

บทที่ 5

การผสมผสานสนามแรงแบบใหม่

จากผลการทดลองการจำลองสถานการณ์การจัดวัตต์ด้วยสนามแรงทั้งสามแบบในบทที่ผ่านมา พบว่า สนามแรงแต่ละรูปแบบ ต่างก็มีข้อดีและข้อด้อยในแต่ละด้านแตกต่างกันไป โดยสนามแรงที่มีข้อเด่นในเรื่องของ configuration ที่เป็นไปได้ที่วัตต์จะหยุดที่ภาวะสมดุลอย่าง Unit Radial, Radial & Constant Field นั้น กลับมีข้อด้อยอย่างรุนแรงในเรื่องของเวลาที่ใช้จัดวัตต์เข้าสู่ภาวะสมดุลที่นานเกินไป ในขณะที่สนามแรงที่ใช้เวลาน้อยกว่ามากอย่าง Elliptic Field ก็มีข้อด้อยเรื่อง configuration ที่เป็นไปได้ที่วัตต์จะหยุดที่ภาวะสมดุลที่มีมากกว่า 1 รูปแบบ (กล่าวให้ชัดเจนคือ 2 รูปแบบ) เป็นต้น

อนึ่ง การที่จะออกแบบสนามแรงรูปแบบใหม่แบบที่เป็นสนามแรงชุดเดียว แล้วจะให้มีประสิทธิภาพดีขึ้นในทุกๆ ด้านนั้น ก็เป็นเรื่องที่ยาก แนวทางที่น่าจะเหมาะสมกว่าที่จะพัฒนาให้ได้สนามแรงที่มีคุณสมบัติดีขึ้น คือ การผสมผสานการใช้งานสนามแรงที่มีอยู่แล้วหลายๆ ชุด โดยใช้วิธีการวิเคราะห์และเลือกใช้อย่างเหมาะสม เพื่อดึงข้อเด่นและลดข้อด้อยของสนามแรงแต่ละชุด และให้ได้ผลลัพธ์การจัดวัตต์ที่ดีขึ้นกว่าการใช้สนามแรงชุดเดียวที่มีอยู่เดิมทั้งหมด ทั้งนี้ การออกแบบและใช้งานสนามแรงหลายๆ ชุดแบบใหม่ดังกล่าว จะต้องได้คุณสมบัติดังต่อไปนี้ คือ :

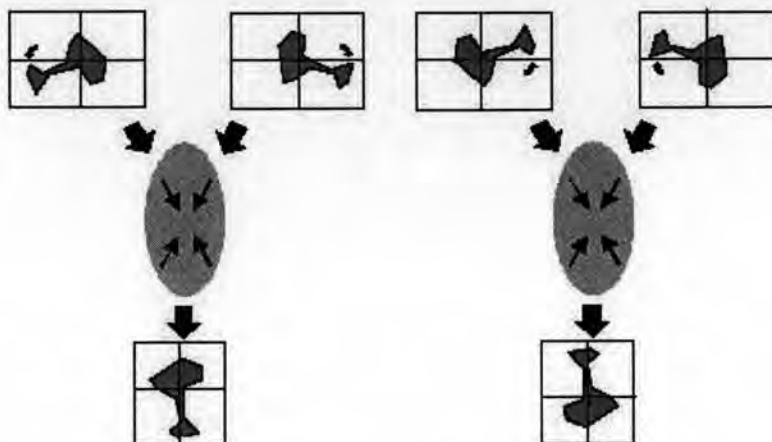
- configuration ที่เป็นไปได้ของวัตต์ที่ภาวะสมดุล จะต้องมียุติรูปแบบเดียว และสามารถทำนายได้ล่วงหน้า เทียบเท่ากับในกรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field
- เวลาที่ใช้จัดวัตต์นับจากเริ่มต้นจนวัตต์หยุดที่ภาวะสมดุล จะต้องเร็วกว่ากรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field
- ตลอดการทำงานของ การจัดวัตต์ จะต้องไม่มีการไปตรวจจับ configuration ของวัตต์ระหว่างการทำงาน เพื่อเป็นข้อมูลป้อนกลับให้กับการจัดวัตต์โดยเด็ดขาด เทียบได้กับการจัดวัตต์ด้วยสนามแรงแบบชุดเดียวทั่วไป

ในบทนี้ จะได้นำเสนอการออกแบบการใช้สนามแรงหลายๆ ชุดมาประกอบกันเพื่อจัดวัตต์ โดยยังสามารถถ่วงคุณสมบัติข้างต้นไว้ได้ทั้งหมด โดยเริ่มจากแนวคิดในการเลือกสนามแรงที่จะนำมาใช้ ตลอดจนการวิเคราะห์การทำงานของสนามแรงใน แต่ละขั้นตอนจนสมบูรณ์

5.1 Algorithm การออกแบบการจัดวัตต์ด้วยสนามแรงหลายชุดเบื้องต้น

สนามแรงที่น่าสนใจชุดหนึ่งที่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ประกอบคือ Elliptic Field ซึ่งจากผลการทดลองในบทที่แล้วจะพบว่ามีข้อดีอยู่หลายจุด ทั้งในเรื่องของเวลาที่ใช้ในการจัดวัตต์จนหยุดนิ่งที่ภาวะสมดุลที่น้อยกว่ากรณีของ Unit Radial, Radial & Constant Field หลายเท่าตัว ตลอดจน configuration ที่เป็นไปได้ของวัตต์ที่ภาวะสมดุล ซึ่งสามารถทำนายได้ล่วงหน้า แม้ว่าจะเป็นไปได้ 2 configurations โดยไม่อาจบอกได้ว่าจะเป็น configuration ไດ แต่โดยคุณสมบัติที่ว่า ทั้ง 2 configurations นั้น จุดศูนย์กลางมวลของวัตต์จะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของ Elliptic Field และทิศทางของทั้ง 2 configurations จะต่างกับอยู่ π เสมอ และจากการทดลองก็พบอีกว่า ทิศทางที่วัตต์หยุดที่ภาวะสมดุลนั้น มีความสัมพันธ์กับทิศทางเริ่มต้นของวัตต์ โดย

วัตถุจะเข้าสู่สมดุลที่ configuration ที่มีทิศทางใกล้เคียงกับทิศทางที่ configuration เริ่มต้นมากกว่า ซึ่งถ้าความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นจริงในกรณีทั่วไปแล้ว (ซึ่งจะได้วิเคราะห์ในหัวข้อ 5.2 ต่อไป) ถ้าเราสามารถหาวิธีที่ใช้สนามแรงชุดอื่นจัดวัตถุมาก่อน แล้วสามารถรับประกันได้ว่า ก่อนจะใช้ Elliptic Field จัดวัตถุในขั้นตอนถัดไป ทิศทางของ configuration ของวัตถุในขณะนั้น ต่างกับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางหนึ่งเพียงทิศทางเดียวน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ เสมอแล้ว (ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.1) ผลจากการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field นั้น ก็จะได้ configuration ที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลเพียง configuration เดียวในทันที หนึ่ง



รูปที่ 5.1: ผลการจัดวัตถุภายใต้ Elliptic Field ที่ทิศทางเริ่มต้นใกล้เคียงกับทิศทางที่ภาวะสมดุลด้านใดด้านหนึ่ง ด้วยผลจากสนามแรงชุดอื่น

การจะจัดวัตถุให้ได้ทิศทางของ configuration ของวัตถุก่อนใช้ Elliptic Field จัดต่อตามที่กล่าวไปข้างต้นนั้น อาจจะแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนย่อย คือ

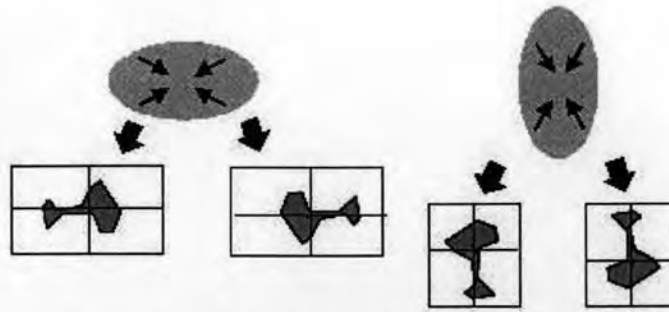
1. จัดวัตถุด้วยสนามแรงบางชุด ที่ทำให้ทิศทางของ configuration ของวัตถุที่ได้หลังการจัด อยู่กึ่งกลางระหว่างทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ในขั้นตอนท้ายสุด (นั่นคือห่างจากทิศทางทั้งสองอยู่ $\frac{\pi}{2}$ เท่ากันพอดี)
2. ใช้สนามแรงบางชุด หมุน วัตถุให้ทิศทางของวัตถุโน้มไปทางทิศทางหนึ่งในสองทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ในขั้นตอนท้ายสุดเพียงทิศทางเดียว

ซึ่งสำหรับขั้นตอนย่อยขั้นแรกนั้น ก็สามารถทำได้โดยใช้ Elliptic Field ชุดเดียวกันกับที่จะใช้ในขั้นตอนท้ายสุด เพียงแต่เปลี่ยนมุมของระนาบสนามแรงจากเดิมไป $\frac{\pi}{2}$ ซึ่งจะทำให้ทิศทางของ configuration ของวัตถุที่ภาวะสมดุลของ Elliptic Field ในขั้นแรกกับในขั้นท้ายสุด ทำมุมต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ พอดี ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.2

แนวคิดทั้งหมดข้างต้นนี้ สามารถอธิบายออกมาด้วย algorithm ดังนี้ (ดูรูปที่ 5.3 ประกอบ)

จุดที่สำคัญของ algorithm นี้ ซึ่งจำเป็นจะต้องทำการวิเคราะห์ให้ได้ คือ

- ความสัมพันธ์ของทิศทางที่ configuration เริ่มต้นกับ configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุภายใต้ Elliptic Field ในกรณีทั่วไป (สำหรับ Step3)



รูปที่ 5.2: ตัวอย่างทิศทางที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field สองชุดที่มีทิศทางตั้งฉากกัน

Algorithm 3 FieldCombination($t_1, t_2, Elliptic_1, FF_2, Elliptic_2$)

Require: t_1 : Cut-off time for Step1

Require: t_2 : Cut-off time for Step2

Require: $Elliptic_1$: Elliptic field configuration for Step1

Require: FF_2 : "Some" force field configuration for Step2

Require: $Elliptic_2$: Elliptic field configuration for Step3 (Must be orthogonal with $Elliptic_1$)

