ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น

นายวีรพล เทพบรรหาร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2560

EFFECTS OF USING THE REPRESENTATION AND MATHEMATICAL MODEL COMBINED WITH COGNITIVELY GUIDED INSTRUCTION APPROACH ON MATHEMATICAL REASONING AND CONNECTION ABILITIES OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Mr. Weerapol Tepbunharn

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education Program in Mathematics Education
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2017

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น
โดย	นายวีรพล เทพบรรหาร
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	อาจารย์ ดร. ไพโรจน์ น่วมนุ่ม

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะครุศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร. ศิริเดช สุชีวะ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. อัมพร ม้าคนอง)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(อาจารย์ ดร. ไพโรจน์ น่วมนุ่ม)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถศาสน์ นิมิตรพันธ์)

วีรพล เทพบรรหาร : ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น (EFFECTS OF USING THE REPRESENTATION AND MATHEMATICAL MODEL COMBINED WITH COGNITIVELY GUIDED INSTRUCTION APPROACH ON MATHEMATICAL REASONINGAND CONNECTION ABILITIES OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: อ. ดร. ไพโรจน์ น่วมนุ่ม, 188 หน้า.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน 2) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ 3) ศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตแห่งหนึ่งในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร ภาคการเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 แบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 34 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 36 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ แบบสังเกตพฤติกรรม และใบกิจกรรม วิเคราะห์ข้อมูลโดยการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน การวิเคราะห์ค่าที (t-test) และการวิเคราะห์เนื้อหา (Content analysis)

ผลการวิจัยพบว่า 1) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีพัฒนาการดีขึ้น

ภาควิชา หลักสูตรและการสอน
สาขาวิชา การศึกษาคณิตศาสตร์
ปีการศึกษา 2560

ลายมือชื่อนิสิต ....
ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก ....

5883378027 : MAJOR MATHEMATICS EDUCATION
KEYWORDS: REPRESENTATION / MATHEMATICAL MODEL / COGNITIVELY GUIDED INSTRUCTION / MATHEMATICAL REASONING / MATHEMATICAL CONNECTION

WEERAPOL TEPBUNHARN: EFFECTS OF USING THE REPRESENTATION AND MATHEMATICAL MODEL COMBINED WITH COGNITIVELY GUIDED INSTRUCTION APPROACH ON MATHEMATICAL REASONINGAND CONNECTION ABILITIES OF LOWER SECONDARY SCHOOL STUDENTS. ADVISOR: PAIROT NOUMNOM, Ed.D, 188 pp.

The purposes of this research were 1) to compare mathematical reasoning and connection abilities of student using the representation and mathematical model combined with cognitively guided instruction approach between, before and after learning, 2)to compare mathematical reasoning and connection abilities after learning of students between the groups being taught by using the representation and mathematical model combined with cognitively guided instruction approach and those being taught by using a conventional approach , and 3) to study development of mathematical reasoning and connection abilities of student using the representation and mathematical model combined with cognitively guided instruction approach. The subjects were ninth grade students of Demonstration School in State / State Universities Bangkok in the first semester of the academic year 2017.They were divided into two groups: an experimental group with 34 students and one control group with 36 students. The instruments for data collection were mathematical reasoning and connection abilities tests, observation form and worksheets. The data were analyzed by mean, standard deviation, t – test and content analysis.

The results of study revealed that 1) the mathematical reasoning and connection abilities of student, after using the representation and mathematical model combined with cognitively guided instruction approach were statistically higher than those before learning at a .05 level of significance, 2) the mathematical reasoning and connection abilities of student using the representation and mathematical model combined with cognitively guided instruction approach group were higher than those learning activities by a conventional approach at a .05 level of significance, and 3) the mathematical reasoning and connection abilities of student using the representation and mathematical model combined with cognitively guided were developed in positive direction.

Department:	Curriculum and Instruction	Student's Signature	....
Field of Study:	Mathematics Education	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2017		

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับบนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยความเมตตาและความกรุณาอย่างสูงจาก อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ที่ได้ให้ความรู้ความเข้าใจในทุก ๆ เรื่อง รวมถึงการตรวจสอบแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ พร้อมทั้งให้คำแนะนำในการทำงานด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างยิ่ง ตลอดจนกำลังใจในการทำงานที่ดีเสมอมา อันเป็นประโยชน์ต่อการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความเอาใจใส่ดูแลเป็นอย่างยิ่ง จึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถศาสน์ นิมิตรพันธ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ รวมถึงคณาจารย์ในสาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะอันประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่ได้เสียสละเวลาให้ความช่วยเหลือ และให้คำแนะนำในการแก้ไขและปรับปรุงเครื่องมือการวิจัย จนเป็นเครื่องมือที่สมบูรณ์ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการวิจัยครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม และรองคณบดี คณะครุศาสตร์ คณาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูล และดำเนินการทดลองการวิจัย ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ฝ่ายมัธยม ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ในการทดลองใช้เครื่องมือในการวิจัย นอกจากนี้ขอขอบใจนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/1 และ 3/6 ปีการศึกษา 2560 ทุกคนที่ได้ความช่วยเหลือ ให้ความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ คณาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม และหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีส่วนเกี่ยวข้องและอนุเคราะห์ให้ผู้วิจัยได้มีโอกาสศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิตครั้งนี้ ขอขอบพระคุณที่ได้ให้ความช่วยเหลือ สนับสนุนและอำนวยความสะดวก รวมถึงให้กำลังใจที่ดีกับผู้วิจัยเสมอมา ผู้วิจัยตระหนักในความกรุณานี้และจะนำความรู้ความสามารถไปพัฒนานักเรียนและโรงเรียนอย่างสุดความสามารถต่อไป

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อและคุณแม่ที่ให้การสนับสนุนเป็นกำลังใจในการทำงานให้เสร็จลุล่วงไปได้ ขอบพระคุณครูและอาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนให้ความรู้แก่ผู้วิจัยตั้งแต่เบื้องต้นจวบจนปัจจุบัน ขอบคุณพี่และเพื่อน สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ทุกคน ขอบคุณเพื่อนๆ ครุศาสตร์ รหัส 50 ที่มีส่วนช่วยเหลือ เป็นกำลังใจ ให้คำปรึกษาช่วยเหลือกันและกัน จนวิทยานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูปภาพ

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีความเกี่ยวข้องกับการดำเนินชีวิตในแต่ละวันอย่างแยกไม่ได้เพราะคณิตศาสตร์ถือเป็นวิชาที่ช่วยพัฒนากระบวนการคิดให้กับผู้เรียนอย่างเป็นระบบระเบียบรวมถึงมีกระบวนการในตัดสินใจที่เป็นเหตุเป็นผล ดังเช่น สิริพร ทิพย์คง (2545) ได้กล่าวถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์โดยสรุปไว้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ช่วยพัฒนาให้แต่ละบุคคลเป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์กล่าวคือคณิตศาสตร์ช่วยเสริมสร้างความมีเหตุมีผล เป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระบบระเบียบในการทำงาน มีความสามารถในการตัดสินใจ และมีความรับผิดชอบ ด้วยเหตุนี้ในปัจจุบันคณิตศาสตร์จึงเป็นวิชาที่ยอมรับว่าเป็นภาษาสากลภาษาหนึ่งที่มีความจำเป็นในการดำเนินชีวิตและการประกอบอาชีพ สอดคล้องกับ กระทรวงศึกษาธิการ (2551) ที่กล่าวว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผลเป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ กล่าวคือคณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ซึ่งมีส่วนช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้นและช่วยให้เราสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข ดังนั้นเราคงปฏิเสธไม่ได้ว่าคณิตศาสตร์นั้นมีความเกี่ยวข้องกับการดำเนินชีวิตอยู่ตลอดเวลา นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังมีบทบาทของการเป็นเครื่องมือในการศึกษาศาสตร์วิชาอื่นๆ ทั้งด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีอีกด้วย

แม้ว่าคณิตศาสตร์จะมีความสำคัญและมีบทบาทในการดำเนินชีวิตดังที่กล่าวมาแล้ว แต่จากการศึกษาข้อมูลการประเมินผลในอดีตจนถึงปัจจุบัน พบว่า ผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนมีแนวโน้มลดต่ำลงเรื่อยๆ ดังจะเห็นได้จากรายงานผลการประเมินของ สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2559) กล่าวโดยสรุปว่า สำหรับประเทศไทยคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์จากการประเมินโครงการ TIMSS ใน ค.ศ. 1999 ค.ศ. 2007 ค.ศ. 2011 และ ค.ศ. 2015 พบว่าคะแนนเฉลี่ยของทั้งสองวิชามีแนวโน้มลดลงอย่างต่อเนื่อง สำหรับผลการประเมิน PISA ของประเทศไทย สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2560) กล่าวว่าแนวโน้มจากการประเมิน PISA 2000 จนถึง PISA 2015 มีผลการประเมินทั้งสามด้าน คือ ด้านวิทยาศาสตร์ ด้านการอ่าน และด้านคณิตศาสตร์มีแนวโน้มลดลง ยิ่งไปกว่านั้นในผลการประเมิน PISA ครั้งล่าสุดคือ PISA 2015 ผลการประเมินทั้งสามด้านกลับมีคะแนนลดลงจาก PISA 2012 โดยในด้านคณิตศาสตร์นั้นลดลงถึง 11

คะแนน สำหรับคะแนนการประเมิน PISA 2015 ในกลุ่มโรงเรียนสาธิตนั้นยังมีคะแนนเฉลี่ยที่สูงกว่ากลุ่มโรงเรียนอื่นๆ แต่เมื่อเทียบกับโรงเรียนเน้นวิทย์แล้วยังมีคะแนนเฉลี่ยที่ต่ำกว่า ซึ่งเห็นได้ชัดใน PISA 2015 มีคะแนนเฉลี่ยที่ลดลงอย่างมากเมื่อเทียบกับ PISA 2012 กล่าวคือมีคะแนนลดลงอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และในผลการทดสอบมาตรฐานระดับชาติ สมพงษ์ จิตระดับ (2559) กล่าวถึงผลการทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ปีการศึกษา 2558 ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่พบว่าคะแนนเฉลี่ยของวิชาหลักทั้ง 5 วิชา ไม่ผ่านครึ่งแม้แต่วิชาเดียว โดยเฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาหลักมีค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งประเทศเพียง 26.59%

จากรายงานผลการทดสอบทั้งระดับชาติและนานาชาติข้างต้นแสดงให้เห็นว่าระบบการศึกษาคณิตศาสตร์ของประเทศไทยยังไม่ประสบความสำเร็จเท่าที่ควรจะเป็น ถึงแม้ว่าในระยะเวลากว่า 10 ปีที่ผ่านมาประเทศไทยจะมีการปฏิรูปการศึกษามาแล้ว แต่ผลการประเมินการเรียนรู้ของนักเรียนโดยรวมทั้งประเทศก็ยังต่ำกว่าระดับที่คาดหวัง และคุณภาพทางการศึกษาคณิตศาสตร์ยังลดต่ำลงอย่างต่อเนื่อง สาเหตุหนึ่งอาจเกิดจากวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ไม่เอื้อต่อการพัฒนากระบวนการคิด รวมถึงทักษะกระบวนการหลายๆ ด้าน เช่น การให้เหตุผล การสื่อสาร การเชื่อมโยง เป็นต้น ปัญหาเหล่านี้เกิดขึ้นกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของโรงเรียนหลาย ๆ โรงเรียนในประเทศไทยมาอย่างยาวนาน โรงเรียนกลุ่มสาธิตถึงแม้ว่าจะมีคะแนนผลการประเมินอยู่ในระดับที่สูงกว่าโรงเรียนทั่วๆ ไป แต่ก็ยังต่ำกว่าโรงเรียนที่เน้นวิทย์ และมีหลายงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโรงเรียนสาธิตที่ชี้ให้เห็นว่าปัญหาเหล่านี้ก็จำเป็นต้องได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่องเช่นกัน ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2536) ได้ศึกษาการวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พบว่านักเรียนมีข้อผิดพลาดด้านการใช้ ทฤษฎีบท สูตร กฎ นิยามและสมบัติมากที่สุด รองลงมาคือ ด้านการคิดคำนวณ และด้านการตีความจากโจทย์ตามลำดับกล่าวคือ ด้านการตีความโจทย์ นักเรียนมีข้อผิดพลาดในส่วนการนำข้อมูลมาใช้ผิด มากที่สุด รองลงมาคือ แปลความหมายจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ถูกต้อง นอกจากนี้ วัฒนิตา นำแสงวานิช (2539) ได้ศึกษาผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เรื่อง เศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้แบบฝึกทักษะ พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ส่วนใหญ่มีข้อบกพร่องในเรื่องของความรู้คณิตศาสตร์ ลำดับการคิดคำนวณ และการแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ สอดคล้องกับ ขณิษฐา คำทอน (2539) ก็ได้ศึกษาข้อบกพร่องในกระบวนการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร เพื่อตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ตามขั้นตอนการแก้ปัญหาของโพลยา ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีข้อบกพร่องในกระบวนการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์เรียงลำดับจากมากไปน้อย คือ ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา ขั้นดำเนินการตามแผน ขั้นตรวจสอบวิธีการและคำตอบ และขั้นทำความเข้าใจปัญหา นอกจากนี้อภิชญา ลือชัย (2555) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ที่

ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 พบว่านักเรียนใช้ทักษะการดำเนินการตามแผนได้น้อยที่สุด ซึ่งจำเป็นต้องได้รับการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ อย่างไรก็ตามทักษะเหล่านี้ไม่ว่าจะเป็นทักษะด้านการให้เหตุผล การสื่อสาร การเชื่อมโยง และการแก้ปัญหาถือเป็นทักษะที่มีความจำเป็นและมีความสำคัญเกี่ยวข้องกันซึ่งนักเรียนควรได้รับการพัฒนาทักษะเหล่านี้ไปพร้อมๆ กัน ดังที่ กระทรวงศึกษาธิการ (2551) กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีคุณภาพนั้น จะต้องให้มีความสมดุลระหว่างสาระด้านความรู้ ทักษะและกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นสาระที่ 6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดย กระทรวงศึกษาธิการ (2551) กล่าวถึงคุณภาพของผู้เรียนหลังจบการศึกษาขั้นพื้นฐานในสาระที่ 6 ว่านักเรียนจะต้องสามารถใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ นอกจากนี้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่มีความจำเป็นต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์หนึ่งที่สำคัญที่ควรส่งเสริมและพัฒนา คือ ความสามารถในการให้เหตุผล ดังที่ Ross (1998) กล่าวไว้ว่าหนึ่งในเป้าหมายที่สำคัญของการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์คือการสอนตรรกะและการให้เหตุผลแก่นักเรียน ซึ่งการให้เหตุผลนั้นไม่ได้เป็นเพียงทักษะทางคณิตศาสตร์เท่านั้น หากแต่เป็นทักษะพื้นฐานในการดำเนินชีวิต และถ้าหากความสามารถในการให้เหตุผลไม่ได้รับการพัฒนาขึ้นในตัวนักเรียน คณิตศาสตร์ก็จะเป็นเพียงการปฏิบัติตามขั้นตอนและตัวอย่างของการเลียนแบบที่ปราศจากเหตุผลว่าทำไมสิ่งเหล่านั้นถึงมีความเหมาะสมทางความคิด นอกจากนี้ ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ (2524) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พบว่า คะแนนวิชาคณิตศาสตร์กับคะแนนความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์แบบนิรนัยและอุปนัยสัมพันธ์กันทางบวกอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และผลการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณพบว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคนสามารถพยากรณ์ได้โดยใช้คะแนนจากแบบทดสอบวัดความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ อีกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์หนึ่งที่สำคัญที่ควรส่งเสริมและพัฒนา คือ ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทาง

คณิตศาสตร์ ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวถึงความสำคัญของการเชื่อมโยงว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งสะท้อนให้เห็นถึงการใช้งานของคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงที่สามารถพบเห็นได้ทั่วไป การเชื่อมโยงมีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย (Meaningful learning) ดังนั้นทักษะการให้เหตุผล และทักษะการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จึงเป็นทักษะที่มีความสำคัญและจำเป็นที่ต้องได้รับการพัฒนาให้เกิดกับผู้เรียนอย่างต่อเนื่อง

ในการพัฒนาทักษะดังกล่าวข้างต้นนั้น จำเป็นต้องมีการพัฒนาการจัดกระบวนการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพ ผู้สอนจำเป็นต้องศึกษาและสรรหาวิธีการสอนใหม่ๆที่ช่วยพัฒนากระบวนการเรียนการสอน ให้สอดคล้องกับบริบทและความหลากหลายของผู้เรียนดังเช่น สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2558) กล่าวว่ารูปแบบการศึกษาคณิตศาสตร์แนวใหม่ ไม่ใช่มีเฉพาะสาระความรู้ แต่จะต้องให้ความสำคัญกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จะบอกว่านักเรียนควรจะทำอะไรเพื่อเชื่อมโยงบริบทหรือสถานการณ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพ จึงเป็นจุดมุ่งหมายสำคัญประการหนึ่งของการศึกษาไทยโดยเฉพาะอย่างยิ่งในกระแสการปฏิรูปการศึกษาในปัจจุบันที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้เต็มตามศักยภาพของตนเอง การจัดกิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์จึงควรมีความหลากหลายเพื่อส่งเสริมความสามารถของนักเรียนที่แตกต่างกัน อีกทั้งสอดคล้องกับบริบทและความเหมาะสมของเนื้อหาที่สอนให้มากที่สุด เพื่อประโยชน์ในการเรียนรู้ของนักเรียน

เป้าหมายหนึ่งของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์คือนักเรียนจะต้องสามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ ซึ่งสามารถพัฒนาความสามารถนั้นผ่านการฝึกทักษะในการแก้ปัญหา ซึ่งสอดคล้องกับ National Council of Teachers of Mathematics (1980) กล่าวโดยสรุปว่า การแก้ปัญหาเป็นจุดเน้นที่สำคัญเป้าหมายแรกของการเรียนการสอนและเป็นส่วนสำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ นับแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสอนการแก้ปัญหาหลากหลายมาก อย่างเช่นการสอนการแก้ปัญหาของ Polya (1957) ที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายและเป็นรากฐานสำคัญให้กับวิธีการแก้ปัญหาต่างๆในระยะเวลาต่อมา จากศึกษาค้นคว้าแนวคิดการสอนการแก้ปัญหาหนึ่งที่มีความน่าสนใจที่ช่วยพัฒนาความคิด ซึ่งเน้นทักษะกระบวนการคิดที่เป็นขั้นตอนและมีความหลากหลายในระดับปัญหาที่มีความซับซ้อนอีกทั้งมีความทั่วไปกับความสามารถที่หลากหลายของนักเรียนก็คือ *กระบวนการในการแก้ปัญหาตามแนวคิดของ Florence Mihaela Singer และ Cristian Voica* ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นเมื่อปี ค.ศ. 2012 โดยผู้พัฒนาได้พัฒนาขึ้นจากแนวคิดการแก้ปัญหาหลาย ๆ แนวคิดเข้าด้วยกันร่วมกับการศึกษากรอบแนวคิดของกระบวนการในการตั้งปัญหา (Problem Posing) ของกลุ่มนักเรียนและครูที่มีความสามารถด้านคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก โดย Singer and Voica (2012) ได้เสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้ ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding) เป็นขั้นตอนของการแปลความหมายและขยายความ

ปัญหาให้มีความชัดเจนยิ่งขึ้น ด้วยการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและรูปแบบการดำเนินการภายใต้ข้อจำกัดและเงื่อนไขในปัญหา ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing) เป็นขั้นตอนของการใช้ตัวแทนความคิด (mental model) เพื่อแทนข้อมูล หรือเงื่อนไขของปัญหาให้มีความเป็นรูปธรรมขึ้น ด้วยการวาดรูป การกำหนดตัวแปร การเขียนกราฟ หรือการค้นหาแบบรูป ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing) เป็นขั้นตอนของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ด้วยการใช้ทักษะและความสามารถทางคณิตศาสตร์ร่วมกับตัวแทนทางความคิดที่สร้างขึ้น เพื่อนำไปสู่การกำหนดรูปแบบหรือแนวทางในการแก้ปัญหา และขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing) เป็นขั้นตอนของการประยุกต์ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ต่างๆกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 3 เพื่อดำเนินการหาคำตอบของปัญหาและตระหนักถึงความสมเหตุสมผล และความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหา และแม้กระบวนการในการแก้ปัญหาตามแนวคิดของ Florence Mihaela Singer และ Cristian Voica นี้จะยังไม่พบงานวิจัยที่นำไปทดลองใช้จริงในชั้นเรียน แต่เมื่อศึกษาพื้นฐานแนวคิดของกระบวนการในการแก้ปัญหานี้ซึ่งส่วนหนึ่งถูกพัฒนามาจากรูปแบบการสอนการแก้ปัญหาของโพลยาที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายและถือเป็นรากฐานให้กับวิธีการแก้ปัญหาต่างๆ อีกทั้งก็ยังมีงานวิจัยต่างๆที่สามารถเทียบเคียงเกี่ยวกับความสำเร็จและประสิทธิภาพของกระบวนการแก้ปัญหาได้ ผู้วิจัยจึงสนใจที่ศึกษาผลของการนำกระบวนการในการแก้ปัญหานี้ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียน เพื่อประโยชน์ในการศึกษาคณิตศาสตร์และเพื่อเป็นอีกหนึ่งรูปแบบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะในการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นอีกในอนาคต ด้วยกระบวนการในการแก้ปัญหานี้มีจุดเน้นในเรื่องของการใช้หรือสร้างตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ต่อไปผู้วิจัยจึงขอเรียกกระบวนการในการแก้ปัญหานี้ว่า “การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์”

อย่างไรก็ตามหากวิเคราะห์ขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Singer and Voica (2012) เน้นให้นักเรียนใช้ตัวแทนทางความคิด (mental model) และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) จะพบว่าการที่นักเรียนจะสามารถแก้ปัญหาได้ตามแนวทางการแก้ปัญหานี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นนักเรียนจะต้องมีทักษะทางคณิตศาสตร์ที่ดี สามารถคิดวิเคราะห์และตีความข้อมูลได้เป็นอย่างดี รวมถึงมีความรู้ความเข้าใจพื้นฐานอันจะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่จากงานวิจัยข้างต้นชี้ให้เห็นว่าอาจจะเป็นเรื่องยากที่นักเรียนจะสามารถแก้ปัญหาได้ตามขั้นตอนการแก้ปัญหานี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ สาเหตุหนึ่งอาจจะเนื่องมาจากนักเรียนไม่ได้ถูกฝึกกระบวนการคิดอย่างต่อเนื่องและด้วยบริบทของห้องเรียนในโรงเรียนโดยทั่วไปแล้วเป็นห้องเรียนที่คละความสามารถ ดังนั้นเพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้นี้มีประสิทธิภาพและเหมาะสมกับบริบทที่หลากหลายของผู้เรียน ผู้วิจัยจึงศึกษาแนวคิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คือ แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (Cognitively Guided Instruction : CGI) ซึ่งแนวคิดการสอนนี้ถูกพัฒนาโดย Carpenter and

Fennema (1988) ซึ่งแนวทางการสอนตามแนวคิดนี้เชื่อว่า นักเรียนสามารถสร้างความรู้ได้เองบนพื้นฐานความรู้และมโนทัศน์เดิม โดยครูเป็นผู้คอยชี้แนะและออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ซึ่งหลักการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีดังนี้ 1) การจัดการเรียนการสอนควรมีความเฉพาะและเหมาะสมกับนักเรียนแต่ละคน 2) ปัญหา มโนทัศน์ หรือทักษะที่นักเรียนเรียนรู้ควรมีความหมายต่อนักเรียน โดยที่นักเรียนควรจะสามารถเชื่อมโยงแนวคิด หลักการที่นักเรียนรู้อยู่แล้วไปสู่ความรู้ใหม่ 3) การเรียนการสอนควรจัดขึ้นเพื่อส่งเสริมและสนับสนุนให้มีการสร้างความรู้ด้วยตัวนักเรียนเองภายใต้หลักการและแนวคิดที่นักเรียนรู้ 4) ครูต้องมีการประเมินอย่างต่อเนื่อง และต้องไม่ประเมินเพียงว่าผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาได้ แต่ครูต้องวิเคราะห์กระบวนการคิดของนักเรียน โดยการถามคำถามที่เหมาะสม 5) ครูต้องใช้ความรู้ความเข้าใจที่เป็นผลมาจากการประเมินความคิดของนักเรียนในการวางแผนการจัดการเรียนการสอน จากหลักการสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดข้างต้นจะพบว่าการจัดการเรียนการสอนเน้นให้นักเรียนสามารถสร้างมโนทัศน์ด้วยตนเอง โดยครูมีหน้าที่คอยแนะให้นักเรียนคิดและสามารถค้นพบความรู้นั้นเองผ่านกระบวนการแก้ปัญหา

ในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของ Singer and Voica (2012) เน้นให้นักเรียนได้วิเคราะห์ข้อมูล ตีความข้อมูลผ่านการใช้ตัวแทนทางความคิด แล้วประมวลความรู้ความเข้าใจเพื่อตัดสินใจเลือกหรือสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับข้อมูลหรือเงื่อนไขในสถานการณ์ปัญหารวมถึงเน้นให้นักเรียนได้พิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบด้วย และแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดตามแนวคิดของ Carpenter and Fennema (1988) ทำให้ในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหานี้ในแต่ละขั้นตอนนักเรียนได้คิดเชื่อมโยงประสบการณ์ความรู้เดิมผ่านการกระตุ้นชี้แนะในวิธีการที่เหมาะสมบนฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนอีกด้วย ซึ่งสอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้จากการศึกษาผลของการวิจัยที่สามารถเทียบเคียงกับการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ไม่ว่าจะเป็นในงานวิจัยของ Fauzan (2002) พบว่า เมื่อนักเรียนได้รับสถานการณ์ปัญหาตามบริบทที่ครูกำหนด นักเรียนเริ่มคิดแก้ปัญหาโดยเริ่มจากการใช้แบบจำลองหรือตัวแทนทางความคิดในรูปแบบของตนเอง เมื่อครูให้สถานการณ์ปัญหาที่ 3 – 4 กับนักเรียน สังเกตพบว่า ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหานักเรียนซักถามครูน้อยลง นอกจากนี้หลังการจัดการเรียนการสอน นักเรียนสามารถให้เหตุผลและเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น และในงานวิจัยของ Lawson and Chinnappan (2000) พบว่า นักเรียนมีระบบความคิดของการเชื่อมโยงความรู้ที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตที่นำไปสู่ความสำเร็จได้มากขึ้น นอกจากนี้ในงานวิจัยของ เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2553) พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสถิติและการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปสู่ชีวิตจริงหลังเรียนจาก

กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการใช้คำถามระดับสูงสูงกว่าก่อนเรียน และงานวิจัยของ เชิดพงศ์ ชาชุมวงศ์ (2557) พบว่า นักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์สูงมีทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ปานกลางและต่ำ จากการวิเคราะห์ขั้นตอนและงานวิจัยที่มีขั้นตอนใกล้เคียงกันจึงมีความเป็นไปได้ที่แนวทางการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจะสามารถพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้

จากข้อมูลข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดเพื่อศึกษาผลในด้านความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยเลือกศึกษากับเนื้อหาเรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร และศึกษากับกลุ่มเป้าหมายที่เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร ผู้วิจัยคาดหวังว่าการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ต่อไป

คำถามการวิจัย

การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดสามารถพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ให้ดีขึ้นได้หรือไม่ อย่างไร

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

4. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

5. เพื่อศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

สมมติฐานการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด พบว่ายังไม่ปรากฏงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยจึงอ้างงานวิจัยเพื่อเทียบเคียงและการวิเคราะห์ขั้นตอนของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ดังรายละเอียดต่อไปนี้

จากงานวิจัยของ Fauzan (2002) ได้ศึกษาการจัดการเรียนการสอนในชั้นประถมศึกษาเกี่ยวกับกับการประยุกต์ใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ในการสอนเรขาคณิตในประเทศอินโดนิเซีย จากการศึกษาพบว่า เมื่อนักเรียนได้รับสถานการณ์ปัญหาตามบริบทที่ครูกำหนด นักเรียนเริ่มคิดแก้ปัญหาโดยเริ่มจากการใช้แบบจำลองหรือตัวแทนทางความคิดในรูปแบบของตนเอง เมื่อครูให้สถานการณ์ปัญหาที่ 3 – 4 กับนักเรียน สังเกตพบว่า ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหานักเรียนซักถามครูน้อยลง นอกจากนี้หลังการจัดการเรียนการสอน นักเรียนสามารถให้เหตุผลและเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น สอดคล้องกับ Hendricks (2013) ได้ศึกษาผลการใช้แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดในการจัดการเรียนรู้ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 104 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองจำนวน 53 คน และกลุ่มควบคุมจำนวน 51 คน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่สอนโดยใช้แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม รวมทั้งสามารถพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่า การสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีส่วนช่วยในสร้างบรรยากาศในการเรียนการสอนซึ่งมีผลดีต่อนักเรียน ทำให้บรรยากาศในการจัดการเรียนรู้เปลี่ยนแปลงในเชิงบวก และสอดคล้องกับ Lee and Chen (2015) ได้ศึกษาผลของการใช้การสอนการถามแบบโพลยา (Polya Questioning) สำหรับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นการวิจัยที่ใช้วิธีการการแก้ปัญหาของโพลยา 4 ขั้นตอน โดยใช้คำถามกระตุ้นและการสาธิต การทดลองแบ่งนักเรียนเป็น 2 กลุ่มคือกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยที่กลุ่มทดลองใช้การสอนการถามแบบโพลยา

และกลุ่มควบคุมใช้การสอนแบบการนำเสนอโดยตรง ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนการถามแบบโพลยามีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตและความรู้สึกทางเรขาคณิตที่ชัดเจนสูงกว่ากลุ่มควบคุม

นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ เทพสุดา เกตุทอง (2551) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน จังหวัดลพบุรี ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม และ สุรชัย วงศ์จันเสือ (2555) ได้ศึกษาผลการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด DAPIC และ CGI ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผลการศึกษาพบว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด DAPIC และ CGI มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการเรียนแบบปกตินักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด DAPIC และ CGI มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณเปลี่ยนแปลงในทางที่ดีขึ้นเป็นลำดับ นอกจากนี้ สาวิตรี มูลสุวรรณ (2557) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการศึกษาพบว่านักเรียนเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากการวิเคราะห์ขั้นตอนของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด พบว่าในแต่ละขั้นของกิจกรรมการเรียนรู้จะเน้นให้นักเรียนได้ตีความข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหา หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหา แปลงข้อมูลคณิตศาสตร์ให้อยู่ในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่าย และประมวลความรู้ความเข้าใจเพื่อตัดสินใจเลือกหรือสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับข้อมูลหรือเงื่อนไขในสถานการณ์ปัญหา รวมถึงเน้นให้นักเรียนพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ และในแต่ละขั้นตอนของกิจกรรมการเรียนรู้นี้ยังเน้นให้นักเรียนได้คิดเชื่อมโยงประสบการณ์ความรู้เดิมผ่านการกระตุ้นชี้แนะในวิธีการที่เหมาะสมซึ่งสอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

จากผลการวิจัยและการวิเคราะห์ขั้นตอนของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดข้างต้นมีความเป็นไปได้ว่าการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดน่าจะส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยครั้งนี้ว่า

1. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

2. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

จากงานวิจัยของ Lawson and Chinnappan (2000) ได้ศึกษาการเชื่อมโยงความรู้ในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต โดยตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างการแก้ปัญหาและระดับความรู้ของนักเรียน พบว่า นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงมีการเชื่อมโยงความรู้ได้ดีกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ และมีระบบความคิดของการเชื่อมโยงความรู้ที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตที่นำไปสู่ความสำเร็จได้มากกว่า สอดคล้องกับ Downton and Sullivan (2017) ได้ศึกษาการตั้งปัญหาที่ซับซ้อนโดยใช้การคิดแบบทวีคูณกระตุ้นให้นักเรียนใช้กลยุทธ์ที่ซับซ้อนและสร้างการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า การตั้งปัญหาที่ซับซ้อนอย่างเหมาะสมจะกระตุ้นการใช้กลยุทธ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งสังเกตเห็นได้จากการทำแบบทดสอบหรืองานที่ได้รับมอบหมายของนักเรียนทำให้เกิดการคิดแบบทวีคูณ และพบว่างานที่เกี่ยวข้องกับจำนวนที่ซับซ้อนทำให้เกิดการใช้ความคิดเชิงทวีคูณที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับ เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2553) ได้ศึกษาการให้เหตุผลเชิงสถิติและการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปสู่ชีวิตจริงโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการใช้คำถามระดับสูงสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลเชิงสถิติและการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปสู่ชีวิตจริงหลังเรียนจากกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการใช้คำถามระดับสูงสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ สุธารัตน์ สมรรถการ (2556) ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผลการศึกษาสรุปได้นี้ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถในการแก้ปัญหา และความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หลังการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้

รู้คิด (CGI) เรื่อง วิธีการเรียงสับเปลี่ยนและวิธีการจัดหมู่สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 นอกจากนี้ เชิดพงศ์ ชาชุมวงศ์ (2557) ศึกษาการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และความใฝ่รู้ใฝ่เรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ปัญหาเป็นฐานร่วมกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์สูงมีทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ปานกลางและต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ปานกลางมีทักษะการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากผลการวิจัยข้างต้นมีความเป็นไปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดน่าจะส่งเสริมความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานของการวิจัยครั้งนี้ว่า

3. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

4. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร

2. เนื้อหาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นส่วนหนึ่งของสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐานตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร

3. ตัวแปรที่ศึกษาในงานวิจัย ได้แก่

3.1 ตัวแปรต้น ประกอบด้วย การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดและการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

3.2.1 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.2.2 ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

1. การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Singer and Voica (2012) ที่เน้นการตีความและใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อเชื่อมโยงไปสู่การเลือกหรือการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้วใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เลือกหรือสร้างร่วมกับความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์เพื่อการดำเนินการหาคำตอบของปัญหา ซึ่งมีขั้นตอน 4 ขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding) เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาด้วยการตีความเกี่ยวกับบริบทของปัญหา (background theme) ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ (data) และการกระทำทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายหรือเป็นตัวแทนการกระทำต่าง ๆ ของปัญหา(operating schemes) และเงื่อนไขหรือข้อจำกัด (the constraints) จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ ภายใต้เงื่อนไขหรือข้อจำกัด

ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing) เป็นขั้นตอนของการใช้ตัวแทนความคิด (mental model) แทนข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือเงื่อนไขจากขั้นที่ 1 เพื่อให้เข้าใจข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือเงื่อนไขในปัญหาให้ชัดเจนขึ้น โดยตัวแทนทางความคิดนั้นสามารถแสดงได้ในหลายลักษณะผ่านการวาดรูปประกอบสถานการณ์ การกำหนดตัวแปรเพื่อแทนสิ่งที่ไม่ทราบค่า การเขียนกราฟคร่าวๆ รวมถึงการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น

ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing) เป็นขั้นตอนของการนำตัวแทนทางความคิดที่ใช้ในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลเพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ให้สัมพันธ์กับปัญหารวมถึงการกำหนดวิธีการหรือแนวทางในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing) เป็นขั้นตอนของการดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากขั้นที่ 3 ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จากนั้นพิจารณาความสมเหตุสมผลและความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา รวมถึงการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน

2. แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (Cognitively Guided Instruction : CGI) หมายถึง แนวคิดในการจัดการเรียนรู้ที่ครูใช้ความรู้และความเข้าใจของนักเรียนเป็นฐานในออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ความเข้าใจและเชื่อมโยงประสบการณ์ความรู้เดิมผ่านกระบวนการในการแก้ปัญหา โดยครูมีบทบาทเป็นผู้แนะแนวทางเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดบนฐานความรู้ความเข้าใจอย่างต่อเนื่องจนนักเรียนสามารถสร้างหรือสรุปความรู้ได้ด้วยตนเอง

3. การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเองโดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตามแนวคิดของ Singer and Voica (2012) ซึ่งในแต่ละขั้นตอนครูใช้แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดเพื่อให้นักเรียนคิดบนฐานความรู้ความเข้าใจของตนเองอย่างต่อเนื่องจนสามารถดำเนินการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองอย่างมีประสิทธิภาพ ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นนำ เป็นขั้นกระตุ้นความสนใจนักเรียนโดยใช้การถามตอบและเตรียมความพร้อมในการเรียนรู้ให้กับนักเรียนด้วยการทบทวนความรู้เดิมหรือมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา

ขั้นสอน เป็นขั้นจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เน้นการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding) เป็นขั้นที่ครูเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา จากนั้นให้นักเรียนวิเคราะห์เพื่อแยกแยะและแปลความในประเด็นที่เกี่ยวกับบริบทของปัญหา ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ เงื่อนไขหรือข้อจำกัด และการกระทำทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายหรือเป็นตัวแทนการกระทำต่าง ๆ ของปัญหา จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ โดยครูประเมินการแยกแยะและแปลความของนักเรียน หากพบว่าในประเด็นใดที่นักเรียนไม่สามารถแยกแยะและแปลความได้ ครูใช้คำถามแนะแนวทางบนฐานข้อมูลที่นักเรียนคิด เพื่อให้นักเรียนได้คิดอย่างต่อเนื่องจนนักเรียนสามารถแยกแยะและแปลความได้ครบทุกประเด็นด้วยตนเอง

ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing) เป็นขั้นที่นักเรียนใช้ "ตัวแทนทางความคิด" แทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อทำความเข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น โดยครูประเมินการใช้ตัวแทนทางความคิดของนักเรียน หากพบว่าตัวแทนทางความคิดที่นักเรียนใช้ไม่สามารถทำให้นักเรียนเข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น ครูใช้คำถามแนะแนวทางบนฐานข้อมูลที่นักเรียนคิด เพื่อให้นักเรียนได้คิดอย่างต่อเนื่อง จนนักเรียนสามารถใช้ตัวแทนทางความคิดหรือสร้างตัวแทนทางความคิดที่สัมพันธ์กับปัญหาได้ด้วยตนเอง

ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing) เป็นขั้นที่นักเรียนนำตัวแทนทางความคิดที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลร่วมกันเพื่อสร้างหรือเลือก "ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์"แล้วกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา โดยครูประเมินตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน หากพบว่าตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนสร้างหรือเลือกไม่

สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ หรือตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ไม่สอดคล้องกับปัญหา ครูใช้คำถามแนะแนวทางบนฐานข้อมูลที่นักเรียนคิด เพื่อให้นักเรียนได้คิดอย่างต่อเนื่อง จนนักเรียนสามารถสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing) เป็นขั้นที่นักเรียนดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ "ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์" ที่ได้จากขั้นที่ 3 ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้น โดยครูประเมินการดำเนินการหาคำตอบ หากพบว่าเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนใช้ไม่สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ หรือเทคนิคทางคณิตศาสตร์ไม่สอดคล้องกับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ ครูใช้คำถามแนะแนวทางบนฐานข้อมูลที่นักเรียนคิด เพื่อให้นักเรียนได้คิดอย่างต่อเนื่อง จนนักเรียนสามารถประยุกต์ใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ในการดำเนินการหาคำตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพด้วยตนเอง จากนั้นครูกระตุ้นให้นักเรียนสรุปคำตอบของปัญหาด้วยการพิจารณาความสมเหตุสมผลและความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา รวมถึงให้นักเรียนพิจารณาการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน

<u>ขั้นสรุป</u> เป็นขั้นการใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ทั้งความรู้คณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหาและวิธีการหรือแนวทางในการแก้ปัญหา

4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ หมายถึง การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ตามแนวคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของสถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลในปัญหาและสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาความสัมพันธ์และการหาข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล ในงานวิจัยนี้องค์ประกอบที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมี 3 ลักษณะ ดังนี้

5.1 การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล เป็นความสามารถในการใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้

5.2 การหาข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล

5.3 การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

ในการวิจัยนี้ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์พิจารณาจากคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้และหลักการทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กับปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเพื่อใช้ในการกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา ในงานวิจัยนี้องค์ประกอบที่แสดงถึงความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมี 3 ลักษณะ ซึ่งผู้วิจัยปรับปรุงจากแนวคิดในการวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของ National Council of Teachers of Mathematics (2000) ดังนี้

6.1 การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถในการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในสถานการณ์ปัญหาและการแก้ปัญหา

6.2 การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในประมวลความรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาจากข้อที่ 6.1 แล้วกำหนดเป็นแนวทางหรือวิธีการในการแก้ปัญหา

6.3 การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เดิม เป็นความสามารถในการระบุตัวอย่างหรือ ระบุปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในข้อที่ 6.1

ในการวิจัยนี้ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์พิจารณาจากคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

7. นักเรียน หมายถึง นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร

ประโยชน์ที่ได้รับ

1. นักเรียนได้แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เน้นการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งมีส่วนช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเอง

2. ครูและบุคลากรที่เกี่ยวข้องสามารถนำการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ไปประยุกต์ใช้หรือเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพื่อพัฒนานักเรียนต่อไป

3. ข้อค้นพบจากการวิจัยครั้งนี้จะเป็นแนวทางและเป็นประโยชน์สำหรับนักวิจัยต่อการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัย เรื่อง ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อนำมาประกอบในการวิจัย และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

ตอนที่ 1 การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1.1 ความเป็นมาและแนวคิดพื้นฐานของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1.2 ขั้นตอนของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1.3 บทบาทของครูและนักเรียนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

2.1 แนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

2.2 ความหมายของแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

2.3 หลักการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

2.4 ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

ตอนที่ 3 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.2 ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.3 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.4 แนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3.5 การวัดและการประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 4 ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

4.2 ลักษณะของการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

4.3 ความสำคัญของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

4.4 แนวทางการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

4.5 การวัดและประเมินผลความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 1 การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1. ความเป็นมาและแนวคิดพื้นฐานของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่ใช้ในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งถูกพัฒนาโดย Florence Mihaela Singer และ Cristian Voica ในปี ค.ศ. 2012 ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหานี้มีพื้นฐานของกระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดการแก้ปัญหาที่สำคัญ ได้แก่ แนวคิดการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ซึ่งเป็นโมเดลในการแก้ปัญหาที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย และยังเป็นแนวคิดพื้นฐานให้กับโมเดลการแก้ปัญหาอื่นๆอีกมากมาย และงานวิจัยของ Newman (1977) ศึกษาการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดในการแก้ปัญหาของนักเรียน พบข้อผิดพลาดต่างๆ ในระหว่างที่นักเรียนแก้ปัญหาที่น่าสนใจหลายด้าน และงานวิจัยของ Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta - Pantazi, and Sriraman (2005) นอกจากนี้ผู้พัฒนาได้ศึกษาข้อจำกัดของทฤษฎีที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหาหลายๆทฤษฎีพบว่ามีข้อจำกัดและมีความเหมาะสมในการใช้ในบริบทที่แตกต่างกัน เช่น โมเดลการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya) ที่เน้นไปที่การสอนการแก้ปัญหาเป็นองค์ประกอบที่สำคัญ ซึ่งทำให้ผู้พัฒนาได้พยายามมองหาโมเดลการแก้ปัญหาที่สามารถอธิบายขั้นตอนกระบวนการคิดที่เป็นขั้นตอน มากกว่ารูปแบบการสอนของครู ทำให้ผู้พัฒนา Florence Mihaela Singer และ Cristian Voica จึงได้เสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาดังกล่าว

เนื่องด้วยแนวคิดพื้นฐานของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้พัฒนา Singer และ Voica ได้ศึกษาจากแนวคิดการแก้ปัญหาหลาย ๆ แนวคิด และหลาย ๆงานวิจัยที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Polya (1957) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีการวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหาที่เป็นระบบและมีประสิทธิภาพ ขั้นตอนของกระบวนการดังกล่าวมี 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) เป็นขั้นของการทำ ความเข้าใจบริบทของปัญหาซึ่งต้องเข้าใจว่าสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร ข้อมูลกำหนดให้มีอะไรบ้าง เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องคืออะไร

ขั้นที่ 2 การวางแผน (Devising a plan) เป็นขั้นตอนของการวางแผนแก้ปัญหาด้วยการ เลือกกลยุทธ์หรือวิธีการที่เหมาะสมกับโจทย์ปัญหา จากนั้นเชื่อมโยงข้อมูลในปัญหากับสิ่งที่ต้องการ อยากรู้ เลือกวิธีการ กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหา (Carrying out the plan) เป็นขั้นของการลงมือค้นหาคำตอบตามแผนหรือวิธีการ กลยุทธ์ที่เลือกไว้

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบ (Looking back) เป็นขั้นของการตรวจสอบคำตอบว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่อย่างไร ซึ่งรวมถึงการขยายความคิดเพื่อค้นหาวิธีอื่นในการแก้ปัญหาอีกด้วย

Newman (1977) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ข้อผิดพลาดในการแก้ปัญหาของนักเรียน (An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks) เพื่อค้นหาแนวทางให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งควรกระตุ้นและให้ความสำคัญ 5 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 การอ่านปัญหา และวงกลมข้อมูลหรือเงื่อนไขที่สำคัญที่มีความสำคัญในการแก้ปัญหา หาข้อความที่แทนในบางคำศัพท์ให้มีความชัดเจนและเข้าใจง่ายขึ้น (Reading or Decoding)

ขั้นที่ 2 การอ่านทำความเข้าใจปัญหาว่าปัญหาต้องการอะไร (Comprehension)

ขั้นที่ 3 วิเคราะห์เพื่อหาแนวทางในการแก้ปัญหา อาจจะด้วยการวาดภาพประกอบการคาดการณ์คำตอบ หรือหากลยุทธ์เพื่อวางแผนในการแก้ปัญหา (Transformation)

ขั้นที่ 4 ใช้ทักษะกระบวนการที่มีอยู่ประยุกต์เข้าไปเพื่อหาคำตอบของปัญหา รวมถึงการมองหาแนวทาง วิธีการอื่นที่ใช้แก้ปัญหานี้ได้ (Process Skills)

ขั้นที่ 5 แปลความหมายของคำตอบที่ได้ว่ามีความสัมพันธ์กับปัญหาหรือไม่และบันทึกแนวทางในการแก้ปัญหา (Encoding)

Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, and Sriraman (2005) ได้เสนอโมเดลของกระบวนการทางความคิด ที่เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการแก้ปัญหาและกระบวนการตั้งปัญหา (An empirical taxonomy of problem posing processes) ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 การแก้ไขข้อมูลให้ออกมาในรูปของตัวเลข (editing)

ขั้นที่ 2 การคัดเลือกข้อมูลที่เป็นตัวเลข (selecting)

ขั้นที่ 3 การทำความเข้าใจและการจัดการ (comprehending and organizing)

ขั้นที่ 4 การแปลงข้อมูล (translating)

จากแนวคิดพื้นฐานการแก้ปัญหาข้างต้นทำให้ Singer และ Voica ได้เสนอการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่ใช้พัฒนาทักษะและกระบวนการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ การถอดรหัส (Decoding) การใช้ตัวแทน (Representing) การประมวลผล (Processing) และ การดำเนินการ (Implementing) ดังรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

2. ขั้นตอนของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นตอนของการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Singer and Voica (2012) ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่ การถอดรหัส (Decoding) การใช้ตัวแทน (Representing) การประมวลผล (Processing) และ การดำเนินการ (Implementing) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding) เป็นขั้นตอนของการแปลความหมาย ขยายความ และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลในปัญหาให้มีความชัดเจนยิ่งขึ้น สิ่งสำคัญที่ผู้แก้ปัญหาต้องตระหนักและพิจารณาเมื่อเจอปัญหาในขั้นตอนนี้ คือ

- บริบทของปัญหา (background theme) เป็นบริบททั่วไปที่ปรากฏในปัญหา พิจารณาว่าเป็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องใด เช่น รูปสามเหลี่ยม เส้นตรง การแข่งขันหมากรุก อายุ หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น

- ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ (data) พิจารณาว่าเป็นโจทย์ปัญหาประเภทที่เกี่ยวกับข้อความสถานการณ์ปัญหาหรือเกี่ยวกับตัวเลข

- แนวทางการดำเนินการ (operating schemes) เป็นการกระทำต่าง ๆ ตามคำอธิบายของปัญหา ในรูปแบบของการกระทำระหว่างกันอาจจะเป็นการกระทำทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายกิจกรรมต่าง ๆ ของปัญหา เช่น การพล็อต, การวาดรูป, การลากเส้น, การตัดขวาง, การตัด ฯลฯ ได้ รูปแบบของการกระทำระหว่างกันบางอย่างอาจกล่าวไว้เป็นนัย ๆ ในขณะที่บางครั้งก็แสดงไว้อย่างชัดเจนในปัญหา

- เงื่อนไขหรือข้อจำกัด (constraints) หรือสิ่งที่พึงระวังที่กำหนดไว้ในปัญหา เช่น จงแก้สมการ $\sqrt{x+1}=2$ ผู้แก้จะต้องตะหนักเองว่าค่าของตัวแปร x จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ -1 และเงื่อนไขที่กำหนดไว้ เช่น จงหาคำตอบของสมการ $x^2=4$ เมื่อ $x \le 0$ ซึ่งเงื่อนไขที่ต้องตระหนัก คือ คำตอบของสมการต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0

ดังนั้นในขั้นตอนการถอดรหัส (Decoding) นี้เพื่อที่จะทำความเข้าใจในปัญหาผู้ที่แก้ปัญหาจะต้องให้ความสนใจไปยังการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลและแนวทางการดำเนินการภายใต้ข้อจำกัดและเงื่อนไขในปัญหานั้นๆ

ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing) เป็นขั้นตอนของการใช้ตัวแบบทางความคิด (Mental Model) เพื่อแทนข้อมูล หรือเงื่อนไขของปัญหาให้มีความเป็นรูปธรรมขึ้นด้วยการการวาดรูป การกำหนดตัวแปร การเขียนกราฟ หรือการค้นหาแบบรูป เป็นต้น

สำหรับองค์ประกอบที่สำคัญของขั้นตอนนี้คือ ตัวแบบทางความคิด (mental model) ซึ่งในที่นี้ หมายถึง รูปแบบ/โครงสร้างที่ใช้แทนข้อมูลและเงื่อนไขในปัญหาซึ่งถูกสร้างขึ้นเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น ซึ่งอาจจะแทนได้ในลักษณะของ รูปภาพ การกำหนดค่าตัวแปร การวาดรูป แบบแผน เขียนกราฟ วัตถุทางกายภาพ เป็นต้น หรือในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น

ดังนั้นในขั้นตอนการใช้ตัวแทน (Representing) นี้เมื่อผู้แก้ปัญหาได้ผ่านขั้นตอนการอ่าน/ การฟังและการทำความเข้าใจปัญหาแล้วผู้แก้ปัญหาจะใช้ตัวแบบทางความคิด (mental model) ซึ่งอาจออกมาในลักษณะของการวาดรูปประกอบ แบบแผนต่างๆ หรือเปลี่ยนปัญหาในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น

ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing) เป็นขั้นตอนของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ด้วยการประมวลความรู้ทางคณิตศาสตร์ร่วมกับตัวแทนความคิดที่สร้างขึ้น เพื่อนำไปสู่การกำหนดแบบแผนหรือแนวทางที่ใช้ในการแก้ปัญหา

