บทที่ 6

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการแบ่งพื้นที่ภายในโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้วทำการคำนวณผลลัพธ์ที่ไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์ ดังนั้นถ้าใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กมากเท่าไร จุดต่อต่าง ๆ ที่เป็นตัวแทนของตำแหน่งที่จะทำการคำนวณก็จะอยู่ใกล้กันมากขึ้นเท่านั้น ซึ่งจะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น แต่การใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมากตลอดภายในโดเมนของปัญหาจะทำให้ใช้เวลาในการคำนวณหาผลลัพธ์มากหรือบางกรณีอาจไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้ เนื่องจากมีหน่วยความจำคอมพิวเตอร์ไม่เพียงพอ ดังนั้นหากสามารถเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะในบริเวณที่เหมาะสมก็จะทำให้ช่วยลดจำนวนจุดต่อที่ต้องทำการคำนวณลง แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาบางกรณีเป็นการยากที่จะคาดเดาว่าบริเวณใดควรใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กและในบริเวณใดที่ควรใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ จึงต้องอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เหมาะสม โดยในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ (adaptive meshing technique) และขั้นตอนในการนำไปประยุกต์กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น

6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์คือ การนำผลลัพธ์ของปัญหาจากการใช้เอลิเมนต์ที่มีอยู่เดิม นำมาใช้ในการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นมาใหม่ โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์สูงเพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ และใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์ต่ำเพื่อลดหน่วยความจำคอมพิวเตอร์และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ หลักการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ จะอาศัยแนวคิดที่กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์มีค่าเท่ากันตลอดทั้งโดเมน [21] เช่นปัญหาการนำความร้อนแบบหนึ่งมิติ ตัวแปรของปัญหาดังกล่าวก็คืออุณหภูมิหรือจะมองอยู่ในรูปของตัวแปร ϕ สำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไป โดยขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม h ของปัญหาในหนึ่งมิติหาได้ดังนี้

$$h^2 \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right| = \text{constant} \qquad (6.1)$$

เมื่อ h คือ ขนาดความยาวของเอลิเมนต์

สำหรับปัญหาสองมิติ ค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวแปร ϕ นั้นจะมีด้วยกันถึงสามตัว เขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

ก่อนจะนำค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวแปร ϕ ข้างต้นไปใช้จำเป็นต้องจัดรูปเสียใหม่ โดยใช้หลักการที่คล้ายคลึงกับการหาความเค้นหลัก σ_X, σ_Y จากค่าความเค้นย่อย σ_x, σ_y และ τ_{xy} ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง [22]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

หากนำหลักการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวแปร ϕ สำหรับปัญหาสองมิติจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

โดยที่

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2} \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)^2} \tag{6.5}$$

และมุมระหว่างแนวแกนหลัก X-Y กับแนวแกน x-y หาได้จาก

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)}\right) \tag{6.6}$$

การหาอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อจะหาได้จากการนำผลลัพธ์ ϕ ที่มีอยู่เดิมมาใช้ในการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อ จากนั้นจึงนำค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อที่ได้นี้ไปหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อ ดังต่อไปนี้

สมมุติให้ลักษณะการกระจายผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมอยู่ในรูปของ

$$\phi(x,y) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \tag{6.7}$$

เมื่อ N_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \tag{6.8}$$

โดยค่า A, a_i, b_i และ c_i เป็นค่าที่หาได้จากสมการ (3.25-3.26)

ขั้นแรกต้องทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ ซึ่งหาได้จาก

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x}\phi_3 \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y}\phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y}\phi_3 \tag{6.10}$$

แทนสมการ (6.8) ลงไปในสมการ (6.9) และ (6.10) จะได้

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right) \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial\phi_e}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right) \tag{6.12}$$

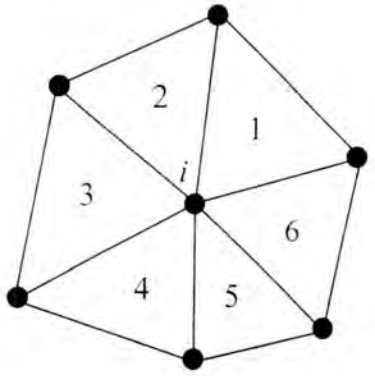
จากนั้นนำค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ที่ได้ไปหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อ โดยค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้น

