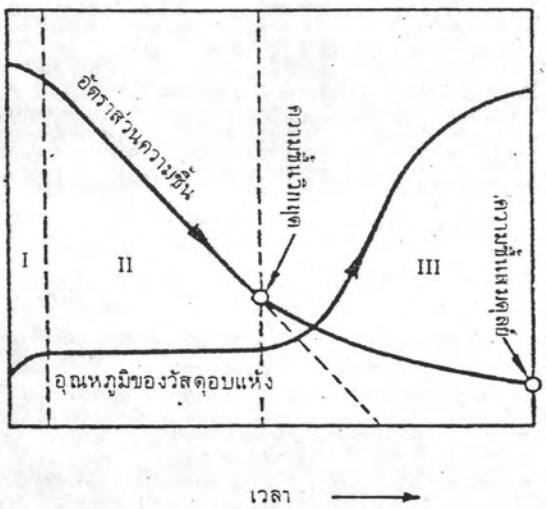
หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการอบแห้ง (drying fundamentals)

การอบแห้งเป็นกระบวนการที่ความร้อน ถูกถ่ายเทด้วยวิธีใดวิธีหนึ่ง ไปยังวัสดุที่มีความชื้น เพื่อไล่ความชื้นออก โดยอาศัยความร้อนที่ได้รับเป็นความร้อนแฝงของการระเหย การอบแห้งวัสดุเปียกชิ้นใด ๆ ภายใต้เงื่อนไขของการอบแห้งที่คงที่ เช่น ในกรณีที่วางวัสดุเปียกชื้นภายในกระแสลมที่มีอุณหภูมิ ความชื้น (humidity) และความเร็วคงที่ การเปลี่ยนแปลงมวล และอุณหภูมิของวัสดุอบแห้ง กับเวลาที่ใช้ในการอบแห้ง มีลักษณะดังรูปที่ 2-1



รูปที่ 2-1

การอบแห้งแบ่งออกได้เป็น 3 ช่วงใหญ่ ๆ ดังนี้

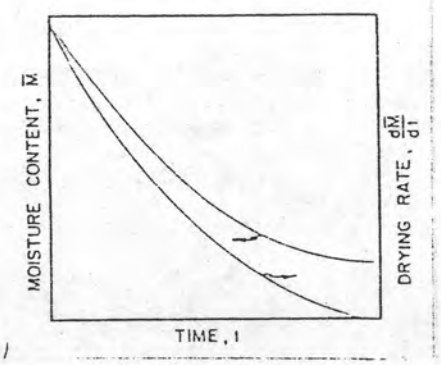
2.1.1 ช่วงการให้ความร้อนเบื้องต้นแก่วัสดุ

2.1.2 ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ (constant - rate drying period)

2.1.3 ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง (falling - rate drying period)

ที่ผิวของวัสดุเปียกชื้น ความชื้นที่ผิวอยู่ในรูปของน้ำ ถ้าเอาวัสดุนี้ไปอบแห้ง

ภายใต้เงื่อนไขที่คงที่ อุณหภูมิของวัสดุจะมีค่าใกล้เคียงกับอุณหภูมิกระเปาะเปียก (wet bulb temperature) ของกระแสลมร้อน ช่วงเวลาที่วัสดุใช้ในการเพิ่มอุณหภูมิจนถึงค่านี้คือช่วงให้ความร้อนเบื้องต้น ในช่วงต่อไปเป็นช่วงของการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ อุณหภูมิของวัสดุจะมีค่าคงที่ตราบเท่าที่ยังมีความชื้นเหลืออยู่ในรูปของน้ำที่ผิววัสดุ ความร้อนทั้งหมดที่ได้รับในช่วงนี้จะถูกนำไปใช้ในการระเหยความชื้นออกเท่านั้น โดยที่ปริมาณความชื้นของวัสดุจะลดลงเป็นสัดส่วนกับเวลาในช่วงนี้ ในช่วงที่ 3. ความชื้นในรูปของน้ำที่ผิวของวัสดุจะระเหยหมดไป เพราะการถ่ายเทความชื้นในรูปของน้ำจากส่วนในของวัสดุเกิดขึ้นไม่ทันกับการระเหยของน้ำจากผิววัสดุ ดังนั้นผิวของวัสดุจะอยู่สภาพที่แห้ง และ อุณหภูมิของวัสดุจะเริ่มสูงขึ้น และความเร็วของการอบแห้งจะค่อยๆลดลง เพราะปริมาณความร้อนที่วัสดุได้รับนอกจากจะนำไปใช้ในการระเหยความชื้นในวัสดุ ยังต้องนำไปเพิ่มอุณหภูมิของวัสดุอีกด้วย การอบแห้งจะสิ้นสุดลงเมื่อค่าความชื้นลดลงถึงค่าาความชื้นสมดุลย์ (equilibrium moisture content) ค่าความชื้นที่ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ เปลี่ยนเป็นช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงนั้นเรียกว่าค่าความชื้นวิกฤตของวัสดุ (critical moisture content) โดยปกติแล้วในการอบแห้งเมล็ดพืชจะพิจารณาถึงช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง(falling - rate drying period) เท่านั้น ดังรูปที่ 2-2



รูปที่ 2-2

เมื่อพิจารณาถึงช่วง การอบแห้งที่ความเร็วคงที่ พบว่าจะมีช่วงระยะเวลาที่ค่อนข้างสั้นมาก และมีปริมาณความชื้นน้อยมากที่จะระเหยออกจากเมล็ดพืช ก่อนจะถึงช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง (falling - rate drying period)

การคำนวณหาอัตราการอบแห้งของวัสดุเกษตรกรรมในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง จะมีความยุ่งยากซับซ้อนกว่าในช่วงความเร็วคงที่มาก เพราะไม่เพียงแต่จะต้อง

พิจารณาถึงการถ่ายเทร้อนโดยการพาความร้อนและการถ่ายเทมวล (convective heat and mass transfer) ยังต้องพิจารณาถึงการแพร่กระจายของมวล(mass diffusion)อีกด้วย มีทฤษฎีอยู่หลายทฤษฎีที่ถูกเสนอขึ้นมา เพื่อใช้หาอัตราการอบแห้งของเมล็ดพืชชนิดต่างๆที่อยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง แต่มีสมการกึ่งทฤษฎีและสมการจากการทดลอง (semitheretical and empirical equation) เท่านั้นที่ผู้ออกแบบเครื่องอบแห้งนิยมใช้ในการออกแบบเครื่องอบแห้ง เพราะสามารถใช้ได้ง่ายและมีความถูกต้องเช่นกัน

2.2 สมการการอบแห้งทางทฤษฎี (Theoretical Drying Equations)

กลไกทางกายภาพที่ได้อธิบายถึงการถ่ายเทความชื้นในเมล็ดพืชจำพวกข้าว มีดังนี้

ก. การเคลื่อนที่ของของเหลวเนื่องจากแรงตึงผิว (capillary flow)

ข. การเคลื่อนที่ของของเหลวเนื่องจากความแตกต่างของความเข้มข้นของความชื้น (liquid diffusion)

ค. การเคลื่อนที่ของของเหลวเนื่องจากการแพร่กระจายของความชื้นที่ผิวของเมล็ดพืช (surface diffusion)