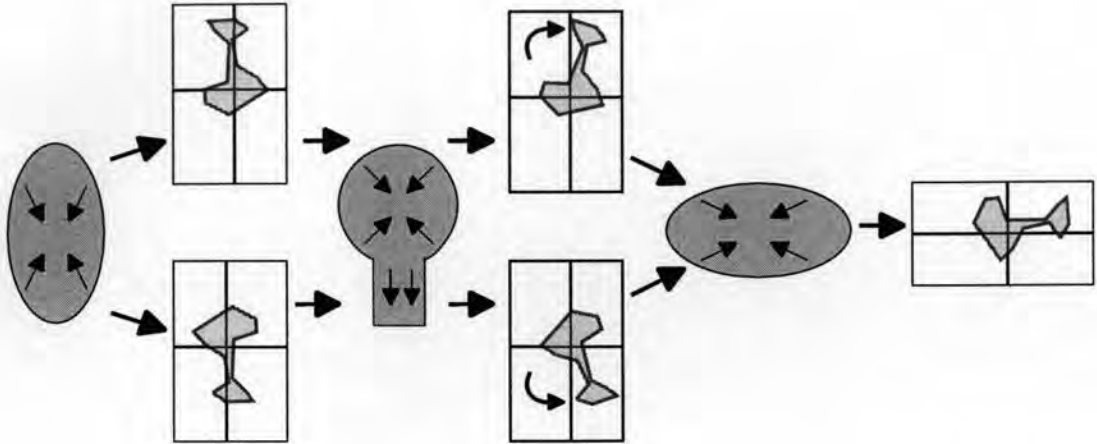
```

1:  $t = 0$ ;
2: {STEP 1}
3: {Loop for Step1}
4: while  $t < t_1$  do
5:   Execute Field  $Elliptic_1$  on the plane;
6: end while
7:
8: {STEP 2}
9: {Loop for Step2, start from  $t \geq t_1$ }
10: while  $t < (t_1 + t_2)$  do
11:   Execute Field  $FF_2$  on the plane;
12: end while
13:
14: {STEP 3}
15: {Loop for Step3 (Last step), start from  $t \geq (t_1 + t_2)$ }
16: while  $t \geq (t_1 + t_2)$  do
17:   Execute Field  $Elliptic_2$  on the plane;
18: end while

```

- การหาค่าเวลา t_1 ที่รับประกันว่า วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ใน Step1 แล้ว ไม่ว่าจะ วัตถุจะมี configuration เริ่มต้นเป็นอย่างไรก็ตาม
- การเลือกสนามแรงที่จะใช้ใน Step2
- การหาค่าเวลา t_2 ที่รับประกันว่า วัตถุภายใต้การทำงานของสนามแรงใน Step2 วัตถุ หมุน โน้มไป ในทิศทางเดียวแล้ว

ซึ่งเรื่องต่างๆ เหล่านี้ จะได้นำเสนอตามลำดับในหัวข้อถัดๆ ไป



รูปที่ 5.3: การจัดวัตถุด้วยสนามแรง 3 ขั้นตอน ตาม algorithm 3

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางที่ configuration เริ่มต้น กับ configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุ ภายใต้ Elliptic Field

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า จากผลการทดลองในบทที่ผ่านมา พบว่า ทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field นั้น ขึ้นอยู่กับทิศทางของ configuration เริ่มต้นของวัตถุ โดยถ้าทิศทางของ configuration เริ่มต้น ต่างจากทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางใดน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ แล้ว วัตถุจะเข้าสู่ภาวะสมดุลที่ configuration นั้น

อย่างไรก็ตาม การจะพิสูจน์ว่าคุณสมบัติที่ได้จากการทดลองดังกล่าวนี้ จะเป็นจริงในกรณีทั่วไปหรือไม่ จำเป็นจะต้องวิเคราะห์จากทอริกัลพีธเนื่องจาก Elliptic Field ว่ามีความสัมพันธ์กับทิศทางของ configuration ของวัตถุเทียบกับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุลอย่างไร

เราสามารถหาทอริกัลพีธได้ตามสมการ (2.7) ดังนั้น ทอริกัลพีธเนื่องจาก Elliptic Field เมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration (x_c, y_c, θ) จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}(x_c, y_c, \theta) &= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX dY & (5.1) \\
 &= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} -\xi X_\theta \\ -\eta Y_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\xi x_c \\ -\eta y_c \end{bmatrix} \right) dX dY \\
 &= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\xi X_\theta \\ -\eta Y_\theta \end{bmatrix} dX dY - \eta y_c \int_P \int (X_\theta) dX dY + \xi x_c \int_P \int (Y_\theta) dX dY
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(\int_P \int (X_\theta) dX dY, \int_P \int (Y_\theta) dX dY)$ ก็คือตำแหน่งของศูนย์กลางมวลของวัตถุในระนาบของวัตถุ ซึ่งก็คือ $(0, 0)$ ทำให้ 2 พจน์หลังทางขวามือในสมการ (5.1) มีค่าเป็น 0 และสำหรับพจน์สุดท้ายที่เหลืออยู่นั้น ก็จะเห็นว่า ค่าของ x_c และ y_c ไม่ได้มีส่วนเกี่ยวข้องเลย สอดคล้องกับที่ Luntz et al.

นำเสนอใน [15] ที่ว่า ทอริกัลฟิลด์เนื่องจาก Quadratic Field ใดๆ (Elliptic field ก็จัดเป็น Quadratic Field ประเภทหนึ่งตามนิยามใน [15] เช่นกัน) ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของวัตถุบนสนามแรง ดังนั้น ถ้าให้ $T_E^*(\theta)$ แทนขนาดของ $T(x, y, \theta)$ เมื่อ x, y มีค่าใดๆ แล้ว โดยการกระจายพจน์สุดท้ายที่เหยื่ออยู่ของสมการ (5.1) ด้วยการแทนค่า X_θ, Y_θ จากสมการ (2.1) ลงไปและจัดรูปใหม่ ก็จะได้ว่า

$$T_E^*(\theta) = (\xi - \eta) \left[\left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) (s_{20} - s_{02}) + (\cos 2\theta) s_{11} \right] \quad (5.2)$$

โดยที่

$$s_{ij} = \int_P \int (X^i Y^j) dX dY \quad (5.3)$$

ทั้งนี้ พจน์ทางขวาสุดของ (5.2) เปรียบได้กับ dot product ของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ คือ

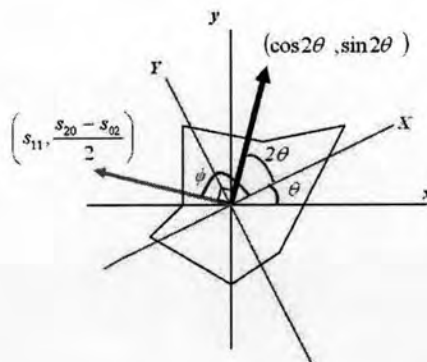
$$\begin{bmatrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งเป็น

$$\left(\frac{\sin 2\theta}{2} \right) (s_{20} - s_{02}) + (\cos 2\theta) s_{11} = \left\| \begin{bmatrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{bmatrix} \right\| \left\| \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} \right\| \cos \varphi(\theta) \quad (5.4)$$

โดยที่ $\varphi(\theta)$ เป็นมุมระหว่าง 2 เวกเตอร์นั้น ถ้ากำหนดให้ ϕ เป็นมุมที่ เวกเตอร์ $(s_{11}, \frac{s_{20}-s_{02}}{2})$ ทำกับแกนของระนาบวัตถุ (ซึ่งมีค่าคงที่สำหรับแต่ละวัตถุ) ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.4 ซึ่งจากรูป เราจะได้ว่า

$$\varphi(\theta) = \phi - 2\theta \quad (5.5)$$

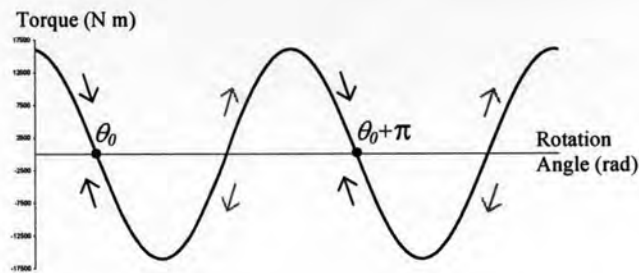


รูปที่ 5.4: ตัวอย่างการหาค่า $\varphi(\theta)$ ของวัตถุที่ configuration (x_c, y_c, θ)

แทนค่าจากสมการ (5.4), (5.5) ลงในสมการ (5.2) และเนื่องจาก $\| \cos 2\theta, \sin 2\theta \| = 1$ ซึ่งจะได้ว่า

$$T_E^*(\theta) = (\xi - \eta) \left\| \begin{bmatrix} s_{11} \\ \frac{s_{20}-s_{02}}{2} \end{bmatrix} \right\| \cos(\phi - 2\theta) \quad (5.6)$$

จากสมการ (5.6) เราสามารถเขียนกราฟของ $T^*(\theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ ได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.5 ซึ่ง จะเห็นว่า เมื่อ $\theta \in (0, 2\pi)$ มีค่า θ อยู่ 4 ค่าที่ให้ทอร์กัลฟ์เป็นศูนย์ สอดคล้องกับกรณีที่วัตถุมีสมมาตร ไม่เกิน 1 สมมาตรใน [9] ซึ่งจะทำให้ค่าของ $\|s_{11}, \frac{s_{20}-s_{02}}{2}\|$ ไม่เป็น 0 ทั้งนี้ มีอยู่ 2 ค่าที่เป็นทิศทางของ configuration ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลอย่างมีเสถียรภาพ ซึ่งจากในรูปก็คือ θ_0 และ $\theta_0 + \pi$ ส่วนใน ทิศทางอื่นๆ นั้น จากกราฟจะเห็นว่า ถ้า $\theta \in (\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{\pi}{2})$ แล้ว ทอร์กัลฟ์ที่ได้จะมีทิศทางโน้มเข้าหาทิศทาง θ_0 เสมอ (ทอร์กัลฟ์เป็นลบ = หมุนตามเข็มนาฬิกา, ทอร์กัลฟ์เป็นบวก = หมุนทวนเข็มนาฬิกา) เช่นเดียวกับกรณีที่ $\theta \in (\theta_0 + \frac{\pi}{2}, \theta_0 + \frac{3\pi}{2})$ ที่ทอร์กัลฟ์จะมีทิศทางโน้มเข้าหาทิศทาง $\theta_0 + \pi$ เช่นกัน



รูปที่ 5.5: ตัวอย่างกราฟของทอร์กัลฟ์สำหรับวัตถุใดๆ ภายใต้ Elliptic Field

ดังนั้น จากผลการวิเคราะห์ที่ได้นี้ ทอร์กัลฟ์เนื่องจาก Elliptic Field จะทำให้วัตถุหมุนโน้มไปยัง ทิศทางของ Configuration ที่ภาวะสมดุลที่มีค่าใกล้เคียงกับทิศทางของ Configuration เริ่มต้นกว่าเสมอ ดังนั้น ถ้าเราสามารถกำหนดทิศทางของ Configuration เริ่มต้นของวัตถุสำหรับการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step3 ของ Algorithm 3 ให้อยู่ในทิศทางที่ใกล้กับทิศทางที่ Configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทาง หนึ่งแล้ว วัตถุย่อมเข้าสู่สมดุล ณ Configuration ที่ภาวะสมดุลทิศทางนั้นแน่นอน

