บทที่ 4

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับ
ออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสม

วิธีออกแบบแนวทางดิ่งที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันอาศัยวิจารณญาณของวิศวกรในการกำหนดแนวเส้นทางโดยการลองผิดลองถูก (Trial and error) เพื่อหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตแบบดั้งเดิม คือ จุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้งที่เหมาะสม การออกแบบของวิศวกรที่มีประสบการณ์ ความชำนาญ และ ความรอบคอบต่างกัน จะทำให้ได้แนวเส้นทางต่างๆ กัน ในการออกแบบจะไม่มีการคำนวณค่าใช้จ่ายที่เป็นผลมาจากแนวทางดิ่งเพื่อใช้เปรียบเทียบแต่ละแนวเส้นทางที่ทดลองกำหนดขึ้น ทำให้ไม่สามารถประกันได้ว่าแนวทางดิ่งที่ได้จากการออกแบบของวิศวกรเป็นแนวทางดิ่งที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ถึงแม้ว่าจะมีการพัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยในการออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดแล้วโดยใช้วิธีหาผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพ แต่เท่าที่ทบทวนผลงานที่ผ่านมามีเพียงโปรแกรมเดียวเท่านั้น (VENUS II) (Robinson, 1972a, 1972b) ที่สามารถหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมได้จากข้อมูลพื้นดินเดิม และข้อมูลเบื้องต้นอื่น ๆ และได้ผลลัพธ์เป็นองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่สามารถนำไปใช้ในการก่อสร้างได้ แต่ในโปรแกรมนี้ตั้งวัตถุประสงค์เพียงเพื่อที่จะหาผลรวมของค่าแตกต่างของระดับทางกับพื้นดินเดิมที่น้อยที่สุดเท่านั้น และ องค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้นที่ได้ยังเป็นค่าประมาณ ผลที่ได้จากโปรแกรมจึงอาจจะยังไม่ใช่แนวทางดิ่งที่เหมาะสมเท่าที่ควร

จากการพิจารณาวิธีออกแบบแนวทางดิ่งที่ใช้อยู่ในปัจจุบัน และ วิธีที่มีอยู่ในโปรแกรมที่นำมาทบทวนพบว่ายังไม่ดีเท่าที่ควร จึงได้พัฒนาวิธีออกแบบโดยการประยุกต์ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจากความซับซ้อนของวัตถุประสงค์ในแบบจำลองเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ จึงเปลี่ยนมาใช้วิธีออกแบบโดย วิธีหาผลลัพธ์แบบฮิวริสติค (Heuristic solution method) ซึ่งจะแบ่งแบบจำลองออกเป็นส่วนๆ และ ประยุกต์ใช้เทคนิคการหาผลลัพธ์ที่เหมาะสมในแต่ละส่วน เพื่อให้สามารถออกแบบแนวทางดิ่งได้อย่างมีประสิทธิภาพ เป็นไปตามวัตถุประสงค์และข้อจำกัดของการออกแบบ

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับออกแบบแนวทางดิ่ง

งานวิจัยในส่วนนี้เป็นการสร้างแบบจำลองสำหรับออกแบบแนวทางดิ่งเพื่อให้ได้แนวเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด หากพิจารณาค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับแนวทางดิ่งอันได้แก่ ค่าก่อสร้าง ค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถ ค่าบำรุงทาง และ อื่นๆ แล้ว จะพบว่าเราไม่สามารถหาความสัมพันธ์ของค่าใช้จ่ายรวมกับแนวทางดิ่งที่จะออกแบบได้ เพราะเราจะสามารถหาแนวทางดิ่งที่ทำให้เกิดค่าใช้จ่ายรวมน้อยที่สุดได้ ถ้าหากค่าใช้จ่ายในแต่ละงานที่เกี่ยวข้องสามารถหาค่าต่ำสุดได้ และ เป็นฟังก์ชัน convex เท่านั้น แต่เมื่อพิจารณาค่าใช้จ่ายของเส้นทางที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบแนวทางดิ่งแล้ว พบว่าค่าใช้จ่ายต่างๆมีความสัมพันธ์กับปัจจัยที่มีผลต่อค่าใช้จ่ายอื่นๆ นอกเหนือจากระดับทางที่จะใช้เป็นตัวแปรในการตัดสินใจ เช่น ค่าขุดและค่าถมดิน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของค่าก่อสร้าง นอกจากจะแปรผันตามระดับทางแล้วยังสัมพันธ์กับ รูปตัดตามขวางของพื้นดินเดิม รูปตัดของโครงสร้างทาง ความชันด้านข้างของโครงสร้างทาง ค่าสัมประสิทธิ์การบวมตัว เป็นต้น ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายกับระดับทางไม่แน่นอน ดังนั้นการกำหนดฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของแบบจำลองที่ซับซ้อนอาจทำให้ไม่สามารถออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดได้ นอกจากนี้การสร้างแบบจำลองที่จะให้ได้ผลลัพธ์ คือ องค์ประกอบทางเรขาคณิตของแนวทางดิ่ง จากข้อมูลพื้นดินเดิม และ ข้อจำกัดของการออกแบบเป็นไปได้ยากมาก ดังนั้นจึงต้องหาวิธีการสร้างแบบจำลองใหม่โดยแบ่งเป็นแบบจำลองย่อยเพื่อหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมตามต้องการ

เราสามารถแบ่งขั้นตอนการออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดตามวิธีการออกแบบของวิศวกรได้เป็น 3 ขั้นตอน ในแต่ละขั้นตอนจะสร้างแบบจำลอง และ ประยุกต์ใช้เทคนิคการหาผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพในการหาผลลัพธ์ วิธีหาผลลัพธ์โดยการแบ่งเป็นขั้นตอนเช่นนี้เรียกว่า วิธีฮิวริสติค แบบจำลองสำหรับออกแบบแนวทางดิ่งแบ่งงานออกเป็นสามส่วน คือ

1) การหาแนวทางดิ่งเบื้องต้น
2) การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้น
3) การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม

การหาแนวทางดิ่งเบื้องต้น เป็นการหาแนวทางดิ่งเริ่มต้นที่สอดคล้องกับข้อกำหนดและข้อจำกัดที่สำคัญของการออกแบบ โดยการแปลงแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดให้เป็นแบบจำลองแบบง่าย (Simplified model) แบบจำลองแนวทางดิ่งเบื้องต้นนำปัจจัยที่มีผลต่อค่าใช้จ่ายที่สำคัญ คือ ความสูงของดินตัดและดินถม มาพิจารณาแทนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่

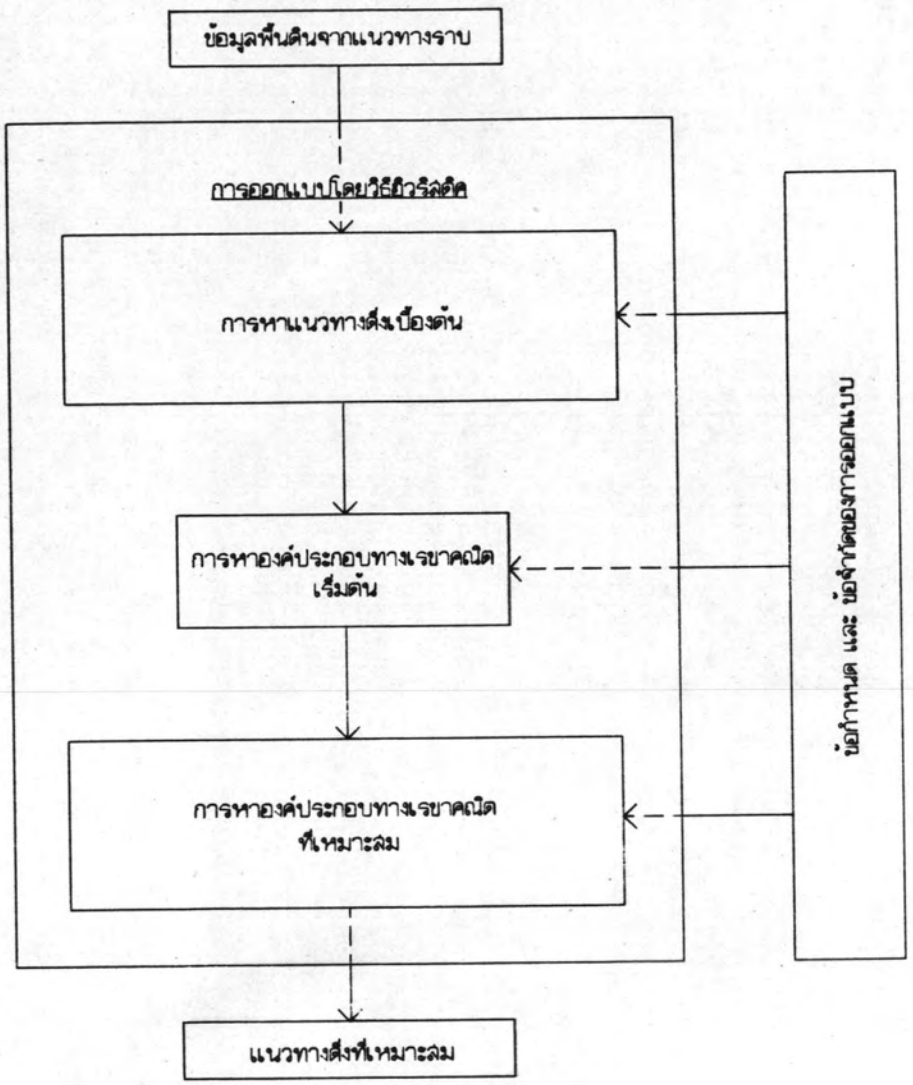
ซับซ้อนของแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด และ ใช้วิธีการโปรแกรมเชิงเส้นเพื่อหาผลลัพธ์ ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นระดับทางตามสถานีตลอดแนวเส้นทางที่สอดคล้องกับข้อกำหนดและข้อจำกัดของการออกแบบ และ มีค่าใช้จ่ายน้อย ผลลัพธ์นี้จะนำไปใช้ในการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตต่อไป

การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้น เป็นการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสมเพื่อใช้แทนระดับทางของแนวทางดิ่งเบื้องต้น โดยการสร้างวิธีการทางคณิตศาสตร์เพื่อจำลองวิธีหาจุดตัดแนวดิ่งของวิศวกร (Engineer's design process simulation) มาใช้ในการหาจุดตัดแนวดิ่งและความยาวโค้งที่เหมาะสม และ สอดคล้องกับข้อกำหนดของการออกแบบ การสร้างองค์ประกอบทางเรขาคณิตจากแนวทางดิ่งเบื้องต้นจะได้จุดตัดแนวดิ่งและ ความยาวโค้งที่สมเหตุสมผล ตรงตามข้อกำหนด และ ข้อจำกัด การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้น ยังเป็นการเปลี่ยนผลลัพธ์ของแนวทางดิ่งเบื้องต้น คือ ระดับทาง ให้เป็นองค์ประกอบทางเรขาคณิต เพื่อนำไปใช้เป็นค่าเริ่มต้นของการค้นหาในแบบจำลองสำหรับหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสมต่อไป

การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม เป็นการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่ทำให้แนวทางดิ่งเป็นไปตามวัตถุประสงค์มากที่สุด และ สอดคล้องกับข้อกำหนดและข้อจำกัดของการออกแบบ โดยการนำจุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้งจากการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้น มาใช้เป็นค่าเริ่มต้นของการค้นหา ค่าองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้นเป็นส่วนสำคัญส่วนหนึ่งที่จะช่วยให้การหาผลลัพธ์มีประสิทธิภาพ ในแบบจำลององค์ประกอบเรขาคณิตที่เหมาะสมจะใช้วิธีหาผลลัพธ์ที่สามารถหาผลลัพธ์จากฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ซับซ้อนได้ ทำให้สามารถนำค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้องกับแนวเส้นทางมาพิจารณา เพื่อหาแนวเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายรวมน้อยที่สุดได้

4.2 การหาแนวทางดิ่งเบื้องต้น

เนื่องจากข้อกำหนดของแนวเส้นทางที่สำคัญ คือ ข้อกำหนดทางเรขาคณิต และข้อจำกัดทางภูมิประเทศ เป็นปัจจัยที่สำคัญที่กำหนดแนวของเส้นทาง การหาแนวทางดิ่งเบื้องต้น จึงมีจุดประสงค์สำคัญที่จะหาแนวเส้นทางที่สอดคล้องกับข้อกำหนด และ มีค่าใช้จ่ายน้อย ถึงแม้ว่าแนวเส้นทางที่ได้นั้นอาจจะไม่ใช่แนวเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด แต่การหาแนวทางดิ่งเบื้องต้นจะจำกัดขอบเขตของการค้นหาแนวเส้นทางที่เหมาะสมที่สุด จึงเป็นการเพิ่ม



รูปที่ 4.1 ขั้นตอนการออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด

ประสิทธิภาพในการค้นหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมต่อไป นอกจากนี้ยังอาจจะเพิ่มข้อจำกัด หรือบรรทัดฐานอื่นๆ ที่ต้องการ เช่น อัตราส่วนปริมาณดินตัดต่อดินถมโดยประมาณ อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราความโค้ง เป็นต้น

งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีหาแนวทางดิ่งเบื้องต้นโดยสร้างเป็นแบบจำลอง แบบจำลองแนวทางดิ่งเบื้องต้น ปรับปรุงมาจากแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด ดังนั้นจะขอกล่าวถึงการสร้างแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดก่อน และ จะกล่าวถึงวิธีปรับปรุงแบบจำลองเป็นแบบง่าย เพื่อนำมาใช้เป็นแบบจำลองแนวทางดิ่งเบื้องต้นต่อไป

4.2.1 การสร้างแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด

แบบจำลองนี้ถูกสร้างขึ้นโดยนำค่าใช้จ่ายของงานหลายๆ ส่วนที่เป็นผลจากการออกแบบแนวทางดิ่งมาพิจารณาในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ค่าใช้จ่ายที่กล่าวถึง คือ ค่าก่อสร้าง ค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถ และ ค่าใช้จ่ายที่ขึ้นอยู่กับความยาวของเส้นทาง เนื่องจากฟังก์ชันค่าใช้จ่ายของงานแต่ละส่วนซับซ้อน ทำให้ไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้จากเทคนิคการหาผลลัพธ์ที่มีอยู่ในปัจจุบันโดยตรง ข้อจำกัดที่ใช้ในแบบจำลอง คือ ข้อกำหนดทางเรขาคณิต และข้อจำกัดทางภูมิประเทศ

4.2.1.1 วัตถุประสงค์ของการออกแบบ

จากการศึกษาผลงานที่ผ่านมาพบว่ามีผู้ตั้งวัตถุประสงค์ของการออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดต่างๆ กัน โดยส่วนใหญ่ต้องการหาแนวทางดิ่งที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด นอกจากนี้ยังมีผู้วิจัยบางท่านนำตัวแปรอื่นมาเป็นวัตถุประสงค์ของการหาและออกแบบแนวทางดิ่ง เช่น Calogero V. et.al.(1975) ใช้ความสบายในการขับขี่เป็นวัตถุประสงค์ในการหาแนวเส้นทาง

ค่าใช้จ่ายที่เป็นผลจากการออกแบบแนวทางดิ่งประกอบด้วย

1) ค่าก่อสร้าง (Construction cost)
2) ค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถ (User cost)
3) ค่าบำรุงทาง (Maintenance cost)
4) ค่าใช้จ่ายอื่นๆ เช่น ค่าเวนคืนที่ดิน (Land acquisition cost)

ค่าใช้จ่ายที่สำคัญที่เป็นผลจากการออกแบบแนวทางดิ่ง คือ ค่าก่อสร้าง และ ค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถ ส่วนค่าบำรุงทางมักเป็นผลมาจากสมมติฐานของการออกแบบ เช่น ระดับชั้นของทาง ชนิดของผิวทางที่ใช้ วิธีการบดอัดและปรับเสถียรภาพดิน วิธีการก่อสร้าง และ ยังแปรผันตามความยาวของเส้นทาง ดังนั้นค่าบำรุงทางจะไม่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการออกแบบแนวทางดิ่งมากนัก เช่นเดียวกันกับค่าใช้จ่ายอื่นๆ เช่น ค่าเวนคืนที่ดิน เป็นต้น

จากการศึกษายังพบว่าค่าก่อสร้างที่สามารถประหยัดลงได้มาก คือ ค่าใช้จ่ายของงานดิน จากการแจกแจงโดย Stott J.P.(1973a) แยกค่าใช้จ่ายของงานดินออกเป็น