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial x}}{n} \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{en}}{\partial y}}{n} \tag{6.14}$$

เมื่อ i คือ จุดต่อที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบ n เอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่นการหาค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อ i ดังแสดงในรูปที่ 6.1 หาได้จากค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ทั้ง 6 เอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อ i



$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e6}}{\partial x}}{6}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial \phi_{e6}}{\partial y}}{6}$$

รูปที่ 6.1 ตัวอย่างการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อ i ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบ 6 เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อแล้ว จากนั้นทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2A}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial x}\right) \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2A}\left(c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(c_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + c_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + c_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right) \qquad (6.16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2A}\left(b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + b_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + b_3\frac{\partial \phi_3}{\partial y}\right) \qquad (6.17)$$

โดย $\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x}$

การหาอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อจะใช้หลักการเช่นเดียวกับการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อ นั้นคือ ค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้น

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x^2}}{n} \qquad (6.18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial y^2}}{n} \qquad (6.19)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial x \partial y} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi_{en}}{\partial x \partial y}}{n} \qquad (6.20)$$

เมื่อ i คือ จุดต่อที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบ n เอลิเมนต์

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อทั้งหมดแล้ว จึงนำค่าต่าง ๆ ที่ได้นี้ไปแทนลงในสมการ (6.4) และ (6.5) ทำให้ได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อในแนวแกนหลัก จากนั้นนำค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อในแนวแกนหลักของทุก ๆ จุดต่อมาเปรียบเทียบกันเพื่อหาค่าที่มากที่สุดเพียงค่าเดียว ซึ่งแทนด้วย λ_{max} โดยที่

$$\lambda_{max} = \max\left(\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right|\right) \tag{6.21}$$

ค่า λ_{max} ที่ได้จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ โดยค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่จุดต่อใด ๆ จะอยู่ในรูปของ

$$error = \mathrm{h}^2|\lambda| \tag{6.22}$$

สมการที่ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่จุดต่อมีค่าเท่ากันตลอดทั้งโดเมนคือ

$$\mathrm{h}_{min}^2|\lambda_{max}| = \mathrm{h}_i^2|\lambda_i| \tag{6.23}$$

โดย λ_i คือค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อ i

h_i คือขนาดความยาวของเอลิเมนต์ที่จุดต่อ i

ขนาดความยาวของเอลิเมนต์ใหม่ h_{new} จากเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจึงหาได้จาก

$$\mathrm{h}_{new} = \left(\frac{\mathrm{h}_{min}^2|\lambda_{max}|}{|\lambda_i|}\right)^{1/2} \tag{6.24}$$

ค่า λ_i ในสมการ (6.24) เป็นค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อ i ที่มากที่สุดระหว่างแนวแกนหลัก X และ Y

$$\lambda_i = \max\left(\left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2\phi_i}{\partial Y^2}\right|\right) \tag{6.25}$$

ขนาดความยาวของเอลิเมนต์ใหม่ h_{new} ที่คำนวณได้จะถูกกำหนดให้มีค่าไม่เกินขนาดความของเอลิเมนต์ใหญ่ที่สุดที่ยอมให้ h_{max} หากเกินก็จะถูกปรับให้เท่ากับ h_{max} แทน

ในกรณีที่เป็นปัญหาการหล่อเย็นต้องทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อของไหล เพื่อนำมาใช้ในสมการ (6.21) และ (6.25) ค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อของไหลสามารถหาได้โดยใช้หลักการเช่นเดียวกับการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อของแข็งดังนี้

สมมุติให้ลักษณะการกระจายผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์อยู่ในรูปของ

$$\phi(z) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 \tag{6.26}$$

เมื่อ N_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$$N_1 = 1 - \frac{z}{L} \tag{6.27}$$

$$N_2 = \frac{z}{L} \tag{6.28}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์หาได้จาก

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial z} = \frac{\partial N_1}{\partial z}\phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z}\phi_2 \tag{6.29}$$