5.3 เวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุ โดยใช้ Elliptic Field

ในการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step1 ของ Algorithm 3 นั้น ปัจจัยที่สำคัญที่สุดคือ เวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุ จาก configuration เริ่มต้น จนกระทั่งวัตถุหยุดที่ configuration ที่ภาวะสมดุล โดยที่ ต้องรักษาคคุณสมบัติในการที่จะไม่ไปตรวจจับว่าวัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลแล้วหรือไม่ จึงต้องหาวิธีทำนาย เวลาที่ครอบคลุมสำหรับทุก configuration เริ่มต้นที่เป็นไปได้ โดยใน 2 หัวข้อย่อยถัดจากนี้ไป จะทำการ วิเคราะห์เวลาที่ต้องใช้สำหรับ Elliptic Field ใน Step1 สำหรับ Algorithm 3 ดังกล่าว โดยแยกเป็นการ วิเคราะห์การเคลื่อนที่และการหมุนแยกจากกันตามลำดับ

5.3.1 เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ

เช่นเดียวกับการหาทอร์กัลฟ์เมื่อวัตถุอยู่ที่ configuration (x_c, y_c, θ) เราสามารถหาแรงลัพธ์ตามสมการ (2.7) เนื่องจาก Elliptic Field ได้เป็น

$$\mathbf{F}(x_c, y_c, \theta) = \int_P \int \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX dY \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} F_x(x_c, y_c, \theta) \\ F_y(x_c, y_c, \theta) \end{bmatrix} = \int_P \int \begin{bmatrix} -\xi(X_\theta + x_c) \\ -\eta(Y_\theta + y_c) \end{bmatrix} dX dY$$

โดยการกระจายพจน์ลงไป จะได้ว่า

$$F_x(x_c, y_c, \theta) = -\xi \int_P \int X_\theta dX dY - \xi x_c \int_P \int dX dY \quad (5.8)$$

$$F_y(x_c, y_c, \theta) = -\eta \int_P \int Y_\theta dX dY - \eta y_c \int_P \int dX dY \quad (5.9)$$

ซึ่งจะเห็นว่า พจน์แรกทางขวามือของสมการ (5.8), (5.9) มีค่าเป็น 0 ด้วยเหตุผลเดียวกับที่อธิบายมาแล้วในสมการ (5.1) ดังนั้น จะเห็นว่า ค่าทิศทาง θ ของวัตถุ ไม่เกี่ยวข้องกับแรงลัพธ์ที่สนามแรงกระทำต่อวัตถุ สอดคล้องกับที่ Luntz et al. นำเสนอใน [15] อีกเช่นกัน ดังนั้น ถ้าให้ $F_x^*(x, y) = F_x(x, y, \theta)$ และ $F_y^*(x, y) = F_y(x, y, \theta)$ เมื่อ θ มีค่าใดๆ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} F_x^*(x_c, y_c) \\ F_y^*(x_c, y_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi x_c \int_P \int dX dY \\ -\eta y_c \int_P \int dX dY \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi x_c A \\ -\eta y_c A \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

ถ้าพิจารณาเฉพาะในแนวแกน X ของระนาบสนามแรง แรงลัพธ์ทั้งหมด มีค่าเท่ากับ $F_x^*(x_c, y_c)$ รวมกับแรงเสียดทานในแนวแกน X หรือ F_{dx} ซึ่งคำนวณได้ตามสมการ (2.10) ดังนั้น เมื่อแทนค่าแรงลัพธ์ดังกล่าวลงในสมการ (2.12) ก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F_x^*(x_c, y_c) + F_{dx}(v_{xc}) &= \rho a_{xc} A \\ -\xi x_c A - \tau v_{xc} A &= \rho a_{xc} A \end{aligned} \quad (5.11)$$

แทนค่า $v_{xc} = \dot{x}_c$ และ $a_{xc} = \ddot{x}_c$ ลงในสมการ (5.11) และจัดรูปใหม่ จะได้เป็น

$$\rho \ddot{x}_c(t) + \tau \dot{x}_c(t) + \xi x_c(t) = 0 \quad (5.12)$$

ถ้า ณ ตอนเริ่มต้น วัตถุอยู่ที่ configuration (x_0, y_0, θ) และความเร็ว ณ ตอนเริ่มต้นเป็น 0 (หยุดนิ่ง) เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (5.12) ออกมาได้เป็น

$$x_c(t) = e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \left[x_0 \cos\left(\frac{\lambda_x t}{2\rho}\right) + \frac{\tau x_0}{\lambda_x} \sin\left(\frac{\lambda_x t}{2\rho}\right) \right] \quad (5.13)$$

โดยที่ $\lambda_x = \sqrt{4\xi\rho - \tau^2}$

ทั้งนี้ เราสามารถประมาณขอบเขตของผลลัพท์ของสมการ (5.13) ได้เป็น

$$|x_c(t)| \leq \sqrt{2}e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \max(|x_0|, |\frac{\tau x_0}{\lambda_x}|) \quad (5.14)$$

ซึ่งถ้าให้ t_x เป็นเวลาที่ใช้ในการจัดวัตถุจนหยุดที่ภาวะสมดุลแล้ว โดยการปรับรูปสมการ (5.14) ใหม่ จะได้เป็น

$$t_x \geq -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{|x_c(t_x)|}{\sqrt{2} \max(|x_0|, |\frac{\tau x_0}{\lambda_x}|)} \right] \quad (5.15)$$

เนื่องจาก configuration ที่ภาวะสมดุลของวัตถุ จะอยู่ในรูป $(0, 0, \theta_0)$ นั่นคือ $x_c(t_x) = 0$ ซึ่งถ้าแทนค่าลงในสมการ (5.15) จะได้ผลออกมาว่า $t_x = \infty$ ซึ่งไม่อาจนำไปใช้งานได้จริง ดังนั้น ในทางปฏิบัติ แทนที่จะหาค่า t_x โดยตรง อาจจะเลือกหาค่า t_x^* ซึ่งเป็นเวลาที่รับประกันว่า $|x_c(t)| \leq \epsilon_x$ เมื่อ $t \geq t_x^*$ โดยที่ ϵ_x เป็นระยะทางคลาดเคลื่อนจาก configuration ที่ภาวะสมดุลในแนวแกน X ที่ยอมรับได้ ดังนั้น เราจะได้สมการหาค่า t_x^* เป็น

$$t_x^* \geq -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{\epsilon_x}{\sqrt{2} \max(|x_0|, |\frac{\tau x_0}{\lambda_x}|)} \right] \quad (5.16)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาเฉพาะในแนวแกน Y ของระนาบสนามแรง เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ (2.12) ในแนวแกน y ออกมาได้เป็น

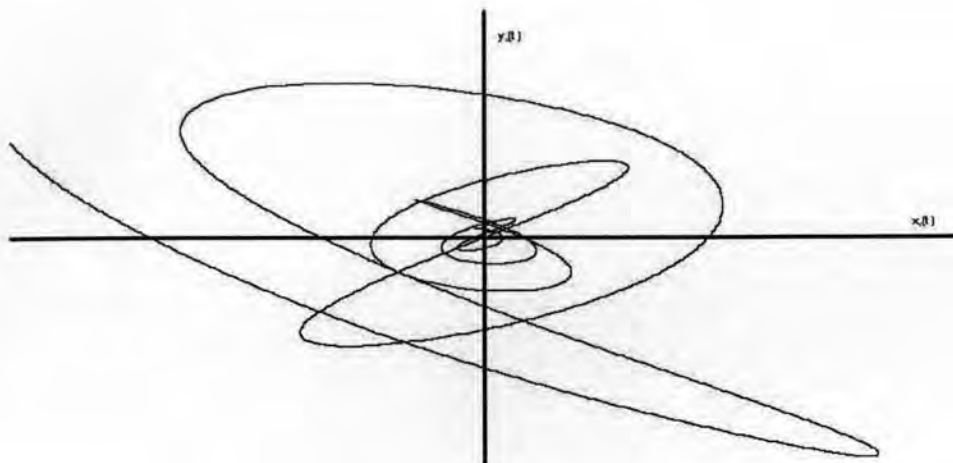
$$y_c(t) = e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \left[y_0 \cos\left(\frac{\lambda_y t}{2\rho}\right) + \frac{\tau y_0}{\lambda_y} \sin\left(\frac{\lambda_y t}{2\rho}\right) \right] \quad (5.17)$$

โดยที่ $\lambda_y = \sqrt{4\eta\rho - \tau^2}$ ซึ่งจะเห็นว่ามีความแตกต่างจาก λ_x ซึ่งผลดังกล่าว ทำให้เส้นทางการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางมวลของวัตถุ มีลักษณะดังตัวอย่างในรูปที่ 5.6 เนื่องมาจากความถี่การแกว่งของค่า x_c และ y_c ไม่เท่ากัน

ถ้าให้ ϵ_y เป็นระยะทางคลาดเคลื่อนจาก configuration ที่ภาวะสมดุลในแนวแกน Y ที่ยอมรับได้ และ t_y^* ซึ่งเป็นเวลาที่รับประกันว่า $|y_c(t)| \leq \epsilon_y$ เมื่อ $t \geq t_y^*$ ในลักษณะเดียวกับการวิเคราะห์ในแนวแกน X เราก็จะได้ว่า

$$t_y^* \geq -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{\epsilon_y}{\sqrt{2} \max(|y_0|, |\frac{\tau y_0}{\lambda_y}|)} \right] \quad (5.18)$$

ซึ่งจากทั้งสมการ (5.16) และสมการ (5.18) จะเห็นว่า เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น แปรตามค่า x_0, y_0 ของ configuration เริ่มต้น ดังนั้น ถ้าให้ x_{max} และ y_{max} เป็นค่าระยะทางเริ่มต้นที่ไกลที่สุดในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ เราก็คouldหาค่า t_x^* และ t_y^* ที่ครอบคลุมสำหรับทุก configuration เริ่มต้นของวัตถุได้



รูปที่ 5.6: ตัวอย่าง Trajectory ของศูนย์กลางมวลของวัตถุภายใต้ Elliptic Field

จากการวิเคราะห์ทั้งหมดข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้ Elliptic Field เป็นดัง Algorithm ข้างล่าง

Algorithm 4 EllipticTransTime($Elliptic_1, x_{max}, y_{max}, \epsilon_x, \epsilon_y$)