ง. การเคลื่อนที่ของไอน้ำเนื่องจากความแตกต่างของความเข้มข้นของความชื้น (vapor diffusion)

จ. การเคลื่อนที่ของไอน้ำเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิ (thermal diffusion)

ฉ. การเคลื่อนที่ของไอน้ำและน้ำเนื่องจากความแตกต่างของความดัน (hydrodynamic flow)

Luikov (1966) และผู้ร่วมงาน ได้เสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ สำหรับอธิบายการอบแห้งเมล็ดพืชจำพวกข้าว ตามลักษณะกลไกทางกายภาพของการถ่ายเทความชื้นในเมล็ดพืชข้างต้น ดังนี้

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2 K_{11} M + \nabla^2 K_{12} \theta + \nabla^2 K_{13} P$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 K_{21} M + \nabla^2 K_{22} \theta + \nabla^2 K_{23} P$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \nabla^2 K_{31} M + \nabla^2 K_{32} \theta + \nabla^2 K_{33} P \qquad (2\text{-}1)$$

โดย M = ค่าความชื้นของเมล็ดพืช (มาตรฐานแห้ง)

θ = อุณหภูมิของเมล็ดพืช (องศาฟาเรนไฮท์)

P = ความดันรวม ,psfa

t = เวลา (ชั่วโมง)

K_{11} , K_{22} , และ K_{33} เป็น phenomenological coefficients และค่าสัมประสิทธิ์ K อื่น ๆ นั้นเป็น coupling coefficient

ค่าสัมประสิทธิ์ , K ที่เป็น coupling coefficient เป็นผลมาจาก ค่าความชื้น , อุณหภูมิ ,และความแตกต่างของความดันของค่าความชื้น , พลังงานและการถ่ายเทมวลสำหรับค่าสัมประสิทธิ์ , K ที่เป็น phenomenological coefficients สำหรับเมล็ดพืชจำพวกข้าวจะทราบค่าได้ก็ต่อเมื่อมีการทดลองอบแห้งกับเมล็ดพืชนั้น ๆ เท่านั้น จึงทำให้สมการของ Luikov (1966) ยังไม่สามารถที่จะนำไปใช้ได้ทันที

การถ่ายเทความชื้น เนื่องจากความแตกต่างของความดัน จะมีผลอย่างเห็นได้ชัดในช่วงของอุณหภูมิที่อยู่เหนืออุณหภูมิที่ใช้ในการอบแห้ง นั่นหมายถึงว่า เทอมต่าง ๆ ของความดันสามารถจะตัดออกไปจากสมการที่ (2-1) ได้ คงเหลือเพียง

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2 K_{11} M + \nabla^2 K_{12} \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 K_{21} M + \nabla^2 K_{22} \theta \qquad \text{(2-1 ก.)}$$

Husain (1972) ได้พิจารณาถึง coupling effect ของอุณหภูมิและความชื้น ในการวิเคราะห์การอบแห้งเมล็ดพืชจำพวกข้าว พบว่า coupling effect จะมีความสำคัญก็ต่อเมื่อมีการอบแห้งเมล็ดพืชจำนวนน้อย ๆ เท่านั้น ทำให้สมการที่ใช้อธิบายถึงการอบแห้งเมล็ดพืชจำพวกข้าว สามารถลดรูปลงไปได้อีกเป็น

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2 K_{11} M$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 K_{22} \theta \qquad \text{(2-1 ข.)}$$

ซึ่งโดยปกติสมการที่ (2-1 ข.) นี้ก็สามารถจะอธิบายถึงพฤติกรรมของทางการอบแห้งและความร้อนได้เป็นอย่างดี แต่อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ การวิเคราะห์ถึงการอบแห้งเมล็ดพืชจำพวกข้าว เทอมของ temperature gradients สามารถที่จะไม่พิจารณาได้ จากการตัดเทอมของ temperature gradients ที่เกิดขึ้นในเมล็ดพืชจำพวกข้าวออกนั้น ทำให้สมการของ Luikov (1966) เป็นสมการที่อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุด คือ

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \nabla^2 K_{11} M \qquad (2\text{-}2)$$

เป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไปว่า การถ่ายเทความชื้นภายในเมล็ดพืชเกิดขึ้นโดยการแพร่กระจาย (ของเหลวและ/หรือไอน้ำ) และเรียกสัมประสิทธิการถ่ายเท , K_{11} ว่า สัมประสิทธิการแพร่กระจาย , D ผู้ทำการวิจัยส่วนมากจะใช้คำตอบของสมการ (2-2) เพื่อทำนายพฤติกรรมการอบแห้งของเมล็ดพืชจำพวกข้าว

$K_{11} = D =$ สัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย (diffusion coefficient)

สมการ (2 - 2) สมการจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\left[\frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{c}{r}\frac{\partial M}{\partial r}\right] \qquad (2\text{-}3)$$

c = 0 สำหรับรูปร่างที่เป็นแผ่น

c = 1 สำหรับรูปร่างที่เป็นทรงกระบอก

c = 2 สำหรับรูปร่างที่เป็นทรงกลม

โดยมีเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ (boundary condition) ดังนี้

$M (r , 0) = M$ (initial)

$M (r_o, t) = M$ (equilibrium)

จากสมการ (2-3) และเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ (boundary condition) สามารถที่จะ solve เพื่อหาคำตอบได้ดังนี้

สำหรับรูปร่างลักษณะวัสดุเป็นแผ่น

$$MR = \frac{8\sum_{n=0}^{\infty} 1}{\pi^2 (2n+1)^2} \quad EXP\ \frac{[-(2n+1)^2 \pi\ X^2]}{4} \qquad (2\text{-}4)$$

สำหรับรูปร่างวัสดุเป็นทรงกลม

$$MR = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad EXP\ \frac{[-n^2 \pi\ X^2]}{9} \qquad (2\text{-}5)$$

สำหรับรูปร่างลักษณะวัสดุเป็นทรงกระบอก

$$MR = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\lambda^2_n} EXP\ \frac{[-\lambda^2_n\ X^2]}{4} \qquad (2\text{-}6)$$

λ เป็นรากของ Bessel function อันดับศูนย์

โดยที่ $MR = \frac{M(t)-M(eq)}{M(in)-M(eq)}$

และ $X = \frac{A}{V}(Dt)^{1/2}$

A = พื้นที่ผิว

V = ปริมาตรของเมล็ด

สำหรับรูปร่างของวัสดุที่เป็นแผ่น A/V = ครึ่งหนึ่งของความหนา

สำหรับรูปร่างของวัสดุที่เป็นทรงกลม A/V = 1/3 ของรัศมี

สำหรับรูปร่างของวัสดุที่เป็นทรงกระบอก A/V = 1/2 ของรัศมี

2.3 สมการการอบแห้งกึ่งทฤษฎี (semitheoretical drying equations) เป็นสมการที่นำเอาเฉพาะเทอมแรก จากสมการ (2-5) มาใช้ดังนี้

$$\frac{M(t) - M(eq)}{M(in) - M(eq)} = \frac{6}{\pi^2} EXP\left[-D\pi^2 t/r_o^2\right] = \frac{6}{\pi^2} EXP\left[-Kt\right] \quad (2-7)$$

