

กึ่งกรุปแกมมาบางชนิด

นายธวัชชัย คำประภัสสร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์  
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ปีการศึกษา 2549  
ISBN 974-14-2623-2  
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# SOME $\Gamma$ -SEMIGROUPS

Mr. Thawatchai Khumprapussorn

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2006

ISBN 974-14-2623-2

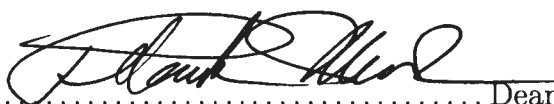
Copyright of Chulalongkorn University

**490202**

Thesis Title                      SOME  $\Gamma$ -SEMIGROUPS  
By                                      Mr. Thawatchai Khumprapussorn  
Field of Study                      Mathematics  
Thesis Advisor                      Assistant Professor Sajee Pianskool, Ph.D.  
Thesis Co-advisor                      Sureeporn Chaopraknoi, Ph.D.

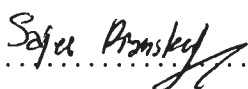
---

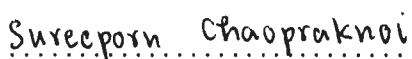
Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial  
Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree

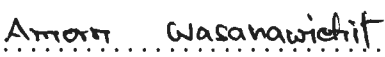
  
..... Dean of the Faculty of Science  
(Professor Piamsak Menasveta, Ph.D.)

THESIS COMMITTEE

  
..... Chairman  
(Associate Professor Ajchara Harnchoowong, Ph.D.)

  
..... Thesis Advisor  
(Assistant Professor Sajee Pianskool, Ph.D.)

  
..... Thesis Co-advisor  
(Sureeporn Chaopraknoi, Ph.D.)

  
..... Member  
(Assistant Professor Amorn Wasanawichit, Ph.D.)

รัชชชัย คำประภัสสร : กึ่งกรุปแกมมาบางชนิด (SOME  $\Gamma$ -SEMIGROUPS)  
 อ.ที่ปรึกษา : ผศ.ดร.ศจี เพ็ชรสกุล, อ.ที่ปรึกษาร่วม : อ.ดร.สุริย์พร ชาวแพรงน้อย,  
 47 หน้า ISBN 974-14-2623-2

กำหนดให้  $S$  และ  $\Gamma$  เป็นเซตไม่ว่าง เราเรียก  $S$  ว่า กึ่งกรุปแกมมา ( $\Gamma$ -กึ่งกรุป)  
 ถ้ามีการส่งจาก  $S \times \Gamma \times S$  ไปยัง  $S$  เขียนแทนภาพของ  $(a, \gamma, b)$  ด้วย  $a\gamma b$  ซึ่งสอดคล้อง  
 สมบัติ

$$(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c) \text{ สำหรับทุก } a, b, c \in S \text{ และสำหรับทุก } \alpha, \beta \in \Gamma$$

เรียกเซตย่อยไม่ว่าง  $B$  ของ  $S$  ว่า กึ่งกรุปย่อยแกมมา ของ  $S$  เมื่อ  $B\Gamma B \subseteq B$  โดยที่  
 $B\Gamma B = \{ a\alpha b \mid a, b \in B \text{ และ } \alpha \in \Gamma \}$

เห็นได้ชัดว่า  $\mathbb{R}$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การบวกและการคูณปกติสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  
 $\Gamma$  ใดๆ ของ  $\mathbb{R}$  และ  $M_{mn}(\mathbb{R})$  เซตของเมทริกซ์ขนาด  $m \times n$  บน  $\mathbb{R}$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การ  
 คูณปกติสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ใดๆ ของ  $M_{mn}(\mathbb{R})$  ในงานวิจัยนี้ เราศึกษาว่าเมื่อใดที่ช่วงจริง  
 $I$  และ  $\Gamma$  ที่ทำให้  $I$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $\mathbb{R}$  นอกจากนี้สำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $T$  ของ  
 $M_{mn}(\mathbb{R})$  ที่กำหนดให้ เราแยกแยะว่าเมื่อใดที่เซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $M_{mn}(\mathbb{R})$  ทำให้  $T$  เป็น  
 $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $M_{mn}(\mathbb{R})$

ยิ่งไปกว่านั้น เราทราบว่า  $L(V)$  เซตของการแปลงเชิงเส้นทั้งหมดบนปริภูมิเวกเตอร์  
 $V$  บนริงการหาร เป็นกึ่งกรุป และ  $\Gamma$ -กึ่งกรุปภายใต้การประกอบสำหรับเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$   
 ใดๆ ของ  $L(V)$  สำหรับกึ่งกรุปย่อย  $S$  บางชนิดของ  $L(V)$  เราให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ  
 ของเซตย่อยไม่ว่าง  $\Gamma$  ของ  $L(V)$  ที่ทำให้  $S$  เป็น  $\Gamma$ -กึ่งกรุปย่อยของ  $L(V)$

ภาควิชา ...คณิตศาสตร์...  
 สาขาวิชา ...คณิตศาสตร์...  
 ปีการศึกษา ... 2549...