Require: $Elliptic_1$: Elliptic field configuration for Step1

Require: x_{max} : Maximum Distant of Initial configuration in x-direction

Require: y_{max} : Maximum Distant of Initial configuration in y-direction

Require: ϵ_x : Acceptable error of equilibrium configuration in x-direction

Require: ϵ_y : Acceptable error of equilibrium configuration in y-direction

1: t_x^* = result from equation (5.16) when $x_0 = x_{max}$;

2: t_y^* = result from equation (5.18) when $y_0 = y_{max}$;

3: return $t_{translate} = \max(t_x^*, t_y^*)$;

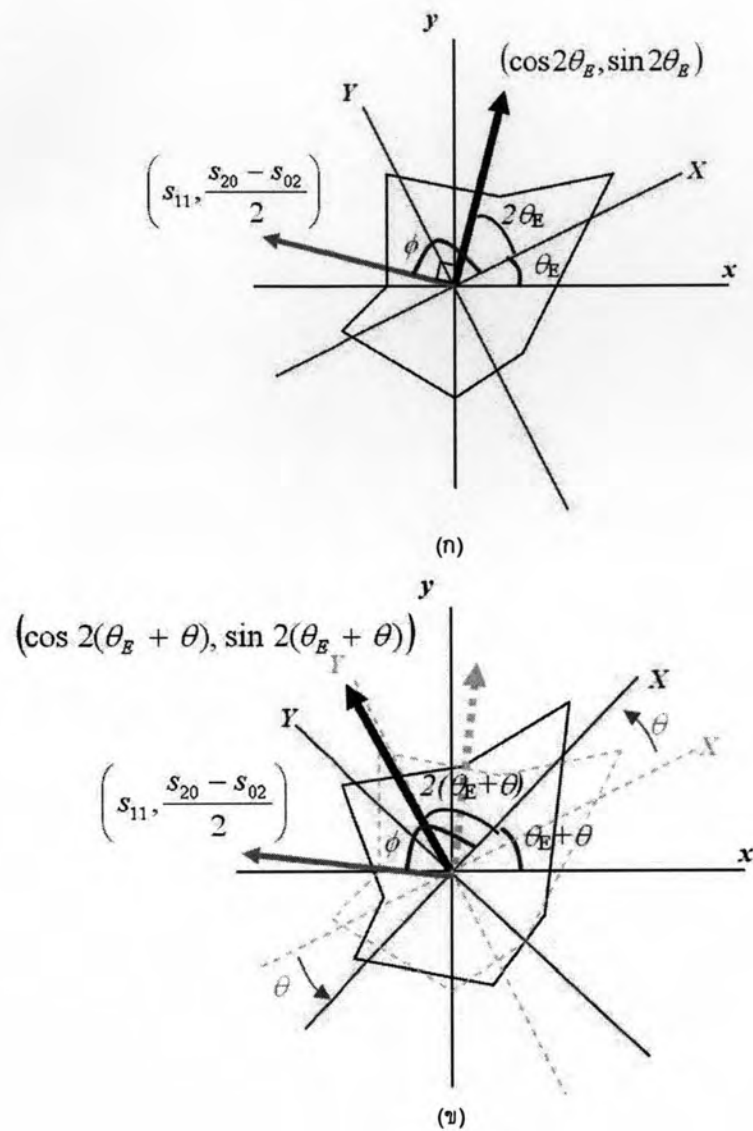
5.3.2 เวลาที่ใช้ในการหมุนรอบศูนย์กลางมวลของวัตถุ

ในการวิเคราะห์เวลาที่ใช้ในการหมุนของวัตถุนั้น เราไม่สามารถนำทอร์กัลฟ์ที่ได้ตามสมการ (5.6) มาใช้วิเคราะห์ได้ในทันทีที่เหมือนกับการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ในหัวข้อที่ผ่านมา เนื่องจากค่า ϕ ในสมการ (5.6) นั้น มีค่าแตกต่างกันไปในแต่ละวัตถุ ดังนั้น เพื่อให้สามารถวิเคราะห์การหมุนสำหรับกรณีทั่วไปไม่ขึ้นกับวัตถุ จำเป็นจะต้องหาวิธีหาทอร์กัลฟ์ที่ไม่ขึ้นกับค่า ϕ นั้น ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ configuration $(0, 0, \theta_E)$ เป็นหนึ่งในสอง configurations ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ดังนั้น ถ้าให้วัตถุอยู่ที่ configuration (x, y, θ_E) ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.7(ก) ทอร์กัลฟ์ $T_E^*(\theta_0)$ ตามสมการ (5.6 ย่อมมีค่าเป็น 0 ซึ่งจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} \cos(\phi - 2\theta_E) &= 0 \\ \phi - 2\theta_E &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

จากนั้น ลองพิจารณาในกรณีที่วัตถุอยู่ที่ configuration $(x, y, \theta_E + \theta)$ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.7(ข) ซึ่ง



รูปที่ 5.7: (ก) กรณีที่ทิศทางของวัตถุตรงกับทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุล (ข) กรณีที่ทิศทางเปลี่ยนไปเป็นทิศทางอื่น

ณ configuration นี้ จะได้ทอร์กัลพัทธ์เป็น

$$\begin{aligned}
 T_E^*(\theta_E + \theta) &= (\xi - \eta) \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20} - s_{02}}{2} \end{array} \right\| \cos(\phi - 2(\theta_E + \theta)) \\
 &= (\xi - \eta) \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20} - s_{02}}{2} \end{array} \right\| \cos((\phi - 2\theta_E) - 2\theta) \\
 &= (\xi - \eta) \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20} - s_{02}}{2} \end{array} \right\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \\
 T_E^{**}(\theta) &= (\xi - \eta) \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20} - s_{02}}{2} \end{array} \right\| \sin(2\theta)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

ทั้งนี้ $T_E^{**}(\theta)$ คือ ทอร์กัลพัทธ์เนื่องจาก Elliptic Field ซึ่งแปรตามทิศทางของวัตถุอ้างอิงกับทิศทางของ

configuration ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลหนึ่งในสอง configurations ซึ่งเมื่อรวมกับ T_d (ทอร์กลัพธ์ เนื่องจากแรงเสียดทาน) จากสมการ (2.11) ก็สามารถแทนค่าลงในสมการ (2.13) ได้เป็น

$$\begin{aligned} T_E^{**}(\theta) + T_d(\omega) &= I_z \alpha \\ (\xi - \eta)\lambda_T \sin(2\theta) - \frac{\tau I_z}{\rho} \omega &= I_z \alpha \end{aligned} \quad (5.21)$$

โดยที่ $\lambda_T = \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20} - s_{02}}{2} \end{array} \right\|$

แทนค่า $\omega = \dot{\theta}$ และ $\alpha = \ddot{\theta}$ ลงในสมการ (5.21) และจัดรูปใหม่ จะได้เป็น

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\tau}{\rho} \dot{\theta}(t) + \frac{(\eta - \xi)\lambda_T}{I_z} \sin(2\theta(t)) = 0 \quad (5.22)$$

เป้าหมายที่เราต้องการคือการหาผลเฉลยของสมการ (5.22) เพื่อหาเวลาที่ทำใหทิศทางของวัตถุเข้าสู่ทิศทางของ configuration ที่ภาวะสมดุล หรือก็คือ $|\theta(t)| \pm \epsilon_\theta$ หนึ่ง สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ นั้น $\dot{\theta}(0)$ มีค่าเป็น 0 (ไม่มีความเร็วเชิงมุม) ส่วน $\theta(0)$ นั้น จากหัวข้อ 5.2 ทำให้เราทราบว่า $|\theta(0)| \geq \frac{\pi}{2}$ เพราะถ้าในกรณี $\theta(t)$ เป็นทิศทางที่อ้างอิงจากทิศทางที่ภาวะสมดุล θ_{E1} เกิดมีค่ามากกว่า $\frac{\pi}{2}$ แล้ว วัตถุย่อมหมุนเข้าสู่ทิศทางที่ภาวะสมดุล $\theta_{E2} = \theta_{E1} + \pi$ ซึ่งเป็นอีกทิศทางที่เหลือแทน และถ้าเราเปลี่ยนให้ $\theta(t)$ เป็นทิศทางที่อ้างอิงจากทิศทาง θ_{E2} แทนแล้ว ก็จะได้ค่าน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$ อยู่ดี

มีจุดที่น่าสนใจอยู่จุดหนึ่ง คือ ถ้ากำหนดให้ $Z(t) = 2\theta(t)$ แล้วลองแทนค่าลงในสมการ (5.22) แล้วจะได้สมการเป็น

$$\ddot{Z}(t) + \frac{\tau}{\rho} \dot{Z}(t) + \frac{2(\eta - \xi)\lambda_T}{I_z} \sin(Z(t)) = 0$$

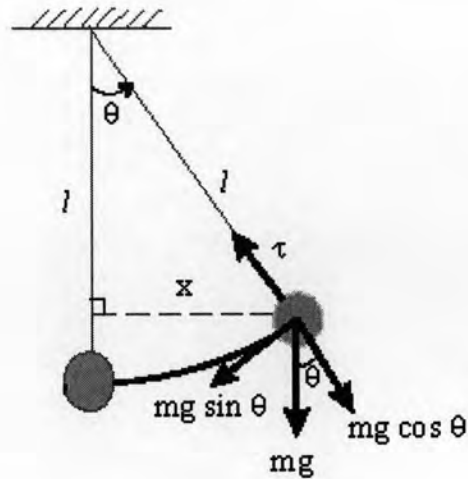
ซึ่งมีลักษณะเดียวกับกับแบบจำลองกลศาสตร์ของการแกว่งลูกตุ้มธรรมดาที่มีแรงต้านอากาศ ดังตัวอย่างในรูป 5.8 ที่มีสมการเป็น

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{k}{\rho} \dot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0$$

เมื่อ k เป็นสัมประสิทธิ์แรงต้านอากาศ และ ρ เป็นความหนาแน่นของลูกตุ้ม

ความเหมือนกันดังกล่าว ทำให้เราสามารถเปรียบเทียบการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field ให้เป็นเสมือนการแกว่งลูกตุ้มได้ อย่างไรก็ตาม การหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวนี้ นั้น ไม่สามารถทำได้เหมือนอย่างกรณีของการเคลื่อนที่ในหัวข้อที่ผ่านมา เนื่องจากค่าของ $\theta(0)$ มีโอกาสมีค่าสูงจนไม่สามารถที่จะประมาณให้ $\sin(Z(t)) \approx Z(t)$ อันเป็นวิธีที่ใช้กับปัญหาการแกว่งลูกตุ้มโดยทั่วไปได้ ดังนั้น จึงต้องใช้การหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution) ของสมการ (5.22) แล้วนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้นั้น มาวิเคราะห์หาเวลา t_o ซึ่งทำให้ $|\theta(t)| \leq \epsilon_\theta$ เมื่อ $t \geq t_o$ ออกมา ดัง Algorithm 5