แทนสมการ (6.27) และ (6.28) ลงไปในสมการ (6.29) จะได้

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial z} = \frac{1}{L}\left(\phi_2 - \phi_1\right) \tag{6.30}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้น

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi_{e1}}{\partial z} + \frac{\partial \phi_{e2}}{\partial z}\right) \tag{6.31}$$

เมื่อ i คือ จุดต่อร่วมระหว่างเอลิเมนต์ e_1 และ e_2

เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่จุดต่อแล้ว จากนั้นทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi_e}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{L}(\phi_2 - \phi_1)\right)$$

$$= \frac{1}{L}\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right) \tag{6.32}$$

ค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อจะมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าอนุพันธ์อันดับสองของเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อนั้น

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi_{e1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi_{e2}}{\partial z^2}\right) \tag{6.33}$$

เมื่อ i คือ จุดต่อร่วมระหว่างเอลิเมนต์ e_1 และ e_2

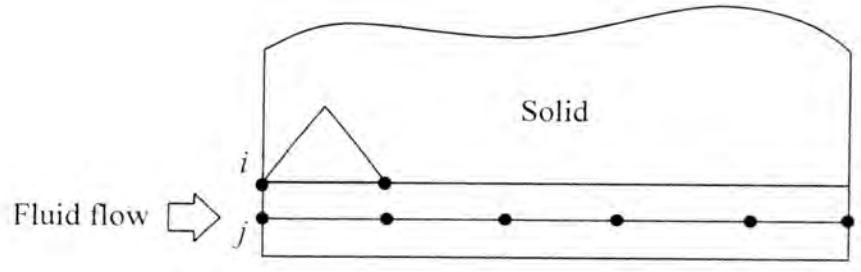
ดังนั้น $\lambda_{\max}$ ในสมการ (6.21) ในกรณีที่เป็นปัญหาการหล่อเย็นจึงกลายเป็น

$$\lambda_{\max} = \max\left(\left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right|\right) \tag{6.34}$$

และ λ_i ในสมการ (6.25) เมื่อจุดต่อนั้นอยู่บนเอลิเมนต์ของแข็งในด้านที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อนกับของไหลจึงกลายเป็น

$$\lambda_i = \max\left(\left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2}\right|\right) \tag{6.35}$$

เมื่อ j คือ จุดต่อของไหลที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อนกับจุดต่อของแข็ง i ดังแสดงในรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 ตัวอย่างจุดต่อของแข็ง i กับจุดต่อของไหล j

6.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

จากหลักการเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้ถูกนำมาประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า Adaptive รายละเอียดของโปรแกรมดังกล่าวได้ถูกอธิบายโดยละเอียดดังนี้

6.2.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ Adaptive ภายในประกอบไปด้วยโปรแกรมย่อย (subroutine) ต่าง ๆ โดยมีรายละเอียดและขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

6.2.1.1 อ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้า (input file) ด้วยโปรแกรมย่อย (read_input) ซึ่งประกอบไปด้วย

- ข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์เล็กที่สุด h_{min} และขนาดของเอลิเมนต์ใหญ่ที่สุด h_{max}
- ข้อมูลของเอลิเมนต์ของไหลและจุดต่อของเอลิเมนต์ของแข็งในด้านที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อนได้แก่ จำนวนเอลิเมนต์ ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์และจุดต่อบนเอลิเมนต์นั้น ๆ
- ข้อมูลของจุดต่อ ได้แก่ หมายเลขของจุดต่อ พิกัดของจุดต่อและค่าอุณหภูมิบนจุดต่อนั้น ๆ

6.2.1.2 คำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อของแข็งด้วยโปรแกรมย่อย (DS)

6.2.1.3 คำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อของไหลด้วยโปรแกรมย่อย (DF)

6.2.1.4 สำหรับเอลิเมนต์ของแข็งที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อนกับของไหล ค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อของแข็งและของไหลจะถูกนำมาเปรียบเทียบกัน หากค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อของแข็งมีค่าน้อยกว่าก็จะถูกแทนด้วยค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อของไหลที่มีค่ามากกว่า ด้วยโปรแกรมย่อย (DS_F)