1) ค่าขุดและถมดิน
2) ค่าขนย้ายมวลดินจากบริเวณที่ขุดไปยังบริเวณที่ถมหรือทิ้ง
3) ค่าซื้อบ่อทิ้ง (Disposal or landfill) และ บ่อยืม (Borrow pit)
4) ค่าปรับระดับดิน

ค่าขุดและถมดินแปรผันตรงกับปริมาณดินตัดและดินถม ปริมาณดินที่ต้องขุดหรือถมมักหามาจากพื้นที่รูปตัด ซึ่งสามารถหาได้หลายวิธี คือ

1) การประมาณจากค่าความสูงของดินตัดและดินถม
2) แบบจำลองรูปตัดคันทาง
3) รูปตัดคันทาง

การคำนวณปริมาณดินจากรูปตัดคันทางแสดงในภาคผนวก ค

ค่าขนย้ายมวลดินมีความสัมพันธ์กับปริมาณดิน นอกจากนี้ยังเกี่ยวข้องกับการบวมตัว (Swell) และหดตัว (Shrinkage) ของดิน การบดอัด ค่าขนส่งปริมาณดินของบ่อยืม ความจุของบ่อทิ้ง ค่าซื้อบ่อทิ้งและบ่อยืม ระยะทางระหว่างสถานีที่เป็นดินตัดและดินถม การหาวิธีขนย้ายมวลดินจะกระทำหลังจากได้แนวเส้นทาง และ ปริมาณงานดินแล้ว เพราะ ปริมาณงานดินตัดและดินถม เป็นข้อมูลเข้า (Input) ของการหาวิธีขนย้ายมวลดิน หากต้องการที่จะคิดรวมค่าใช้จ่ายการขนย้ายมวลดินในวัตถุประสงค์ของการออกแบบ

จะต้องหาแนวเส้นทาง และ คำนวณปริมาณงานดินเสียก่อน จึงนำมาหาค่าใช้จ่ายในการขนย้าย และ นำค่าใช้จ่ายที่ได้ไปรวมกับค่าใช้จ่ายอื่นๆ ตามวัตถุประสงค์ จากนั้นนำค่าใช้จ่ายรวมไปเปรียบเทียบกับแนวเส้นทางอื่นเพื่อหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดต่อไป

เนื่องจากค่าขนย้ายมวลดินมีความสัมพันธ์กับปริมาณดิน ดังนั้น หากแนวเส้นทางไม่เปลี่ยนแปลงไปจากระดับพื้นดินเดิมมากนัก หรือ ปริมาณงานดินน้อย ค่าขุดถมดิน และ ค่าขนย้ายมวลดินจะต่ำด้วย บางครั้งในการออกแบบจึงนำเพียงปริมาณดินมาพิจารณาในการหาแนวเส้นทาง

ค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถประมาณมาจากค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากความชัน ในสภาพจริงแล้วค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถยังขึ้นอยู่กับ ขนาดของรถ สภาพของรถ อัตราส่วนน้ำหนักต่อแรงม้าของรถ สภาพการจราจร ฯ

ค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากความยาวของเส้นทาง มักจะเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยจากการออกแบบแนวทางดิ่ง

นอกเหนือจากค่าใช้จ่ายที่กล่าวถึงข้างต้นซึ่งเป็นค่าใช้จ่ายโดยตรง (Direct cost) สภาพบางอย่างอาจต้องประเมินค่าเป็นจำนวนเงินเพื่อนำมาพิจารณาในวัตถุประสงค์ ในการพิจารณาจะรวมเป็นค่าใช้จ่ายโดยอ้อม (Indirect cost) หรือกำหนดเป็นข้อจำกัดในการออกแบบ ตัวอย่างของสภาพเหล่านี้ เช่น ความพึงพอใจของสังคม สภาพจิตใจของประชาชน สภาพแวดล้อม

เนื่องจากแนวทางดิ่งมีผลต่อค่าใช้จ่ายของงานหลายๆ ส่วน ในงานแต่ละส่วนยังมีหลายปัจจัยที่เกี่ยวข้อง ทำให้เกิดความซับซ้อนในการคำนวณหาค่าใช้จ่ายที่แท้จริง การนำสภาพจริง (Real Situation) มาจำลองในแบบจำลอง (Model) เพื่อหาผลลัพธ์ จำเป็นจะต้องกำหนดค่าใช้จ่ายที่สำคัญที่มีผลต่อตัวแปรในการตัดสินใจ มาพิจารณาเพื่อลดความซับซ้อนของสภาพจริง เมื่อพิจารณางานที่เกี่ยวข้องในการหาแนวทางดิ่งพบว่า ความสูงของดินตัดและดินถม ความชัน และ ความยาวของเส้นทาง เป็นปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อค่าใช้จ่ายรวมของแนวทางดิ่งโดยเฉพาะอย่างยิ่งความสูงของดินตัดและดินถม ความสูงของดินตัดและดินถมมีผลต่อค่าใช้จ่ายของงานดิน ความชันมีผลต่อค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถ และเกี่ยวข้องกับ

อัตราการเกิดอุบัติเหตุ ส่วนความยาวของเส้นทางมีผลต่อค่าโครงสร้างทาง การหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดจะพิจารณาหาแนวเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายรวมน้อยที่สุด ส่วนปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับแนวทางดิ่งอื่นๆ จะถูกกำหนดเป็นสมมติฐานของการสร้างแบบจำลอง

ถึงแม้ว่าจะนำปัจจัยที่มีผลต่อค่าใช้จ่ายของแนวเส้นทางที่สำคัญ คือ ความสูงของดินตัดและดินถม ความชัน และ ความยาวของเส้นทาง มาพิจารณาก็ตาม ความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายของแนวเส้นทางกับปัจจัยเหล่านั้นก็ยังซับซ้อน ฟังก์ชันของค่าใช้จ่ายจะสัมพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) กับ แนวเส้นทาง จึงทำให้หาผลลัพธ์ได้ยากมาก เนื่องจากเทคนิคการหาผลลัพธ์ที่มีอยู่ยังไม่มีประสิทธิภาพดีเท่าที่ควร วัตถุประสงค์ของการออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุดยังคงไม่สามารถประยุกต์ใช้ในการออกแบบจริงได้ดีนัก

4.2.1.2 ข้อกำหนดและข้อจำกัดของการออกแบบ

การออกแบบและวางแนวเส้นทางจำเป็นจะต้องให้สอดคล้องกับหลักทางวิศวกรรม ความปลอดภัย และ สะดวกสบายในการขับขี่ ตลอดจนความพึงพอใจในทัศนวิสัยและทัศนียภาพ จึงต้องมีการตั้งข้อกำหนดและข้อจำกัดของการออกแบบแนวเส้นทาง คู่มือและมาตรฐานการวางแนวเส้นทางที่ใช้อย่างแพร่หลาย คือ A Policy on Geometric Design (AASHTO, 1984) ซึ่งได้กำหนดนโยบายของข้อจำกัดของแนวทางดิ่งที่สำคัญ คือ ความลาดชันสูงสุด (Maximum grade) และ อัตราความโค้งสูงสุด (Maximum curvature) นอกจากนี้ยังให้แนวทางของการออกแบบแนวทางดิ่งอื่น ๆ อีกด้วย

ข้อจำกัดทางภูมิประเทศยังเป็นส่วนสำคัญในการตัดสินใจออกแบบแนวทางดิ่ง ข้อจำกัดต่างๆ เช่น ระดับน้ำสูงสุดของทางน้ำ ระดับของถนนเดิมที่ตัดผ่าน การบังคับความลาดชันในบริเวณที่กำหนด ระดับสูงสุดของทางลอด ระดับน้ำใต้ดิน สภาพทางภูมิประเทศเหล่านี้ทำให้เกิดข้อจำกัดในการออกแบบทางเรขาคณิตของแนวทางดิ่ง

นอกจากนี้ยังจะต้องพิจารณาถึงสภาพดิน ภูมิอากาศ และสภาพแวดล้อม เช่น ในบางบริเวณที่ดินมีคุณสมบัติไม่ตรงตามต้องการ หรือ มีความแข็งแรงไม่เพียงพอในการก่อสร้างจำเป็นที่จะต้องกำหนดสภาพเหล่านี้เป็นข้อจำกัดของการออกแบบ

