บทที่ ๑

บทนำ

การศึกษาวิชาเรขาคณิตสมัยนี้นิยมศึกษาถึงเรื่อง transformation of **figures** (การจำลองภาพ) คำว่า "ภาพ" (figure) ในที่นี้ คือ เซทของจุด (set of points) ในพื้นราบหรืออวกาศ (space) ที่เป็นไปตามกฎใดกฎหนึ่งที่กำหนดให้ การศึกษาถึงเรื่อง transformation of figures นั้นมีทั้ง transformations ชนิดที่ transform แล้วเปลี่ยนรูปและขนาดของภาพเดิม เช่นเปลี่ยนจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสไปเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูป ellipse ไปเป็นรูปวงกลม เป็นต้น และ transformations ชนิดที่ transform แล้วไม่เปลี่ยนรูปและขนาดของภาพเดิม เช่น จากรูปสามเหลี่ยมไปเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดเท่าเดิมเป็นต้น ดังจะได้ยกตัวอย่าง transformations ทั้งสองชนิดให้เห็นดังนี้

ตัวอย่างที่ ๑ เปลี่ยนจากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ไปเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A'B'C'D'$ ด้วย transforming matrix P เมื่อ A, B, C, D มีโคออดิเนตเป็น (2,1), (5,1), (5,4) และ (2,4) ตามลำดับ และสมมุติให้

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ให้จุด A ถูกส่งไปยังจุด $A'(x_1', y_1')$ โดย P

B ถูกส่งไปยังจุด $B'(x_2', y_2')$ โดย P

C ถูกส่งไปยังจุด $C'(x_3', y_3')$ โดย P

D ถูกส่งไปยังจุด $D'(x_4', y_4')$ โดย P

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix}^{*} = P \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* ดูนิยาม ๒.๑ หน้า ๑๗ บทที่ ๒

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 22 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4' \\ y_4' \\ 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดูรูปจากกราฟ รูปที่ 1

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากรูปสามเหลี่ยม ABC ไปเป็นรูปสามเหลี่ยม A'B'C' ซึ่งมีรูปและขนาดคงเดิม ด้วย transforming matrix Q เมื่อ A,B,C มีโคออดิเนตเป็น (1,4), (4,4) และ (1,8) ตามลำดับ และสมมุติให้