6.2.1.5 คำนวณหา h_{min} ด้วยโปรแกรมย่อย (cal_hmin)

6.2.1.6 พิมพ์ h_{min} ที่คำนวณได้ลงในไฟล์ผลลัพธ์ด้วยโปรแกรมย่อย (printout)

ลำดับขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมสามารถสรุปได้โดยใช้แผนภูมิการทำงาน (flow chart) ดังแสดงในรูปที่ 6.3

6.2.2 รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

รายละเอียดต่าง ๆ ของโปแกรม Adaptive ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ค

6.2.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรม Adaptive ประกอบไปด้วย 4 ส่วนย่อย ดังต่อไปนี้

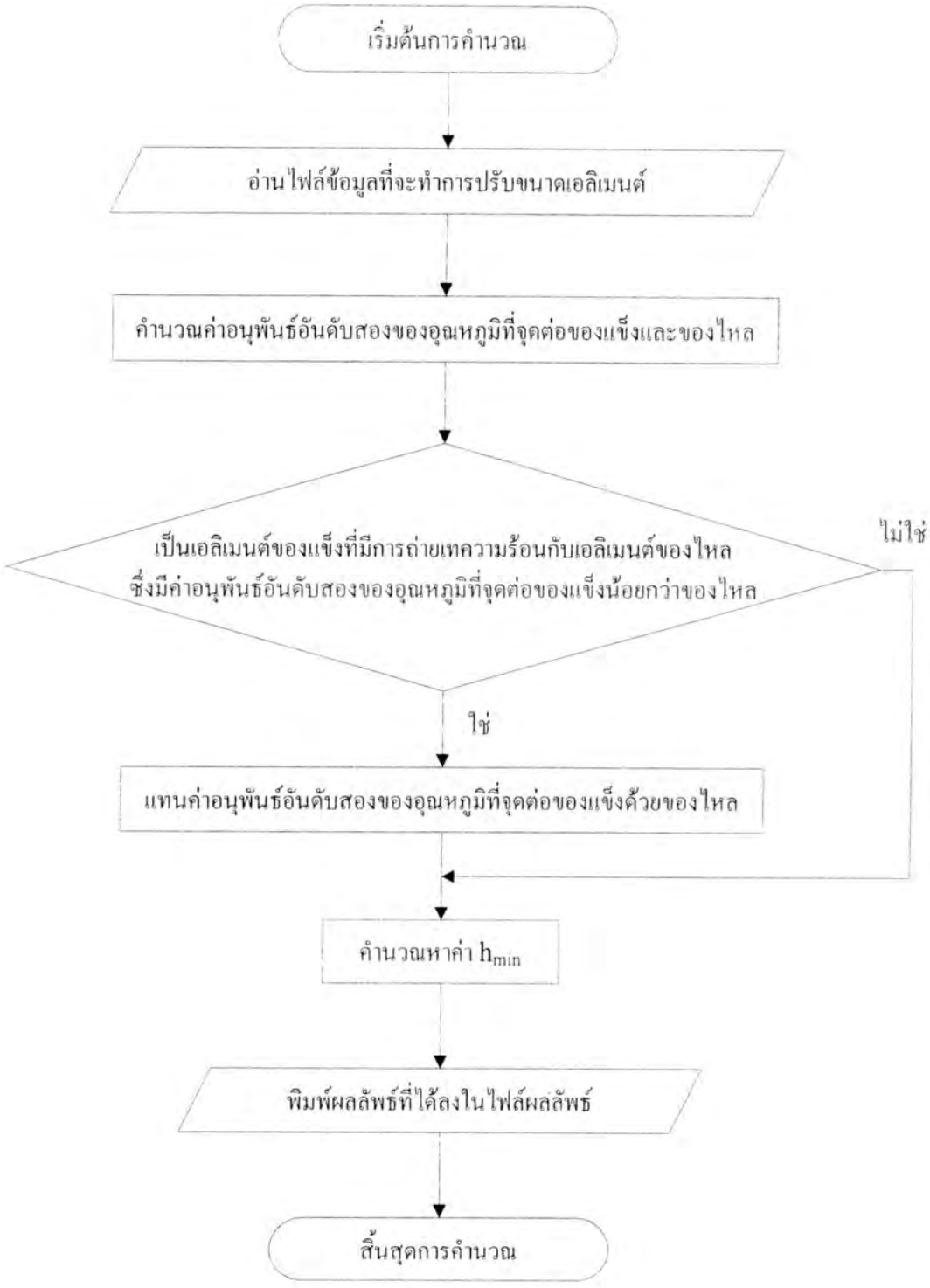
ส่วนที่ 1 ข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์เล็กที่สุดและใหญ่ที่สุด