อย่างไรก็ตาม Algorithm 5 นี้ ก็ยังมีจุดบกพร่องอยู่ ทั้งนี้เนื่องจากผลเฉลยที่ได้มาจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ไม่ว่าจะ Runge-Kutta-Meson ที่ใช้ใน Algorithm นี้ หรือวิธีอื่นๆ ก็ตาม ล้วนมีค่าความคลาดเคลื่อนสะสมทั้งสิ้น และเนื่องจาก Algorithm 5 มีจุดสำคัญที่การเปรียบเทียบผลเฉลย $\theta_t(t)$ กับ ϵ_θ ซึ่ง



รูปที่ 5.8: แบบจำลองกลศาสตร์ของการแกว่งลูกตุ้มที่มีแรงต้านอากาศ

Algorithm 5 EllipticRotateTime1(*Elliptic*₁, θ_0 , ϵ_θ)

Require: *Elliptic*₁ : Elliptic field configuration for Step 1

Require: θ_0 : Initial Rotation angle

Require: ϵ_θ : Acceptable error of equilibrium configuration in rotation term

```

1:  $t_o = 0$ ;
2:  $\theta_n = \theta_0$ ;
3:  $\dot{\theta}_n = 0$ ; {Initial angular velocity = 0}
4: repeat
5:   repeat
6:      $(\theta_{n+1}, ts_{n+1}, err) = RKM(\theta_n, ts_n)$ ;
7:      $(\dot{\theta}_{n+1}, ts_{n+1}, err) = RKM(\dot{\theta}_n, ts_n)$ ;
8:      $\theta_n = \theta_{n+1}$ ;
9:      $\dot{\theta}_n = \dot{\theta}_{n+1}$ ;
10:     $t_o = t_o + ts_n$ ;
11:     $ts_n = ts_{n+1}$ ;
12:   until  $|\dot{\theta}_n| == 0$  ; {Maximum rotation angle at each half-loop}
13: until  $|\theta_n| \leq \epsilon_\theta$  ;
14: return  $t_{rotate} = t_o$ ;

```

มีค่าน้อยมากๆ ผลของความคลาดเคลื่อนสะสมย่อมส่งผลกระทบต่อทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีโอกาสคลาดเคลื่อนสูง ดังนั้น จึงต้องมีการแก้ไขข้อบกพร่องนี้ ซึ่งสามารถทำได้ 2 จุด คือ

- จุดแรก ใช้ Algorithm 5 หาค่าเวลา t_{θ_1} ที่ทำให้เพียงแค่ว่า $|\theta_n| \leq \theta_s$ โดยที่ θ_s มีค่าน้อยในระดับหนึ่ง เช่น $\theta_s \approx \frac{\pi}{20}$ เป็นต้น ซึ่งมากกว่า ϵ_θ และค่าความคลาดเคลื่อนสะสมหลายเท่าตัว แต่ก็น้อยพอที่จะทำให้สามารถประมาณค่า $\sin(2\theta) \approx 2\theta$ ซึ่งจะทำให้สมการ (5.22) สามารถหาผลเฉลยได้เป็น

$$\theta(t) = e^{-\frac{\tau t}{2\rho}} \left[\theta_0 \cos\left(\frac{\lambda_\theta t}{2\rho}\right) + \frac{\tau \theta_0}{\lambda_\theta} \sin\left(\frac{\lambda_\theta t}{2\rho}\right) \right] \quad (5.23)$$

โดยที่ $\lambda_\theta = \sqrt{\frac{8(\eta-\xi)\lambda_T \rho^2}{I_z} - \tau^2}$

จากนั้น จึงหาเวลาที่วัตถุหมุนด้วยผลเฉลยตามสมการ (5.23) โดยให้ $\theta_0 = \theta_s$ จนกระทั่ง $|\theta(t)| \leq \epsilon_\theta$ ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$t_{\theta_2}^* \geq -\frac{2\rho}{\tau} \log \left[\frac{\epsilon_\theta}{\sqrt{2} \max(|\theta_s|, |\frac{\tau\theta_s}{\lambda_\theta}|)} \right] \quad (5.24)$$

ด้วยวิธีการดังกล่าวนี้ ทำให้ผลลัพธ์เวลารวมที่ใช้ในการหมุนมีค่าเป็น $t_{\theta_1} + t_{\theta_2}$

2. **จุดที่สอง** ในการทำงานตาม Algorithm 5 ในแต่ละรอบที่ $|\theta_n| = 0$ (ซึ่งถ้าเปรียบเป็นการแกว่งลูกตุ้ม ก็คือ ณ จุดที่ลูกตุ้มแกว่งขึ้นไปสูงสุดในแต่ละคาบ ซึ่ง ณ ตำแหน่งดังกล่าว ความเร็วจะเป็น 0 นั่นเอง) นั้น ให้นำค่าความคลาดเคลื่อนสะสมของ θ_n บวกเข้าไปให้ $|\theta_n|$ มีค่าเพิ่มขึ้น (ขยับตำแหน่งลูกตุ้มให้สูงขึ้น) ซึ่งจะทำให้ค่าเวลาที่คำนวณได้ มีค่ามากกว่าเวลาที่คำนวณจาก θ_n เดิม ทั้งนี้ เป็นไปตามข้อพิสูจน์ที่จะนำเสนอต่อไปนี้

ข้อพิสูจน์ : ให้ θ_1, θ_2 เป็นทิศทางของวัตถุอ้างอิงจากทิศทางที่ภาวะสมดุล θ_E ที่เวลา $t = 0$ สำหรับ 2 กรณีใดๆ ถ้า $|\theta_1| < |\theta_2| < \frac{\pi}{2}$ แล้ว เวลาที่ใช้ในการหมุนวัตถุจนหยุดหมุนที่ทิศทาง θ_E เมื่อวัตถุมีทิศทางเริ่มต้นเป็น $\theta_E \pm \theta_1$ จะน้อยกว่าเวลาที่ใช้ในกรณีที่ทิศทางเริ่มต้นเป็น $\theta_E \pm \theta_2$ เสมอ

พิสูจน์ จากกฎการอนุรักษ์พลังงานที่ว่า พลังงานรวมของระบบปิดที่เวลาใดๆ จะมีค่าคงที่เสมอ สำหรับการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field นั้น พลังงานในระบบประกอบไปด้วย

- พลังงานศักย์ของวัตถุ ซึ่งก็คือ Lifted Potential ของวัตถุที่ configuration $(x(t), y(t), \theta(t))$ นั้น
- พลังงานจลน์เนื่องจากการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุ
- งานที่สูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทาน

เนื่องจากการสูญเสียไปเนื่องจากแรงเสียดทานนั้น มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่และหมุนไป ดังนั้น ผลรวมพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ของวัตถุก็จะลดลงตามเวลาที่ผ่านไป เพื่อรักษาระดับพลังงานรวมทั้งหมดให้คงที่

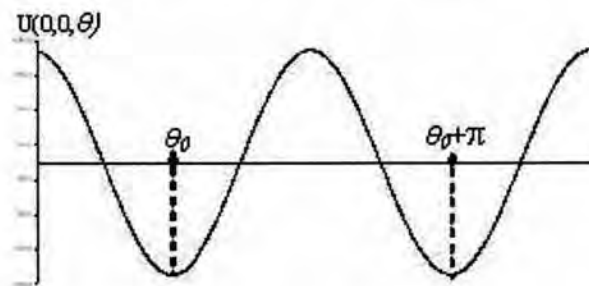
อนึ่ง เนื่องจากที่เวลา $t = 0$ นั้น พลังงานจลน์ของวัตถุมีค่าเป็น 0 ดังนั้น ผลรวมพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ ณ ตอนเริ่มต้นดังกล่าว จึงมีค่าเท่ากับ Lifted Potential Energy ของวัตถุที่ Configuration $(x(0), y(0), \theta(0))$ นั่นเอง ดังนั้น ถ้าหากที่ configuration เริ่มต้นของวัตถุ มีค่า Lifted Potential Energy สูงแล้ว ก็ย่อมใช้เวลาในการทำให้วัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลนานกว่า configuration เริ่มต้นที่มีค่า Lifted Potential Energy ต่ำกว่า

จากหลักการของ Lifted Potential Function จะได้ว่า สำหรับกรณีของ Elliptic Field แล้ว

$$\begin{aligned}
 U(x, y, \theta - \theta_E) &= - \int T(x, y, \theta - \theta_E) d\theta \\
 &= - \int T_E^{**}(\theta) d\theta \\
 &= \frac{(\xi - \eta)}{2} \left\| \begin{array}{c} s_{11} \\ \frac{s_{20} - s_{02}}{2} \end{array} \right\| \cos(2\theta) + U_c(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

โดยที่ $U_c(x, y)$ เป็น Lifted Potential Energy ส่วนที่ไม่แปรผันตามทิศทางของ configuration ของวัตถุ

เนื่องจากการหมุนของวัตถุภายใต้ Elliptic Field นั้น ไม่ขึ้นกับตำแหน่งของวัตถุ ดังนั้น จึงขอเลือกกรณีที่ configuration เริ่มต้นของวัตถุเป็น $(0, 0, \theta)$ เป็นตัวแทนของการหมุนเมื่อ configuration เริ่มต้นเป็น (x, y, θ) เมื่อ x, y มีค่าใดๆ ซึ่งในกรณีนี้ ทิศทางของวัตถุจะหยุดที่ทิศทางที่ภาวะสมดุล θ_E ก็คือเมื่อวัตถุเข้าสู่ภาวะสมดุลนั่นเอง และเมื่อ configuration เริ่มต้นของวัตถุเป็น $(0, 0, \theta)$ แล้ว ค่า $U_c(x(t), y(t))$ จะมีค่าคงที่เท่ากับ $U_c(0, 0)$ เสมอ (เนื่องจากในกรณีนี้ วัตถุจะไม่มีการเคลื่อนที่) ดังนั้น เราสามารถเขียนกราฟของ $U(0, 0, \theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ ได้ โดยจะออกมามีลักษณะดังรูป 5.9



รูปที่ 5.9: กราฟของ $U(0, 0, \theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ บน Elliptic Field

ซึ่งจากกราฟจะเห็นว่า ในช่วงทิศทาง $(\theta_E - \frac{\pi}{2}, \theta_E + \frac{\pi}{2})$ นั้น ค่าของ Lifted Potential Energy จะแปรตามขนาดของทิศทางของวัตถุเทียบกับทิศทาง θ_E นั้น ดังนั้น ในกรณีที่ θ_1, θ_2 เป็นมุมใดๆ และ $|\theta_1| < |\theta_2| \geq \frac{\pi}{2}$ เราก็จะได้ว่า $U(0, 0, \theta_E \pm \theta_1) < U(0, 0, \theta_E \pm \theta_2)$

