บทที่ 4

เทคนิคการประมาณเชิงเส้น และการหาค่าองค์ประกอบของรูปคลื่นแรงดัน

4.1 การประมาณเชิงเส้นสมการของข้อมูลที่วัดได้

เนื่องจากจุดข้อมูลที่ได้จากระบบวิเคราะห์ผลแบบดิจิตอล จะเป็นจุดที่ไม่มีความต่อเนื่องและมีค่าความผิดพลาดเนื่องจากการเข้ารหัสข้อมูลทางดิจิตอล รวมทั้งลักษณะของรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์ที่ได้จากการทดสอบ BIL ของหม้อแปลงไฟฟ้ากำลังจะมีการออสซิลเลชันเกิดขึ้นเสมอ ดังนั้นในการตรวจวัดรูปคลื่นแรงดันเพื่อหาค่าเวลาหน้าคลื่น T_1 และค่าเวลาหางคลื่น T_2 ตามที่มาตรฐานสากลกำหนด จะต้องทำการประมาณลักษณะรูปคลื่นที่ไม่มีการออสซิลเลชันก่อนที่จะทำการวัดเวลาหน้าคลื่น และหางคลื่น

การประมาณฟังก์ชันให้กับจุดข้อมูลอาจทำได้ โดยการพิจารณาฟังก์ชันของจำนวนตัวแปรอิสระน้อย ๆ และพิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ค่าเบี่ยงเบนของฟังก์ชันจากจุดข้อมูลให้น้อยที่สุด การลดการเบี่ยงเบนสามารถทำได้โดยการใช้วิธีรากที่สองน้อยที่สุด (least square method) ซึ่งวิธีการที่นิยมใช้สำหรับค่าตัวอิสระตัวแปรเดียวก็คือ การถดถอยเชิงเส้น

4.1.1 การถดถอยเชิงเส้น (line regression)

การวิเคราะห์หาสมการเชิงเส้นของข้อมูลที่ได้จากการทดลอง หรือการเก็บรวบรวมข้อมูลที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวอาจหาได้จากวิธีที่เรียกว่า เส้นกราฟถดถอย (regression line) ตัวอย่างเช่นถ้าต้องการหาฟังก์ชันเชิงเส้น เพื่อประมาณฟังก์ชันของข้อมูลตามตารางที่ 4.1 (ดูรูปที่ 4.1 ประกอบ) ให้มีการเบี่ยงเบนน้อยที่สุด อาจทำได้ดังนี้

เนื่องจากฟังก์ชันเชิงเส้นสามารถแสดงได้ในรูปแบบของ

$$g(x) = a + bx \tag{4.1}$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ ค่าการเบี่ยงเบนของฟังก์ชันเชิงเส้นประมาณที่ได้จากจุดข้อมูลแต่ละจุดสามารถหาได้ดังนี้

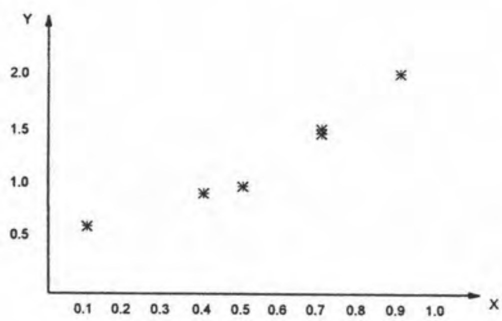
$$r_i = y_i - g(x_i) = y_i - (a + bx_i) \quad , \quad i = 1,2,...,L \qquad (4.2)$$

โดยที่ L เป็นจำนวนทั้งหมดของจุดข้อมูล

ตามตัวอย่างในตารางที่ 4.1 ค่า L จะมีค่าเท่ากับ 6 และค่าคงที่ a และ b เป็นค่าที่ต้องพิจารณา