บรรทัดแรก	คำอธิบายข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์เล็กที่สุดและใหญ่ที่สุด
บรรทัดที่ 2	ตัวเลขขนาดของเอลิเมนต์เล็กที่สุดและใหญ่ที่สุด

ตัวอย่างเช่น:	hmin	hmax
	0.001	0.02

ส่วนที่ 2 ข้อมูลของเอลิเมนต์ของแข็ง

บรรทัดแรก	คำอธิบายชุดข้อมูลของเอลิเมนต์ของแข็ง
บรรทัดที่ 2	คำระบุจำนวนเอลิเมนต์
บรรทัดที่ 3	ตัวเลขแสดงจำนวนเอลิเมนต์
บรรทัดที่ 4	คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์
บรรทัดต่อ ๆ ไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสามในทิศทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น ๆ



รูปที่ 6.3 แผนผังการทำงานการทำงานของโปรแกรม Adaptive

ตัวอย่างเช่น:

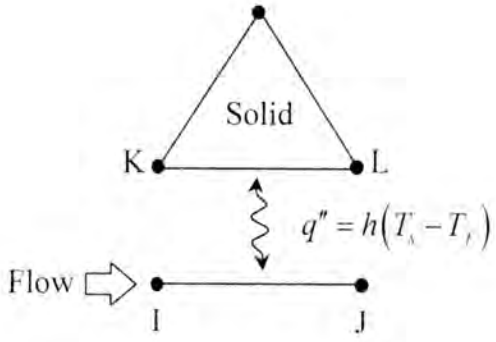
```
----------Solid data----------
neleS
416
ID      I       J       K
1       59      58      130
2       2       1       129
.       .       .       .
.       .       .       .
.       .       .       .
415     241     124     273
416     268     241     273
```

ส่วนที่ 3 ข้อมูลของเอลิเมนต์ของไหลและจุดต่อของเอลิเมนต์ของแข็งในด้านที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อน

บรรทัดแรก	คำอธิบายชุดข้อมูลของเอลิเมนต์ของไหลและจุดต่อของเอลิเมนต์ของแข็งในด้านที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อน
บรรทัดที่ 2	คำระบุจำนวนเอลิเมนต์
บรรทัดที่ 3	ตัวเลขแสดงจำนวนเอลิเมนต์
บรรทัดที่ 4	คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์
บรรทัดต่อ ๆ ไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสองที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น ๆ และจุดต่อของเอลิเมนต์ของแข็งในด้านที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อน ดังแสดงในรูปที่ 6.4

ตัวอย่างเช่น:

```
----------Fluid data----------
neleF
58
ID      I       J       K       L
1       274     275     126     57
2       275     276     57      56
.       .       .       .       .
.       .       .       .       .
.       .       .       .       .
57      330     331     2       1
58      331     332     1       59
```



รูปที่ 6.4 ลักษณะการวางตัวของจุดต่อระหว่างเอลิเมนต์ของของไหล
และของแข็งที่มีการถ่ายเทความร้อนด้วยการพาความร้อน

ส่วนที่ 4 ข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดแรก	คำอธิบายชุดข้อมูลของจุดต่อ
บรรทัดที่ 2	คำระบุจำนวนจุดต่อ
บรรทัดที่ 3	ตัวเลขแสดงจำนวนจุดต่อ
บรรทัดที่ 4	คำระบุลักษณะของจุดต่อ
บรรทัดต่อ ๆ ไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ ตำแหน่งจุดต่อในแกน x และ y เงื่อนไขขอบเขตของอุณหภูมิและค่าอุณหภูมิ

