีลักษณะเบ้ขวาหรือเบ้ทางบวก (positively Skewed) และมีจุดที่สูงสุดของโค้งเพียงจุดเดียว (unimodal)

3. การแจกแจง F มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$ เมื่อ $\nu_2 > 2$ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{2\nu_2^2 (\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}$, เมื่อ $\nu_2 > 4$

4. รูปของการแจกแจง $F(\nu_1, \nu_2)$ ไม่เหมือนกับการแจกแจงของ $F(\nu_2, \nu_1)$ เพราะกำลังของ F ในเศษเปลี่ยนไป และ $_{1-P}F_{\nu_1 - \nu_2} = \frac{1}{_{P}F_{\nu_2, \nu_1}}$

เมื่อ p คือระดับของความนัยสำคัญ

2.1 การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-Square Distributiion)

Robert Fricdrich Helmert นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันเป็นผู้พบคนแรกในปี ค.ศ.1876 ต่อมา Karl Pearson นักสถิติชาวอังกฤษเป็นผู้พัฒนาขึ้นในปี ค.ศ.1900 ที่มาของการแจกแจงไคสแควร์เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน กล่าวคือ ถ้าสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ มีมัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 โดยสุ่มมาครั้งละ 1 แต่ละครั้งยกกำลังสอง จะได้ว่าการแจกแจงของกลุ่มตัวอย่างเป็นการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระ (degrees of freedom) เท่ากับ 1 นั่นคือ ถ้าให้ $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน มีค่ามัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ 0 ความแปรปรวนเท่ากับ 1 แล้วจะได้การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1 คือ

$$\chi^2_1 = z_1^2$$

จากวิธีการเช่นเดียวกับข้างต้นถ้าสุ่มตัวอย่างมา 2 ครั้ง และตัวอย่างที่สุ่มมาแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกันจะได้การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 2 คือ

$$\chi^2_2 = z^2_1 + z^2_2$$

$$\chi^2_2 = z^2_1 + z^2_2$$

โดยวิธีการทำนองเดียวกัน ถ้าสุ่มตัวอย่างมา n ครั้ง ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน จะได้ผลรวมของ z^2 มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n คือ

$$\chi^2_n = z^2_1 + \ldots\ldots + z^2_n$$

อาจกำหนดรูปทั่วไปของการแจกแจงแบบไคสแควร์ เมื่อกลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่แจกแจงแบบปกติมีมัชฌิมเลขคณิตเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 โดยกำหนดให้ $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันดังนั้น

$$\chi^2_n = \left[\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right]^2 + \left[\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right]^2 + \ldots + \left[\frac{x_n - \mu}{\sigma}\right]^2$$

$$\chi^2_n = \Sigma \left[\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right]^2$$

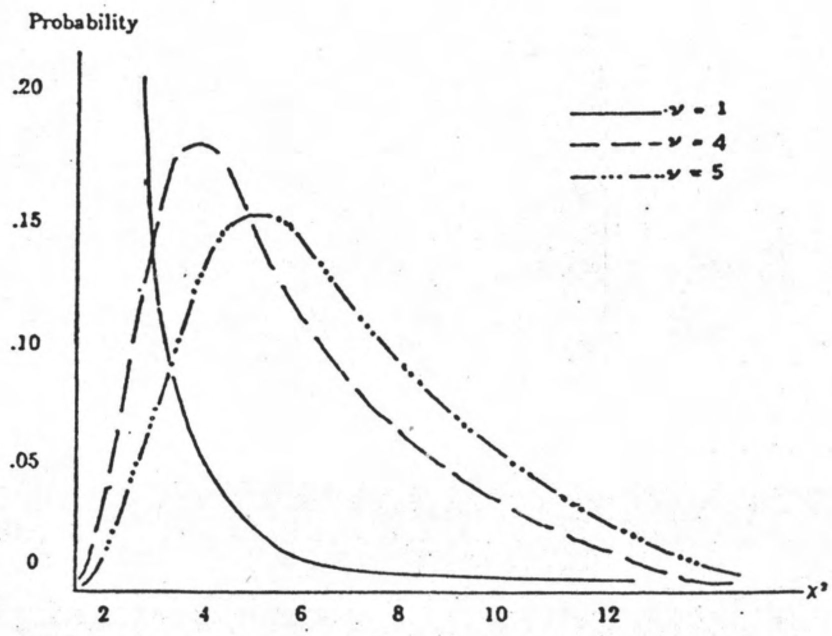
2.1.1 ฟังก์ชั่นการแจกแจงของไคสแควร์

การแจกแจงแบบไคสแควร์ เป็นรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ฟังก์ชันการแจกแจงของไคสแควร์สามารถกำหนดในรูปของฟังก์ชันแกมม่าดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2} . \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} . e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2} - 1} \quad , x > 0$$