ตารางที่ 4.1 ชุดข้อมูลตัวอย่างเพื่อทำการวิเคราะห์การประมาณเชิงเส้น

ข้อมูลที่	x	y
1	0.1	0.61
2	0.4	0.92
3	0.5	0.99
4	0.7	1.52
5	0.7	1.47
6	0.9	2.03



รูปที่ 4.1 กราฟของข้อมูลตามตัวอย่าง

ค่ากำลังสองทั้งหมดของการเบี่ยงเบนสามารถหาได้จาก [17]

$$R = \sum_{i=1}^{L} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{L} (y_i - a - bx_i)^2 \qquad (4.3)$$

เพื่อที่จะหาค่า R น้อยที่สุด จะต้องทำการหาค่าอนุพันธ์บางส่วนของ R เทียบกับค่า a และ b และให้มีค่าเท่ากับ 0

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= -2\sum_{i=1}^{L} (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial b} &= -2\sum_{i=1}^{L} x_i (y_i - a - bx_i) = 0 \end{aligned} \qquad (4.4)$$

ซึ่งอาจเขียนอยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้หลังจากหารด้วย -2 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

โดยที่ $A_{11} = L \qquad A_{12} = \sum x_i \qquad Z_1 = \sum y_i$

$A_{21} = \sum x_i \qquad A_{22} = \sum (x_i)^2 \qquad Z_2 = \sum x_i y_i$

ดังนั้นคำตอบของสมการที่ 4.5 สามารถหาได้จาก

$$a = \frac{A_{22}Z_1 - A_{12}Z_2}{d}$$
$$b = \frac{A_{11}Z_2 - A_{21}Z_1}{d} \qquad (4.6)$$

โดยที่ $d = A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}$

4.1.2 การประมาณเส้นสมการของข้อมูลที่เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น

วิธีการถดถอยเชิงเส้นสามารถประยุกต์ใช้ได้กับการประมาณฟังก์ชันไม่เชิงเส้นของชุดข้อมูลในบางกรณีได้ ถ้าเราพิจารณาการประมาณในรูปแบบของตัวแปรยกกำลังดังต่อไปนี้

$$y = g(x) = Cx^b \qquad (4.7)$$

โดยที่ข้อมูลที่ได้จะอยู่ในรูปของตัวแปร (x_i,y_i) ซึ่งมีค่า C และ b เป็นค่าคงที่ที่ต้องการหา จากสมการที่ 4.7 ถ้าต้องการหาค่า C และ b จะต้องทำการแก้สมการโดยใช้หลักการของฟังก์ชันล็อกการิทึม ซึ่งจะได้

$$\log(y) = \log(C) + b\log(x) \qquad (4.8)$$

และถ้ากำหนดให้

$$Y = \log(y), \quad X = \log(x), \quad a = \log(C) \qquad (4.9)$$

จากสมการ 4.8 สามารถลดรูปเหลือเป็น

$$Y = a + bX \qquad (4.10)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ 4.10 เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น โดยการเปลี่ยนรูปของข้อมูลที่ได้ให้อยู่ในรูปของ $\log(x_i)$ และ $\log(y_i)$ จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์เพื่อหาค่า a และ b ตามวิธีการที่กล่าวมาในหัวข้อ 4.1.1 ต่อไป

4.2 ฟังก์ชันของรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์

เนื่องจากแรงดันอิมพัลส์เป็นแรงดันที่สร้างได้จาก วงจรทรานเซียนต์ RC ดังได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 รูปที่ 2-6 ก) และสมการของแรงดันที่ได้จากวงจรสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันทางเวลาจะได้ว่า [18]

$$U(t) = \frac{U_0}{K} \cdot \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)} \cdot \left\{ e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t} \right\} \quad (4.11)$$

หรือ

$$U(t) = A \cdot \left\{ e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t} \right\} \quad (4.12)$$

โดยที่

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{B_1}{B_2} \pm \sqrt{\left(\frac{B_1}{2}\right)^2 - B_0} \quad (4.13)$$