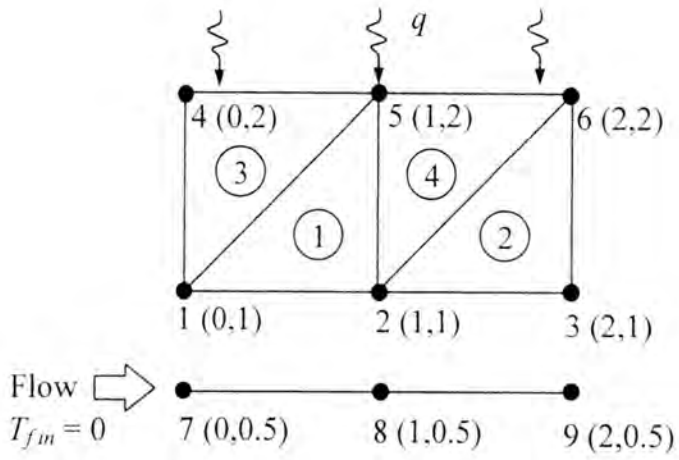
ตัวอย่างเช่น:

----------Node data----------

npoin
332

ID	x	y	T
1	9.8000E-01	0.0000E+00	1.5426E+01
2	9.6000E-01	0.0000E+00	1.5426E+01
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
331	9.8000E-01	0.0000E+00	1.5425E+01
332	1.0000E+00	0.0000E+00	1.5425E+01

เพื่อเป็นการทำความเข้าใจวิธีการสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น ดังนั้นจะแสดงการสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าจากตัวอย่างง่าย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.5 ซึ่งเป็นปัญหาแผ่นโลหะที่ได้รับฟลักซ์ความร้อนตลอดขอบบนและที่ขอบด้านล่างมีของไหลไหลผ่านเพื่อระบายความร้อน



รูปที่ 6.5 ตัวอย่างปัญหาในการสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าของโปรแกรม Adaptive

```
2
Adaptive mesh for
convectively-cooled solid
hmin    hmax
0.5     1.0
------------------------------Solid data------------------------------
neleS
4
ID      I       J       K
1       1       2       5
2       2       3       6
3       5       4       1
4       6       5       2
------------------------------Fluid data------------------------------
neleF
2
ID      I       J       K       L
1       7       8       1       2
2       8       9       2       3
------------------------------Node data-------------------------------
npoin
9
ID      x       y       T
1       0.0     1.0     1.4600E+00
2       1.0     1.0     1.6903E+00
3       2.0     1.0     1.8330E+00
4       0.0     2.0     2.6044E+00
5       1.0     2.0     2.6703E+00
6       2.0     2.0     2.7362E+00
7       0.0     0.5     0.0000E+00
8       1.0     0.5     7.4066E-01
9       2.0     0.5     1.0428E+00
```

รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลออก (h_new.txt) สำหรับปัญหาดังคือ

maximum second derivertive T	0.219260E+00
minimum second derivertive T	0.000000E+00
mean second derivertive T	0.195002E+00
Node h_min	9

Node	h_min
1	0.14600261E+01
2	0.16903459E+01
3	0.18329650E+01
4	0.26044100E+01
5	0.26702903E+01
6	0.27361706E+01
7	0.00000000E+00
8	0.74065644E+00
9	0.10428091E+01

6.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการสร้างเอลิเมนต์

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำโปรแกรม FEMESH มาช่วยในการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้จากการคำนวณขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมด้วยโปรแกรม Adaptive โดยโปรแกรม FEMESH นี้ได้พัฒนาขึ้นโดย สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพาณิช [23] เป็นโปรแกรมที่ทำงานในโหมดกราฟิก สามารถที่จะสร้างรูปแบบของปัญหาและสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยมได้ทันที และยังสามารถส่งต่อข้อมูลให้กับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ เพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาได้ในหลายรูปแบบ รวมถึงการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบกราฟิกได้ด้วย โดยประสิทธิภาพและความถูกต้องของโปรแกรม FEMESH ได้ถูกตรวจสอบและแสดงไว้ในเอกสารอ้างอิง [8]

ภาพโดยรวมของโครงสร้างการทำงานของโปรแกรม FEMESH สามารถที่จะแบ่งออกได้เป็นสามส่วนหลัก ๆ ดังนี้

