บทที่ 4

วิเคราะห์ค่าความหน่วงของอัลกอริทึมการลดค่าน้ำหนัก

เนื้อหาในบทนี้เกี่ยวกับบทวิเคราะห์ปัญหาของขนาดของความหน่วงที่ใช้ โดยจากผลทางทฤษฎี สามารถสรุปได้ว่าค่าน้ำหนักมีโอกาสลดลงได้มากขึ้นเมื่อกำหนดให้ค่าความหน่วงของอัลกอริทึมสูงขึ้น แต่ในขณะเดียวกัน ไม่ว่าจะเพิ่มค่าความหน่วงเชื่อมตรงเท่าไร ก็จะยังคงมีจำนวนที่ต้องการค่าความหน่วงที่มีขนาดมากขึ้นในการลดค่าน้ำหนักอยู่เสมอ

เมื่อกำหนดให้ค่าความหน่วงเชื่อมตรงมีขนาดใหญ่ขึ้นนั้นจะทำให้ต้องใช้รูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นด้วย ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จะเริ่มกล่าวถึงจากวิธีการสร้างรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ให้มีขนาดต่างๆ รวมถึงการวิเคราะห์ถึงค่าความหน่วงที่มีขนาดเพิ่มขึ้นด้วย

4.1 การสร้างรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์

รูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ที่มีจำนวนดิจิตมากกว่าสามและอยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ สามารถสร้างได้จากการนำรูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่มีขนาดเท่ากับสามดิจิต คือ 122 มาทำการบวกหรือลบกันเพื่อให้ได้รูปแบบแทนจำนวนที่มีรูปแบบใหม่แต่มีความยาวเพิ่มขึ้นแต่มีค่าเชิงตัวเลขที่เท่าเดิม

ตัวอย่างที่ 4.1 *จงสร้างรูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่มีขนาด 5 ดิจิต*

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc l}
 & & & 1 & 2 & 2 & \text{ขนาดความยาว 3} \\
- & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & \text{ขนาดความยาว 5} \\
\hline
 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & 2 & 2 & \\
\hline\hline
\end{array}$$

□

ตัวอย่างที่ 4.2 *จงแสดงการสร้างรูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่มีขนาดความยาว 5 โดยทำการบวกหรือลบด้วยรูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ต่อกันเป็นจาก 3 ดิจิตเป็น 5 ดิจิต*

วิธีทำ

$$\begin{array}{cccccc l}
 & & & 1 & 2 & 2 & \text{ขนาดความยาว 3} \\
 & - & 1 & 2 & 2 & 0 & \\
\hline
 & & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 2 & \text{ขนาดความยาว 4} \\
+ & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \bar{2} & \text{ขนาดความยาว 5} \\
\hline\hline
\end{array}$$

จากตัวอย่างที่ 4.1 และ 4.2 จะพบว่ารูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ที่มีความยาวเท่ากับ 5 นั้น สามารถแสดงได้ออกมาแตกต่างกัน คือ $\bar{1}\bar{2}\bar{1}22$ และ $1110\bar{2}$ นั้น มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากันคือศูนย์ แต่มีรูปแบบที่แตกต่างกัน □

4.2 ค่าความหน่วงเชื่อมตรงที่เพิ่มขึ้น

จากการศึกษารูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์นั้น ค่าน้ำหนักทางเลขคณิตจะมีโอกาสลดลงได้มาขึ้นถ้าค่าความหน่วงเชื่อมตรงมีขนาดใหญ่ขึ้น ในกรณีศึกษาดังต่อไปนี้จะแสดงถึงการลดค่าน้ำหนักที่มีการเพิ่มค่าความหน่วงเชื่อมตรงให้มากขึ้น โดยใช้รูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ให้มีขนาดยาวขึ้น

ประพจน์ที่ 4.1 *กำหนดให้ X Y และ Z เป็นรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ โดย*

$X = x_1x_2x_3...x_n$ เป็นจำนวนนำเข้า ที่ x_i อยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$

$Y = y_1y_2y_3...y_{\delta+1}$ และ $||Y|| = 0$ ที่ y_i อยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$

$X + Y = Z$ โดย $Z = z_1z_2z_3...z_n$ ที่ z_i อยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$

δ = ค่าความหน่วงเชื่อมตรง และเป็นสมาชิกของ $\{0,1,2,3,...\}$ โดยให้ $3 \le n \le \delta$ เมื่อ 3 เป็นจำนวนของดิจิตที่มีขนาดสั้นที่สุดที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์ของระบบจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่อยู่ในชุดตัวเลข$\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ค่าน้ำหนักทางเลขคณิตของการคำนวณแบบเชื่อมตรงจะมีโอกาสลดลงได้มากขึ้นเมื่อค่าความหน่วงเชื่อมตรงถูกกำหนดให้มีขนาดใหญ่ขึ้น เมื่อนำรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับศูนย์หรือ Y โดยที่ $y_{\delta+1} \neq 0$ ไปทำการคำนวณ