สมการ (2-5) และ สมการ (2-7) จะให้คำตอบที่แตกต่างกันอยู่บ้าง แต่ความแตกต่างนั้นจะน้อยกว่า 5% ถ้าอัตราส่วนของ $-D\pi^2 t/r_o^2 > 1.2$

สำหรับค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย ,D (diffusion coefficient) สามาราถจะหาได้จากการทดลอง เช่น Pabis และ Henderson (1961) ได้ทำการทดลองโดยใช้สมการ (2-4) เป็นสมการที่ใช้เปรียบเทียบกับผลการทดลอง พบว่า

$$D_{corn} = 6.3*10^{-9} EXP\left[-6949/\theta_{abs}\right] \quad ft^2/hr$$

$$K_{corn} = 5.4*10^{-1} EXP\left[-5023/\theta_{abs}\right] \quad 1/sec$$

2.4 สมการการอบแห้งจากการทดลอง (empirical drying equations)

ได้มีผู้ทำการค้นคว้าและทดลองหาสมการอบแห้งสำหรับเมล็ดพืชชนิดต่าง ๆ จากการทดลองอบแห้งเมล็ดพืชจำนวนน้อย ๆ หรือเป็นชั้นบาง ๆ ขึ้นหลายสมการด้วยกัน ดังเช่น

2.4.1 Thompson (1967) ได้เสนอสมการความสัมพันธ์ของปริมาณความชื้นสำหรับเมล็ดข้าวโพด(shelled corn) ในช่วงอุณหภูมิระหว่าง 140-300 องศาฟาเรนไฮท์

ดังนี้

$$t = A \ln MR + B (\ln MR)^2$$

$$A = 1.86178 + 0.00488\theta$$

$$B = 427.364 \, EXP(-0.03301\theta)$$

2.4.2 Sabbah (1968) ได้พัฒนาสมการปริมาณความชื้นของการอบแห้งสำหรับข้าวโพด (corn) ในช่วงอุณหภูมิ 36-70 องศาฟาเรนไฮน์ท์ ดังนี้

$$MR = EXP[-k(t^{0.664})]$$

$$k = EXP[-xt^{y}]$$

$$x = [6.0142 + 1.453*10^{-4} (rh)^2]^{0.5}$$

$$y = 0.1245 - 2.197*10^{-3}(rh) + 2.3*10^{-5}(rh)\theta \quad -5.8*10^{-5}\theta$$

2.5 ค่าความชื้นสมดุลย์ , M_{eq} (equilibrium moisture content)

ค่าความชื้นสมดุลย์เป็นค่าเฉพาะอย่างหนึ่งของวัสดุ ค่าความชื้นสมดุลย์จะถูกนำไปใช้ในการหาว่าวัสดุนั้นจะรับหรือระเหยความชื้นออก ภายใต้สภาวะอุณหภูมิและความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศที่อยู่โดยรอบวัสดุนั้นอย่างไร วัสดุจะอยู่ในสภาวะสมดุลย์กับบรรยากาศโดยรอบ เมื่ออัตราการระเหยความชื้นจากวัสดุสู่บรรยากาศเท่ากับอัตราการเพิ่มความชื้นของวัสดุจากบรรยากาศ โดยทั่วไปค่าความชื้นสมดุลย์จะเป็นฟังก์ชั่นของอุณหภูมิและความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศโดยรอบ ถ้าความชื้นสัมพัทธ์สูงขึ้น หรือ อุณหภูมิของอากาศต่ำลงแล้ว ค่าความชื้นสมดุลย์สูงขึ้น อุณหภูมิจะมีผลต่อค่าความชื้นสมดุลย์เป็นอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งค่าความชื้นสมดุลย์ในเมล็ดพืช เช่น ที่ความชื้นสัมพัทธ์ 70% อุณหภูมิ 40 ฟาเรนไฮท์ ค่าความชื้นสมดุลย์ของเมล็ดข้าวโพดเท่ากับ 15.7% แต่ถ้าอุณหภูมิเพิ่มเป็น 140 องศาฟาเรนไฮท์ ค่าความชื้นสมดุลย์ของเมล็ดข้าวโพดนั้นจะเท่ากับ 10.3% สมการในรูปทั่วไปที่นำไปใช้ในการหาค่าความชื้นสมดุลย์ คือ สมการที่ (2-10)

$$1 - RH = e^{-cT\bar{M}_{eq}^{n}} \qquad (2\text{-}10)$$

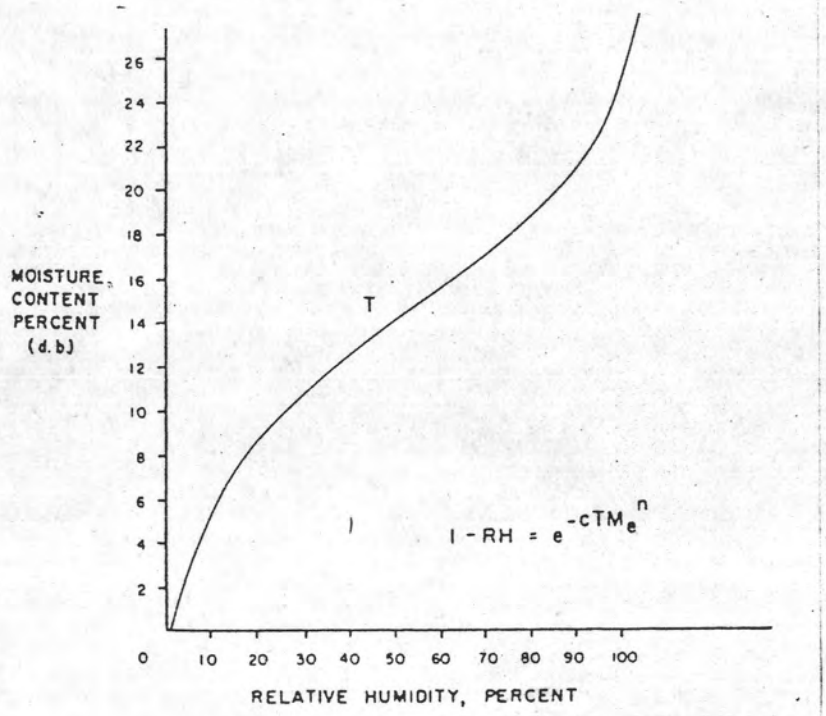
RH = ค่าความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศ ,decimal

T = อุณหภูมิสัมบูรณ์ , °R

M_{eq} = ค่าความชื้นสมดุลย์ มาตราฐานแห้ง (% dry basis)

c และ n เป็นค่าคงที่

013692



รูปที่ 2-3 แสดงเส้นโค้งความชื้นสมดุลย์ (equilibrium moisture content curve)

ดังนั้นสมการที่ได้จากการทดลอง (empirical equations) สำหรับใช้ในการหาค่าความชื้นสมดุลย์นั้น จะเป็นการหาค่าคงที่ในสมการ (2-10) นั่นเอง เช่น