นั่นคือ ถ้ากรณีที่ configuration เริ่มต้นของวัตถุเป็น $(0, 0, \theta_E \pm \theta_1)$ แล้ว พลังงานรวมของวัตถุ ณ ตอนเริ่มต้น จะมีค่าน้อยกว่ากรณีที่ configuration เริ่มต้นเป็น $(0, 0, \theta_E \pm \theta_2)$ ซึ่งยังผลให้เวลาที่ใช้ในการหมุนมากกว่าในที่สุด •

ข้อพิสูจน์ดังกล่าวนี้ เปรียบไปแล้วก็เหมือนกับการแกว่งลูกตุ้มที่ว่า ถ้าเริ่มแกว่งที่มุมที่สูงกว่า ก็จะใช้เวลาในการแกว่งนานกว่านั่นเอง และด้วยข้อพิสูจน์นี้อีกเช่นกัน เราสามารถเลือกค่า θ_0 ที่จะใช้เวลาในการหมุนนานที่สุด นั่นคือ $\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \epsilon_\theta$ (เหตุที่ไม่เลือกใช้ $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ พอดีเลยนั้น เนื่องจากถ้าใช้ค่าดังกล่าว ทอร์กลัพธ์ตามสมการ (5.21) จะมีค่าเป็น 0 และจะทำให้ไม่เกิดการหมุนขึ้นเลย เนื่องจากวัตถุไม่มีการเปลี่ยนทิศทางเกิดขึ้น ซึ่งในทางปฏิบัตินั้น โอกาสที่วัตถุจะอยู่ในทิศทางที่ $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ พอดี 100% เลยนั้นก็แทบเป็นไปไม่ได้) ดังนั้น เราสามารถปรับปรุง Algorithm 5 ใหม่ได้เป็นดัง Algorithm 6

Algorithm 6 EllipticRotateTime2(*Elliptic*₁, ϵ_θ , θ_s)**Require:** *Elliptic*₁ : Elliptic field configuration for Step1**Require:** ϵ_θ : Acceptable error of equilibrium configuration in rotation term**Require:** θ_s : Cut-off angle for linearized solution of equation (5.22)

```

1:  $t_{o1} = 0$ ;
2:  $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \epsilon_\theta$ ;
3:  $\dot{\theta}_n = 0$ ; {Initial angular velocity = 0}
4: repeat
5:    $err_{global} = 0$ ;
6:   repeat
7:      $(\theta_{n+1}, t_{n+1}, err) = RKM(\dot{\theta}_n, t_n)$ ;
8:      $(\theta_{n+1}, t_{n+1}, err) = RKM(\theta_n, t_n)$ ;
9:      $\theta_n = \theta_{n+1}$ ;
10:     $\theta_{n+1} = \dot{\theta}_n$ ;
11:     $t_{o1} = t_{o1} + t_n$ ;
12:     $t_n = t_{n+1}$ ;
13:     $err_{global} = err_{global} + |err|$ ;
14:   until  $|\dot{\theta}_n| == 0$  ; {Maximum rotation angle at each half-loop}
15: until  $|\theta_n| \leq \theta_s$  ;
16: Calculate  $t_{o2}$  from equation (5.24);
17: return  $t_{rotate} = t_{o1} + t_{o2}$ ;

```

5.4 การเลือกสนามแรงสำหรับหมุนวัตถุให้โน้มเข้าทิศทางเดียวและเวลาที่ใช้

จากการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ตาม Step1 ของ Algorithm 3 ด้วยเวลาที่วิเคราะห์ได้จากหัวข้อ 5.3 นั้น เราจะได้ว่า วัตถุจะอยู่ ณ configuration (x, y, θ) โดยที่ $x \in [-\epsilon_x, \epsilon_x]$, $y \in [-\epsilon_y, \epsilon_y]$ และ $\theta \in [\theta_E - \epsilon_\theta, \theta_E + \epsilon_\theta] \cup [\theta_E + \pi - \epsilon_\theta, \theta_E + \pi + \epsilon_\theta]$ เมื่อ θ_E คือทิศทางของ configuration ที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลภายใต้ Elliptic Field ใน Step1 นั้น

ในขณะเดียวกัน ในการจัดวัตถุใน Step3 ที่เป็น Elliptic Field อีกชุดนั้น จากการตั้งค่าพารามิเตอร์ของ Elliptic field จะทำให้เราได้ว่า ทิศทางของ configuration ที่วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้ คือ $\theta_E + \frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta_E - \frac{\pi}{2}$ ทิศทางใดทิศทางหนึ่ง เป้าหมายที่ต้องการคือ ให้วัตถุหยุดที่ภาวะสมดุลทิศทางเดียวเท่านั้น เช่นถ้าหากให้ทิศทาง $\theta_E + \frac{\pi}{2}$ เป็นทิศทางที่ต้องการแล้ว จากหัวข้อ 5.2 ทำให้ได้ว่า ทิศทางของ configuration เริ่มต้นก่อนการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step3 นั้น จะต้องอยู่ในช่วง $(\theta_E, \theta_E + \pi)$ เท่านั้น (ในกรณีที่ทิศทางที่ต้องการเป็น $\theta_E - \frac{\pi}{2}$ ทิศทางเริ่มต้นก็จะต้องอยู่ในช่วง $(\theta_E - \pi, \theta_E)$ แทน)

ดังนั้น คุณสมบัติสำคัญของสนามแรงที่จะนำมาใช้จัดวัตถุใน Step2 ของ Algorithm 3 ก็คือ การเปลี่ยนทิศทางของวัตถุจาก configuration ที่ได้หลังจาก Elliptic Field ใน Step1 ให้เข้าเงื่อนไขก่อนเริ่มใช้ Elliptic Field ใน Step3 ในเวลาจำกัด

สนามแรงหนึ่งที่น่าจะนำมาใช้ใน Step2 นี้ได้ ก็คือ Unit Radial, Radial & Constant Field ที่ถึงแม้ในการทดลองในบทที่ผ่านมา จะพบข้อด้อยในเรื่องเวลาที่ใช้จัดวัตถุก็ตาม แต่เนื่องจากเป้าหมายที่ต้องการในกรณีนี้ไม่ใช่การจัดวัตถุจนกระทั่งหยุดที่ภาวะสมดุล แต่เป็นเพียงแค่การเปลี่ยนทิศทางของวัตถุซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างมากไม่เกิน $2\epsilon_\theta$ เท่านั้น ซึ่งจากผลการทดลองจะเห็นว่า การเปลี่ยนทิศทางในช่วงเล็กๆ ดังกล่าวใช้เวลาไม่มากนัก

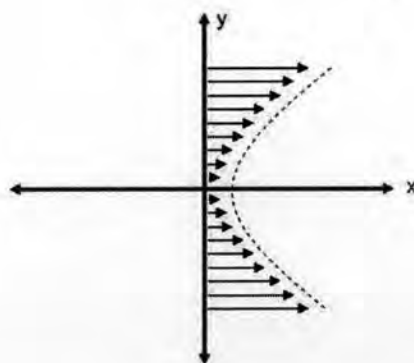
ทั้งนี้ ถ้าหากเลือกใช้ Unit Radial, Radial & Constant Field ที่ให้แรงตามสมการ (2.19),(2.20) และ (2.21) เพื่อจัดวัตถุนั้น เราสามารถกำหนดทิศทางของ configuration ของวัตถุที่ภาวะสมดุลได้ ดังนั้นเพื่อความสะดวก เราจะกำหนดพารามิเตอร์ของสนามแรงนี้ ให้ configuration ที่วัตถุจะหยุดที่ภาวะสมดุลที่เป็นไปได้ เป็น configuration เดียวกับ configuration ที่เราต้องการจาก Elliptic field ใน Step3 นั่นคือ $(0, 0, \theta_E + \frac{\pi}{2})$ ซึ่งเราสามารถกำหนดทิศทางของระนาบของ Unit Radial, Radial & Constant Field เพื่อให้ได้ configuration ที่ภาวะสมดุลเป็น configuration ดังกล่าวได้จาก Algorithm 1 นั้นเอง

อย่างไรก็ตาม ปัญหาที่จะเกิดขึ้นถ้าหากใช้ Unit Radial, Radial & Constant Field ก็คือ เวลาที่จะต้องใช้เพื่อให้วัตถุเปลี่ยนทิศทางไปอยู่ในช่วงที่ต้องการสำหรับ Elliptic Field ใน Step3 ทั้งนี้ แม้จะทราบจากผลการทดลองว่า เวลาที่ใช้ในการเปลี่ยนทิศทางนั้นใช้เวลาไม่มาก แต่ก็ไม่สามารถคำนวณหาเวลาดังกล่าวได้ เนื่องจากความซับซ้อนของแรงลัพธ์และทอร์กลัพธ์ที่ได้จากสนามแรงนี้ ไม่สามารถนำมาใช้วิเคราะห์ได้โดยง่ายเหมือนกับกรณีของ Elliptic Field ทำให้การหาเวลาสำหรับใช้งาน จึงสามารถทำได้แต่เพียงจากการทดลองจัดวัตถุโดยสุ่ม configuration เริ่มต้นจาก configuration ที่เป็นไปได้จากการจัดวัตถุด้วย Elliptic Field ใน Step1 แล้วจึงจับเวลาหาช่วงเวลาวัตถุจะเปลี่ยนทิศทางไปอยู่ในช่วงทิศทางที่ต้องการจากการทดลองหลายๆ รอบ แล้วจึงนำค่าเวลาที่ได้มาใช้งาน จึงเป็นข้อต่อที่ต้องทำการทดสอบกับสนามแรงจริงก่อน ถึงจะนำเวลามาใช้งานได้

ด้วยเหตุนี้ จึงขอเสนอสนามแรงรูปแบบใหม่ขึ้นมาสำหรับใช้เป็นสนามแรงใน Step2 เป็นการเฉพาะ โดยในขั้นต้นนั้น เริ่มต้นจากสนามแรงชุดเดียว ซึ่งจะขอเรียกว่า Parabolic Field โดยให้แรงในแต่ละจุดเป็น

$$\vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} ky^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

ตัวอย่างรูปแสดงทิศทางของแรงเนื่องจาก Parabolic Field นี้เป็นดังรูปที่ 5.10



รูปที่ 5.10: รูปแสดงแรง ณ จุดต่างๆ ของ Parabolic Field ($k = 1$)

ทั้งนี้ สำหรับวัตถุที่อยู่ configuration (x_c, y_c, θ) ใดๆ แล้ว จะสามารถคำนวณแรงลัพธ์เนื่องจาก

Parabolic Field นี้ออกมาได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_c, y_c, \theta) &= \int_P \int \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX dY \\ \begin{bmatrix} F_x(x_c, y_c, \theta) \\ F_y(x_c, y_c, \theta) \end{bmatrix} &= \int_P \int \begin{bmatrix} k(Y_\theta + y_c)^2 \\ 0 \end{bmatrix} dX dY \end{aligned} \quad (5.27)$$