ข้อกำหนดอื่นๆ สามารถกำหนดได้โดยวิศวกรผู้ออกแบบ เช่น บรรทัดฐาน (Criteria) ของการออกแบบ การกำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราความโค้ง เป็นต้น ข้อจำกัดอื่นๆ ที่อาจนำมาพิจารณาในการออกแบบได้ เช่น คุณลักษณะการใช้รถ วิธีการก่อสร้าง งบประมาณ เป็นต้น

4.2.1.3 แบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด

จากวัตถุประสงค์ และ ข้อจำกัดของการออกแบบ นำมาสร้างแบบจำลองแบบต่อเนื่องเพื่อหาแนวทางดิ่งที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดได้ สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในตารางที่ 4.1

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{Min } Z = \int_{x_o}^{x_m} \{ \phi_1[\{f(x)-h(x)\}-y(x)] + \phi_2[f'(x)] + \phi_3[\sqrt{\{1+(f'(x))^2\}}] \} dx \qquad (4.1)$$

เนื่องจากการเก็บข้อมูลพื้นดิน กระทำเป็นสถานี ดังนั้นอาจหาค่าใช้จ่ายของงานดินได้โดยคิดค่าขุดดิน และ ค่าขนย้ายมวลดินระหว่างสถานีต่างๆ นำมาเขียนเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ได้เป็น

$$\text{Min } Z = EMC + \int_{x_o}^{x_m} \{ \phi_2[f'(x)] + \phi_3[\sqrt{\{1+(f'(x))^2\}}] \} dx \qquad (4.2)$$

โดยที่ EMC = ค่าขุดและถมดินที่ทุกสถานี + ค่าขนย้ายมวลดินที่ทุกสถานี
= ค่าใช้จ่ายรวมของงานดิน

เทอมแรกในฟังก์ชันวัตถุประสงค์เป็นฟังก์ชันของค่าใช้จ่ายอันเป็นผลจากปริมาณงานดิน (ϕ_1) เทอมที่สองเป็นฟังก์ชันค่าใช้จ่ายของผู้ใช้รถโดยประมาณ (ϕ_2) และ เทอมสุดท้ายเป็นฟังก์ชันค่าใช้จ่ายของค่าโครงสร้างทางและค่าใช้จ่ายอื่นๆ ที่ขึ้นอยู่กับความยาวเส้นทาง (ϕ_3)

สมการข้อจำกัดของข้อกำหนดทางเรขาคณิต และ ข้อจำกัดทางภูมิประเทศ

$$\text{abs}\{f'(x)\} \leq S \quad \text{(ความชัน)} \qquad (4.3)$$

$$-f''(x)/[\sqrt{\{1+(f'(x))^2\}}]^3 \leq C_c \quad \text{(อัตราความโค้งของโค้งคว่ำ)} \qquad (4.4)$$

$$f''(x)/[\sqrt{\{1+(f'(x)^2\}}]^3 \leq C_s \quad \text{(อัตราความโค้งของโค้งหงาย)} \qquad (4.5)$$

$$f(x)_l \geq L_l \quad \text{(จุดควบคุมระดับล่าง)} \qquad (4.6)$$

$$f(x)_u \leq U_u \quad \text{(จุดควบคุมระดับบน)} \qquad (4.7)$$

$$f(x)_p = P_p \quad \text{(จุดควบคุมระดับผ่าน)} \qquad (4.8)$$

สมการข้อจำกัดที่สำคัญในการออกแบบมาจากข้อกำหนดทางเรขาคณิต และ ข้อจำกัดทางภูมิประเทศ แนวเส้นทางจะต้องมีองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่มีความชันขึ้น และ ลงไม่เกินค่าที่กำหนด (4.3) นอกจากนี้จะต้องมีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันไม่เกินค่าที่กำหนด (4.4) และ (4.5) ข้อจำกัดทางภูมิประเทศที่สำคัญ เป็นการบังคับแนวเส้นทางไม่ให้ต่ำกว่าระดับที่กำหนด (4.6) เช่น ระดับน้ำสูงสุด ระดับน้ำใต้ดิน ระดับดินอ่อน ระดับท่อลอด ฯ ในบางเส้นทางต้องการให้เส้นทางมีระดับไม่เกินระดับที่กำหนด (4.7) เช่น ระดับสะพานในกรณีทางลอด เป็นต้น หรือ ต้องการบังคับให้แนวเส้นทางผ่านระดับที่กำหนด (4.8) เช่น ระดับของทางแยก เป็นต้น

ตารางที่ 4.1 สัญญลักษณ์ที่ใช้

ตัวแปร	ความหมาย
Variables	
Z	ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด
Z'	ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของแนวเส้นทางที่ความสูงของดินตัดและดินถมรวมน้อยที่สุด
Z_1	ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของแนวทางดิ่งเบื้องต้น
Z_2	ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ขององค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม
x_o	จุดเริ่มต้นของแนวเส้นทาง
x_N	จุดสิ้นสุดของแนวเส้นทาง
x , x_i	ระยะทางของสถานีตามแนวเส้นทาง
$f(x)$, $f(x_i)$	ระดับทางของสถานีที่ระยะทาง x ใด ๆ
$h(x)$, $h(x_i)$	ความหนาของผิวทาง
$y(x)$, $y(x_i)$	ระดับพื้นดินเดิม
C_i	ความสูงของดินตัด
F_i	ความสูงของดินถม
$f'(x)$	ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของแนวเส้นทาง
$f''(x)$	ค่าอนุพันธ์อันดับสองของแนวเส้นทาง
N_l	จำนวนจุดควบคุมระดับล่าง
N_u	จำนวนจุดควบคุมระดับบน
N_p	จำนวนจุดควบคุมระดับผ่าน
$f(x)_l$	ระดับทางที่จุดควบคุมระดับล่าง l
$f(x)_u$	ระดับทางที่จุดควบคุมระดับบน u
$f(x)_p$	ระดับทางที่จุดควบคุมระดับผ่าน p
ϕ_1	ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากความสูงของดินตัด หรือดินถม
ϕ_2	ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากความชัน
ϕ_3	ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากความยาวของเส้นทาง

ตารางที่ 4.1 สัญญลักษณ์ที่ใช้ (ต่อ)

ตัวแปร	ความหมาย
Variables	
EMC	ฟังก์ชันค่าใช้จ่ายของงานดิน
$Slope_i$	ค่าประมาณของความชันระหว่างสถานี i ถึง i+1
$Curve_i$	ค่าประมาณของอัตราความโค้งที่สถานี i
Subscripts	
i	หมายเลขสถานีบนแนวเส้นทาง
l	หมายเลขจุดควบคุมระดับล่าง, $l = 1,\ldots,N_l$
u	หมายเลขจุดควบคุมระดับบน, $u = 1,\ldots,N_u$
p	หมายเลขจุดควบคุมระดับผ่าน, $p = 1,\ldots,N_p$
Constants	
N	จำนวนสถานีบนแนวเส้นทาง
S	ความชันสูงสุด
C_c	อัตราความโค้งของโค้งคว่ำสูงสุด
C_s	อัตราความโค้งของโค้งหงายสูงสุด
L_l	ระดับของจุดควบคุมระดับล่างที่ l
U_u	ระดับของจุดควบคุมระดับบนที่ u
P_p	ระดับของจุดควบคุมระดับผ่านที่ p
rdist	ระยะทางระหว่างสถานีของแนวเส้นทาง

4.2.2 แบบจำลองแนวทางดิ่งเบื้องต้น

เนื่องจากความซับซ้อนของการหาแนวทางดิ่งที่มีค่าใช้จ่ายรวมน้อยที่สุด ซึ่งมีฟังก์ชันค่าใช้จ่ายเป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น (Nonlinear cost function) จึงได้ตั้งวัตถุประสงค์ เพื่อหาแนวทางดิ่งที่สอดคล้องกับข้อจำกัด และ ให้ค่าใช้จ่ายโดยประมาณน้อย ค่าใช้จ่ายที่สนใจ คือ ค่าใช้จ่ายที่มาจากปริมาณงานดิน ค่าใช้จ่ายดังกล่าวอาจประมาณได้จากค่าความสูงของดินตัดและดินถม (Cut-Fill Difference, CFD) นำมาใช้เป็นสมมติฐานเพื่อหาแนวทางดิ่งเบื้องต้นที่เหมาะสม และ สามารถหาผลลัพธ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพจากเทคนิคการหาผลลัพธ์ที่มีอยู่ในปัจจุบัน วัตถุประสงค์ของการหาแนวทางดิ่งเพื่อหาระดับบนแนวเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายอันเนื่องจากค่าความสูงดินตัดและดินถมรวมน้อยที่สุด

ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงประยุกต์แบบจำลองเพื่อหาแนวทางดิ่งที่มีผลรวมของความสูงดินตัดและดินถมน้อยที่สุด เพื่อหาแนวทางดิ่งเบื้องต้น และ หาผลลัพธ์โดยวิธีการโปรแกรมเชิงเส้น

4.2.2.1 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของแบบจำลองแนวทางดิ่งเบื้องต้นประยุกต์มาจากวัตถุประสงค์ของการหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด โดยนำเพียงค่าใช้จ่ายที่ขึ้นอยู่กับความสูงของดินตัดและดินถมมาพิจารณา ความสูงของดินตัดและดินถมจะสะท้อนถึงค่าขุดดิน ค่าถมดิน ค่าขนย้ายดิน ค่าบำรุงรักษา ฯ ค่าใช้จ่ายเหล่านี้เป็นค่าใช้จ่ายที่สำคัญที่เป็นผลจากการออกแบบแนวทางดิ่ง นอกจากนี้ความสูงของดินตัดและดินถมยังเป็นตัวกำหนดแนวเส้นทางให้สอดคล้องกับข้อกำหนดทางเรขาคณิตและข้อจำกัดของการออกแบบ ดังนั้นในการหาแนวทางดิ่งเบื้องต้นจึงใช้ความสูงของดินตัดและดินถมเป็นตัวแทนในการพิจารณาค่าใช้จ่ายของเส้นทาง เพื่อหาระดับทางที่ทำให้ผลรวมของค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากความสูงของดินตัดและดินถมน้อยที่สุด

จากฟังชันก์วัตถุประสงค์ของการหาผลรวมของความสูงดินตัดและดินถมให้น้อยที่สุด สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในตารางที่ 4.1

$$\text{Min } Z' = \Sigma \text{ abs}\{[f(x_i)-h(x_i)] - y(x_i)\} \qquad (4.9)$$

หรือ

$$\text{Min } Z' = \Sigma \begin{cases} [f(x_i)-h(x_i)] - f(x_i) \ , & f(x_i)-h(x_i) > y(x_i) \\ y(x_i) - [f(x_i)-h(x_i)] \ , & f(x_i)-h(x_i) \leq y(x_i) \end{cases}$$

นำฟังก์ชันวัตถุประสงค์ดังกล่าวมาประยุกต์ในการหาแนวทางดิ่งที่ใช้การประมาณค่าใช้จ่ายของงานดินตัดและงานดินถม และ ค่าใช้จ่ายของงานที่เกี่ยวข้องอื่นๆ จากความสูงของดินตัดและดินถมโดยสมมติให้

$U1_e$ คือ ค่าใช้จ่ายของการขุด(ตัด) ต่อหนึ่งหน่วยความสูงดินตัด

$U1_c$ คือ ค่าใช้จ่ายของการถมต่อหนึ่งหน่วยความสูงดินถม (ซึ่งรวมพิจารณาการหด (Shrinkage) ของดินขณะบดอัดแล้ว)

ค่าใช้จ่ายต่อหน่วยความสูงของดินตัดและดินถมนี้ จะเป็นการประมาณค่าของงานที่เกี่ยวข้องทั้งหมดอันได้แก่ ค่าขุดดิน ค่าขนย้ายมวลดิน ค่าบำรุงทาง และ หาความสัมพันธ์กับความสูงของดินตัดและดินถม เนื่องจากเทคนิคการโปรแกรมเชิงเส้นไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของสมการสัมบูรณ์ได้ จึงสมมติให้

C_i คือ ฟังก์ชันของดินตัดที่สถานี i , $C_i = [0,\infty)$ หรือ $C_i \geq 0$

F_i คือ ฟังก์ชันของดินถมที่สถานี i , $F_i = [0,\infty)$ หรือ $F_i \geq 0$

เขียนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่ได้

$$\text{Min } Z_i = \Sigma \ (U1_e \ C_i + U1_c \ F_i) \qquad (4.10)$$

โดยที่ $$f(x_i)-h(x_i) = y(x_i) - C_i + F_i \quad , \ i = 1,\ldots,N \qquad (4.11)$$

ตัวแปรในการตัดสินใจ คือ C_i และ F_i

การเปลี่ยนฟังก์ชันวัตถุประสงค์ใหม่นี้ทำให้สามารถได้ผลลัพธ์ที่มีค่ามากกว่า หรือ น้อยกว่าศูนย์ จึงสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการโปรแกรมเชิงเส้นที่ตัวแปรจะต้องมีคุณสมบัติมีค่าไม่เป็นลบ (non-negativity) ได้

4.2.2.2 ข้อจำกัด

เนื่องจากข้อจำกัดทางเรขาคณิตและภูมิประเทศ เป็นสิ่งสำคัญในการกำหนดแนวเส้นทาง ดังนั้นข้อจำกัดในแบบจำลองแนวทางดิ่งเบื้องต้นจึงเหมือนกับข้อจำกัดในแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด

ข้อจำกัดของการออกแบบแนวทางดิ่งที่สำคัญที่กำหนดโดย AASHTO (1984) ได้แก่ ความลาดชัน อัตราความโค้ง และ ข้อจำกัดทางภูมิประเทศ

จากข้อจำกัดของแบบจำลองสำหรับออกแบบแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด (4.3) ถึง (4.8) สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในตารางที่ 4.1 ถ้าระยะระหว่างสถานีเท่ากันทุกช่วง เท่ากับ rdist แล้ว

$$
\begin{aligned}
\text{abs}\{\Delta f(x_i)/\text{rdist}\} &\leq S && i = 1,\ldots,N-1 \quad (4.12)\\
-\Delta(\text{Slope}_i)/\text{rdist} &\leq C_c && i = 1,\ldots,N-2\\
\Delta(\text{Slope}_i)/\text{rdist} &\leq C_a && i = 1,\ldots,N-2\\
f(x)_l &\geq L_l && l = 1,\ldots,N_l\\
f(x)_u &\leq U_u && u = 1,\ldots,N_u\\
f(x)_p &= P_p && p = 1,\ldots,N_p
\end{aligned}
$$

โดยที่ Slope_i = $\Delta f(x_i)/\text{rdist}$

= ความชันโดยประมาณที่กึ่งกลางช่วง $[x_i, x_{i+1}]$

ΔSlope_i = $\text{Slope}_{i+1} - \text{Slope}_i$

rdist = Δx_i

$\Delta f(x_i)$ = $f(x_{i+1}) - f(x_i)$

Δx_i = $x_{i+1} - x_i$

เช่นเดียวกับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ การโปรแกรมเชิงเส้นไม่สามารถหาตัวแปรสมบูรณ์ได้ ดังนั้นจึงต้องเปลี่ยนสมการข้อจำกัดของความลาดชันให้อยู่ในรูปของ

$$\Delta f(x_i)/rdist \leq S \qquad (4.13)$$
$$-\Delta f(x_i)/rdist \leq S$$

โดยที่ $rdist > 0$

นอกจากนี้ยังอาจใส่สมการข้อจำกัดเพื่อกำหนดการเปลี่ยนแปลงอัตราความโค้งได้

$$\Delta(Curve_i)/rdist \leq C_{ch} \qquad (4.14)$$
$$-\Delta(Curve_i)/rdist \leq C_{ch}$$

โดยที่ $Curve_i = \Delta(Slope_i)/rdist$
= อัตราการเปลี่ยนแปลงความโค้งโดยประมาณ ระหว่างสถานี i ถึง i+1

C_{ch} = ค่าคงที่
= ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความโค้งสูงสุด

อาจเพิ่มเติมสมการข้อจำกัดของปริมาณดินตัด และ ดินถมได้โดย

$$\sum_i C_i \leq \alpha_{cf} \sum_i F_i + E_B \qquad (4.15)$$

หรือ

$$\sum_i C_i - \alpha_{cf} \sum_i F_i \leq E_B$$

และ

$$\alpha_{cf} \sum_i F_i - \sum_i C_i \leq E_D$$

α_{cf} เป็นค่าอัตราส่วนโดยประมาณของปริมาณดินตัดกับดินถมที่ต้องการ ซึ่งหามาจากบรรทัดฐานของการออกแบบ และ ข้อจำกัดของสภาพดิน ทั้งนี้ก็เพราะในบางพื้นที่ดินจะมีคุณสมบัติไม่เหมาะที่จะนำมาใช้เป็นดินตัดและดินถม หรือ เสถียรภาพด้านข้างไม่เพียงพอ E_B และ E_D เป็นค่าแตกต่างของความสูงของดินตัดและดินถม จะกำหนดจากปริมาตรบ่อยืม