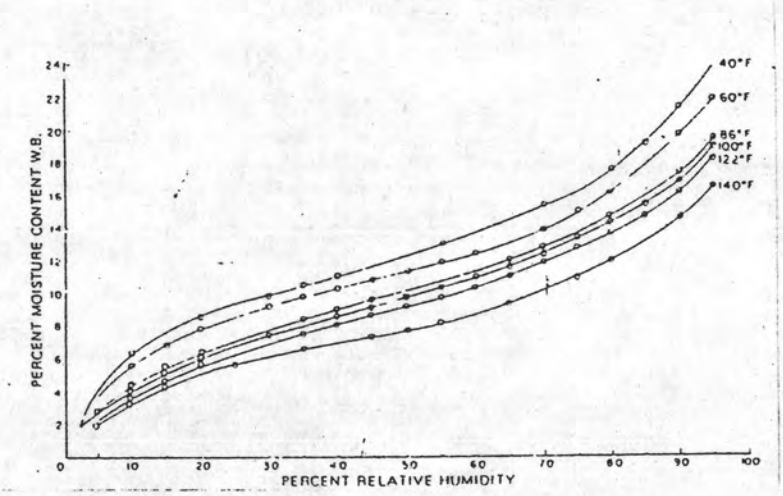
Henderson (1952) ได้ทำการทดลอง เพื่อหาค่าความชื้นสมดุลย์ของเมล็ดข้าวโพด (shelled corn) พบว่าสมการความสัมพันธ์ระหว่างความชื้นสมดุลย์กับอุณหภูมิและความชื้นสัมพัทธ์ของอากาศนั้น มีสมการความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับสมการ (2-10) โดย

$$c = 1.10*10^{-5} \quad \text{และ} \quad n = 1.9$$

Rodriquez Arias (1963) ได้ทำการทดลอง และได้หาค่าคงที่สำหรับเมล็ดข้าวโพด (shelled corn) เช่นเดียวกันกับ Henderson (1963) พบว่า

$$c = 3.82*10^{-5} \quad \text{และ} \quad n = 2.0$$

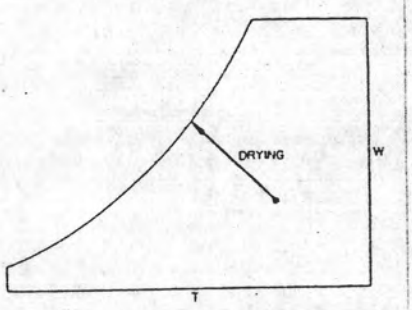
ซึ่งความสัมพันธ์ของสมการสามารถจะแสดงเป็นกราฟได้ดังรูปที่ 2-4



รูปที่ 2-4 แสดงกราฟความชื้นสมดุลย์ของเมล็ดข้าวโพด (shelled corn)

2.6 กระบวนการอบแห้ง (drying process)

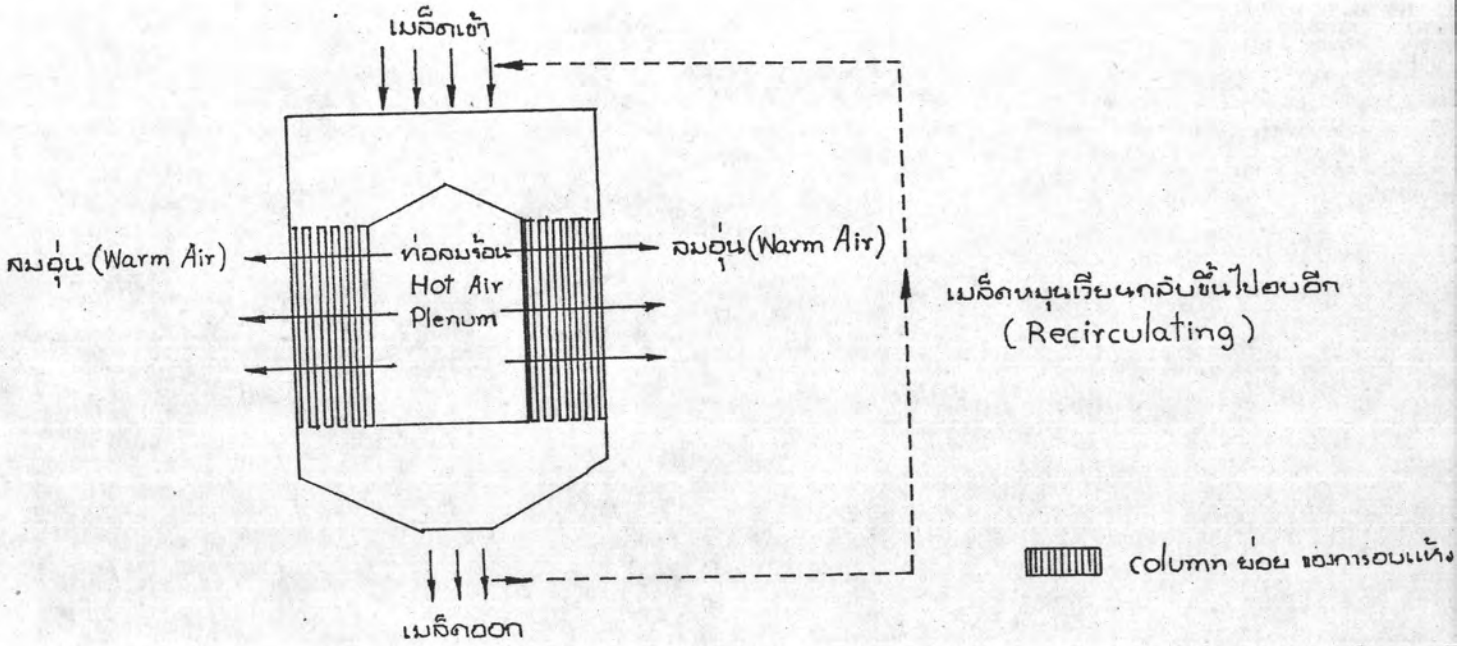
กระบวนการการอบแห้งเมล็ดพืชที่มีลักษณะเป็น column นั้น สามารถจะพิจารณาเป็น adiabatic process ได้ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าความร้อนที่นำไปใช้ในการระเหยความชื้นออกจากเมล็ดพืชนั้นได้จากลมร้อนเท่านั้น ปราศจากการถ่ายเทความร้อนโดยการนำหรือการแผ่รังสีความร้อน (conduction and radiation)กับบริเวณรอบ ๆ เมื่ออากาศไหลผ่านเมล็ดพืช ความร้อนสัมผัส (sensible heat)จะเปลี่ยนเป็นความร้อนแฝง (latent heat) มีผลทำให้ปริมาณน้ำในอากาศมีมากขึ้น ในระหว่างที่เกิดกระบวนการ adiabatic process อยู่นั้นอุณหภูมิกระเปาะแห้ง(dry bulb temperature)จะลดลง แต่ค่าอัตราส่วนความชื้น (humidity ratio) , ค่าความชื้นสัมพัทธ์ (relative humidity) , ความดันไอ (vapor pressure) และ อุณหภูมิที่จุดกลั่นตัว (dew point temperature)จะมีค่าเพิ่มขึ้น ขณะที่ค่าเอนทาลปี (enthalpy) และ อุณหภูมิกระเปาะเปียก (wet bulb temperature) จะมีค่าคงที่ ดังนั้นกระบวนการการอบแห้งเมล็ดพืชสามารถจะแสดงบน Psychrometric chart ได้ดังรูปที่ 2-5