เมื่อ Γ คือ ฟังก์ชั่นแกมม่า

จากฟังก์ชั่นข้างต้นเราเรียกว่าตัวแปรสุ่ม x มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระ (degrees of freedom) เท่ากับ n แทนด้วยสัญลักษณ์ χ^2_ν ถ้าพิจารณาค่าของฟังก์ชันจะพบว่า ค่าของฟังก์ชั่นขึ้นอยู่กับค่า n หรือขนาดชั้นความเป็นอิสระดังนั้นการแจกแจงไคสแควร์จะแตกต่างกันเมื่อขนาดชั้นความเป็นอิสระแตกต่างกัน



ภาพที่ 2 เปรียบเทียบการแจกแจงไคสแควร์ที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 1, 4 และ 5

2.1.2 คุณสมบัติของไคสแควร์

1. การแจกแจงของไคสแควร์ความทฤษฎีเป็นการแจกแจงที่ต่อเนื่อง
2. ความโค้งจะเริ่มจาก 0 ถึง α
3. ค่าออร์ดิเนตสูงสุด จะอยู่ที่ $X^2 = \nu - 1$ โดยที่ ν คือชั้นความเป็นอิสระ
4. ลักษณะของส่วนโค้งจะเบ้ไปทางขวามือ
5. มีลักษณะเป็นส่วนโค้งของ Pearson ชนิดที่ 3 (Pearson Type III curve)
6. สำหรับการแจกแจงของไคสแควร์เมื่อชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ ν จะมีลักษณะดังนี้

   6.1 ค่าเฉลี่ยเท่ากับ ν และความแปรปรวนเท่ากับ 2ν

   6.2 ฐานนิยม (mode) เท่ากับ $\nu - 2$ เมื่อ $\nu > 2$

   6.3 ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับ $\sqrt{8/\nu}$

   6.4 เมื่อ ν มีค่ามากขึ้นการแจกแจงไคสแควร์จะเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ ν และความแปรปรวนเท่ากับ 2ν

2.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงไคสแควร์กับการแจกแจงเอฟ

การแจกแจงเอฟเกี่ยวข้องกับการแจกแจงไคสแควร์ เนื่องจากการแจกแจงเอฟได้จากสัดส่วนของไคสแควร์ 2 ค่าที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่แต่ละค่าของไคสแควร์นั้นจะถูกหารด้วยขนาดของชั้นความเป็นอิสระ นั่นคือ ถ้าให้ U_1 และ U_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยขนาดชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n_1 และ n_2 ตามลำดับ ดังนั้นเราจะได้ว่า $Fn_1\ n_2$ มีการแจกแจงแบบเอฟที่ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ n_1 และ n_2 โดยที่ $Fn_1\ n_2$ กำหนดดังนี้

$$Fn_1, n_2 = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2}$$

เมื่อให้ n_2 เพิ่มมากขึ้นไม่จำกัดจะได้ $\lim_{n \to \infty} U_2/n_2 = 1$ ซึ่งแสดงได้โดยพิจารณาจากค่า E (U_2/n_2) และ Var (U_2/n_2)