เมื่อ

$$B_0 = \frac{1}{R_d R_e C_b C_s}$$

$$B_1 = \frac{R_d C_s + R_e C_s + R_e C_b}{R_d R_e C_b C_s} \quad (4.14)$$

และ A คือค่าคงที่มีค่าเท่ากับ $\frac{U_0}{K} \cdot \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)}$

จึงเห็นได้ว่า สมการของรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์นั้นจะแปรตามเวลาและมีค่าคงตัวทางเวลาอยู่ 2 ตัวคือ ค่า α_1 และค่า α_2 โดยค่าคงที่ทางเวลา α_2 จะมีผลต่อเวลาช่วงหน้าคลื่น (T_1) และค่าคงที่ทางเวลา α_1 จะมีผลต่อเวลาช่วงหางคลื่น (T_2) ตามสมการ 4.15 หรือแสดงดังในรูปที่ 4.2

$$T_1 = \frac{k_2}{\alpha_2}$$
$$T_2 = \frac{k_1}{\alpha_1} \qquad (4.15)$$

เมื่อค่าคงที่ k_1 , k_2 , α_1 , α_2 สามารถกำหนดได้สำหรับรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์ใด ๆ แต่ในกรณีของรูปคลื่นแรงดันฟ้าผ่า 1.2/50 μsec จะมีค่าคงที่ดังกล่าวเป็นดังนี้ [18]

$k_1 = 0.73$

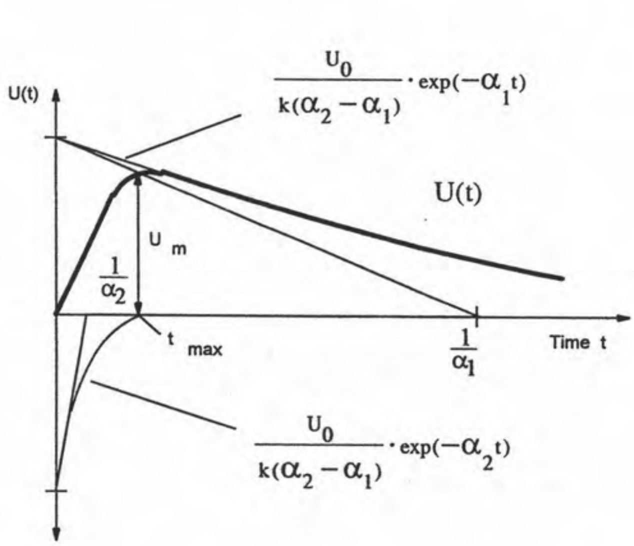
$k_2 = 2.96$

$\alpha_1 = 14.6 \quad nsec^{-1}$

$\alpha_2 = 2472 \quad nsec^{-1}$

จะเห็นได้ว่าค่าคงตัวทางเวลา α_1 และค่า α_2 นั้นมีค่าแตกต่างกันมากประมาณ 169 เท่า ทำให้อิทธิพลของค่าคงที่ทางเวลาช่วงหน้าคลื่น α_2 ไม่มีผลกระทบต่อค่าแรงดันในช่วงหางคลื่นที่เวลาค่ามาก ๆ ดังแสดงในรูปที่ 4.2

เนื่องจากค่าคงตัวทางเวลาของหน้าคลื่นและหางคลื่นมีค่าแตกต่างกันมาก ดังนั้นการประมาณเส้นสมการแรงดันอิมพัลส์จึงสามารถทำการแยกการประมาณได้ โดยแบ่งออกเป็นการประมาณเชิงเส้นทางด้านหางคลื่นและทางหน้าคลื่น



รูปที่ 4.2 เส้นกราฟแรงดันอิมพัลส์ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา

4.2.1 การประมาณเส้นสมการรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์ฟ้าผ่าสำหรับช่วงเวลาหางคลื่น

จากรูปที่ 4.2 สมการรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์ฟ้าผ่าในช่วงเวลาหางคลื่นสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$U_1(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} \tag{4.16}$$