พิสูจน์

จากรูปแบบแทนจำนวน Y ที่จะพิจารณาคือ $y_{\delta+1} \neq 0$ จะพบว่ารูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ หรือ ค่า Y ในบทตั้งนี้ $y_{\delta+1}$ จะมีค่าที่เป็นไปได้คือ $\bar{2}$ หรือ 2

การพิสูจน์การลดลงของค่าน้ำหนักสามารถทำได้โดยเริ่มจาก

$X' = x_1x_2x_3...x_\delta$

$Y' = y_1y_2y_3...y_\delta$

$X' + Y' = Z' = z_1z_2z_3...z_\delta$

และ $W(Z') \le W(X')$ แล้ว หลักสุดท้ายจะได้ $x_{\delta+1} + y_{\delta+1} = z_{\delta+1}$ สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 4.1.1 $y_{\delta+1} = 2$

ถ้า $x_{\delta+1} = 0$ หรือ $x_{\delta+1} = 1$ แล้ว $z_{\delta+1}$ จะไม่เป็นสมาชิกของ $\{\bar{1},0,1\}$ และจะมีเพียงกรณีที่ $x_{\delta+1} = \bar{1}$ เท่านั้นที่จะทำให้สามารถทำการคำนวณได้โดย Z ยังคงอยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$

กรณีที่ 4.1.2 $y_{\delta+1} = \bar{2}$

ถ้า $x_{\delta+1} = 0$ หรือ $x_{\delta+1} = \bar{1}$ แล้ว $z_{\delta+1}$ จะไม่เป็นสมาชิกของ $\{\bar{1},0,1\}$ และจะมีเพียงกรณีที่ $x_{\delta+1} = 1$ เท่านั้นที่จะทำให้สามารถทำการคำนวณได้โดย Z ยังคงอยู่ในชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$

จาก 2 กรณีด้านบนจะพบว่าการลดค่าน้ำหนักของ X' สามารถทำได้ และได้ผลลัพธ์เป็น Z' โดย $x_{\delta+1} = \bar{1}$ ในกรณีที่ 4.1.1 และ $x_{\delta+1} = 1$ ในกรณีที่ 4.1.2 ตามลำดับ แต่ถ้าค่าความหน่วงเชื่อมตรงมีขนาดมากขึ้นอีก ก็จะทำให้สามารถลดค่าน้ำหนักได้มากขึ้น กล่าวคือ

กรณีที่ 4.1.2.1 $y_{\delta+1} = 2$

ถ้าเราเพิ่ม δ เป็น $\delta+2$ จะสามารถเปลี่ยน 2 ให้เป็น $1\bar{2}\,\bar{2}$ ได้ จะทำให้กรณีนี้สามารถทำการคำนวณได้ในกรณีที่ $x_{\delta+1} = 0$ หรือ $x_{\delta+1} = \bar{1}$

กรณีที่ 4.1.2.2 $y_{\delta+1} = \bar{2}$

ถ้าเราเพิ่ม δ เป็น $\delta+2$ จะสามารถเปลี่ยน $\bar{2}$ ให้เป็น $\bar{1}22$ ได้ จะทำให้กรณีนี้สามารถทำการคำนวณได้ในกรณีที่ $x_{\delta+1} = 0$ หรือ $x_{\delta+1} = 1$ ■

4.3 ข้อจำกัดของอัลกอริทึมการลดค่าน้ำหนักด้วยค่าความหน่วงเท่ากับสาม

จากการศึกษาพบว่า รูปแบบแทนจำนวนบางรูปแบบยังคงไม่สามารถลดค่าน้ำหนักได้ด้วยวิธีการแบบเชื่อมตรงด้วยค่าความหน่วงเท่ากับสาม กล่าวคือ รูปแบบแทนจำนวนบางรูปแบบต้องการค่าความหน่วงที่มากขึ้นเพื่อที่จะที่จะทำให้มีโอกาสในการลดค่าน้ำหนักที่มากขึ้น ดังนั้น กรณีดังกล่าวจะเป็นกรณีที่เราสามารถสร้างดิจิตที่ต้องการนำออกได้เลย และข้ามไปทำการคำนวณในรอบถัดไป

ประพจน์ที่ 4.2 *กำหนดให้ $Y = y_1y_2y_3y_4$ และ $Z = z_1z_2z_3z_4$ เป็นรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ โดย y_i และ z_i เป็นสมาชิกในชุดตัวเลข $\{\bar{1},0,1\}$ พบว่ามีกรณีศึกษาอย่างน้อย 3 กรณีไม่สามารถลดค่าน้ำหนักของรูปแบบแทนจำนวนในหน้าต่างได้ โดยไม่ต้องมีการคำนวณบวกหรือลบรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับศูนย์ และจะสามารถให้ $z_1 = y_1$*

กรณีที่ 4.2.1 กรณีที่ $y_1 = \overline{y_2}$

กรณีที่ 4.2.2 กรณีที่ $y_1 = y_4$ และ $y_1 \neq y_2$ และ $y_1 \neq 0$ แล้ว

กรณีที่ 4.2.3 กรณีที่ $y_4 = 0$ และ ($y_1 \neq y_2$ และ $y_2 \neq y_3$) ถ้าอยู่ในกรณีนี้แล้วทุกกรณีในบทตั้งที่ 3.1 จะไม่สามารถนำมาใช้ได้โดยให้ z_i ยังคงเป็นสมาชิกของ $\{\bar{1},0,1\}$