รูปที่ 2-5 แสดงกระบวนการการอบแห้งของเมล็ดพืชบน Psychrometric chart

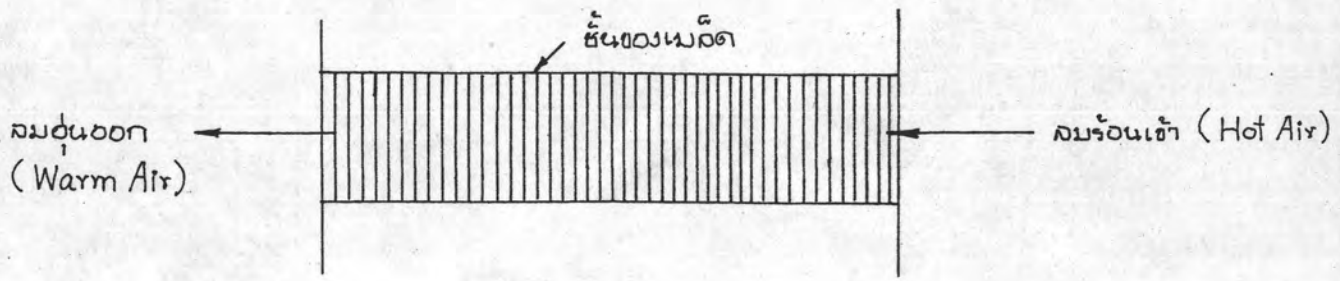
2.7 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งแบบกระบะชนิดเมล็ดไหลหมุนเวียน

เครื่องอบแห้งแบบกระบะชนิดเมล็ดไหลหมุนเวียนจะมีลักษณะเป็น column สี่เหลี่ยมที่บรรจุเมล็ดอยู่ โดย column จะถูกแบ่งออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน ระหว่าง column ทั้งสองจะมีท่อลมร้อนอยู่ตรงกลาง ท่อลมร้อนนี้จะเป่าลมร้อนออกทางด้านข้างทั้งสองด้าน ลมร้อนจะไหลผ่านชั้นของเมล็ด และออกสู่บรรยากาศภายนอกในที่สุด ดังรูปที่ 2-6



รูปที่ 2-6 แสดงลักษณะของเครื่องอบแห้งแบบกระบะชนิดเมล็ดไหลหมุนเวียน

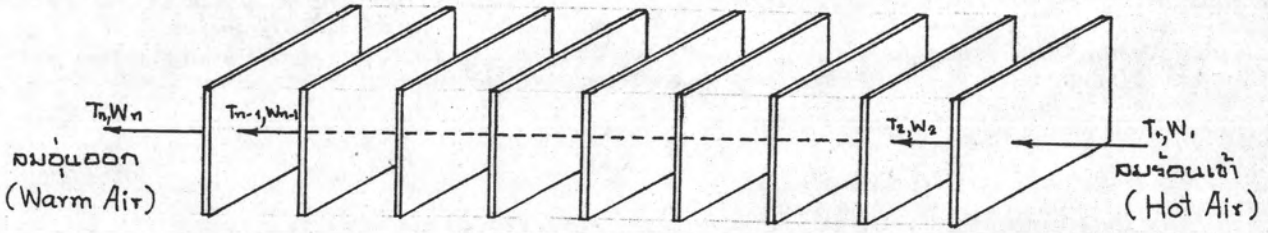
column ของการอบแห้งสามารถจะพิจารณาเป็น column เล็กๆ ซึ่งแต่ละ column เล็ก ๆ ที่จะนำมาพิจารณานั้นประกอบด้วยชั้นบางของเมล็ดวางเรียงซ้อน ๆ กันอยู่เป็นจำนวนมาก ดังรูปที่ 2-7



รูปที่ 2-7 แสดง column ย่อยของ column ของการอบแห้ง

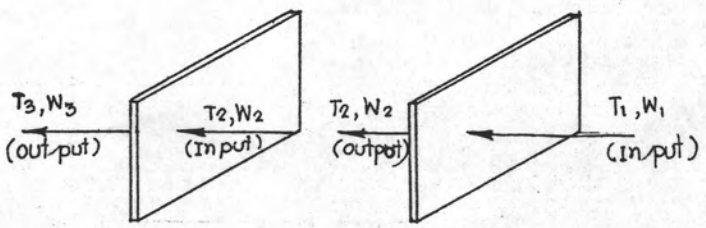
ในหัวข้อ 2.2 ถึง 2.4 ได้พิจารณาถึงการอบแห้งของเมล็ดพืชจำพวกข้าวเป็นเมล็ด ๆ และเป็นชั้นบาง ๆ ของเมล็ด ซึ่งในทางปฏิบัติจะใช้ประโยชน์ค่อนข้างจำกัด เพราะเมล็ดพืชจำพวกข้าวไม่ค่อยจะมีการอบแห้งทีละเมล็ด ๆ หรือเป็นชั้นบาง ๆ แต่จะอบแห้งเป็นชั้นหนา (deep bed) ซึ่งถ้าพิจารณาการอบแห้งแบบชั้นหนาจะเห็นได้ว่าเป็นการอบแห้งแบบชั้นบาง ๆ ที่มีการนำเอาชั้นบาง ๆ นำมาเรียงต่อ ๆ กันนั่นเอง

ดังนั้นในการพิจารณาถึงสมการทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งแบบกระบะนี้จึงเริ่มจากการพิจารณาชั้นบางๆที่ประกอบกันขึ้นเป็นกระบะซึ่งมีความหนาค่าหนึ่ง โดยจะเริ่มจากชั้นบาง ๆ ของเมล็ดพืชชั้นแรก ซึ่งจะมีลมร้อนเข้าที่มีอุณหภูมิและคุณสมบัติของอากาศค่าหนึ่ง เมื่อลมร้อนได้ผ่านชั้นบางๆชั้นแรกไป จะทำให้อุณหภูมิและคุณสมบัติของอากาศเปลี่ยนแปลงไป ซึ่งกระบวนการที่เกิดขึ้นจะสอดคล้องกับกระบวนการการอบแห้งของเมล็ดพืช อุณหภูมิและคุณสมบัติของอากาศที่ผ่านชั้นบางๆชั้นแรกมาแล้วก็จะเป็นลมร้อนเข้าของชั้นบางๆชั้นที่สองต่อไป ซึ่งลมร้อนก็จะผ่านชั้นบางๆต่างๆทั้งหมดจนออกสู่บรรยากาศภายนอกในที่สุด ดังรูปที่ 2-8