พิจารณา

$$E(U_2/n_2) = \frac{1}{n_2} \cdot E(U_2)$$

$$= \frac{1}{n_2} \cdot n_2$$

$$E(U_2/n_2) = 1$$

$$Var(U_2/n_2) = \frac{1}{n_2^2} \cdot Var(U_2)$$

$$= \frac{1}{n_2^2} \cdot 2n$$

$$= \frac{2}{n_2}$$

ดังนั้นเมื่อ n_2 มากขึ้นแล้ว Var (U_2/n_2) จะเข้าใกล้ 0 และ U_2/n_2 จะเข้าใกล้ 1 นั่นคือ

$$F\ n_1\ n_2 = \frac{U_1/n_1}{U_2/n_2}$$

$$F\ n_1 = \frac{U_1/n_1}{1}$$

$$= U_1/n_1$$

$$= \frac{X^2_{n1}}{n_1}$$

นั่นคือเมื่อกลุ่มตัวอย่างมีขนาดใหญ่แล้ว $X^2_{n1} = n_1\ F\ n_1, \infty$ เช่น $X^2_{15}\ (.95) = 25.0$ ในขณะที่ $15\ F\ 15, \alpha\ (.95) = 15\ (1.67) = 25.0$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Duran และ Mielke (1968) ได้ศึกษาค่าแอสซิมโทติครีเลทีฟเอฟฟิเชียลซี (Asymptotic Relative Efficiency)หรือค่า A.R.E ระหว่างสถิติทดสอบสแควร์แรงค์ Wilcoxon - test และ Logical most powerfull rank-test(L.M.P.R.T)สำหรับการแจกแจงที่แตกต่างกันคือ Gamma Distribution,Truncateed t Distribution, Truncated Logistic Distribution และ LognormaDistribution ซึ่งผลปรากฏว่า เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบ Gamma ค่า A.R.E ของสถิติทดสอบสแควร์แรงค์เมื่อเทียบกับสถิติทดสอบ L.M.P.R.T สูงที่สุดมีค่าเท่ากับ 0.9372เมื่อค่าพารามิเตอร์เป็น 5 และ 6 และสถิติทดสอบสแควร์แรงค์มีค่า A.R.E เท่ากับ 1.00 เมื่อเทียบกับสถิติทดสอบ L.M.P.R.T ซึ่งประชากรมีการแจกแจงแบบtruncated t ชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 2 สำหรับค่า A.R.E ของสถิติทดสอบวิลคอกซอนเมื่อเทียบกับสถิติทดสอบสแควร์แรงค์ ปรากฏว่าโดยส่วนมากแล้วค่า A.R.E มีค่าน้อยกว่า 1.00

Gartside(1972) ได้ศึกษาอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรที่มากกว่า 2 กลุ่ม จากสถิติทดสอบ 8 แบบ คือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต, บาร์ตเลตแบบปรับปรุง, Cochran, Hartley ,Cadwell ,Log ANOVA1,Log ANOVA2 และLog ANOVA แบบปรับปรุงของ Bargman โดยศึกษาจากจำนวนกลุ่มตัวอย่าง 3 , 4 , 5 และ 10 กลุ่ม จากประชากรที่มีลักษณะการแจกแจงแบบปกติซึ่งได้ผลสรุปดังนี้

1. สถิติทดสอบบาร์ตเลต มีอำนาจการทดสอบสูงสุดเมื่อ

1.1 ใช้กลุ่มตัวอย่างขนาด 16 เท่ากันทุกกลุ่มและความแปรปรวนของประชากรกำหนดให้ดังนี้ $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2=c$, $\sigma_3^2=c^2,\ldots,\sigma_k^2=c^{k-1}$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ที่กำหนด

1.2 ใช้กลุ่มตัวอย่างไม่เท่ากัน (4,8,16)สำหรับ 3 กลุ่ม (4,4,8,16) สำหรับ 4 กลุ่มและ(4,4,4,8,16)สำหรับกลุ่มตัวอย่าง 5 กลุ่ม ความแปรปรวนของประชากรกำหนดดังนี้ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots = \sigma_{k-1}^2 = 1$, $\sigma_k^2 = c$

2. สถิติทดสอบ Cochran มีอำนาจการทดสอบสูงสุดเมื่อขนาดของกลุ่มตัวอย่างทุกกลุ่มเท่ากับ 16 และความแปรปรวนของประชากรคือ $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_{k-1}^2=1,\sigma_k^2 = c$

โดยทั่วไปแล้วจากการวิจัยนี้สรุปได้ว่า สถิติทดสอบบาร์ตเลต บาร์ตเลตปรับปรุง Cochran Hartley และ Cadwell มีอำนาจการทดสอบสูงใกล้เคียงกัน แต่สถิติทดสอบประเภท Log ANOVA ทั้ง 3 แบบ มีอำนาจการทดสอบต่ำ ซึ่ง Gartside ได้เสนอแนะว่า