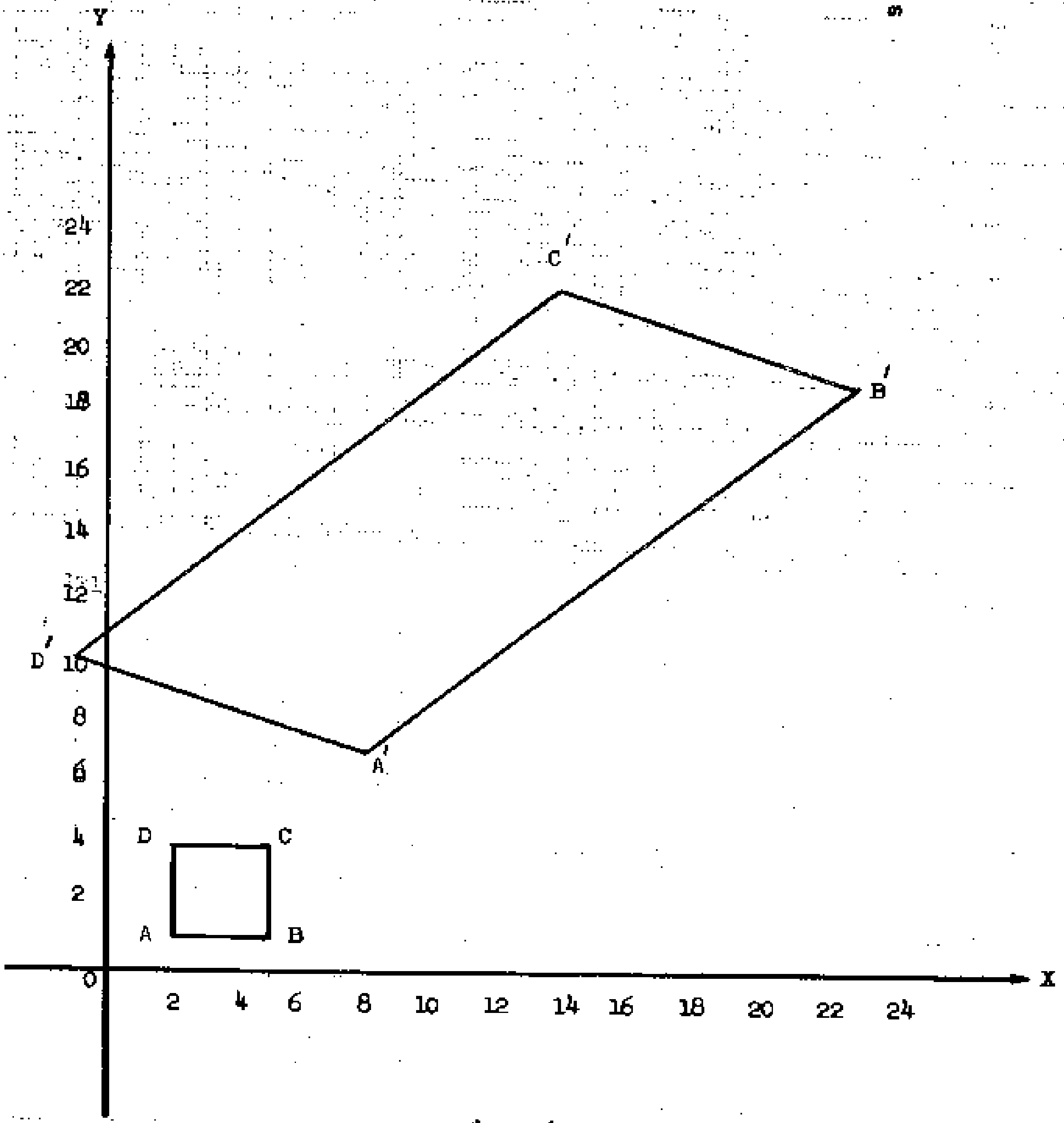
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 8 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 5 + \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ให้จุด A ถูกส่งไปยังจุด A' (x_1', y_1') โดย Q