ซึ่งจะเห็นว่า แรงลัพธ์ในแนวแกน Y ของระนาบสนามแรงมีค่าเป็น 0

ส่วนทอร์กลัพธ์ของวัตถุ ก็จะได้ออกมาเป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x_c, y_c, \theta) &= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \hat{\mathbf{F}}(X_\theta + x_c, Y_\theta + y_c) dX dY \\ &= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k(Y_\theta + y_c)^2 \\ 0 \end{bmatrix} dX dY \\ &= k \int_P \int Y_\theta^3 dX dY + 2ky_c \int_P \int Y_\theta^2 dX dY + kx_c^2 \int_P \int (Y_\theta) dX dY \end{aligned} \quad (5.28)$$

เช่นเดียวกัน จะเห็นว่า พจน์สุดท้ายของสมการ (5.28) มีค่าเป็น 0 เหมือนกับกรณีของสมการ (5.1) ส่วนอีก 2 พจน์ที่เหลือ เมื่อจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของ s_{ij} จากสมการ (5.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T(x_c, y_c, \theta) &= k [s_{30} \sin^3 \theta + s_{21} \sin^2 \theta \cos \theta + s_{12} \sin \theta \cos^2 \theta + s_{03} \cos^3 \theta] \\ &\quad + 2ky_c [s_{20} \sin^2 \theta + 2s_{11} \sin \theta \cos \theta + s_{02} \cos^2 \theta] \end{aligned} \quad (5.29)$$

จากสมการ (5.29) เราสามารถแบ่งทอร์กลัพธ์เนื่องจาก Parabolic Field ออกเป็น 2 ส่วน คือ

- ทอร์กลัพธ์ส่วนที่เกี่ยวข้องกับ θ เพียงอย่างเดียว แทนด้วย $T_I^*(\theta)$ ซึ่ง

$$T_I^*(\theta) = k [s_{30} \sin^3 \theta + s_{21} \sin^2 \theta \cos \theta + s_{12} \sin \theta \cos^2 \theta + s_{03} \cos^3 \theta] \quad (5.30)$$

- ทอร์กลัพธ์ส่วนที่เกี่ยวข้องกับ y_c และ θ แทนด้วย $T_I^{**}(y_c, \theta)$ ซึ่งสำหรับส่วนนี้ ถ้าพิจารณาขนาดแล้ว จะเห็นว่า

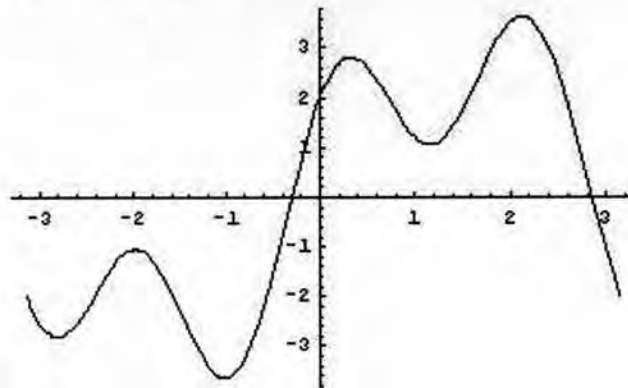
$$\begin{aligned} |T_I^{**}(y_c, \theta)| &= 2|k||y_c| |s_{20} \sin^2 \theta + 2s_{11} \sin \theta \cos \theta + s_{02} \cos^2 \theta| \\ &\leq 2|k||y_c| (|s_{20}| + 2|s_{11}| + |s_{02}|) \end{aligned} \quad (5.31)$$

ซึ่งถ้าหากว่า จุดกำเนิดของระนาบของ Parabolic Field เป็นจุดเดียวกับระนาบของ Elliptic Field ใน Step1 แล้วนั้น (โดยที่ทิศทางของระนาบสนามแรง อาจจะต่างกันก็ได้) โดยผลจากการจัดวัตถุด้วย Elliptic field ใน Step1 นั้น ค่า y_c ในสมการ (5.31) ณ ตอนเริ่มการใช้สนามแรงนี้ใน Step2 จะมีค่าไม่เกิน $\sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}$ ซึ่งค่าของ ϵ_x และ ϵ_y นั้น เราสามารถกำหนดได้จากเวลาในการทำงานของ Elliptic Field ใน Step1 นั้นเอง และโดยที่จากสมการ (5.27) จะเห็นว่า ไม่มีแรงกระทำต่อวัตถุในแนวแกน Y ของระนาบของ Parabolic

Field เลย ดังนั้น ภายใต้ Parabolic Field นี้ ค่าของ y_c จึงไม่มีโอกาสเพิ่มสูงขึ้น ซึ่งทั้งหมดนี้สรุปได้ว่า เราสามารถควบคุมค่า y_c ให้มีค่าน้อยจนทำให้ $T_I^*(y_c, \theta)$ มีค่าน้อยมากได้ และจะทำให้

$$\begin{aligned} T(x_c, y_c, \theta) &\approx T_I^*(\theta) \\ &\approx k [s_{30}\sin^3\theta + s_{21}\sin^2\theta \cos\theta + s_{12}\sin\theta\cos^2\theta + s_{03}\cos^3\theta] \end{aligned} \quad (5.32)$$

และเนื่องจากสำหรับวัตถุใดๆ เราสามารถคำนวณค่าของ s_{ij} ได้จากตัววัตถุโดยไม่เกี่ยวข้องกับสนามแรง ดังนั้น เราสามารถสร้างกราฟของ $T_I^*(\theta)$ สำหรับวัตถุใดๆ ได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.11 ซึ่งเป็นกราฟของวัตถุตัวอย่าง B ในการทดลองบทยที่ผ่านมา เป็นต้น



รูปที่ 5.11: กราฟของ $T_I^*(\theta)$ กับค่า θ

ทั้งนี้ มีจุดที่น่าสนใจเกิดอยู่จุดหนึ่ง คือ

$$\begin{aligned} T_I^*(\theta + \pi) &= k [s_{30}\sin^3(\theta + \pi) + s_{21}\sin^2(\theta + \pi) \cos(\theta + \pi) + s_{12}\sin(\theta + \pi)\cos^2(\theta + \pi) + s_{03}\cos^3(\theta + \pi)] \\ &= k [-s_{30}\sin^3\theta - s_{21}\sin^2\theta \cos\theta - s_{12}\sin\theta\cos^2\theta - s_{03}\cos^3\theta] \\ &= -T_I^*(\theta) \end{aligned} \quad (5.33)$$

แสดงว่า ทอร์กัลท์เมื่อวัตถุอยู่ ณ ทิศทาง θ ใดๆ จะมีค่าตรงข้ามกับทอร์กัลท์ที่ทิศทางที่ต่างออกไป π เสมอ ซึ่งนั่นหมายถึงทิศทางทอร์กัลท์ด้วยเช่นกัน ดังจะเห็นได้จากลักษณะของเส้นกราฟในรูปที่ 5.11 เป็นต้น ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวนี้ สอดคล้องกับความต้องการในการทำงานใน Step2 ของ Algorithm 3 ที่กำลังต้องการอยู่ โดยสิ่งที่ต้องการในการนำสนามแรงนี้มาใช้ในการจัดวัตถุ Step2 ก็คือ การเลือกทิศทางที่ระนาบของ Parabolic Field ทำกับระนาบของวัตถุที่หยุดหลังจาก Elliptic Field ใน Step1 ให้ได้ทอร์กัลท์มีทิศการหมุนตามทิศทางที่ต้องการ

ตัวอย่างเช่น วัตถุตัวอย่าง B ในการทดลอง (รูปที่ 4.1) ถูกจัดด้วย Elliptic Field ใน Step1 แล้ว สมมติให้หยุด ณ configuration ที่มีทิศทางที่แกนระนาบของวัตถุทำมุมกับแกนระนาบของ Elliptic Field อยู่ในช่วง $(\theta_E - \epsilon_\theta, \theta_E + \epsilon_\theta)$ ดังในรูปที่ 5.12(ก) และถ้าสมมติให้ ณ ทิศทางในกรณี A ดังกล่าว ต้องการทอร์กัลท์ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เพื่อให้วัตถุโน้มไปทางทิศทาง $\theta_E + \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น เราสามารถเลือกทิศทางที่แกนระนาบวัตถุ ทำมุมกับแกนระนาบของ Parabolic Field จากกราฟในรูปที่ 5.11 ที่ให้ทอร์กัลท์ทวนเข็มนาฬิกา เช่นเลือกทิศทางช่วง θ_c ดังในรูปที่ 5.12(ข) เป็นต้น ซึ่งจะทำให้ แกนระนาบของ Parabolic

Field ทำมุมกับแกนระนาบของ Elliptic Field จาก Step 1 เป็นมุม

$$\Delta\theta = \theta_E - \theta_c$$

ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.12(ค)

อนึ่ง จะเห็นว่า ด้วย Parabolic Field เพียงสนามแรงเดียวนี้ สามารถให้ทอร์กัลฟ์ที่กระทำวัตถุหมุนในทิศทางที่ต้องการได้ด้วยการเลือกทิศทางของแกนระนาบของสนามแรงที่เหมาะสม อย่างไรก็ตาม จุดที่ต้องคำนึงอีกจุด ก็คือ แรงลัพท์ที่สนามแรงนี้ทำกับวัตถุตามสมการ (5.27) ซึ่งจะเห็นว่า แรงลัพท์ที่ได้ จะผลักวัตถุให้ไกลออกไปจากจุดกำเนิดของระนาบสนามแรงตลอดเวลาที่หมุนวัตถุไปด้วย ซึ่งไม่เป็นผลดี เนื่องจากในเวลาที่เรปล่อยให้วัตถุทำงานภายใต้ Parabolic Field วัตถุอาจจะถูกผลักให้กระเด็นไปไกลจนเกินไปก็ได้ ดังนั้น จึงจำเป็นต้องหาสนามแรงอื่นๆ มาผสมผสานเพื่อลดผลของแรงลัพท์ดังกล่าว ให้น้อยลง และไม่รบกวนผลของทอร์กัลฟ์ที่ได้จาก Parabolic Field นี้