พิสูจน์

กรณีที่ 4.2.1 $Z = \mathrm{Diff}(Y,1220,y_i)$ จะพบว่าจะมี Z_i อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$

กรณีที่ 4.2.2 $Z = \mathrm{Diff}(Y,110\bar{2},y_i)$ จะพบว่าจะมี z_1 หรือ z_4 ตัวใดตัวหนึ่งที่ไม่ได้เป็นสมาชิกของ $\{\bar{1},0,1\}$

กรณีที่ 4.2.3 ทุกกรณีในบทตั้งที่ 3.1 จะไม่สามารถนำมาใช้ได้โดยให้ z_i ยังคงเป็นสมาชิกของ $\{\bar{1},0,1\}$ ■

ตัวอย่างที่ 4.3 *กำหนดให้ $X = \bar{1}010\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}$ โดยที่มีค่าน้ำหนักทางเลขคณิตเท่ากับ 7 จงลดค่าน้ำหนักของ X ด้วยอัลกอริทึมแบบเชื่อมตรงที่มีค่าความหน่วงเท่ากับสาม*

วิธีทำ จากอัลกอริทึม การทำงานจะพิจารณาครั้งละสี่ตำแหน่งจากซ้ายไปขวา และแต่ละรอบจะเลื่อนตำแหน่งไปทางขวาหนึ่งตำแหน่งเสมอ การทำงานของอัลกอริทึมสามารถเขียนบรรยายได้ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 การทำงานของอัลกอริทึมการแปลงค่าน้ำหนักของ $X = \bar{1}010\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}$

R0	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R1	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R2	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R3	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R4	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R5	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R6	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R7	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R8	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
R9	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	1	$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$

จากตัวอย่าง 4.3 ด้านบนจะเห็นได้ว่าอัลกอริทึมการลดคาน้ำหนักนั้น ไม่สามารถลดค่าน้ำหนักได้แม้แต่หน่วยเดียว เมื่อ $X = \bar{1}010\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}$ □

รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเท่ากับ 0 นั้นสามารถสามารถแสดงได้หลายรูปแบบ แต่ไม่ว่าจะเพิ่มค่าความหน่วงไปเท่าใด การใช้ค่าความหน่วงที่มากขึ้นก็ยังคงทำให้มีโอกาสที่จะลดค่าน้ำหนักได้มากขึ้น จากตัวอย่างที่ 4.3 เมื่อ $X = \bar{1}010\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}$ จะพบว่าเมื่อเราให้ค่าความหน่วงเป็น 3 แล้ว จากอัลกอริทึมที่นำเสนอจะไม่สามารถลดค่าน้ำหนักได้เลย ในขณะเดียวกันถ้ากำหนดค่าความหน่วงที่มีค่าเท่ากับ 10 หรือก็คือความยาวของจำนวนนำเข้านั้น จะสามารถคิดคำนวณการลดค่าน้ำหนักได้เลยนั้น เราสามารถเขียนรูปแบบแทนจำนวนของศูนย์ได้โดยให้ $0 = 10\bar{1}\bar{1}2\bar{1}\bar{2}1\bar{1}02$ แล้ว เราจะสามารถลดค่าน้ำหนักจาก $\bar{1}010\bar{1}01\bar{1}10\bar{1}$ ซึ่งมีค่าน้ำหนักทางเลขคณิตเท่ากับ 7 ให้เหลือ 5 ได้ในขั้นตอนเดียว คือ $\bar{1}1\bar{1}\bar{1}0001$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & \bar{1} & 1 & 0 & \bar{1} \\
+ & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 2 & \bar{1} & \bar{2} & 1 & \bar{1} & 0 & 2 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

4.4 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอวิธีการสร้างรูปแบบแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับศูนย์โดยการนำรูปแบบการแทนจำนวนเชิงซ้อนของเพนนีย์ที่มีค่าเชิงตัวเลขที่เท่ากับศูนย์มาบวกหรือลบกัน โดยผลลัพธ์ที่ได้จะยังคงมีค่าเชิงตัวเลขที่ไม่เปลี่ยนแปลงแต่มีรูปแบบแทนจำนวนที่เปลี่ยนไป นอกจากนั้น ยังได้นำเสนอการวิเคราะห์ค่าความหน่วงเชื่อมตรงที่มีขนาดเพิ่มขึ้น โดยสามารถสรุปได้ว่าค่าน้ำหนักมีโอกาสลดลงได้มากขึ้นเมื่อกำหนดให้ค่าความหน่วงของอัลกอริทึมสูงขึ้น แต่ในขณะเดียวกัน ไม่ว่าจะเพิ่มค่าความหน่วงเชื่อมตรงเท่าไหร่ ก็จะยังคงมีจำนวนที่ต้องการค่าความหน่วงที่มีขนาดมากขึ้นในการลดค่าน้ำหนักอยู่เสมอ