เมื่อผู้แก้ปัญหาสามารถสร้างตัวแทนความคิดได้แล้วก็จะประมวลความรู้ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของตนเองเพื่อระบุหรือสร้าง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ที่มีความสัมพันธ์กับปัญหาขึ้นมา ในที่นี้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) จะหมายถึงโครงสร้างทางมโนทัศน์ซึ่งกำหนดไว้อย่างชัดเจนด้วยมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และเทคนิคต่างๆ อาจจะอยู่ในลักษณะของ สมการ ระบบ ขั้นตอน วิธีการคำนวณที่หลากหลาย เป็นต้น

ดังนั้น ในขั้นตอนการประมวลผล (Processing) นี้ผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ทักษะและความสามารถทางคณิตศาสตร์ร่วมกับตัวแทนทางความคิด (mental configurations) ที่สร้างขึ้น เพื่อพัฒนา/สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ที่สอดคล้องและสัมพันธ์กับปัญหา ตัวอย่างของพฤติกรรมที่แสดงออกในขั้นตอนนี้ เช่น

- การค้นหาสถานการณ์ที่เป็นได้ผ่านทางการวาดรูปประกอบ
- การตัดสินใจละทิ้งหรือตัดตัวแปรบางตัว
- การอ้างถึงความสัมพันธ์ใหม่ของความสอดคล้องกัน เช่น ความคล้าย สมการ อสมการ
- การเปลี่ยนข้อความปัญหาในรูปโจทย์ปัญหาไปเป็นสมการ เป็นต้น

ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing) เป็นขั้นตอนของการประยุกต์ใช้ความรู้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเพื่อค้นหาคำตอบของปัญหา และการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ

การแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อหาคำตอบโดยการประยุกต์ใช้เทคนิคเฉพาะที่เรียนมาซึ่งเทคนิคต่างๆอาจจะแสดงออกมาในหลายลักษณะ

- การใช้การคำนวณที่เหมาะสม หรือการพิสูจน์ที่เหมาะสมกับปัญหา
- การพิจารณาความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหาโดยการกำจัดค่าที่ไม่เป็นไปตามข้อจำกัดของปัญหาทิ้ง หรือการใช้การเปรียบเทียบความเหมือนความต่าง
- การใช้เทคนิคการแทนที่ตัวแปร เป็นต้น

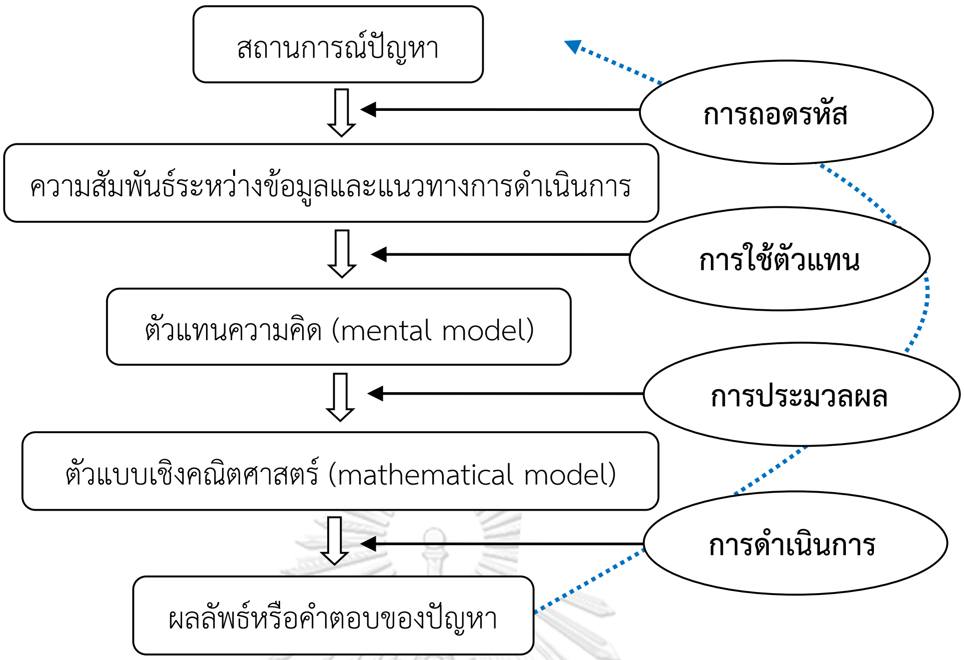
ดังนั้น ในขั้นตอนของการดำเนินการ (Implementing) นี้ผู้แก้ปัญหาจะต้องประยุกต์ใช้เทคนิคและทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนมาเพื่อค้นหาคำตอบภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดในปัญหา รวมถึงการตระหนักถึงความสมเหตุสมผล และความสอดคล้องของคำตอบกับปัญหาด้วย รวมถึงการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบขั้นตอนการแก้ปัญหาของ Polya (1957) กับการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของ Singer and Voica (2012)

Polya (1957)	Singer & Voica (2012)
ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) เป็นขั้นของการทำความเข้าใจบริบทของปัญหาซึ่งต้องเข้าใจว่าสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร ข้อมูลกำหนดให้มีอะไรบ้าง เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องคืออะไร **ขั้นที่ 2 การวางแผน (Devising a plan)** เป็นขั้นตอนของการวางแผนแก้ปัญหาด้วยการเลือกกลยุทธ์หรือวิธีการที่เหมาะสมกับโจทย์ปัญหา จากนั้นเชื่อมโยงข้อมูลในปัญหากับสิ่งที่ต้องการอยากรู้ เลือกวิธีการ กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา	**ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding)** เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาด้วยการตีความเกี่ยวกับบริบทของปัญหา (background theme) ข้อมูลทางคณิตศาสตร์(data) แนวทางการดำเนินการ (operating schemes)และเงื่อนไขหรือข้อจำกัด (the constraints) จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ ภายใต้เงื่อนไขหรือข้อจำกัด **ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing)** เป็นขั้นตอนของการใช้ตัวแทนความคิด (mental model) แทนข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือเงื่อนไขจากขั้นที่ 1 เพื่อให้เข้าใจข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือเงื่อนไขนั้นที่ได้ชัดเจนขึ้น โดยตัวแทนทางความคิดนั้นสามารถแสดงได้ใน

ขั้นที่ 3 การดำเนินการแก้ปัญหา (Carrying out the plan) เป็นขั้นของการลงมือค้นหาคำตอบตามแผนหรือวิธีการ กลยุทธ์ที่เลือกไว้	หลายลักษณะผ่านการวาดรูปประกอบสถานการณ์ การกำหนดตัวแปรเพื่อแทนสิ่งที่ไม่ทราบค่า การเขียนกราฟคร่าวๆ รวมถึงการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น
ขั้นที่ 4 การตรวจสอบ (Looking back) เป็นขั้นของการตรวจสอบคำตอบว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่อย่างไร ซึ่งรวมถึงการขยายความคิดเพื่อค้นหาวิธีอื่นในการแก้ปัญหาอีกด้วย	**ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing)** เป็นขั้นตอนของการนำตัวแทนทางความคิดที่ใช้ในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลเพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ให้สัมพันธ์กับปัญหา รวมถึงกำหนดวิธีการหรือแนวทางในการแก้ปัญหา
	ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing) เป็นขั้นตอนของการดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากขั้นที่ 3 ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จากนั้นพิจารณาความสมเหตุสมผลและความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา รวมถึงการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน

จากขั้นตอนการแก้ปัญหาตามการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกพัฒนาโดย Singer & Voica (2012) สามารถแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละขั้นตอนตามแผนภาพดังต่อไปนี้



ภาพที่ 1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาตามการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกพัฒนาโดย Singer & Voica (2012)

จากข้อมูลข้างต้น โดยผู้วิจัยสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาตามการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ Singer & Voica (2012) ดังนี้

ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding) เป็นขั้นตอนของการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาด้วยการตีความเกี่ยวกับบริบทของปัญหา (background theme) ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ (data) แนวทางการดำเนินการ (operating schemes) และเงื่อนไขหรือข้อจำกัด (the constraints) จากนั้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ ภายใต้เงื่อนไขหรือข้อจำกัด

ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing) เป็นขั้นตอนของการใช้ตัวแทนความคิด (mental model) แทนข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือเงื่อนไขจากขั้นที่ 1 เพื่อให้เข้าใจข้อมูลทางคณิตศาสตร์หรือเงื่อนไขนั้นให้ชัดเจนขึ้น โดยตัวแทนทางความคิดนั้นสามารถแสดงได้ในหลายลักษณะผ่านการวาดรูปประกอบสถานการณ์ การกำหนดตัวแปรเพื่อแทนสิ่งที่ไม่ทราบค่า การเขียนกราฟคร่าวๆ รวมถึงการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น

ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing) เป็นขั้นตอนของการนำตัวแทนทางความคิดที่ใช้ในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลเพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ให้สัมพันธ์กับปัญหา รวมถึงกำหนดวิธีการหรือแนวทางในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing) เป็นขั้นตอนของการดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากขั้นที่ 3 ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จากนั้นพิจารณาความสมเหตุสมผลและความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา รวมถึงการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน

3. บทบาทของครูและนักเรียนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

จากการศึกษาและวิเคราะห์ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้วิจัยได้สรุปบทบาทของครูและนักเรียนดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2 บทบาทของครูและนักเรียนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ขั้นตอนของกิจกรรมการเรียนรู้	บทบาทของนักเรียน	บทบาทของครู
ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding)	- ทำความเข้าใจปัญหา - แปลความหมายและขยายความปัญหาให้มีความชัดเจนขึ้น - ค้นหาสาระสำคัญของปัญหา - พิจารณาลักษณะข้อมูลในปัญหา - ค้นเงื่อนไข/ข้อจำกัด (constraints) หรือสิ่งที่พึงระวังที่กำหนดไว้ในปัญหา - สร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ภายใต้เงื่อนไขและข้อจำกัดของปัญหา	- กระตุ้นให้นักเรียนคิดวิเคราะห์บนพื้นฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียน - กระตุ้นให้นักเรียนแยกแยะประเด็นข้อมูลในปัญหา - ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของนักเรียนจากการสรุปสาระสำคัญของปัญหา สิ่งที่โจทย์กำหนดและเงื่อนไขมีอะไรบ้างและสัมพันธ์กันอย่างไร รวมถึงการระบุสิ่งที่โจทย์ต้องการหาคืออะไร

ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing)	- ใช้ตัวแทนทางความคิดเพื่อแทนข้อมูล และเงื่อนไขของปัญหา - ใช้ตัวแทนทางความคิดเพื่อทำความเข้าใจปัญหา - เชื่อมโยงความรู้พื้นฐานกับข้อมูลในปัญหา - ใช้ตัวแทนทางความคิด ด้วยการกำหนดค่าตัวแปร การวาดรูป แบบแผน เขียนกราฟ วัตถุทางกายภาพ หรือการแปลงในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น	- กระตุ้นการใช้ตัวแทนทางความคิดเพื่อแทนข้อมูลและเงื่อนไขในปัญหา - กระตุ้นการใช้ความรู้ความเข้าใจบนฐานความรู้เดิม ผ่านการวาดรูป การกำหนดตัวแปร การเขียนกราฟหรือการแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปที่เข้าใจง่ายขึ้น
ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing)	- ประมวลความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ร่วมกับตัวแทนทางความคิด เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ - กำหนดแผนการดำเนินการที่เหมาะสมกับปัญหา แนวทางการดำเนินการหาคำตอบที่หลากหลาย - การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงออกในลักษณะของสมการ หรือแนวทางการแก้ปัญหาที่หลากหลาย	- กระตุ้นให้นักเรียนประมวลความรู้ความเข้าใจและทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ - กระตุ้นการสร้างแผนการดำเนินการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยให้นักเรียนร่วมกันแลกเปลี่ยนความคิดเห็นภายในชั้นเรียน

ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing)	- ใช้ความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์รวมถึงกลวิธีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้น - ดำเนินการเพื่อค้นหาคำตอบ - ตรวจสอบความสมเหตุสมผลคำตอบ ความสอดคล้องกับเงื่อนไขภายในปัญหา	- กระตุ้นการใช้ความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา - กระตุ้นการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หรือแนวทางการแก้ปัญหาที่วางแผนไว้ในการค้นหาคำตอบ - กระตุ้นคิดวิเคราะห์ การตรวจคำตอบ การตรวจสอบความสมเหตุสมผลกับเงื่อนไขในปัญหา

ตอนที่ 2 แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

การสอนเพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจมีความสำคัญยิ่งต่อการนำสิ่งที่เรียนรู้ไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ระดับที่สูงขึ้นและใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์จริง แนวการสอนหนึ่งที่มีความเชื่อว่าความรู้และความเชื่อของครูมีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ซึ่งครูต้องทำความเข้าใจความคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematics Thinking) ของนักเรียนแล้วนำไปวิเคราะห์เพื่อออกแบบและปรับเปลี่ยนกิจกรรมการเรียนการสอนให้มีความเหมาะสมกับนักเรียน และตามแนวคิดนี้การแก้ปัญหาเป็นการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ดีก็คือ แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (Cognitively Guided Instruction : CGI) ซึ่งเป็นแนวคิดที่ถูกพัฒนาโดย Carpenter and Fennema (1988) ในปัจจุบันเป็นแนวคิดนี้ถูกนำใช้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างแพร่หลายเพราะเป็นแนวการสอนที่ช่วยพัฒนากระบวนการคิดของนักเรียนได้เป็นอย่างดี

1. แนวคิดทฤษฎีการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

ทฤษฎีการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับการสอนแนะให้รู้คิดดังต่อไปนี้

1.1 ทฤษฎีพัฒนาการทางสถิติปัญญาของเพียเจต์(Piaget)

เพียเจต์ (ค.ศ.1896 - 1980) เป็นนักจิตวิทยาชาวสวิสแลนด์ที่มีความเชื่อว่า พัฒนาการทางสติปัญญาของบุคคลเป็นไปตามวัย ความคิดของมนุษย์จะพัฒนาไปตามลำดับขั้นอย่างต่อเนื่องและค่อยเป็นค่อยไป ซึ่งแบ่งได้ 4 ขั้น โดยมนุษย์ทุกคนจะมีลำดับขั้นในการพัฒนาเช่นเดียวกันเร็วบ้างช้าบ้างตามความแตกต่างระหว่างบุคคล ซึ่ง นุชลี อุปภัย (2558) กล่าวถึง ขั้นพัฒนาการทางความคิดตามแนวคิดของ Piaget ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3 แสดงขั้นพัฒนาการทางความคิดตามแนวคิดของ Piaget

ขั้น	ช่วงอายุ	ลักษณะ
ประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหว (Sensorimotor)	แรกเกิด - 2 ปี	เด็กเกิดความเข้าใจวัตถุต่างๆโดยอาศัย ปฏิกิริยาตอบสนองกับวัตถุและเริ่มเรียนรู้วัตถุ นั้นนั้นจากการสัมผัสและการใช้ปฏิกิริยาตอบสนองด้วยความตั้งใจจนสามารถสร้างสัญลักษณ์ของสิ่งนั้นนั้นขึ้นในสมองได้
ก่อนปฏิบัติการ (Preoperational)	2 - 7 ปี	เด็กเริ่มแสดงสัญลักษณ์ที่สร้างขึ้นในสมองออกมาเป็นคำพูดและจินตนาการรวมทั้งเริ่มเกิดความเข้าใจสิ่งต่างๆมากขึ้นอย่างไรก็ตามการปฏิบัติ การทางความคิดยังคงจำกัดเช่นไม่สามารถอนุรักษ์ปริมาณและเวลาได้ไม่สามารถจัดอันดับและไม่สามารถคิดในมุมมองของผู้อื่นได้
ปฏิบัติการรูปธรรม (Concrete Operational)	7 - 11 ปี	เด็กจะลดการยึดตนเองเป็นศูนย์กลางในการคิดและการหาเหตุผลลงและเริ่มเข้าใจการคิดเชิงอนุรักษ์มากขึ้นอย่างไรก็ตามเด็กยังไม่สามารถให้เหตุผลเชิงนามธรรมได้
ปฏิบัติการนามธรรม (Formal Operational)	11 - 12 ปี	เด็กเริ่มคิดเหตุผลในเชิงนามธรรมได้และสามารถคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลเชิงวิทยาศาสตร์

กระบวนการทางสติปัญญา มีลักษณะดังนี้

1. การซึมซับหรือการดูดซึม (assimilation) เป็นกระบวนการทางสมองในการรับประสบการณ์ เรื่องราว และข้อมูลต่าง ๆ เข้ามาสะสมเก็บไว้เพื่อใช้ประโยชน์ต่อไป

2. การปรับและจัดระบบ (accommodation) คือ กระบวนการทางสมองในการปรับประสบการณ์เดิมและประสบการณ์ใหม่ให้เข้ากันเป็น ระบบหรือเครือข่ายทางปัญญาที่ตนสามารถเข้าใจได้ เกิดเป็นโครงสร้างทางปัญญาใหม่ขึ้น

3. การเกิดความสมดุล (equilibration) เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นจากขั้นของการปรับ หากการปรับเป็นไปอย่างผสมผสานกลมกลืนก็จะก่อให้เกิดสภาพที่มีความสมดุลขึ้น หากบุคคลไม่สามารถปรับประสบการณ์ใหม่และประสบการณ์เดิมให้เข้ากันได้ ก็จะเกิดภาวะความไม่สมดุลขึ้น ซึ่งจะก่อให้เกิดความขัดแย้งทางปัญญาขึ้นในตัวบุคคล

ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์ (2552)กล่าวถึงการประยุกต์ใช้ทฤษฏีพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ในการจัดการเรียนรู้สรุปได้ดังนี้

1. การพัฒนาเด็กควรคำนึง ถึงพัฒนาการทางสติปัญญาของเด็กและจัดประสบการณ์ให้เหมาะสมกับพัฒนาการของเขาไม่ควรบังคับให้เด็กเรียนในสิ่งที่ยังไม่พร้อมหรือยากเกินพัฒนาการตามวัยเพราะจะทำให้เด็กเกิดเจตคติที่ไม่ดีในสิ่งที่เรียนและการจัดประสบการณ์ ควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

- การจัดสภาพแวดล้อมที่เอื้อให้เด็กเกิดการเรียนรู้ตามวัยของตนเองซึ่งจะช่วยให้เด็กพัฒนาไปสู่พัฒนาการขั้นสูงขึ้นได้
- เด็กแต่ละคนมีพัฒนาการแตกต่างกันถึงแม้อายุจะเท่ากันแต่ระดับพัฒนาการอาจไม่เท่ากันดังนั้นจึงไม่ควรเปรียบเทียบเด็กควรให้เด็กมีอิสระที่จะเรียนรู้และพัฒนาความสามารถของเขาไปตามระดับพัฒนาการของเขา
- ผู้สอนควรสอนสิ่งที่เป็นรูปธรรมเพื่อช่วยให้เด็กเข้าใจลักษณะต่างๆได้ดีขึ้น

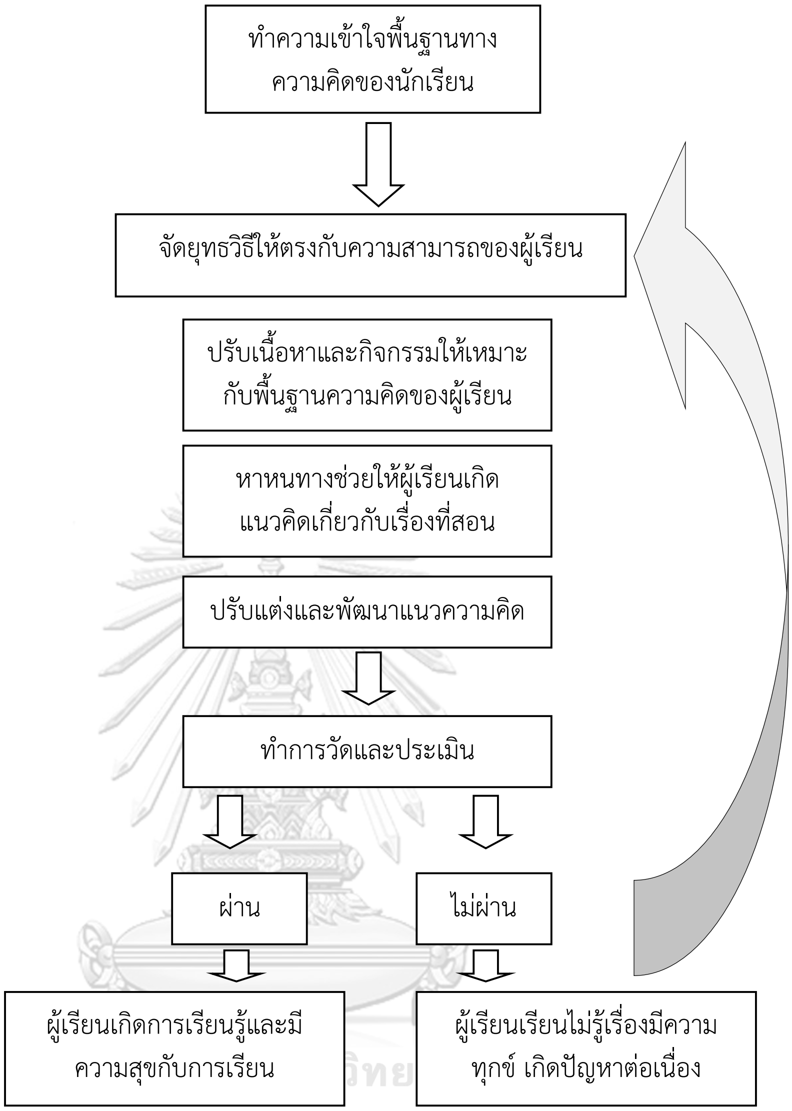
2. การให้ความสนใจและสังเกตเด็กอย่างใกล้ชิดจะช่วยให้ได้ทราบลักษณะเฉพาะของเด็ก

3. ในการสอนเด็กเล็กๆเขาจะรับรู้ส่วนรวมได้ดีกว่าส่วนย่อยดังนั้นผู้สอนจึงควรสอนภาพรวมก่อนแล้วจึงแยกสอนทีละส่วน

4. ในการสอนสิ่งใดให้กับเด็กควรเริ่มจากสิ่งที่เด็กคุ้นเคยหรือมีประสบการณ์มาก่อนแล้วจึงเสนอสิ่งใหม่ที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งเก่าการทำเช่นนี้จะช่วยเด็กซึมซับและจัดระบบความรู้ได้ดี

5. การเปิดโอกาสให้เด็กได้รับประสบการณ์แล้วมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมมากๆจะช่วยให้เด็กซึมซับข้อมูลเข้าสู่โครงสร้างทางสติปัญญาและพัฒนาการทางสติปัญญาของเด็กได้ดี

นุชลี อุปภัย (2558) กล่าวถึงขั้นตอนการนำทฤษฏีของ Piaget ไปใช้และประโยชน์ที่ผู้เรียนจะได้รับ ดังนี้



ภาพที่ 2 ขั้นตอนการนำทฤษฎีของ Piaget ไปใช้และประโยชน์ที่ผู้เรียนจะได้รับ

1.2 ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของบรูนเนอร์ (Bruner)

บรูนเนอร์ เป็นนักจิตวิทยาชาวอเมริกันที่ยอมรับหลักการของพีอาเจต์ เขาใช้หลักพัฒนาการทางเชาว์ปัญญาของมนุษย์มาสร้างทฤษฎีการเรียนรู้โดยการค้นพบ (Discovery Approach) บรูนเนอร์เชื่อว่าการเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้เมื่อผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมซึ่งนำไปสู่การค้นพบการแก้ปัญหา โดยครูเป็นผู้จัดสิ่งแวดล้อมด้านข้อมูล วัตถุประสงค์ คำถามและตั้งความมุ่งหวังว่าผู้เรียนจะค้นพบคำตอบด้วยตนเอง

บรูนเนอร์เชื่อว่าการรับรู้ของมนุษย์เป็นสิ่งที่เลือกรับรู้ตามความสนใจที่มนุษย์มีต่อสิ่งที่จะเรียนรู้ การเรียนรู้จึงเกิดจากการค้นพบ โดยมีความอยากรู้อยากเห็นเป็นแรงผลักดันให้เกิดพฤติกรรมสำรวจ

สภาพแวดล้อม และเกิดการเรียนรู้ขึ้น วิธีการที่ผู้เรียนใช้เป็นเครื่องมือในการค้นพบความรู้ขึ้นอยู่กับพัฒนาการของผู้เรียนขั้นพัฒนาการทางสติปัญญาของมนุษย์ที่บรูนเนอร์เสนอมี 3 ระดับดังนี้

1) ระดับที่มีประสบการณ์ตรงและสัมผัสได้ (Enactive Stage) เป็นวิธีที่ผู้เรียนมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมโดยการสัมผัสจับต้องด้วยมือหรืออวัยวะของร่างกาย

2) ระดับของการใช้ภาพเป็นสื่อในการมองเห็น (Iconic Stage) เป็นวิธีที่ผู้เรียนสร้างจินตนาการ หรือสร้างมโนภาพ (Imagery) ขึ้นในใจได้โดยใช้รูปภาพแทนของจริงโดยไม่จำเป็นต้องสัมผัสของจริง

3) ระดับของการสร้างความสัมพันธ์และใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Stage) เป็นวิธีที่ผู้เรียนใช้สัญลักษณ์เพื่อให้เกิดการเรียนรู้ สามารถเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรม หรือความคิดรวบยอดที่ซับซ้อน จึงสามารถที่จะสร้างสมมติฐาน และพิสูจน์สมมติฐานได้

ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์ (2552) กล่าวถึงการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการเรียนการสอนของบรูนเนอร์ในการจัดการเรียนรู้สรุปได้ดังนี้