1. ส่วนทำงานก่อนการประมวลผล (Pre-processing) เป็นส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการสร้างรูปร่างของปัญหาต่าง ๆ เช่น การวาดเส้นตรง หรือเส้นโค้ง การสร้างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม หรือการกำหนดเงื่อนไขที่ขอบ (boundary constraint) เป็นต้น งานหลักของส่วนทำงานก่อนการประมวลผลคือ การทำงานด้านคอมพิวเตอร์ช่วยการออกแบบ (CAD) ซึ่งประกอบด้วยคำสั่งต่าง ๆ มากมายที่ช่วยในการสร้างรูปทรงเรขาคณิต
2. ส่วนการประมวลผล (Processing) ซึ่งหมายถึง ส่วนของโปรแกรมที่ทำการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับปัญหาต่างๆ

3. ส่วนทำงานหลังการประมวลผล (Post-processing) เป็นส่วนของโปรแกรมที่ช่วยในการแสดงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบกราฟิก เช่น การแสดงเส้นชั้น (contour) หรือการแสดงเวกเตอร์ของความเร็ว (velocity vector) เป็นต้น

6.4 การประยุกต์โปรแกรม Nodeless FE กับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ขั้นตอนการประยุกต์โปรแกรม Nodeless FE กับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ เริ่มจากนำผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์เริ่มต้นด้วยโปรแกรม Nodeless FE มาใช้เป็นข้อมูลสำหรับการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมด้วยโปรแกรม Adaptive เมื่อได้ขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมแล้วจึงนำผลลัพธ์ที่ได้นี้ไปสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม FEMESH ขั้นตอนดังกล่าวสามารถอธิบายได้ด้วยแผนภูมิการทำงาน ดังแสดงในรูปที่ 6.6 ซึ่งมีรายละเอียดโดยสรุปดังต่อไปนี้

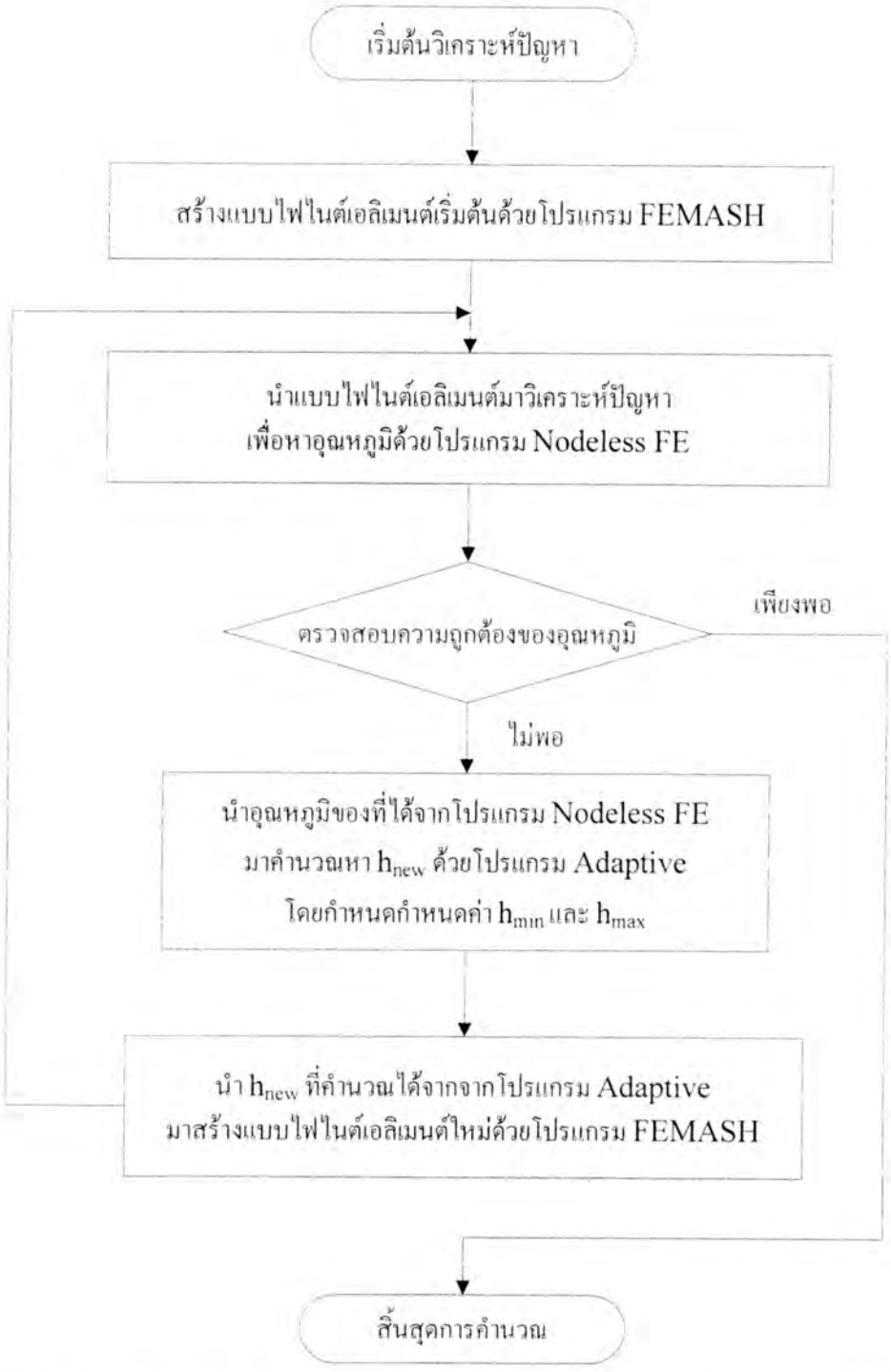
6.4.1 สร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม FEMESH