ลายมือชื่อนิสิต ไร่ไร่ ไร่ไร่ คำประภัสสร.....  
 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....  
 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม สุรินทร์ ชาวแพรงน้อย

# # 4772322723 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS :  $\Gamma$ -SEMIGROUP /  $\Gamma$ -SUBSEMIGROUP

THAWATCHAI KHUMPRAPUSSORN : SOME  $\Gamma$ -SEMIGROUPS

THESIS ADVISOR : ASST. PROF. SAJEE PIANSKOOL, Ph.D.,

THESIS CO-ADVISOR : SUREEPORN CHAOPRAKNOI, Ph.D.,

47 pp. ISBN 974-14-2623-2

Let  $S$  and  $\Gamma$  be two nonempty sets. Then  $S$  is called a  $\Gamma$ -semigroup if there exists a mapping from  $S \times \Gamma \times S$  into  $S$ , denote the image of  $(a, \gamma, b)$  by  $a\gamma b$ , satisfying the identity

$$(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c) \text{ for all } a, b, c \in S \text{ and } \alpha, \beta \in \Gamma.$$

A nonempty subset  $B$  of  $S$  is called a  $\Gamma$ -subsemigroup of  $S$  if  $B\Gamma B \subseteq B$  where  $B\Gamma B = \{a\alpha b \mid a, b \in B \text{ and } \alpha \in \Gamma\}$ .

It is obvious that,  $\mathbb{R}$  is a  $\Gamma$ -semigroup under usual addition and multiplication for any nonempty subset  $\Gamma$  of  $\mathbb{R}$  and  $M_{mn}(\mathbb{R})$ , the set of all  $m \times n$  matrices over  $\mathbb{R}$ , is a  $\Gamma$ -semigroup under usual multiplication for any nonempty subset  $\Gamma$  of  $M_{nm}(\mathbb{R})$ . In this research, we, first, determine real intervals  $I$  and  $\Gamma$  such that  $I$  is a  $\Gamma$ -subsemigroup of  $\mathbb{R}$ . Besides, for a fixed nonempty subset  $T$  of  $M_{mn}(\mathbb{R})$ , we characterize a nonempty subset  $\Gamma$  of  $M_{nm}(\mathbb{R})$  so that  $T$  is a  $\Gamma$ -subsemigroup of  $M_{mn}(\mathbb{R})$ .

Furthermore, we know that  $L(V)$ , the set of all linear transformations on a vector space  $V$  over a division ring, is a semigroup and a  $\Gamma$ -semigroup under composition for any nonempty subset  $\Gamma$  of  $L(V)$ . For some particular subsemigroups  $S$  of  $L(V)$ , necessary and sufficient conditions of nonempty subsets  $\Gamma$  of  $L(V)$  so that  $S$  is a  $\Gamma$ -subsemigroup of  $L(V)$  are given.

Department : ...Mathematics...

Field of Study : ...Mathematics...

Academic Year : .....2006.....

Student's Signature : Thawatchai khumprapussorn

Advisor's Signature : Sajee Pianskool

Co-advisor's Signature : Sureeporn Chaopraknoi

## ACKNOWLEDGEMENTS

I am greatly indebted to Assistant Professor Dr. Sajee Pianskool, my thesis advisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing this thesis. I am very thankful to my co–advisor, Dr. Sureporn Chaopraknoi, for her many suggestions and constant support during this research. Moreover, I would like to thank my appreciation to the chairman and member of my committee, Associate Professor Dr. Ajchara Harnchoowong and Assistant Professor Dr. Amorn Wasanawichit. Besides, I would like to thank all of my teachers who have taught me for my knowledge and skills.

My thankfulness goes to the Ministry Development Staff Project Scholarship for the 2–year support of my master program study.

Finally, I am very grateful to my parents for their sincere encouragement throughout my study.

# CONTENTS

	page
ABSTRACT IN THAI .....	iv
ABSTRACT IN ENGLISH .....	v
ACKNOWLEDGEMENTS .....	vi
CONTENTS .....	vii
LIST OF SYMBOLS .....	viii
CHAPTERS	
I INTRODUCTION .....	1
II REAL INTERVALS AS $\Gamma$ -SUBSEMIGROUPS OF $\mathbb{R}$ .....	5
2.1 $\Gamma$ -Subsemigroups of $\mathbb{R}$ under Usual Addition .....	5
2.2 $\Gamma$ -Subsemigroups of $\mathbb{R}$ under Usual Multiplication .....	11
III MATRICES AS $\Gamma$ -SEMIGROUPS .....	28
IV LINEAR TRANSFORMATIONS AS $\Gamma$ -SEMIGROUPS .....	42
REFERENCES .....	46
VITA .....	47

## List of Symbols

$\phi$	the empty set
$\mathbb{R}$	the set of real numbers
$\mathbb{Z}$	the set of integers
$\mathbb{Q}$	the set of rational numbers
$\mathbb{Q}^c$	the set of irrational numbers
$M_{mn}(\mathbb{R})$	the set of $m \times n$ matrices over $\mathbb{R}$
$L(V)$	the set of all linear operations on a vector space $V$ over a division ring
$-A$	$\{-a \mid a \in A\}$ where $A$ is a nonempty subset of $\mathbb{R}$
$A + k$	$\{a + k \mid a \in A\}$ where $A$ is a nonempty subset of $\mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{R}$
$A + B$	$\{a + b \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$ where $A$ and $B$ are nonempty subsets of $\mathbb{R}$
$N_n$	$\{1, 2, \dots, n\}$ where $n \in \mathbb{N}$
$m\mathbb{Z} + n$	$\{mk + n \mid k \in \mathbb{Z}\}$ where $m, n \in \mathbb{Z}$
$\delta_{ij}$	the Kronecker delta, i.e., $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ if } i \neq j \\ 1 & , \text{ if } i = j \end{cases}$
$C^{tr}$	the transpose of a matrix $C$
$S^{tr}$	$\{C^{tr} \mid C \in S\}$ where $S$ is a nonempty subset of $M_{mn}(\mathbb{R})$
$1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, m$	the sequence $1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, m$ where $i, m \in \mathbb{N}$ with $i < m$