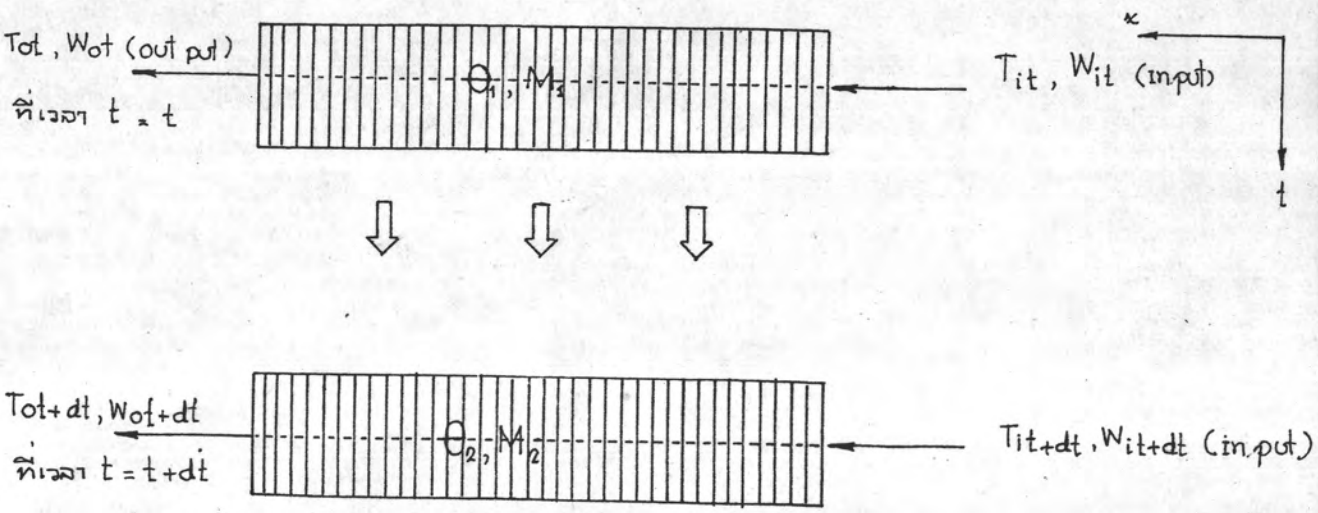
รูปที่ 2-8

ในทำนองเดียวกัน สำหรับสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของการอบแห้ง จะสามารถหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าต่างๆ ของอากาศตลอดชั้นของกระบะ โดยจะพิจารณาชั้นบางๆ ของเมล็ดที่ติดกันกับชั้นบางๆ แรกที่ได้พิจารณามาก่อน ซึ่งค่าตัวแปรต่างๆที่เป็น output ที่ออกจากชั้นบางๆแรกนั้น จะเป็น input ของชั้นบางๆ ที่อยู่ติดกัน ดังรูปที่ 2-9



รูปที่ 2-9

สำหรับชั้นของเมล็ดข้าวโพดเล็ก ๆซึ่งประกอบเข้าด้วยกันเป็นกระบะนั้น เมื่อเวลาผ่านไป กระบะนั้นจะเคลื่อนที่ผ่านลงไปยังด้านล่างของตู้อบแห้ง ซึ่งจะต้องใช้เวลาในการเคลื่อนที่ลงมาด้วยเวลาเท่ากับ dt การพิจารณาเพื่อคำนวณหาค่าตัวแปรต่างๆนั้น สามารถกระทำได้เช่นเดียวกันกับข้างต้น ทั้งนี้เนื่องจากอุณหภูมิและคุณสมบัติของอากาศร้อน ที่ใช้ในการอบแห้งเมื่อเวลาผ่านไปเท่ากับ dt นั้นมีค่าเท่ากับอุณหภูมิและคุณสมบัติของอากาศร้อนที่ใช้ในการอบแห้งในเวลาที่ผ่านมา จะมีก็เพียงแต่อุณหภูมิและความชื้นของข้าวโพดเท่านั้นที่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2-10



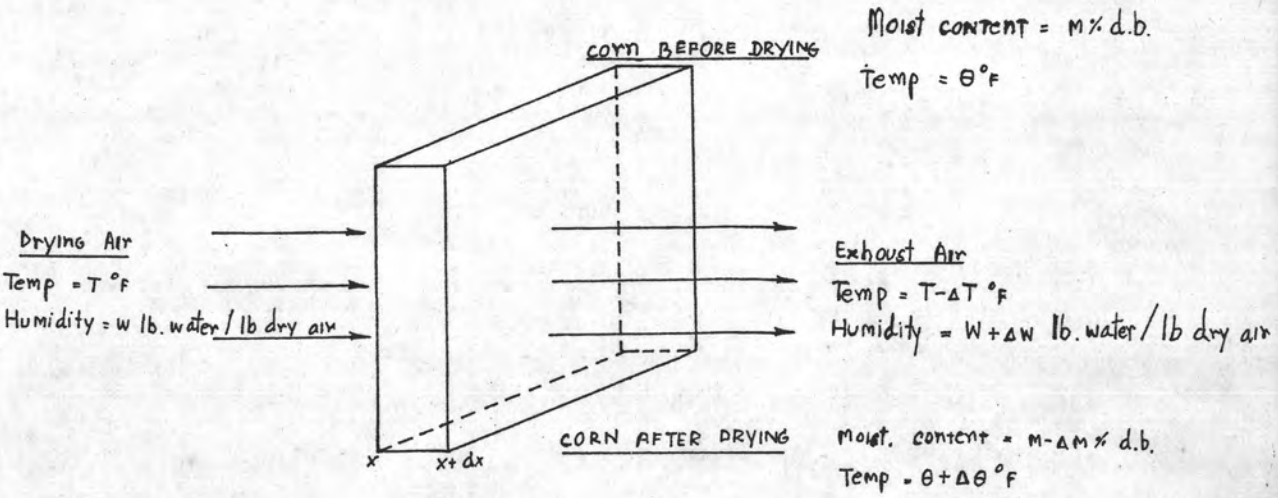
รูปที่ 2-10

ซึ่ง $T_t = T_{t+dt}$

$W_t = W_{t+dt}$

$\theta_2 > \theta_1 \quad , M_2 < M_1$

2.8 การพิจารณาสมการทางคณิตศาสตร์ของกระบะเมล็ดพืช



รูปที่ 2-11

ในการวิเคราะห์สมการทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งแบบกระบะชนิดเมล็ดไหลหมุนเวียน(recirculating batch dryer)นั้น จะใช้หลักการการสมดุลย์พลังงานและมวลของเมล็ดพืชและอากาศ โดยจะแสดงความสัมพันธ์ของสมการทางคณิตศาสตร์จากปริมาตรเล็กๆ (Sdx) ของกระบะเมล็ดพืช โดยมีข้อสมมติฐานดังต่อไปนี้

ก. ในขณะที่ทำการอบนั้นปริมาตรของเมล็ดพืชไม่เปลี่ยนแปลง

ข. ไม่คำนึงถึงความแตกต่างของอุณหภูมิภายในของเมล็ดพืชแต่ละเมล็ด

ค. ไม่คำนึงถึงการนำความร้อนระหว่างเมล็ดพืชแต่ละเมล็ด

ง. อัตราการไหลของอากาศมีค่าคงที่

จ. ค่า $\frac{\partial T}{\partial t}$ และ $\frac{\partial W}{\partial t}$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่า $\frac{\partial T}{\partial x}$ และ $\frac{\partial W}{\partial x}$

ฉ. ผนังของเครื่องอบแห้งไม่มีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้น

ช. สมการค่าปริมาณความชื้นของการอบแห้งและค่าความชื้นสมดุลย์ที่เหมาะสมกับเมล็ดพืชแต่ละชนิดทราบค่าแล้ว

2.8.1 พิจารณาสมการสมดุลย์ความร้อนของอากาศ

การถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อนจะเท่ากับ ความแตกต่างของค่าเอนทาลปีของอากาศที่เข้าและออกจากปริมาตรเล็กๆ (Sdx) บวกกับการเปลี่ยนแปลงของค่าเอนทาลปีต่อเวลาของอากาศที่อยู่ตามรูพรุนระหว่างเมล็ด