6.4.2 นำแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม FEMESH ไปทำการคำนวณหาอุณหภูมิจากโปรแกรม Nodeless FE

6.4.3 นำอุณหภูมิที่คำนวณได้จากข้อ 6.4.2 เข้าโปรแกรม Adaptive เพื่อคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยในขั้นตอนนี้ต้องกำหนดค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่มากที่สุด h_{max} และค่าความยาวของเอลิเมนต์ที่น้อยที่สุด h_{min} ทำให้ได้ขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม h_{new} โดยเอลิเมนต์ขนาดเล็กจะวางตัวอยู่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของอุณหภูมิสูงและเอลิเมนต์ขนาดใหญ่วางตัวในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของอุณหภูมิต่ำ

6.4.4 นำขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม h_{new} ที่คำนวณได้จากข้อ 6.4.3 เข้าโปรแกรม FEMESH เพื่อสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ใหม่ขึ้นมา

6.4.5 ทำซ้ำขั้นตอนที่ 6.4.2 ถึง 6.4.4 จนกระทั่งอุณหภูมิที่คำนวณได้ไม่เปลี่ยนแปลงหรือเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย



รูปที่ 6.6 แผนผังการทำงานของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

6.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกล่าวคือ การกำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์มีค่าเท่ากันตลอดทั้งโดเมน ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น เนื่องจากเอลิเมนต์ขนาดเล็กได้ถูกสร้างขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์สูง ในขณะเดียวกันยังช่วยลดการใช้หน่วยความจำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเนื่องจากเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ได้ถูกสร้างขึ้นในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์ต่ำ จำนวนจุดต่อที่แทนตำแหน่งผลลัพธ์ที่ต้องคำนวณจึงลดลง จากหลักการดังกล่าวได้ถูกนำมาประดิษฐ์โปรแกรม Adaptive เพื่อคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมพร้อมอธิบายถึงขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า รวมถึงแสดงปัญหาตัวอย่างในการสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าและรายละเอียดของไฟล์ข้อมูลออก ขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ที่ได้นี้จะถูกนำไปใช้ในการสร้างแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม FEMESH ในส่วนสุดท้ายของบทนี้ได้อธิบายขั้นตอนทั้งหมดในการใช้โปรแกรมต่าง ๆ เข้าด้วยกันและในบทถัดไปจะแสดงประสิทธิภาพของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาต่าง ๆ