และจากสมการที่ 4.16 เพื่อหาค่าคงที่ A_1 และ α_1 สามารถหาได้โดยใช้ฟังก์ชันล็อกการิทึมจะได้ว่า

$$\log[u_1(t)] = \log A_1 + \log(e^{-\alpha_1 t}) \tag{4.17}$$

ซึ่งสามารถนำไปทำการประมาณเชิงเส้น ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.1.1 ตามตัวอย่างที่แสดงเป็นส่วนหนึ่งของโปรแกรมดังนี้

```
/* LINEAR REGRESSION FOR TAIL ESTIMATION CURVE */
A11=0;A12=0;A21=0;A22=0;Z1=0;Z2=0;
for (i = maxt; i < 501; i ++)
        {
        A11+=1;
        A21=A12+=i;
        A22+=pow(i,2);
        Z1+=log(data1[i]);
        Z2+=i*log(data1[i]);
        }
d  = A11*A22-A12*A21;
a2 = (A22*Z1 - A12*Z2)/d;
b2 = (A11*Z2 - A21*Z1)/d;
a2 = pow(M_E,a2);      /*  a2 = e^a2  */
```

โดยที่ i คือ ลำดับของข้อมูลที่ได้จากดิจิตอลออสซิลโลสโคปตั้งแต่ 1 ถึง 501 (จำนวนข้อมูลสูงสุดของดิจิตอลออสซิลโลสโคปที่ใช้ในงานวิจัย)

data1[i] คือ ข้อมูลที่ได้จากดิจิตอลออสซิลโลสโคป

maxt คือ เวลาของข้อมูลที่ได้จากดิจิตอลออสซิลโลสโคปมีค่าสูงสุด

4.2.2 การประมาณเส้นสมการรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์ฟ้าผ่าสำหรับช่วงเวลาหน้าคลื่น

หลังจากที่ได้ข้อมูลของเส้นสมการแรงดันอิมพัลส์ ทางด้านหางคลื่นตามข้อ 4.2.1 และจากสมการที่ 4.2 จะทำให้สามารถคำนวณหาข้อมูลเพื่อทำการประมาณช่วงเวลาหน้าคลื่นได้ตามสมการที่ 4.18 ดังนี้

$$U_2(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} - U(t) \qquad (4.18)$$

และจากสมการที่ 4.12 จะได้สมการประมาณของแรงดันอิมพัลส์ฟ้าผ่าทางด้านหน้าคลื่นเป็นดังนี้

$$U_2(t) = A_2 e^{-\alpha_2 t} \qquad (4.19)$$

ทำการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าคงที่ A_2 และ α_2 โดยใช้ฟังก์ชันลอกการิทึมซึ่งจะได้

$$\log[U_2(t)] = \log A_2 + \log(e^{-\alpha_2 t}) \qquad (4.20)$$

จากสมการ 4.20 สามารถนำไปทำการประมาณเชิงเส้น ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.1.1 ได้ตามตัวอย่างที่แสดงเป็นส่วนหนึ่งของโปรแกรมดังนี้

```
/* LINEAR REGRESSION FOR FRONT ESTIMATION CURVE */
    for (i =0; i < maxt; i ++)
        if (data1[i] < a2*exp(b2*i))
            {
            u1[i] = a2*exp(b2*i)-data1[i];
            y1+=1;
            }
```

```
        else break;

    A11=0;A12=0;Z1=0;A22=0;Z2=0;
    for ( i = 0; i < y1; i ++)
        if (u1[i] > 0.2*Cal_Dat.vmax)

            {
            A11+=1;
            A21=A12+=i;
            A22+=pow(i,2);
            Z1+=log(u1[i]);
            Z2+=i*log(u1[i]);
            }
    d  = A11*A22-A12*A21;
    a1 = (A22*Z1 - A12*Z2)/d;
    b1 = (A11*Z2 - A21*Z1)/d;
    a1 = pow(M_E,a1);     /*  a1 = e^a1  */
```