และ บ่อทิ้ง ตามลำดับ โดยหาเป็นความสูงของดินเมื่อมีรูปตัดขวางเช่นเดียวกันกับรูปตัดคันทาง โดยทั่วไปหากต้องการจะหาปริมาณดินตัดเท่ากับดินถมแล้ว α_{cf} จะมีค่าเท่ากับหนึ่ง E_s และ ED มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งเท่ากับเป็นการปรับดินให้ราบเรียบขึ้น (Smooth ground process)

การนำสมการข้อจำกัดไปใช้ในแบบจำลอง ทำได้โดยแทนสมการ (4.11) ลงในสมการข้อจำกัด

4.2.2.3 <u>แบบจำลอง</u>

นำสมการ (4.10) ถึง (4.15) มาสร้างแบบจำลองได้เป็น

ตัวแปรในการตัดสินใจ

$$C_i \text{ และ } F_i \qquad i = 1,\ldots,N$$

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$\text{Min } Z_i = \sum_i (U1_e \cdot C_i + U1_c \cdot F_i) \qquad i = 1,\ldots,N$$

Subject to

1) ความชัน

$$-C_i + F_i + C_{i+1} - F_{i+1} \qquad i = 1,\ldots,N-1$$
$$\leq S*rdist - (y(x_i)+h(x_i)) + (y(x_{i+1})+h(x_{i+1})) \qquad (4.16)$$

$$C_i - F_i - C_{i+1} + F_{i+1}$$
$$\leq S*rdist + (y(x_i)+h(x_i)) - (y(x_{i+1})+h(x_{i+1}))$$

2) อัตราความโค้ง

$$C_i - F_i - 2*C_{i+1} + 2*F_{i+1} + C_{i+2} - F_{i+2} \qquad i = 1,\ldots,N-2$$
$$\leqslant C_c*rdist + (y(x_i)+h(x_i)) - 2*(y(x_{i+1})+h(x_{i+1})) \qquad (4.17)$$
$$+ (y(x_{i+2})+h(x_{i+2}))$$

$$-C_i + F_i + 2*C_{i+1} - 2*F_{i+1} - C_{i+2} + F_{i+2}$$
$$\leqslant C_s*rdist - (y(x_i)+h(x_i)) + 2*(y(x_{i+1})+h(x_{i+1}))$$
$$- (y(x_{i+2})+h(x_{i+2}))$$

3) ข้อจำกัดทางภูมิประเทศ

$$-\alpha*C_{il} + \alpha*F_{il} - \beta*C_{il+1} + \beta*F_{il+1} \qquad l = 1,\ldots,N_l$$
$$\geqslant L_l - y(x_{il}) - y(x_{il+1}) \qquad (4.18)$$
$$\alpha = (1-distl_l/rdist) \quad \beta = (distl_l/rdist)$$

$$-\alpha*C_{iu} + \alpha*F_{iu} - \beta*C_{iu+1} + \beta*F_{iu+1} \qquad u = 1,\ldots,N_u$$
$$\leqslant U_u - y(x_{iu}) - y(x_{iu+1})$$
$$\alpha = (1-distu_u/rdist) \quad \beta = (distu_u/rdist)$$

$$-\alpha*C_{ip} + \alpha*F_{ip} - \beta*C_{ip+1} + \beta*F_{ip+1} \qquad p = 1,\ldots,N_p$$
$$= P_p - y(x_{ip}) - y(x_{ip+1})$$
$$\alpha = (1-distp_p/rdist) \quad \beta = (distp_p/rdist)$$

$distl_l$ = ระยะทางของจุดควบคุมระดับล่างจากสถานี l

$distu_u$ = ระยะทางของจุดควบคุมระดับบนจากสถานี u

$distp_p$ = ระยะทางของจุดควบคุมระดับผ่านจากสถานี p

4) อัตราการเปลี่ยนแปลงความโค้ง (ทางเลือก)

$$-C_i + F_i + 3*C_{i+1} - 3*F_{i+1} - 3*C_{i+2} + 3*F_{i+2} + C_{i+3} - F_{i+3}$$
$$\leq C_{ch}*rdist - (y(x_i)+h(x_i)) + 3*(y(x_{i+1})+h(x_{i+1})) \qquad (4.19)$$
$$- 3*(y(x_{i+2})+h(x_{i+2})) + (y(x_{i+3})+h(x_{i+3}))$$

$$C_i - F_i - 3*C_{i+1} + 3*F_{i+1} + 3*C_{i+2} - 3*F_{i+2} - C_{i+3} + F_{i+3}$$
$$\leq C_{ch}*rdist + (y(x_i)+h(x_i)) - 3*(y(x_{i+1})+h(x_{i+1}))$$
$$+ 3*(y(x_{i+2})+h(x_{i+2})) - (y(x_{i+3})+h(x_{i+3}))$$

5) ข้อกำหนดของความสูงของดินตัดกับดินถม (ทางเลือก)

$$\sum_i C_i - \alpha_{cf} \sum_i F_i \leq E_B \qquad i = 1,\ldots,N \qquad (4.20)$$

และ $$\alpha_{cf} \sum_i F_i - \sum_i C_i \leq E_D$$

สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในตารางที่ 4.1 และ α_{cf} E_B E_D เป็นค่าคงที่กำหนดโดยผู้ออกแบบ

4.3 การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้น

จากการหาแนวทางดิ่งเบื้องต้น จะได้ผลลัพธ์เป็นระดับทางที่ทุกสถานี แนวทางดิ่งที่ได้จะไม่ใช่แนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด แต่จะเป็นแนวเส้นทางที่สอดคล้องกับข้อกำหนดของความชัน อัตราความโค้ง และ ระดับที่กำหนด นอกเหนือจากการหาแนวทางดิ่งเบื้องต้นโดยใช้แบบจำลองแล้วยังอาจจะกำหนดแนวทางดิ่งโดยวิศวกรได้ โดยจะต้องพิจารณาความเหมาะสมของเส้นทางให้สอดคล้องกับข้อจำกัดเอง

หากวิศวกรพอใจในแนวเส้นทาง และ ค่าใช้จ่ายของแนวทางดิ่งเบื้องต้น อาจนำไปใช้ในการก่อสร้างได้ โดยหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตให้เหมาะกับแนวทางดิ่ง วิธีหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตมีอยู่สองวิธี คือ

1) การใช้สมการกำลังสามและโค้ง Spline
2) การบรรจุส่วนของเส้นตรง และโค้งพาราโบลา

การใช้สมการกำลังสาม และโค้ง Spline เป็นการหาฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์กำลังสามให้กับระดับทางเพื่อให้ทราบระดับที่สถานีใดๆ บนเส้นทางได้ ส่วนการบรรจุส่วนของเส้นตรงและโค้งพาราโบลา เป็นการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตของเส้นทางแบบดั้งเดิม คือ จุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้ง ที่จะใช้เป็นแนวเส้นทางแทนแนวทางดิ่งเบื้องต้นได้อย่างเหมาะสม จุดตัดแนวดิ่งและความยาวโค้งที่ได้อาจนำไปใช้เป็นค่าเริ่มต้นของการค้นหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ที่จะประหยัดค่าใช้จ่ายรวมของเส้นทางมากยิ่งขึ้นต่อไป

4.3.1 การใช้สมการกำลังสามและโค้ง Spline

การใช้สมการกำลังสามในการออกแบบ เป็นการหาแนวเส้นทางต่อเนื่องที่สอดคล้องกับค่าระดับของสถานีจากแนวทางดิ่งเบื้องต้น ซึ่งจะสอดคล้องกับข้อกำหนดของความชัน อัตราความโค้ง และ จุดควบคุมระดับ การบรรจุองค์ประกอบทางเรขาคณิตเช่นนี้จะมีความราบเรียบ (smooth) ของเส้นทางสูง เนื่องจากมีอัตราการเปลี่ยนแปลงระดับทางอย่างต่อเนื่อง (ค่าอนุพันธ์อันดับสามคงที่)

สมการที่ใช้มีหลายแบบ เช่น Natural cubic spline Cubic B-spline Quadratic B-spline เป็นต้น สมการที่ให้ความราบเรียบสูงที่สุด และสอดคล้องกับข้อกำหนด คือ สมการ cubic spline ดังแสดงในภาคผนวก ข