1. ผู้สอนควรจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้ค้นพบกับการเรียนรู้ด้วยตนเองซึ่งเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่ดีมีความหมายต่อผู้เรียนและช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดี
2. ก่อนสอนผู้สอนต้องมีการวิเคราะห์และจัดโครงสร้างเนื้อหาสาระให้เหมาะสมกับการเรียนรู้ของผู้เรียน
3. ผู้สอนควรจัดความคิดรวบยอดเนื้อหาสาระวิธีสอนและกระบวนการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับขั้นพัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียนซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดี
4. ผู้สอนควรส่งเสริมให้ผู้เรียนได้คิดอย่างอิสระให้มากเพื่อช่วยส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ของผู้เรียน
5. ผู้สอนควรสร้างแรงจูงใจภายในให้แก่ผู้เรียน
6. ผู้สอนควรสอนความคิดรวบยอดให้แก่ผู้เรียน

1.3 ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของไวก๊อตสกี้ (Vygotsky)

ไวก๊อตสกี้ เป็นนักจิตวิทยาชาวรัสเซียที่เกิดในสมัยเดียวกับ เพียเจต์ แต่แนวคิดของเขาถูกตีพิมพ์เผยแพร่เป็นภาษาอังกฤษในช่วงปี 1970

นุชลี อุปภัย (2558) กล่าวถึง ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของไวก๊อตสกี้ เชื่อว่า สังคมและวัฒนธรรมที่บุคคลดำเนินชีวิตอยู่มีผลอย่างมากต่อการเลือกที่จะเรียนรู้ และต่อวิธีการเรียนรู้ของบุคคลตั้งแต่เยาว์วัย Vygotsky ไม่ยึดติดกับความเชื่อเกี่ยวกับพัฒนาการทางความคิดตามลำดับขั้นของ Piaget ที่เสนอไว้ว่าโครงสร้างทางความคิดของบุคคลต้องเกิดขึ้นก่อนบุคคลจึงพร้อมที่จะเรียนรู้ต่อต่อไปโดย Vygotsky มีมุมมองตรงกันข้ามคือเขาเชื่อว่าการเรียนรู้ต่างหากที่ทำให้บุคคลเกิด

พัฒนาการโครงสร้างทางความคิดขึ้นโดย (Slavin, 2003) โดยการเรียนรู้เป็นผลมาจากกระบวนการทางสังคมและวัฒนธรรมแวดล้อมที่ผู้คนใช้ชีวิตอยู่กิจกรรมทางสังคมที่บุคคลมีส่วนร่วมดังกล่าวจะซึมซาบเข้าสู่กระบวนการภายในของบุคคลเกิดเป็นการพัฒนาโดยโครงสร้างทางความคิดขึ้นเขาอธิบายถึงกระบวนการทางสังคมที่ทำให้บุคคลเกิดการเรียนรู้และการพัฒนาโครงสร้างทางความคิดไว้สองประเด็นใหญ่ใหญ่คือ

1. แหล่งหรือที่มาทางสังคมที่มีผลต่อความคิดของบุคคลซึ่งแหล่งที่มาทางสังคมที่สำคัญได้แก่การปะทะสัมพันธ์ระหว่างบุคคลโดยยิ่งถ้าเด็กได้มีโอกาสร่วมกิจกรรมกับบุคคลที่มีศักยภาพทางความคิดที่สูงกว่าหรือมีวิจารณญาณที่ดีกว่าเช่นครูพ่อแม่ผู้ปกครองผู้นำชุมชนก็จะยิ่งช่วยสนับสนุนให้การเรียนรู้ทางสังคมและทำให้เด็กสามารถดำเนิน กระบวนการทางความคิดภายในตนเองในขั้นที่สองได้ดีไม่ว่าจะเป็นเรื่องของการแก้ปัญหาหรือการหาเหตุผลต่างๆด้วยตนเองก็ตาม

2. เครื่องมือที่ทำให้บุคคลเกิดการเรียนรู้และการพัฒนาเขาเชื่อว่าเครื่องมือทางวัฒนธรรมซึ่งประกอบด้วยเครื่องมือที่เป็นรูปธรรมต่างๆเช่นสื่อสิ่งพิมพ์ปากกายางลบรวมไปถึงคอมพิวเตอร์และอินเตอร์เน็ตในปัจจุบันและเครื่องมือที่เป็นสัญลักษณ์ได้แก่ ภาษา ดูภาพศิลปะ ตัวเลข ระบบทางคณิตศาสตร์ รหัสและเครื่องหมายต่างๆเป็นต้นล้วนแล้วแต่มีส่วนสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนา ทางความคิดของบุคคลบุคคลจะเรียนรู้สิ่งต่างๆโดยเฉพาะอย่างยิ่งการเกิดกระบวนการทางความคิดในขั้นสูงอันได้แก่การคิดเชิงเหตุผล และการคิดเพื่อแก้ปัญหาได้นั้นต้องอาศัยเครื่องมือทางจิตเช่นยุทธศาสตร์ในการจำและความสามารถในการแก้ปัญหาซึ่งเครื่องมือทั้งหมดนี้จะได้มาจากการที่บุคคลปะทะความสำคัญหรือทำกิจกรรมร่วมกับบุคคลอื่นโดยเฉพาะผู้ที่มีความสามารถทางความคิดที่สูงกว่าไม่ว่าจะเป็นเพื่อนพ่อแม่ผู้ปกครองหรือครูดังที่ได้กล่าวมาแล้วโดยบุคคลจะใช้เครื่องมือเหล่านั้นทั้งในการเรียนรู้ทางสังคมในขั้นแรกและการเรียนรู้ที่ เกิดขึ้นภายในซึ่งเป็นขั้นที่บุคคลสามารถสร้างแนวคิดขึ้นมาด้วยตนเอง

ทฤษฎีของ Vygotsky กับการเรียนการสอน

แนวคิดเกี่ยวกับพัฒนาการทางความคิดของ Vygotsky ได้ถูกนำมาใช้เป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนแบบ Cooperative Learning และ Scaffolding ในปัจจุบัน

Cooperative Learning เป็นวิธีการสอนที่ช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้สิ่งที่ซับซ้อนได้ด้วยตนเองจากการพูดคุยสนทนาปัญหาร่วมกับผู้อื่นเป็นการนำกระบวนการทางสังคมมาใช้เพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการปรับแต่งและพัฒนาการความคิดของตนเองและสามารถเรียนรู้ด้วยตนเองได้อย่างมีประสิทธิภาพในการเรียนการสอนผู้สอนจะแบ่งผู้เรียนเป็นกลุ่มย่อยย่อยซึ่งแต่ละกลุ่มประกอบด้วยผู้เรียนที่มีความสามารถคละกันไปโดยผู้เรียนจะร่วมกันและช่วยเหลือกันในการเรียนรู้หรือแก้ปัญหาที่ผู้สอนกำหนด

Scaffolding เป็นการสอนที่เน้นบทบาทของครูในการให้คำแนะนำหรือเป็นแบบอย่างในการคิดวิเคราะห์รวมทั้งกระตุ้นจนทำให้ผู้เรียนสามารถควบคุมการทำงานภายในความคิดได้ด้วยตนเองอย่างมีประสิทธิภาพ

1.4 ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ (Constructivist Theory)

ทิศนา แขมมณี (2554) กล่าวว่า แนวคิด Constructivism เกี่ยวข้องกับธรรมชาติของความรู้ของมนุษย์ มีความหมายทั้งในเชิงจิตวิทยาและเชิงสังคมวิทยา ทฤษฎีด้านจิตวิทยา เริ่มต้นจาก Jean Piaget ซึ่งเสนอว่า การเรียนรู้ของเด็กเป็นกระบวนการส่วนบุคคลมีความเป็นอัตนัย Vygotsky ได้ขยายขอบเขตการเรียนรู้ของแต่ละบุคคลว่า เกิดจากการสื่อสารทางภาษากับบุคคลอื่น สำหรับด้านสังคมวิทยา Emile Durkheim และคณะ เชื่อว่าสภาพแวดล้อมทางสังคมมีผลต่อการเสริมสร้างความรู้ใหม่

ทฤษฎีการเรียนรู้ตามแนว Constructivism จัดเป็นทฤษฎีการเรียนรู้กลุ่มปัญญานิยม (cognitive psychology) มีรากฐานมาจากผลงานของ Ausubel และ Piaget

ประเด็นสำคัญประการแรกของทฤษฎีการเรียนรู้ตาม Constructivism คือ ผู้เรียนเป็นผู้สร้าง (Construct) ความรู้จากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบเห็นกับความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่เดิม โดยใช้กระบวนการทางปัญญา (cognitive apparatus) ของตน

ประเด็นสำคัญประการที่สองของทฤษฎี คือ การเรียนรู้ตามแนว Constructivism คือ โครงสร้างทางปัญญา เป็นผลของความพยายามทางความคิด ผู้เรียนสร้างเสริมความรู้ผ่านกระบวนการทางจิตวิทยาด้วยตนเอง ผู้สอนไม่สามารถปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางปัญญาของผู้เรียนได้ แต่ผู้สอนสามารถช่วยผู้เรียนปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางปัญญาได้โดยจัดสภาพการณ์ที่ทำให้เกิดภาวะไม่สมดุลขึ้น

อัมพร ม้าคนอง (2546) กล่าวถึงทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ว่ามีอิทธิพลต่อการจัดการเรียนการสอนอย่างแพร่หลายในปัจจุบันเนื่องจากเป็นทฤษฎีที่ให้ความสำคัญที่ตัวผู้เรียนซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญทฤษฎีนี้เน้นว่าความรู้เป็นสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นโดยผู้เรียนผู้เรียนใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่การเรียนรู้เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นภายในตัวผู้เรียนจากการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมภายนอกผู้เรียนแต่ละคนจะสร้างความรู้ โดยวิธีการที่แตกต่างกันดังนั้นแนวการสอนตามทฤษฎีนี้จึงเน้นการ จัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้สื่อสารและมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนโดยผู้สอนคอยช่วยเหลือให้ผู้เรียนนำความรู้ที่มีอยู่ออกมาใช้และไตร่ตรองสิ่งที่ได้จากการอภิปรายกับผู้อื่นผู้สอนมีหน้าที่จัดสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ให้เหมาะสมตั้งประเด็นปัญหาที่ท้าทายและช่วยเหลือให้ผู้เรียนสร้างความรู้ได้เอง

กรอบแนวคิดของทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์

ทฤษฎีนี้มีกรอบแนวคิดที่สำคัญดังนี้

1. ผู้เรียนเป็นผู้สร้างความรู้ด้วยตนเอง

2. ความรู้และประสบการณ์เดิมเป็นพื้นฐานของการสร้างความรู้ใหม่

3. ปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมเช่นครูและเพื่อนมีส่วนช่วยในการสร้างความรู้

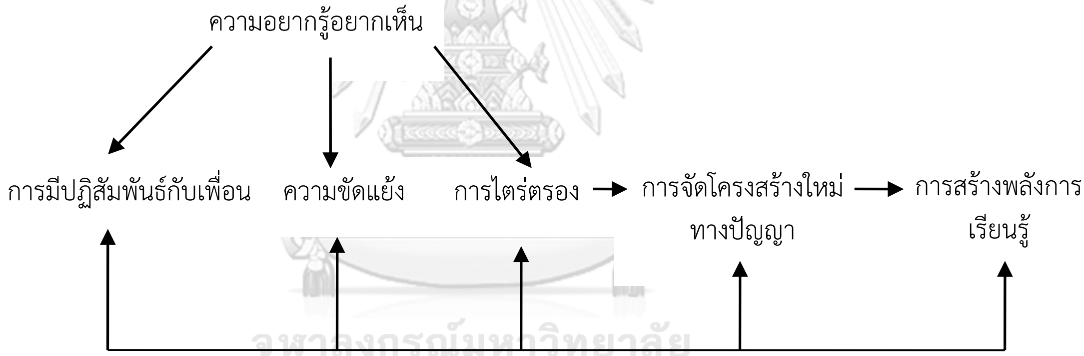
4. ครูมีบทบาทในการจัดบริบทการเรียนรู้ตั้งคำถามท้าทายความสามารถกระตุ้นสนับสนุนและให้ความช่วยเหลือการสร้างความรู้

5. ผู้เรียนเป็นผู้กระตือรือร้นในการเรียน

สมมุติฐานของทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์

ทฤษฎีนี้มีสมมุติฐานเกี่ยวกับการสร้างความรู้ของผู้เรียนดังนี้

1. มนุษย์สร้างความรู้ผ่านกิจกรรมการไตร่ตรองการสื่อสารและการอภิปรายซึ่งทำให้พวกเขาสร้างประสบการณ์ในการแก้ปัญหาอันเดอร์ฮิลล์ (Underhill , 1991) ใช้โมเดลการเพิ่มพลังการเรียนรู้ของผู้เรียน (model of Learner's Empowerment) ดังแผนภาพในการอธิบายสมมุติฐานดังนี้



โมเดลการเพิ่มพลังการเรียนรู้ของผู้เรียน (model of Learner's Empowerment)

ภาพที่ 3 สมมุติฐานเกี่ยวกับการสร้างความรู้ของผู้เรียน

1.1 ความอยากรู้อยากเห็นและความขัดแย้งเป็นกลไกสำคัญในการกระตุ้นให้ผู้เรียนเรียน

1.2 การมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อนก่อให้เกิดความขัดแย้งทางปัญญา