โดยที่ Cal_Dat.vmax คือ ค่าแรงดันอิมพัลส์สูงสุด

U1[i] คือ ตัวแปรที่ i ของข้อมูลที่ได้จากการประมาณตามสมการที่ 4.18

4.2.3 การประมาณเส้นสมการรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์มาตรฐาน

ผลของการแก้สมการ 4.17 และ 4.20 ด้วยวิธีการตามข้อ 4.1.1 แล้วจะทำให้ได้ค่าของตัวแปร A_1, A_2, α_1 และ α_2 ซึ่งเป็นค่าคงที่ต่าง ๆ ในสมการแรงดันอิมพัลส์ และถ้านำค่าคงที่ เหล่านี้แทนค่าเพื่อหาเส้นสมการแรงดันอิมพัลส์ฟ้าผ่ารูปคลื่นลบประมาณซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$U(t) = A_1 \cdot e^{-\alpha_1 t} - A_2 \cdot e^{-\alpha_2 t} \qquad (4.21)$$

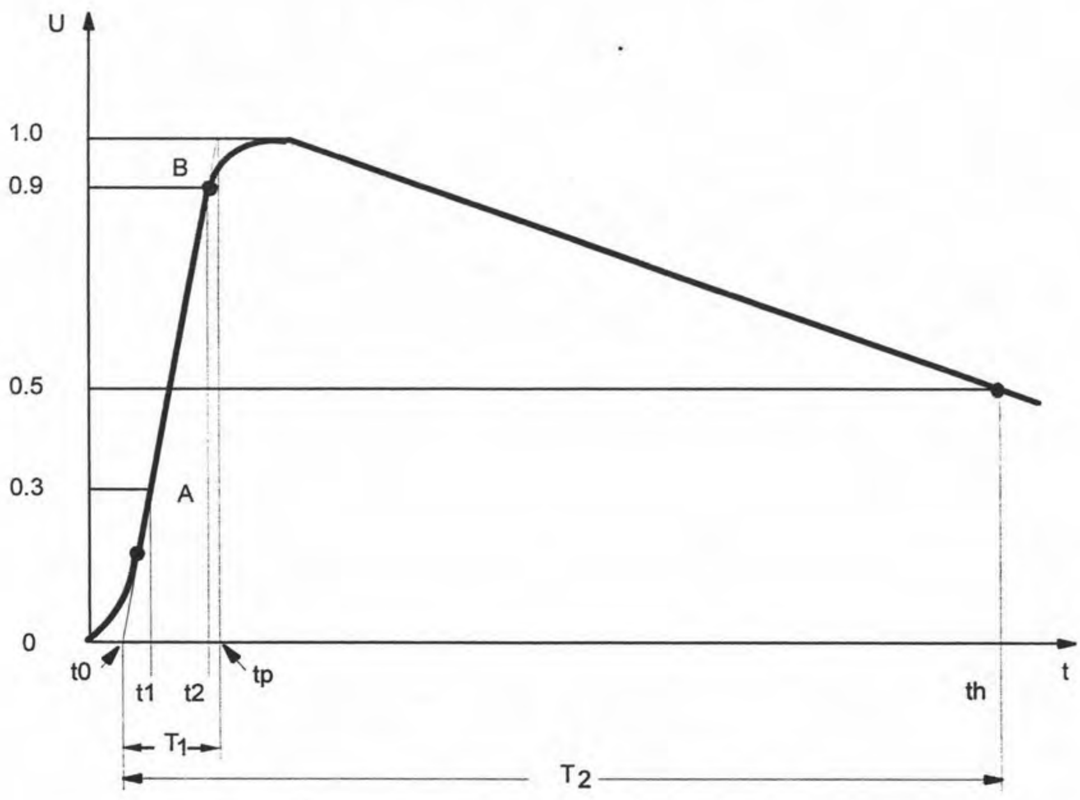
จากเส้นกราฟประมาณของแรงดันอิมพัลส์ที่ได้จากสมการที่ 4.21 สามารถนำไปหาค่าเวลาหน้าคลื่นและหางคลื่นตามข้อกำหนดในมาตรฐานเช่นเดียวกับวิธีที่ใช้ในแบบแอนะล็อก ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2.1 รูปที่ 2.3 หรือส่วนหนึ่งของโปรแกรมดังนี้

```
maxt=0;maxv=0;
for (i = 0; i <1001; i ++)              /*ทำการหาเส้นกราฟประมาณ*/
    {
    vt[i]=a1*exp(b1*i)-a2*exp(b2*i);
    if (vt[i] > maxv)                   /*เพื่อหาค่าแรงดันสูงสุด*/
        {
        maxv = vt[i];
        maxt = i;
        }
    }
for (i =0; i < maxt; i ++)              /*กำหนดจุดที่ = 0.3(แรงดันสูงสุด)*/
    if (vt[i] < 0.3*maxv)  t1 = i*1.0;
                else break;
for (i =0; i < maxt; i ++)              /*กำหนดจุดที่ = 0.9(แรงดันสูงสุด)*/
    if (vt[i] < 0.9*maxv)  t2 = i*1.0;
                else break;


for (i =maxt; i <1001; i ++)            /*กำหนดจุดที่ = 0.5(แรงดันสูงสุด)*/
    if (vt[i] > 0.5*maxv)  t = i/10;
                else break;
```