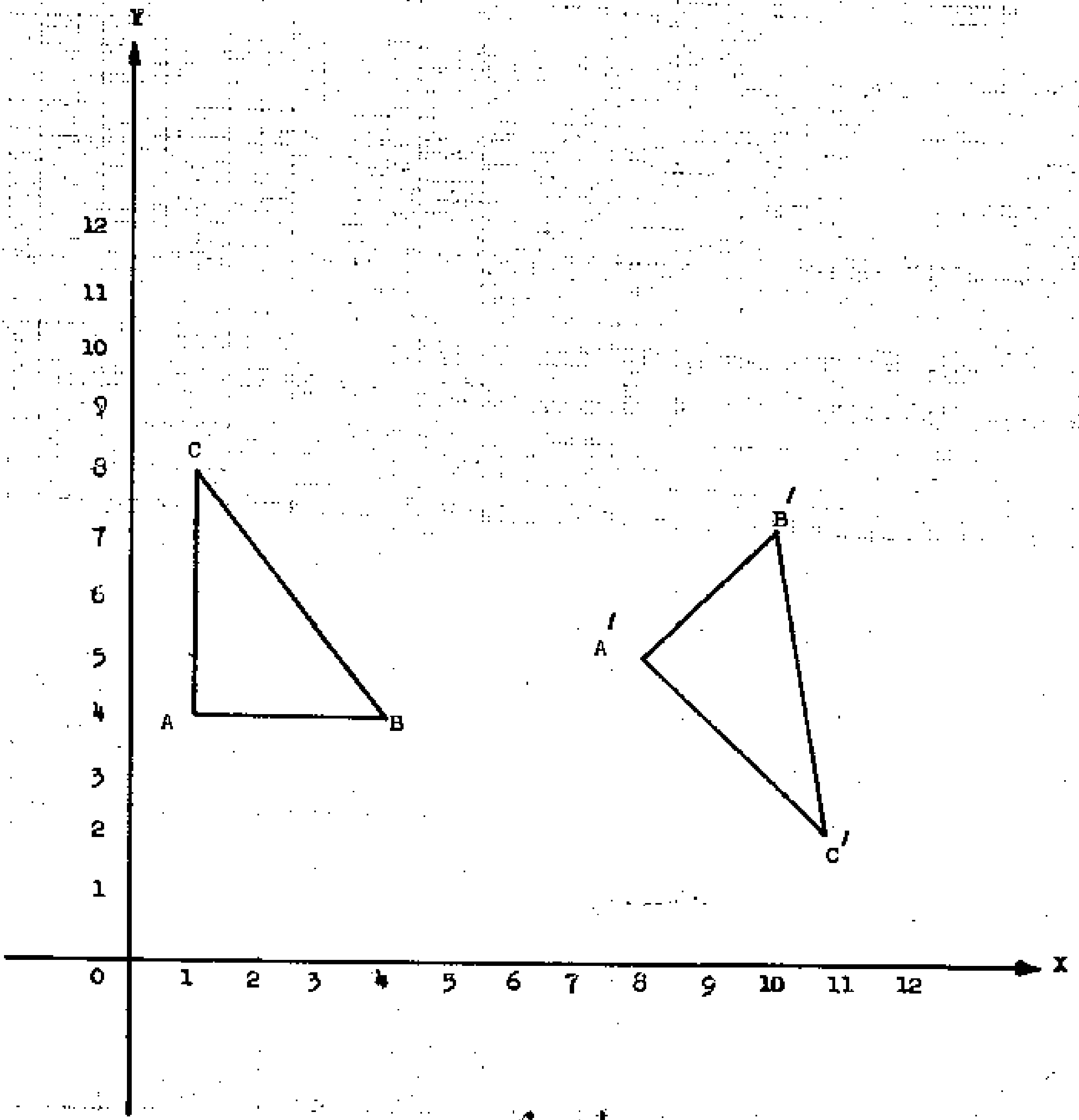
B ถูกส่งไปยังจุด B' (x_2', y_2') โดย Q

C ถูกส่งไปยังจุด C' (x_3', y_3') โดย Q

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$


Y
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
O
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
X
A
B
C
D
A'
B'
C'
D'

กราฟรูปที่ ๑



กร๊าฟรูปที่ ๒

$$\begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16 + 3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{10 + 3\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.121 \\ 7.121 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \\ 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 2\sqrt{2} \\ 5 - 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.828 \\ 2.172 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดูรูปจาก **กราฟ รูปที่ ๒**

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะกล่าวแต่เฉพาะ transformations บนพื้นราบที่ไม่เปลี่ยนรูปและขนาดของภาพเดิม ซึ่งก็คือ transformations ที่ใช้ในเรขาคณิตของยูคลิด ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 แบบ คือ (i) แบบ translation (ii) แบบ rotation (iii) แบบ reflection และโดยมากเป็นแบบผสมระหว่างแบบ (i), (ii) และ (iii) เราจะได้พิสูจน์ว่าแต่ละแบบมีคุณสมบัติเป็นกรุ๊ป

Transformation แต่ละแบบดังกล่าว จะแสดงได้ด้วย transforming matrix ซึ่งอ้างอิงกับแกนโคออดิเนตที่คงที่ และแต่ละแบบที่มีคุณสมบัติเป็นกรุ๊ปนั้น ก็จะแสดงได้ด้วย group of matrices. ในเรขาคณิตของยูคลิดมีเรื่องที่กล่าวถึง transformation of figures อยู่หลายเรื่อง เช่นการพิสูจน์ว่าสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากันทุกประการกับสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่ง บนพื้นราบอันเดียวกันนั้น เราต้องยกรูปสามเหลี่ยมรูปแรกไปซ้อนรูปสามเหลี่ยมรูปที่สอง กล่าวคือเราต้องหา transforming matrix ที่จะส่งจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปแรกไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปที่สองได้พร้อมกัน ในบทที่ 3 จะได้แสดงให้เห็นถึงการคำนวณหา transforming matrix นี้.