เมื่อพิจารณาจากเหตุผลดังกล่าว จึงเลือกสนามแรงที่มาจากสมการอีก 2 ชุด อันได้แก่

- สนามแรง Constant Field ที่ให้แรงเป็น

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} -h \\ 0 \end{bmatrix}$$

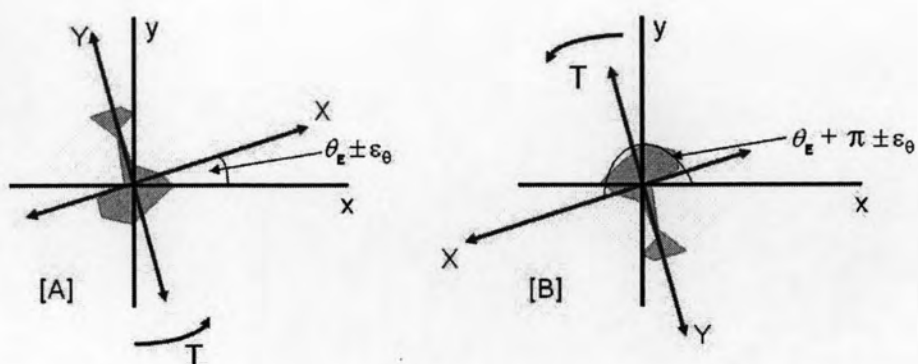
ซึ่งแรงลัพท์จาก Constant Field นี้ จะมีทิศทางตรงข้ามกับแรงลัพท์ตามสมการ (5.27) โดยจะมีขนาดมากหรือน้อย ขึ้นกับการกำหนดค่าพารามิเตอร์ h ของ Constant Field ทั้งนี้ ทอร์กัลฟ์เนื่องจาก Constant Field นี้มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x_c, y_c, \theta) &= \int_P \int \begin{bmatrix} X_\theta \\ Y_\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -h \\ 0 \end{bmatrix} dX dY \\ &= -h \int_P \int Y_\theta dX dY = 0 \end{aligned}$$

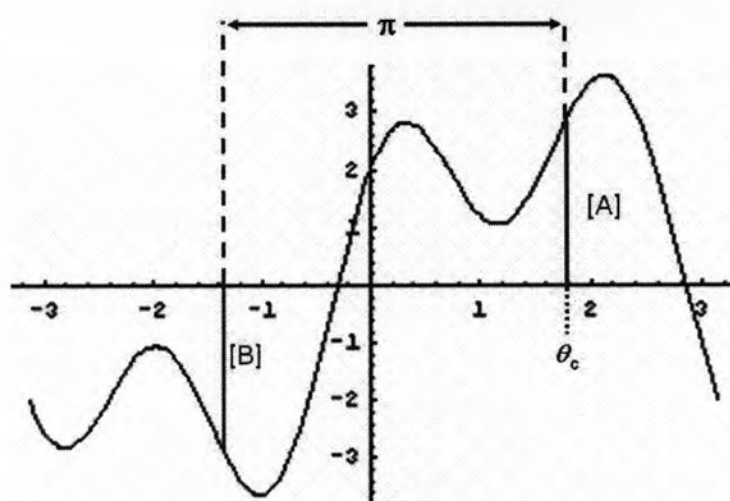
- สนามแรง Radial Field ที่ให้แรงตามสมการ (2.21) ซึ่ง Radial Field นี้ มีลักษณะเหมือนกับ Elliptic Field เพียงแต่ให้ $\xi = \eta = c$ ซึ่งด้วยการกำหนดค่าดังกล่าวนี้ ทำให้ทอร์กัลฟ์ของ Radial Field นี้ เป็นศูนย์ อันเป็นผลมาจากการแทนค่า $\xi = \eta$ ลงในสมการ (5.6) เหลือแต่เพียงแรงลัพท์ที่ดึงวัตถุเข้าสู่จุดศูนย์กลางสนามแรงตามสมการ (5.7) เพื่อช่วยดึงวัตถุ รวมถึงควบคุมการเคลื่อนที่ในแนวแกน Y ของระนาบสนามแรงเพื่อควบคุมค่าของ y_c ในสมการ (5.31) อีกด้วย

ดังนั้น เมื่อรวมกับสนามแรงอีก 2 ชุดที่เพิ่มลงไป จึงเรียกรวมสนามแรงทั้งหมดที่จะใช้ใน Step 2 ของ Algorithm 3 เป็น Parabolic, Radial & Constant Field ซึ่งให้แรง ณ แต่ละจุดบนสนามแรงเป็น

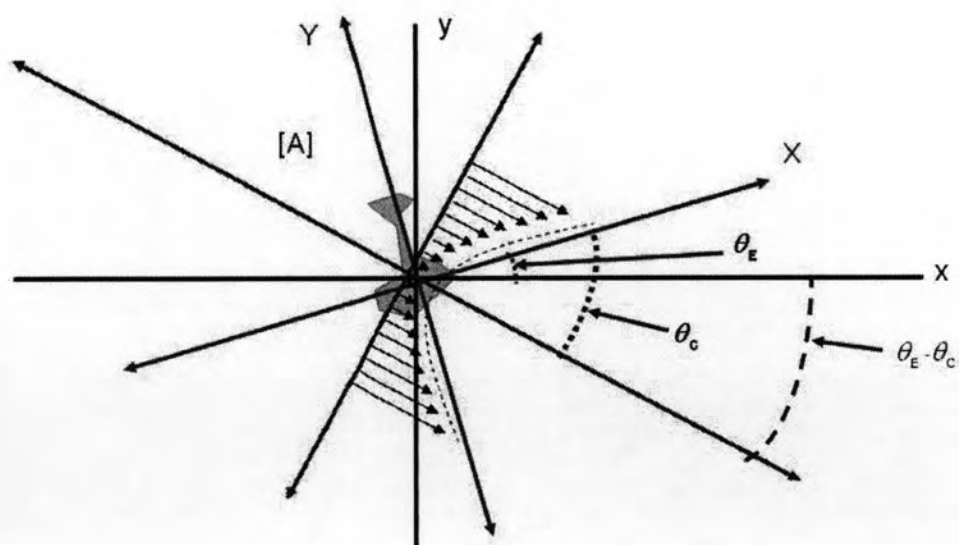
$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} ky^2 - h - cx \\ -cy \end{bmatrix}$$



(a)



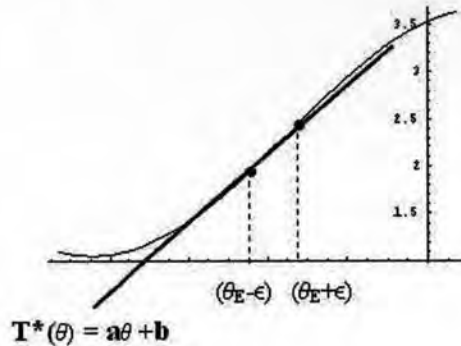
(b)



(c)

รูปที่ 5.12: ตัวอย่างการเลือกทิศทางของแกนระนาบสนามแรงใน Step2 (ก) ทิศทางที่วัดถูหยุดจาก Elliptic Field ใน Step1 (ข) ทิศทางของ Parabolic Field ที่ทำให้ได้ทอร์กัลัพธ์ในทิศทางที่ต้องการ (ค) ทิศทางของแกนระนาบของ Parabolic Field ที่ได้

ในส่วนของการคำนวณเวลาในการจัดวัตถุด้วย Parabolic, Radial & Constant Field เพื่อให้วัตถุหมุนจนได้ทิศทางที่ต้องการนั้น แม้ว่าเราจะสามารถแทนค่าทอร์กัลฟ์จากสมการ (5.32) มาใช้ในการวิเคราะห์เวลาในการหมุนได้เหมือนกับกรณีของ Elliptic Field ก็ตาม แต่สมการที่ได้ก็ยังคงมีความซับซ้อนจนไม่สามารถหาผลเฉลยได้ง่าย อย่างไรก็ตาม เนื่องจากช่วงทิศทางที่เราสนใจสำหรับการจัดวัตถุด้วยสนามแรงชุดนี้นั้น คือช่วงของทิศทางที่คลาดเคลื่อนจากผลของ Elliptic Field ซึ่งมีช่วงกว้าง $2\epsilon_\theta$ ดังเช่นในตัวอย่างของวัตถุ ก่อนหน้านี้ ช่วงทิศทางที่เราสนใจจากรูป 5.12(ข) คือ $(\theta_c - \epsilon_\theta, \theta_c + \epsilon_\theta)$ เป็นต้น เราจึงสามารถทำการประมาณเชิงเส้นเพื่อประมาณค่าทอร์กในช่วงทิศทางดังกล่าวให้อยู่ในรูปของ $T_L^*(\theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นได้ ดังตัวอย่างในรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13: ตัวอย่างการประมาณเชิงเส้นของทอร์กัลฟ์เนื่องจาก Parabolic, Radial & Constant Field

จากนั้น เราจึงใช้ค่าทอร์กที่ประมาณได้ดังกล่าว แทนค่าลงในสมการ (2.13) ได้เป็น

$$\begin{aligned} T_L^*(\theta) + T_d(\omega) &= I_z \alpha \\ (a\theta + b) - \frac{\tau I_z}{\rho} \omega &= I_z \alpha \end{aligned} \quad (5.34)$$

แทนค่า $\omega = \dot{\theta}$ และ $\alpha = \ddot{\theta}$ ลงในสมการ (5.34) และจัดรูปใหม่ จะได้เป็น

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\tau}{\rho} \dot{\theta}(t) - \frac{a}{I_z} \theta(t) = -b \quad (5.35)$$

ซึ่งสมการ (5.35) นี้ สามารถหาผลเฉลยออกมาเป็นรูปทั่วไปได้เป็น

$$\theta(t) = -\frac{bI_z}{a} + C_0 e^{\frac{-\tau + \sqrt{\tau^2 + \frac{4a\rho^2}{I_z}}}{2\rho} t} + C_1 e^{\frac{-\tau - \sqrt{\tau^2 + \frac{4a\rho^2}{I_z}}}{2\rho} t} \quad (5.36)$$

โดยที่ C_0, C_1 เป็นค่าคงที่ ขึ้นอยู่กับค่าของ $\theta(0)$ และ $\dot{\theta}(0)$ ทั้งนี้ เนื่องจากเป้าหมายคือการหาเวลาที่ทิศทางของวัตถุหมุนไปในช่วงทิศทางที่ต้องการ ดังเช่นในตัวอย่างของวัตถุ B ที่เคยยกตัวอย่างมาแล้วนั้น เป้าหมายคือหาเวลาที่ทำให้ $\theta(t) \geq \theta_1 + \epsilon_\theta$ ดังนั้น โดยการแทนค่า $\theta(t)$ ลงในสมการ (5.36) และโดยการเลือกค่า $\theta(0)$ ที่ไกลจากค่า $\theta(t)$ ที่ต้องการมากที่สุด ซึ่งในกรณีนี้คือ $\theta(0) = \theta_1 - \epsilon_\theta$ เราก็สามารถแก้สมการ (5.36) หาค่าเวลา t ที่ต้องการได้ในที่สุด ซึ่งการที่สามารถหาเวลาในการใช้งานได้นี้เอง ที่ทำให้ Parabolic, Radial & Constant Field มีข้อดีเหนือกว่า Unit Radial, Radial & Constant Field ในการที่จะนำมาใช้งานเป็นสนามแรงใน Step2 ของ Algorithm 3