ถึงแม้ว่าสมการกำลังสามจะให้ความราบเรียบสูง แต่วิธีการคำนวณค่อนข้างจะซับซ้อน ในปัจจุบันกำลังอยู่ระหว่างการพัฒนาเพื่อใช้ในการก่อสร้างจริง ดังนั้นจึงมีการทดลองใช้องค์ประกอบแบบนี้ในบางพื้นที่ และ บางประเทศเท่านั้น

4.3.2 การบรรจุส่วนของเส้นตรงและโค้งพาราโบลา

องค์ประกอบทางเรขาคณิตเช่นนี้เป็นแนวทางแบบดั้งเดิม (Conventional alignment) กล่าวคือ แนวเส้นทางประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงและโค้งพาราโบลา ระดับทางที่คำนวณได้จากแนวทางดิ่งเบื้องต้น อาจจะยังไม่สอดคล้องกับหลักการออกแบบที่ดี โดยยังไม่สัมพันธ์แนวทางราบมากนัก และ เส้นทางยังไม่ราบเรียบ (Smooth) เท่าที่ควร

ดังนั้นจึงต้องนำมาหาแนวเส้นทางโดยละเอียด ที่สอดคล้องกับหลักการออกแบบทางเรขาคณิตของเส้นลาดชัน และ โค้งดิ่งโดยการค้นหาตำแหน่งของจุดตัดแนวดิ่ง นอกจากนี้ยังเป็นการสร้างวิธีหาความยาวโค้งดิ่งแทนการกำหนดโดยวิศวกร และ สามารถปรับแก้เพื่อที่จะปรับปรุงแนวทางดิ่งให้สัมพันธ์กับแนวทางราบมากขึ้นด้วย

กระบวนการในการหาจุดตัดแนวดิ่ง อาศัยการเปลี่ยนแปลงของระดับทางเมื่อเปรียบเทียบกับระดับทางของแนวทางดิ่งเบื้องต้นที่คูณกับค่าน้ำหนัก (weight factor) แนวเส้นทางที่สร้างมาจากการคูณค่าน้ำหนัก จะมีความเป็นลูกคลื่น (undulation) ตรงกับแนวเส้นทางเดิม แต่จะมีค่าการเปลี่ยนแปลงระดับน้อยกว่า การเปรียบเทียบจึงสามารถบอกตำแหน่งของโค้งโดยประมาณได้ โดยการหาจุดเปลี่ยนโค้ง (point of inflection) เพื่อใช้ในการหาจุดตัดแนวดิ่ง หลังจากนั้นจึงหาความยาวโค้งจากข้อแนะนำของ AASHTO (1984)

4.3.2.1 การหาตำแหน่งจุดตัดแนวดิ่ง

เราสามารถหาตำแหน่งจุดตัดแนวดิ่งด้วยวิธีเปรียบเทียบแนวทางดิ่งที่คูณค่าน้ำหนักกับแนวทางดิ่งเบื้องต้น ระดับทางของแนวทางดิ่งที่คูณค่าน้ำหนักคำนวณมาจาก

$$
\begin{aligned}
f_w(x_i) = {} & [\, w_1 * f(x_{i-3}) + w_2 * f(x_{i-2}) + w_3 * f(x_{i-1}) + w_4 * f(x_i) \\
& + w_3 * f(x_{i+1}) + w_2 * f(x_{i+2}) + w_1 * f(x_{i+3}) \,] / \\
& [\, 2*w_1 + 2*w_2 + 2*w_3 + w_4 \,] \qquad (4.21) \\
& i = 3, \ldots, N-3
\end{aligned}
$$

โดยที่ $f_w(x_i)$ คือ ระดับทางของแนวทางดิ่งที่คูณค่าน้ำหนัก ,หาก i อยู่ในช่วงเริ่มต้นและสิ้นสุดเส้นทางแล้ว จะคิดค่าน้ำหนักเฉพาะภายในขอบเขตเส้นทางเท่านั้น ค่า w_1 ถึง w_4 ที่ใช้มีค่าเท่ากับ 1 ถึง 4 ตามลำดับ

จากนั้นนำแนวเส้นทางทั้งสองมาหาค่าแตกต่างเพื่อหาจุดเปลี่ยนโค้ง (Point of inflection) ปรับแก้จุดเปลี่ยนโค้ง หาเส้นลาดชันและจุดตัดแนวดิ่งเริ่มต้น เมื่อได้จุดตัดแนวดิ่งเริ่มต้นแล้ว นำมาปรับแก้จาก ระยะในแนวดิ่งจากแนวเส้นทางถึงจุดตัดแนวดิ่ง(MO) ความชัน และ ระยะระหว่างจุดตัดแนวดิ่ง จะได้จุดตัดแนวดิ่งของแนวเส้นทางตามต้องการ

4.3.2.2 การหาความยาวโค้งจากข้อแนะนำของ AASHTO (1984)

เมื่อได้ตำแหน่งจุดตัดแนวดิ่งแล้ว เราสามารถหาความชันของเส้นลาดชันได้ และ นำไปคำนวณหาความยาวโค้งที่สั้นที่สุดจากข้อแนะนำของ AASHTO ซึ่งปรากฏในบทที่ 3 และ ประมาณค่าความยาวโค้งด้านซ้ายและด้านขวา (L1 และ L2) สั้นที่สุดให้เป็นจำนวนเท่าของระยะห่างระหว่างสถานี ได้ผลลัพธ์เป็นความยาวโค้งดิ่งของแนวเส้นทาง

4.4 การหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม

จากกระบวนการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้น ซึ่งจะเปลี่ยนองค์ประกอบของแนวเส้นทางจากระดับทางของแนวทางดิ่งเบื้องต้นให้เป็นจุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้ง องค์ประกอบที่ได้จะนำมาใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม องค์ประกอบทางเรขาคณิตเริ่มต้นเป็นส่วนสำคัญที่จะทำให้การหาผลลัพธ์มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ค่าองค์ประกอบเริ่มต้นนี้อาจกำหนดโดยวิศวกรก็ได้ แต่อาจทำให้ประสิทธิภาพของการค้นหาลดลง การสร้างแบบจำลองการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสมจะต่างจากแบบจำลองแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด ตรงที่ใช้ในการตัดสินใจเป็นตำแหน่งของจุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้ง แทนระดับทางที่ทุกสถานี ดังนั้นเราจึงสร้างแบบจำลองเพื่อหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสมได้ แบบจำลองที่สร้างขึ้นสามารถนำค่าใช้จ่ายที่ซับซ้อนมาพิจารณาได้โดยใช้เทคนิคการหาผลลัพธ์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear optimization technique) ข้อจำกัดของแบบจำลองจะกำหนดตำแหน่งจุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้งให้เป็นไปตามข้อกำหนดของ AASHTO

4.4.1 ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสมเช่นเดียวกันกับวัตถุประสงค์ของการหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด แต่เนื่องจากความซับซ้อนของฟังก์ชันค่าใช้จ่ายที่เกี่ยวข้อง ในงานวิจัยในส่วนนี้จึงเน้นที่จะหาค่าใช้จ่ายอันเนื่องมาจากปริมาณงานดิน วิธีคำนวณปริมาณงานดินทำได้หลายวิธี ขึ้นอยู่กับค่าความถูกต้องของค่าใช้จ่ายที่ต้องการ ซึ่งจะต้องแลกเปลี่ยน (Trade-off) กับเวลาในการคำนวณ

ปริมาณงานดินมักคำนวณมาจากพื้นที่ของรูปตัดคันทางของแต่ละสถานีคูณกับระยะทางระหว่างสถานี เราสามารถหาพื้นที่ของรูปตัดคันทางได้ 3 วิธี คือ

1) การหาพื้นที่รูปตัดโดยประมาณ โดยสมมติพื้นที่ระหว่างโครงสร้างทาง และพื้นดินเดิม เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

2) การหาพื้นที่รูปตัดจากแบบจำลองรูปตัดคันทาง โดยสามารถจะประมาณระดับพื้นดินตามขวางเอียงทำมุมกับแนวราบได้

3) การหาพื้นที่รูปตัดของโครงสร้างทาง และ ระดับพื้นดินเดิมจริง

การหาพื้นที่รูปตัดจากพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นการสมมติระดับพื้นดินราบและโครงสร้างทางมีผิวทางราบ และ มีค่าความชันด้านข้างคงที่ พื้นที่ที่ได้จะเหมาะกับการคำนวณปริมาณดินของเส้นทางที่ตัดบนพื้นที่ราบทั้งในแนวขนาน และ ตั้งฉากกับเส้นทาง หรือการคำนวณที่ต้องการความรวดเร็ว แต่ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเพียงค่าประมาณของปริมาณดิน