เมื่อต้องการทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรที่มีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ ควรเลือกใช้สถิติทดสอบบาร์ตเลต แต่ถ้าแน่ใจว่ามีเพียงประชากรกลุ่มเดียวเท่านั้นที่มีความแปรปรวนของประชากรสูงกว่ากลุ่มอื่นๆ ควรเลือกใช้สถิติทดสอบ Cochran แต่ถ้าต้องการได้ผลลัพธ์โดยรวดเร็วแล้วควรเลือกใช้สถิติทดสอบ Hartley หรือ Cadwell

Layard(1973) ได้ศึกษาความแกร่งของสถิติทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวน โดยศึกษาจากสถิติทดสอบ 4 แบบคือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบ X^2 ของเลยาร์ด สถิติทดสอบ Box และสถิติทดสอบแจคไนฟ์ (Jackknife test) จากจำนวนกลุ่มตัวอย่าง 4 กลุ่มที่มีขนาดของกลุ่มตัวอย่างเท่ากันคือขนาด 10 และ 25 อัตราส่วนความแปรปรวนของประชากร 4 แบบคือ 1:1:1:1,1:1:2:2, 1:2:3:4 และ1:1:4:4รูปแบบการแจกแจงของประชากร 3 รูปแบบคือ แบบยูนิฟอร์ม แบบปกติ และแบบดับเบิลเอ็กโปเนียลเชียล สรุปผลได้ว่า สถิติทดสอบ X^2 สถิติทดสอบ Box และสถิติทดสอบ Jackknife เป็นสถิติทดสอบที่มีความแกร่ง แต่สถิติทดสอบบาร์ตเลตจะไม่มีความแกร่งเมื่อการแจกแจงของประชากรไม่เป็นแบบปกติ ถ้าประชากรมีลักษณะการแจกแจงแบบปกติแล้ว สถิติทดสอบบาร์ตเลตจะมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าสถิติทดสอบแบบอื่นๆ นอกจากนี้ Layard ยังได้เสนอแนะไว้ว่าควรเลือกใช้สถิติทดสอบ X^2 หรือสถิติทดสอบ Jackknife เมื่อต้องการที่จะเลือกใช้สถิติที่มีความแกร่งและมีอำนาจการทดสอบอยู่ในระดับที่ยอมรับได้ เพราะว่าสถิติทดสอบ Box จะมีความแกร่งและเชื่อถือได้เมื่อมีการฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้น แต่ก็มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบ X^2 และ สถิติทดสอบ Jackknife

สำหรับงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับอำนาจการทดสอบของสถิติที่ใช้ทดสอบการเท่ากันของความแปปรปรวนนั้น Games,Winkler และ Probert (1972) ศึกษาโดยใช้กลุ่มตัวอย่างจาก 3 ประชากรและสถิติที่ใช้ทดสอบคือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบของฮาร์ตเลย์ สถิติทดสอบCochran สถิติทดสอบเลอวีน 2 แบบคือ L-X^2 และ L-A เมื่อใช้ขนาดของกลุ่มตัวอย่างทุกกลุ่มเป็น 6 แต่ถ้าขนาดของกลุ่มตัวอย่างเป็น 18 ใช้สถิติทดสอบของบาร์ตเลตและเคนดอล (Bartlett and Kendall'stest) สถิติทดสอบ Q (Q-test) สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบ LEV2 และสถิติทดสอบ LEV3 โดยเปรียบเทียบเมื่อประชากรมีลักษณะการแจแแจง 6 แบบคือแบบปกติ แบบมีความเบ้น้อย (slight skew)แบบมีความเบ้ปานกลาง (moderate skew) แบบมีความเบ้มาก (extreme skew) แบบสมมาตรที่มีความโด่งแบบเลปโตเคอร์ติค และแบบยูนิฟอร์ม ผลการวิจัยสรุปได้คือ

1. ในกรณีที่ศึกษากลุ่มตัวอย่างที่มีขนาด 6 ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบปกติและความแปรปรวนของประชากรไม่เท่ากันทั้งหมด สถิติทดสอบบาร์ตเลต และสถิติทดสอบ Fmax มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุด และถ้าประชากรมีความเบ้เพียงเล็กน้อยก็จะไม่มีผลกระทบต่ออำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 2