ปริมาณอากาศที่ไหลเข้าไปในปริมาตรเล็กๆ (Sdx) ในเวลา dt เท่ากับ

$$(\rho_a V_a + \rho_a V_a W) S \, dt \qquad (2\text{-}11)$$

ค่าเอนทาลปีของอากาศที่ไหลเข้าไปในปริมาตรเล็กๆ (Sdx) ในเวลา dt เท่ากับ

$$(\rho_a V_a c_a + \rho_a V_a c_v W) S \, Tdt \qquad (2\text{-}12)$$

และค่าเอนทาลปีของอากาศที่ไหลออกจากปริมาตรเล็กๆ (Sdx) ในเวลา dt เท่ากับ

$$(\rho_a V_a c_a + \rho_a V_a W c_v)(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) S \, dt \qquad (2\text{-}13)$$

ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของค่าเอนทาลปีของอากาศเท่ากับ ความแตกต่างของสมการ (2-12) กับสมการ (2-13) นั่นคือ

$$(\rho_a V_a c_a + \rho_a V_a W c_v) \frac{\partial T}{\partial x} S dxdt \qquad (2\text{-}14)$$

การเปลี่ยนแปลงของค่าความร้อนสัมผัส (sensible heat) ของอากาศภายในปริมาตรเล็ก ๆ (Sdx) ตามเวลาเท่ากับ

$$(\rho_a c_a + \rho_a W c_v) \epsilon \, Sdx \frac{\partial T}{\partial t} dt \qquad (2\text{-}15)$$

ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดของค่าความร้อนสัมผัสของอากาศ ในเวลา dt เท่ากับ

$$(\rho_a c_a + \rho_a W c_v) Sdxdt \left(V_a \frac{\partial T}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial T}{\partial t}\right) \qquad (2\text{-}16)$$

เมื่ออากาศเคลื่อนที่ผ่านเมล็ดพืช การถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อนจะเกิดขึ้น การเปลี่ยนแปลงค่าความร้อนสัมผัส (sensible heat) ของอากาศในเวลา dt เนื่องจากการถ่ายเทความร้อน โดยการพาความร้อนนั้นเท่ากับ

$$q = -h_a a(T - \theta) Sdxdt \qquad (2\text{-}17)$$

โดยสมการสมดุลย์ความร้อน นั่นคือ สมการ (2-16) เท่ากับสมการ (2-17)

$$(\rho_a c_a + \rho_a W c_v) Sdxdt \left(V_a \frac{\partial T}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial T}{\partial t}\right) = -h_a a(T-\theta) Sdxdt$$

$$\left(V_a \frac{\partial T}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{-h_a}{(\rho_a c_a + \rho_a W c_v)} a(T-\theta) \qquad (2\text{-}18)$$

จากข้อสมมติฐาน ปริมาณ $\epsilon \frac{\partial T}{\partial t}$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ $V_a \frac{\partial T}{\partial x}$

และเนื่องจาก $V_a \rho_a = G_a$ ดังนั้นสมการ (2-18) จะเท่ากับ

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-h_a a}{V_a (\rho_a c_a + \rho_a W c_v)} (T-\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-h_a a}{(G_a c_a + G_a W c_v)} (T-\theta) \qquad (2\text{-}19)$$

2.8.2 พิจารณาสมการสมดุลย์ทางความร้อนของเมล็ดพืช

พลังงานความร้อนที่เมล็ดได้รับถูกถ่ายเทโดยการพาความร้อนจากอากาศจะเท่ากับผลรวมของค่าเอนทาลปี ที่ทำให้เมล็ดพืชมีอุณหภูมิสูงขึ้น, ทำให้ไอน้ำระเหยออกจากเมล็ดพืช และทำให้ไอน้ำที่ระเหยออกจากเมล็ดพืชมีอุณหภูมิสูงขึ้นด้วย

ที่เวลา t ใด ๆ ค่าเอนทาลปีของเมล็ดพืชในปริมาตรเล็ก ๆ (Sdx) เท่ากับ

$$Sdx (\rho_p c_p + c_w \rho_p M)\theta \qquad (2\text{-}20)$$

และที่เวลา t + dt ค่าเอนทาลปีของเมล็ดพืชในปริมาตรเล็ก ๆ (Sdx) เท่ากับ

$$Sdx (\rho_p c_p + c_w \rho_p M)(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial t} dt) \qquad (2\text{-}21)$$

ปริมาณความชื้นที่ระเหยในเวลา dt เท่ากับการเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วนความชื้น (humidity ratio) ของอากาศที่ออกจากปริมาตรเล็กๆ (Sdx) เท่ากับ

$$G_a \frac{\partial W}{\partial x} Sdxdt \qquad (2\text{-}22)$$

ปริมาณความร้อนที่ต้องการ เพื่อนำไประเหยน้ำออกจากเมล็ดในเวลา dt เท่ากับ

$$h_{fg} G_a \frac{\partial W}{\partial x} Sdxdt \qquad (2\text{-}23)$$

ค่าเอนทาลปีที่ทำให้ไอน้ำมีอุณหภูมิสูงขึ้นจากอุณหภูมิเท่ากับ θ ถึงอุณหภูมิเท่ากับ T ของอากาศ ในเวลา dt ใด ๆ เท่ากับ

$$c_v (T-\theta) G_a \frac{\partial W}{\partial x} Sdxdt \qquad (2\text{-}24)$$

โดยสมการสมดุลย์ทางความร้อน

$$h_a(T-\theta)Sdxdt = (\rho_p c_p+\rho_p c_w M)\frac{\partial \theta}{\partial t}Sdxdt - h_{fg}G_a\frac{\partial W}{\partial x}Sdxdt$$

$$- c_v(T-\theta)G_a\frac{\partial W}{\partial x}Sdxdt \qquad (2\text{-}25)$$

$$h_a(T-\theta) = (\rho_p c_p +\rho_p c_w M)\frac{\partial \theta}{\partial t} - (h_{fg}+c_v (T-\theta))G_a\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{h_a(T-\theta)}{(\rho_p c_p +\rho_p c_w M)} + \frac{h_{fg}+c_v (T-\theta)}{(\rho_p c_p +\rho_p c_w M)} G_a\frac{\partial W}{\partial x} \qquad (2\text{-}26)$$

2.8.3 พิจารณาความชื้นของอากาศ

ปริมาณความชื้นของเมล็ดพืชที่สูญเสียไป เท่ากับ ปริมาณไอน้ำที่ถูกอากาศนำเข้าไปในปริมาตรเล็กๆ (Sdx) ลบด้วยปริมาณไอน้ำที่อากาศนำออกไป บวกด้วยปริมาณการเปลี่ยนแปลงปริมาณความชื้นของอากาศที่อยู่ตามช่องว่างระหว่างเมล็ดพืช