4.2.4 การคำนวณค่าเวลาหน้าคลื่น (T_1) และหางคลื่น (T_2)

การหาค่าเวลาหน้าคลื่น T_1 ตามที่มาตรฐานกำหนดให้หาจากเส้นที่ลากผ่านจุด 0.3 (t_1) และ 0.9 (t_2) เท่าของค่าแรงดันสูงสุด ซึ่งมีค่าเท่ากับ vt(t1) และ vt(t2) ตามลำดับแล้ว หลังจากนั้นจะต้องทำการหาสมการเส้นตรงเพื่อหาจุดเริ่มต้นจริง t_0 และจุดที่ค่าแรงดันมีค่าเท่ากับค่ายอดของแรงดันอิมพัลส์ t_p เพื่อหาค่าคงตัวทางเวลาดังสมการที่ 4.22 ถึงสมการที่ 4.24 ส่วนค่าเวลาหางคลื่น T_2 หาจากต่าความแตกต่างของเวลาที่จุดเริ่มต้นจริง t_0 กับจุดเวลาที่ค่าแรงดันอิมพัลส์ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของค่าแรงดันยอด t_h ดังในสมการที่ 4.25



รูปที่ 4.3 วิธีหาค่าเวลาหน้าคลื่นและหางคลื่นรูปคลื่นแรงดันอิมพัลส์ฟ้าผ่า

$$tp = \frac{t2 - t1}{vt[t2] - vt[t1]} \cdot (\max v - vt[t1]) + t \qquad (4.22)$$

$$t0 = \frac{t2 - t1}{vt[t2] - vt[t1]} \cdot (0 - vt[t1]) + t \qquad (4.23)$$

ค่าคงตัวทางเวลาหน้าคลื่นจึงสามารถหาได้จากสมการ

$$t1 = tp - t0 \tag{4.24}$$

ค่าคงตัวทางเวลาสำหรับหางคลื่นสามารถหาได้จากสมการ

$$t2 = th - t0 \tag{4.25}$$

สำหรับค่าแรงดันพุ่งเกินนั้นสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$(\%\ \text{แรงดันพุ่งเกิน}) = \frac{(\text{ค่ายอดแรงดันจริง} - \text{ค่ายอดแรงดันประมาณ})}{\text{ค่ายอดแรงดันประมาณ}} \times 100 \tag{4.26}$$