2. ในกรณีที่ศึกษากลุ่มตัวอย่างขนาด 18 สถิติทดสอบบาร์ตเลตและเคนดอล สถิติทดสอบ Q และสถิติทดสอบ M มีอำนาจการทดสอบสูงและไม่แตกต่างกัน แต่ถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบเบ้ สถิติทดสอบ LEV3 ซึ่งใช้วิธีการเปรียบเทียบความแปรปรวนโดยการแบ่งกลุ่มตัวอย่างออกเป็นกลุ่มย่อย(subsample) จะสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดีแต่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบแบบอื่น

นอกจากนี้ Games และคณะ ยังได้เสนอแนะไว้ว่าถ้าประชากรมีลักษณะการแจกแจงที่มีความโด่ง (r_2) มีค่าน้อยกว่า 0.5 ถ้า $r_2 = E[\{(X_i - \mu_x)^4/\sigma^4\} - 3]$ ควรทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรโดยใช้สถิติทดสอบบาร์ตเลต หรือสถิติทดสอบ Fmax แต่ถ้าผู้วิจัยไม่ทราบแน่ชัดเกี่ยวกับรูปแบบการแจกแจงของประชากรเป็นที่แน่นอนแล้ว ควรใช้สถิติทดสอบ LEV3 เพราะถึงแม้ว่าจะเป็นสถิติที่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบอื่นๆแต่สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ดี ซึ่งอาจแก้ไขได้โดยการเพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่าง แต่ถ้าไม่สามารถเพิ่มขนาดของกลุ่มตัวอย่างได้ก็ควรเลือกใช้สถิติทดสอบบาร์ตเลตและเคนดอล เพราะถึงแม้ว่าสถิติทดสอบนี้จะมีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบบาร์ตเลต แต่ก็มีความเชื่อถือได้เมื่อมีการฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้นของการทดสอบมากกว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบไม่ปกติ

Brown และ Fosythe (1974) ได้ศึกษาถึงความแกร่งและอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร 2 กลุ่ม โดยศึกษาจาก สถิติทดสอบJackknife สถิติทดสอบ X^2 สถิติทดสอบ เอฟ (F - test) และสถิติทดสอบเลอวีน ที่มีการเปลี่ยนข้อมูล ด้วยค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของข้อมูลกับค่ากลางของกลุ่มตัวอย่างนั้นๆ $Z = |X - m|$ เมื่อใช้ค่ากลาง(m) 3 แบบ คือ LEV1 (เมื่อ m เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต Mean) LEV2 (เมื่อ m เป็นค่ามัธยฐาน Median) และ LEV3 (เมื่อ m เป็นค่าเฉลี่ย Trimmed mean) จากกลุ่มตัวอย่างดังนี้ (40,40),(20,40),(10,10) และ (10,20) อัตราส่วนความแปรปรวนของประชากรคือ (1:1), (1:2), (1:4), (2:1) และ(4:1) กลุ่มตัวอย่างถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีลักษณะการแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบทีที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 4 การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีชั้นความเป็นอิสระเท่ากับ 4 ซึ่งผลการวิจัยปรากฏว่า สถิติทดสอบเลอวีนทั้ง 3 แบบมีความแกร่งมากกว่าสถิติอื่นๆ และ

อำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบเลอวีนทั้ง 3 แบบมีค่าใกล้เคียงกัน โดยสถิติทดสอบ LEV1 จะมีความแกร่งมาก เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบ LEV2 มีความแกร่งมากเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบไคสแควร์ สถิติทดสอบ LEV2 และ LEV3 มีความแกร่งไม่แตกต่างกันเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบที และBrown ยังได้เสนอแนะว่าถ้าประชากรมีการแจกแจงแบบไม่ปกติ ควรจะใช้สถิติทดสอบเลอวีนที่ใช้ค่ามัธยฐานเป็นค่ากลางของข้อมูล เพราะจะมีความแกร่งมากกว่าสถิติทดสอบเลอวีนที่ใช้ค่าเฉลี่ย