ปริมาณไอน้ำที่ไหลผ่านระนาบ x และ x+dx ตามลำดับจะเท่ากับ

$$G_a SWdt \qquad (2\text{-}27)$$

และ $$G_a S(W + \frac{\partial W}{\partial x} dx)dt \qquad (2\text{-}28)$$

การเปลี่ยนแปลงของค่าอัตราส่วนความชื้น (humidity ratio) ของอากาศภายในช่องว่างระหว่างเมล็ด มีค่าเท่ากับ

$$\epsilon Sdx\rho_a \frac{\partial W}{\partial t} dt \qquad (2\text{-}29)$$

การเปลี่ยนแปลงของปริมาณความชื้นของเมล็ดพืชในปริมาตรเล็กๆ (Sdx) ในเวลา dt เท่ากับ

$$\rho_p Sdx \frac{\partial M}{\partial t} dt \qquad (2\text{-}30)$$

โดยสมการสมดุลย์ทางมวลจะได้

$$\rho_p Sdx\frac{\partial M}{\partial t} dt = G_a SWdt - G_a S(W+\frac{\partial W}{\partial x} dx)dt + \epsilon Sdx\rho_a \frac{\partial W}{\partial t} dt$$

จากข้อสมมติฐาน $\frac{\partial W}{\partial t}$ มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ $\frac{\partial W}{\partial x}$

$$\rho_b \frac{\partial M}{\partial t} = -G_s \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{-\rho_b}{G_s} \frac{\partial M}{\partial t} \qquad (2\text{-}31)$$

2.8.4 พิจารณาความชื้นของเมล็ด

เป็นการพิจารณาถึงความสัมพันธ์ของค่าความชื้นของเมล็ดชั้นบาง ๆ กับอุณหภูมิของเมล็ดซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามระยะเวลาที่ใช้ในการอบแห้ง ซึ่งได้มีผู้ทำการศึกษาทดลองไว้บ้างแล้วดังนี้

ก. Thompson (1967) ได้เสนอสมการความสัมพันธ์ของปริมาณความชื้น สำหรับเมล็ดข้าวโพด (shell corn) ในช่วงอุณหภูมิ ระหว่าง 140-300 องศาฟาเรนไฮน์ท ดังนี้

$$t = A \ln MR + B (\ln MR)^2$$

$$A = 1.86178 + 0.00488\,\theta$$

$$B = 427.364 \exp(-0.03301\,\theta)$$

ข. Sabbah (1968) ได้พัฒนาสมการปริมาณความชื้นของการอบแห้งสำหรับข้าวโพด (corn) ในช่วงอุณหภูมิ 36-70 องศาฟาเรนไฮน์ท ดังนี้

$$MR = \exp[-k(t^{0.664})]$$

$$k = \exp(-xt^{y})$$

$$x = [6.0142 + 1.453*10^{-4} (rh)^2]^{0.5}$$

$$y = 0.1245 - 2.197*10^{-3}(rh) + 2.3*10^{-5}(rh)\theta \quad -5.8*10^{-5}\,\theta$$

2.9 การแก้ปัญหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้ง

สมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการจำลองแบบทางคณิตศาสตร์ของเครื่องอบแห้งแบบกระบะชนิดเมล็ดไหลหมุนเวียนมีดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-h_a}{(G_s c_s + G_s W c_v)} (T-\theta) \qquad (2\text{-}19)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{h_a a(T-\theta)}{(\rho_p c_p + \rho_p c_w M)} + \frac{h_{fg}+c_v (T-\theta)}{(\rho_p c_p + \rho_p c_w M)} G_a \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2\text{-}26)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{-\rho_p}{G_a} \frac{\partial M}{\partial t} \quad (2\text{-}31)$$

และสมการของการอบแห้งเมล็ดข้าวโพด $t = A \ln MR + B (\ln MR)^2$

$A = 1.86178 + 0.00488\ \theta$

$B = 427.364 \exp(-0.03301\ \theta)$

โดยมีเงื่อนไขในการแก้ปัญหาสมการทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

$T(\emptyset,t) = T(\text{inlet})$

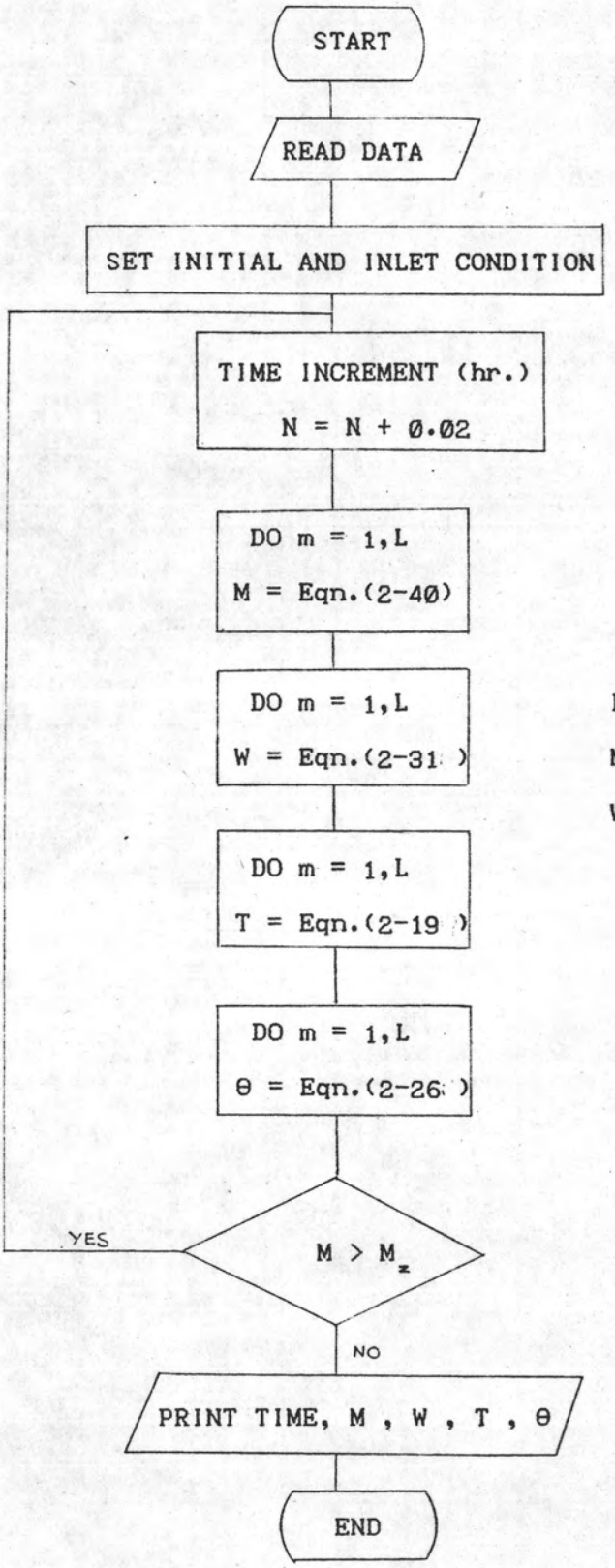
$\theta(x,\emptyset) = \theta(\text{initial})$

$W(\emptyset,t) = W(\text{inlet})$

$M(x,\emptyset) = M(\text{initial})$

จะเห็นได้ว่าสมการทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว สามารถที่จะใช้ numerical techniques ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นี้ได้ ซึ่งในที่นี้ได้ใช้วิธีการแบบ finite-difference

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วย numerical techniques โดยใช้ digital computer ช่วยในการคำนวณได้แสดงไว้ดังรูปที่ 2-12



L = จำนวนชั้นบาง ๆ

M_z = ค่าความชื้นสุดท้าย

W = อัตราส่วนความชื้นของอากาศ

รูปที่ 2-12 แผนผังแสดงการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์