การหาพื้นที่จากแบบจำลองรูปตัดคันทาง เป็นการคำนวณพื้นที่จากแบบจำลองรูปตัดคันทางที่สามารถสมมติระดับพื้นดินตามขวางเอียงได้ ถึงแม้ว่าสามารถพิจารณาระดับพื้นดินตามขวางเอียงได้ก็ตาม เราจะต้องสมมติค่าความชันด้านข้างคงที่ พื้นที่ที่ได้จากแบบจำลองจึงเหมาะกับพื้นที่ที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับทางแนวขนานกับเส้นทางไม่มากนัก และ ระดับทางแนวตั้งฉากกับเส้นทางไม่เอียงจนเกินไป การหาพื้นที่จากแบบจำลองนี้จะสามารถคำนวณปริมาณดินในกรณีขุดข้างภูเขา (Side hill excavation) ได้ถูกต้องมากกว่าการคำนวณโดยใช้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

การหาพื้นที่รูปตัดจากโครงสร้างทาง และ ระดับพื้นดินจริง เป็นการคำนวณพื้นที่อย่างละเอียดจาก รูปตัดโครงสร้างทางที่ใช้ในการก่อสร้าง และ ระดับพื้นดินตามขวางจริง การหาพื้นที่วิธีนี้จะได้ค่าปริมาณดินที่ถูกต้องมากที่สุด เพราะจะนำความลาดชันของผิวทาง (Crown slope) ความกว้างของร่องน้ำ (ditch line width) ความชันด้านข้าง (Side slope) ที่แปรผันตามความสูงของดินตัดและดินถม และ ระดับพื้นดินไม่สม่ำเสมอ (Irregular cross section) มาพิจารณา แต่ข้อด้อยของการหาพื้นที่วิธีนี้ คือจะใช้เวลาในการคำนวณมาก ดังนั้นการคำนวณพื้นที่โดยวิธีนี้จึงควรใช้ในการออกแบบทางที่พบปัญหาในการใช้วิธีคำนวณพื้นที่โดยวิธีอื่นๆ และ ใช้วิธีนี้ในการคำนวณหาปริมาณดินที่ถูกต้องเพื่อใช้ในการคำนวณค่าใช้จ่าย และ การก่อสร้างจริง

ในงานวิจัยนี้ใช้วิธีหาปริมาณงานดิน โดยหาจากพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู เนื่องจากในการค้นหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม จะต้องมีการคำนวณปริมาณดินทุกรอบการทำงาน การหาพื้นที่โดยใช้วิธีอื่นๆ จะใช้เวลาในการคำนวณมหาศาล ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะใช้ค่าประมาณของปริมาณดินในการคำนวณค่าใช้จ่าย ส่วนปริมาณดินที่แท้จริงที่จะนำไปคำนวณราคาค่าก่อสร้างจะหาได้จากรูปตัดโครงสร้างทาง และ พื้นดินจริง ดังนั้นจึงสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ได้เป็น

$$\text{Min } Z_2 = \sum_i (U^{cf} \cdot \text{rdist} \cdot A_i) \qquad i = 1,\ldots,N \qquad (4.22)$$

สัญญลักษณ์ที่ใช้แสดงในตารางที่ 4.1

$$A_i = SS*[(f(x_i)-h(x_i))-y(x_i)]^2 + \text{width}*\text{abs}[(f(x_i)-h(x_i)-y(x_i)] \qquad (4.23)$$

โดยที่ A_i = พื้นที่รูปตัด (โดยประมาณ) ของคันทาง , $A_i \geq 0$

SS = ค่าผกผันของความชันด้านข้างของโครงสร้างทาง

width = ความกว้างของคันทาง

และ

$$U^{cf} = \begin{cases} U_e & \text{เมื่อ} \quad f(x_i)-h(x_i) < y(x_i) \\ U_c & \qquad\quad f(x_i)-h(x_i) \geq y(x_i) \end{cases} \qquad (4.24)$$

โดยที่ U_e = ค่าใช้จ่ายต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของการขุด

U_c = ค่าใช้จ่ายต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของการถม (คิดจากปริมาณดินก่อนขุด)

4.4.2 ข้อจำกัด

ข้อจำกัดที่สำคัญของการออกแบบยังคงเป็นเช่นเดียวกันกับ แบบจำลองเพื่อหาแนวทางดิ่งที่เหมาะสมที่สุด คือ ความชัน อัตราความโค้ง และ จุดควบคุมระดับ เนื่องจากแบบจำลองเพื่อหาองค์ประกอบทางเรขาคณิต มีตัวแปรที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ จุดตัดแนวดิ่ง และ ความยาวโค้ง จึงต้องทำการปรับปรุงสมการข้อจำกัดเสียใหม่โดยคำนึงถึงความยาวโค้งแทนค่าอัตราความโค้ง และ ระยะทางระหว่างจุดตัดแนวดิ่ง เพื่อที่จะให้สามารถบรรจุโค้งได้

สมมติให้ (XP_p, YP_p) เป็นตำแหน่งของจุดตัดแนวดิ่งใดๆ ที่มีทั้งหมด N_p จุด เส้นทางมีจุดเริ่มต้นที่ (XB,YB) และ สิ้นสุดที่ (XE,YE) ความยาวโค้งด้านซ้าย และด้านขวาที่จุดตัดแนวดิ่งใดๆ มีค่าเท่ากับ $L1_p$ และ $L2_p$ ตามลำดับ ดังนั้นจะนำมาเขียนเป็นสมการข้อจำกัดได้เป็น

1) ความชัน

$$(YP_{p+1}-YP_p)/(XP_{p+1}-XP_p) \leq S \qquad p = 1,\ldots,N_{p-1} \quad (4.25)$$
$$-(YP_{p+1}-YP_p)/(XP_{p+1}-XP_p) \leq S$$

$$(YP_1-YB)/(XP_1-XB) \leq S$$
$$-(YP_1-YB)/(XP_1-XB) \leq S$$

$$(YE-YP_{Np})/(XE-XP_{Np}) \leq S$$
$$-(YE-YP_{Np})/(XE-XP_{Np}) \leq S$$

2) ความยาวโค้งสั้นที่สุด (แต่ละด้าน)

$$L1_p \geq L_{min} \quad p = 1,\ldots, N_p \qquad (4.26)$$

$$L2_p \geq L_{min}$$

L_{min} = ค่าความยาวโค้งในแต่ละด้านสั้นที่สุด

3) ความยาวโค้งยาวที่สุด

$$L1_p + L2_p \leq L_{max} \quad p = 1,\ldots,N_p \qquad (4.27)$$

L_{max} = ค่าความยาวโค้งยาวที่สุด

4) ระยะระหว่างจุดตัดแนวดิ่ง

$$XP_{p+1} - XP_p \geq 2*L_{min} \quad p = 1,\ldots,N_p-1 \qquad (4.28)$$

$$XP_1 - XB \geq L_{min}$$

$$XE - XP_{Np} \geq L_{min}$$

5) ความยาวโค้งที่บรรจุลงระหว่างจุดตัดแนวดิ่ง

$$L2_{p-1} + L1_p \leq XP_p - XP_{p-1} \quad p = 2,\ldots,N$$

$$L1_1 \leq XP_1 - XB \qquad (4.29)$$

$$L2_{Np} \leq XE - XP_{Np}$$

6) ระดับควบคุม

$$f(x)_l \geq L_l \quad l = 1,\ldots,N_l \qquad (4.30)$$

$$f(x)_u \leq U_u \quad u = 1,\ldots,N_u$$

$$f(x)_p = P_p \quad p = 1,\ldots,N_p$$

4.4.3 แบบจำลอง

จากการตั้งวัตถุประสงค์ และ ข้อจำกัดของการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม ทำให้เราสามารถพัฒนาไปใช้เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสมได้

แบบจำลองของการหาองค์ประกอบทางเรขาคณิตที่เหมาะสม ได้จากการตั้งฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในข้อ 4.4.1 และ สมการข้อจำกัดในข้อ 4.4.2 โดยสรุปได้เป็นฟังก์ชันวัตถุประสงค์ คือ สมการ (4.22) และ ข้อจำกัด คือ สมการ (4.25) ถึง (4.30)