1.3 ความขัดแย้งทางปัญญานำมาซึ่งการไตร่ตรอง

1.4 การตายต้องกระตุ้นให้เกิดการจัดโครงสร้าง ใหม่ทางปัญญา

1.5 ข้อ 1.1 ถึง 1.4 เกิดเป็นวงจร โดยประสบการณ์ของผู้เรียนมีผลต่อการเกิดของวงจรและวงจรนี้เองที่ทำให้ผู้เรียนสามารถควบคุมและสร้างพลังการเรียนรู้ให้กับตนเอง

7. การสร้างความรู้ของผู้เรียนแต่ละคนแตกต่างกันและต่างจากที่ผู้สอนคาดหวังผู้สอนต้องยอมรับและจัดการที่จะสนับสนุนสิ่งที่ผู้เรียนคิด

8. องค์ประกอบสำคัญในการสอนมีดังนี้ การรวบรวมสิ่งที่ผู้เรียนสร้างขึ้นให้เป็นไปในแนวทางที่ถูกต้อง. การสร้างแรงจูงใจภายในซึ่งเป็นปัจจัยสำคัญในการสร้างความรู้. การวิเคราะห์ความคิดผู้เรียนในกระบวนการเรียนการสอน

2. ความหมายของแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

นักการศึกษาและนักวิจัยหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน ดังนี้

Carpenter and Fennema (1988) ได้กล่าวถึงความหมายของการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) หมายถึง แนวคิดในการจัดการเรียนรู้ที่ครูใช้ความรู้และความเข้าใจของนักเรียนเป็นฐานในออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ โดยครูมีบทบาทเป็นผู้แนะแนวทางเพื่อช่วยกระตุ้นกระบวนการคิดของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง

Carpenter, Fennema, Franke, Levi, and Empson (1999) ได้กล่าวถึงความหมายของการสอนแนะให้รู้คิดเป็นรูปแบบการสอนที่ตั้งอยู่บนหลักการพื้นฐานความรู้ความเข้าของนักเรียน และเน้นไปที่กระบวนการคิด การแก้ปัญหาด้วยตัวเอง โดยมีครูเป็นผู้คอยชี้แนะส่งเสริมและสนับสนุนให้เกิดการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องผ่านการทำงานเป็นกลุ่ม และการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างผู้เรียน

Carpenter, Fennema, Franke, Levi, and Empson (2000) ได้กล่าวถึงความหมายของแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ว่าเป็นรูปแบบการสอนที่ครูทำความเข้าใจความคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนและใช้ความรู้นั้นในการออกแบบการเรียนการสอน

The Wisconsin Center for Education Resource (2013) กล่าวถึง การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) หมายถึง วิธีการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ใช้พื้นฐานการคิดของนักเรียนเป็นสิ่งที่ใช้ในการตัดสินใจออกแบบการเรียนการสอน

ชัยวัฒน์ อุ้ยปาอาจ (2552) ได้ให้ความหมายของ การสอนแนะให้รู้คิดว่า การสอนแนะให้รู้คิดหมายถึงการจัดการเรียนการสอนที่อยู่บนพื้นฐานการคิดตามความเข้าใจของนักเรียนโดยเน้นการสร้างความรู้ด้วยความเข้าใจภายในตัวนักเรียนมีครูเป็นผู้ใช้คำถามในการแนะแนวทางให้นักเรียนได้คิดอย่างต่อเนื่องจนเกิดการเรียนรู้ในเนื้อหาหรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2553) ได้ให้ความหมายของ การสอนแนะให้รู้คิดว่า เป็นนวัตกรรมหนึ่งที่มุ่งเน้นประสิทธิภาพในการจัดการเรียนการสอนเป็นการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนเกี่ยวกับองค์ความรู้และทักษะพื้นฐานในการแก้ปัญหา

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวถึง การสอนแบบแนะให้รู้คิด (Cognitively Guided Instruction) มุ่งให้ผู้สอนใช้การแนะให้นักเรียนใช้ความคิดอย่างต่อเนื่องเพื่อนำไปสู่การเรียนรู้สิ่งใหม่ด้วยตนเอง

สุรชัย วงศ์จันเสือ (2555) ได้ให้ความหมายของแนวคิด CGI เป็นแนวคิดเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้บนพื้นฐานของการแนะให้คิดตามความเข้าใจของนักเรียนโดยมีการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการสร้างความรู้ด้วยความเข้าใจจากตัวนักเรียน

สุธารัตน์ สมรรถการ (2556) กล่าวว่า การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เป็นนวัตกรรมหนึ่งที่มุ่งเน้นประสิทธิภาพในการจัดการเรียนการสอน ไม่มีวิธีการสอนเป็นรูปแบบตายตัว แต่ขึ้นอยู่กับบริบทของผู้เรียนเป็นสำคัญ ซึ่งเป็นการพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของผู้เรียนเกี่ยวกับองค์ความรู้และทักษะพื้นฐานในการแก้ปัญหา

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2556) กล่าวว่า การสอนแนะให้รู้คิด หมายถึง การจัดการเรียนการสอนที่มุ่งให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเองให้ความสำคัญกับการคิด การให้เหตุผล และฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหาด้วยตัวของนักเรียนเอง โดยมีครูเป็นผู้สนับสนุนและเอื้ออำนวยความสะดวกในการจัดการเรียนรู้อย่างต่อเนื่อง ซึ่งมีขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ ดังนี้ 1) ครูนำเสนอปัญหา 2) ครูช่วยแนะให้นักเรียนมีความเข้าใจในปัญหาและเปิดโอกาสให้นักเรียนแก้ปัญหา 3) นักเรียนรายงานคำตอบและวิธีการแก้ปัญหา และ 4) ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายคำตอบและวิธีการที่ใช้

จากความหมายของนักการศึกษาข้างต้น ผู้วิจัยจึงสรุปความหมายของ แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) หมายถึง แนวคิดในการจัดการเรียนรู้ที่ครูใช้ความรู้และความเข้าใจของนักเรียนเป็นฐานในออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งเน้นให้นักเรียนสร้างความรู้ความเข้าใจและเชื่อมโยงประสบการณ์ความรู้เดิมผ่านกระบวนการในการแก้ปัญหา โดยครูมีบทบาทเป็นผู้แนะแนวทางเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดบนฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนอย่างต่อเนื่องจนนักเรียนสามารถสร้างหรือสรุปความรู้ได้ด้วยตนเอง

3. หลักการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang, and Loef (1989) กล่าวถึง สมมติฐานหลัก 2 ข้อที่สำคัญของแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด คือ 1) การเรียนการสอนควรพัฒนาความเข้าใจโดยเน้นไปที่ความสัมพันธ์ระหว่างทักษะและกระบวนการแก้ปัญหาและมุ่งส่งเสริมการแก้ปัญหา 2) การเรียนการสอนควรสร้างบนพื้นฐานความรู้ที่นักเรียนมีอยู่ หลักการกว้างๆของการเรียนการสอนอาจจะมาจากสมมติฐานเหล่านี้ ดังนี้

1. การจัดการเรียนการสอนควรมีความเฉพาะและเหมาะสมกับนักเรียนแต่ละคน

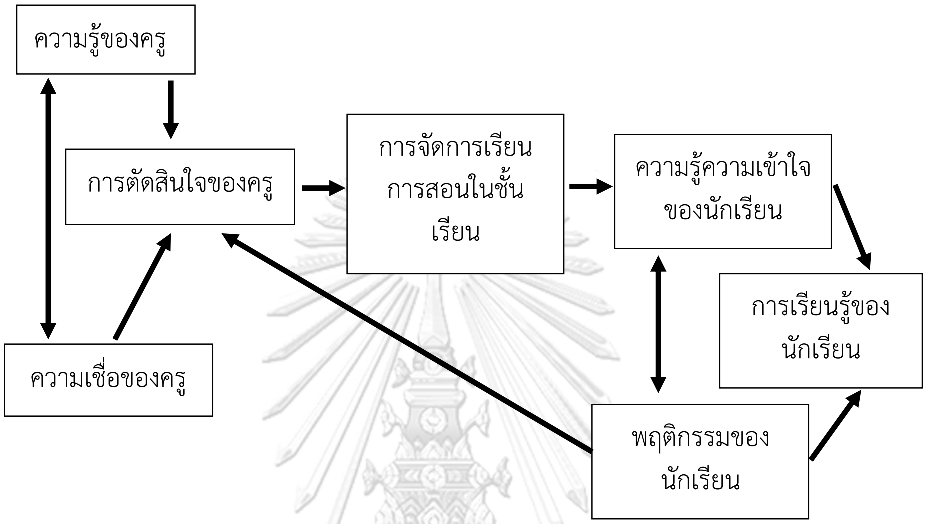
2. ปัญหา มโนทัศน์ หรือทักษะที่นักเรียนเรียนรู้ควรมีความหมายต่อนักเรียน โดยที่นักเรียนควรจะสามารถเชื่อมโยงแนวคิด หลักการที่นักเรียนรู้อยู่แล้วไปสู่ความรู้ใหม่

3. การเรียนการสอนควรจัดขึ้นเพื่อส่งเสริมและสนับสนุนให้มีการสร้างความรู้ด้วยตัวนักเรียนเองภายใต้หลักการและแนวคิดที่นักเรียนรู้

4. ครูต้องมีการการประเมินอย่างต่อเนื่อง และต้องไม่ประเมินเพียงว่าผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาได้ แต่ครูต้องวิเคราะห์กระบวนการคิดของนักเรียน โดยการถามคำถามที่เหมาะสม

5. ครูต้องใช้ความรู้ความเข้าใจที่เป็นผลมาจากการประเมินความคิดของนักเรียนในการวางแผนการจัดการเรียนการสอน

Carpenter and Fennema (1988) เสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดดังแผนภาพข้างล่าง



ภาพที่ 4 แนวทางในการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

Carpenter et al. (1989)ได้เสนอหลักการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด สรุปได้ดังนี้

1. การจัดการเรียนการเรียนสอนเพื่อพัฒนาความเข้าใจ และทักษะการแก้ปัญหาของนักเรียน

2. การจัดการเรียนการสอนควรส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างความรู้และทำกิจกรรมด้วยความเข้าใจด้วยตนเอง

3. การจัดการเรียนการสอนควรส่งเสริมให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ใหม่กับความรู้พื้นฐานเดิม

4. การจัดการเรียนการสอนควรมีการประเมินผลพื้นฐานความรู้และการคิดของนักเรียนอย่างสม่ำเสมอ ประเมินเพื่อสังเกตว่านักเรียนแก้ปัญหาได้อย่างไร ไม่ใช่เพียงประเมินแก้ได้ หรือไม่ได้เท่านั้น

Hankes (1998) ได้กล่าวถึง หลักการในการจัดการเรียนการสอนของการสอนแนะให้รู้คิด แสดงดังตาราง

ตารางที่ 4 หลักการในการจัดการเรียนการสอนของการสอนแนะให้รู้คิด

หัวข้อ	การสอนแนะให้รู้คิด
1. บทบาทผู้สอน	ผู้สอนทำหน้าที่เป็นสื่อกลางในการโต้ตอบ และสร้างปฏิสัมพันธ์ระหว่างนักเรียนกับสภาพแวดล้อม
2. ปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียน	ผู้เรียนได้เรียนรู้ผ่านกระบวนการทำงานเป็นกลุ่ม ด้วยการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นระหว่างกัน
3. หลักสูตร	กิจกรรมในหลักสูตรเน้นหนักไปที่ข้อมูลที่เป็นพื้นฐานและการจัดการเนื้อหา
4. เวลา	ใช้เวลาส่วนใหญ่ในการแก้ปัญหาที่ซับซ้อนโดยผู้เรียนจะแสดงความคิดเห็น สะท้อนแนวคิดของตนเองรวมถึงการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นร่วมกับเพื่อน
5. การสร้างมโนทัศน์	มโนทัศน์จะถูกนำเสนอให้กับผู้เรียนโดยมีลักษณะแบบองค์รวมไปยังส่วนย่อย ให้ความสำคัญกับมโนทัศน์ใหญ่
6. มุมมองเกี่ยวกับตัวผู้เรียน	นักเรียนถูกมองว่าเป็นนักคิดที่สามารถสร้างทฤษฎีได้และเชื่อว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานมาก่อน
7. การประเมินผล	การประเมินเกิดขึ้นผ่านการตั้งคำถามและการสังเกตผลงานของนักเรียน นักเรียนแต่ละคนมีระดับการเรียนรู้ของเขาและเหมาะสมกับตัวเองโดยไม่เน้นการแข่งขัน

Carpenter et al. (1999) กล่าวถึง ตัวอย่างของการใช้คำถามเพื่อล้วงความคิดของนักเรียน เพื่อให้ได้คำตอบที่สมบูรณ์ และเข้าใจความคิดของนักเรียน เช่น

- นักเรียนแก้ปัญหานี้อย่างไร
- นักเรียนจงบอกครูว่านักเรียนได้คำตอบมาได้อย่างไร
- นักเรียนจงบอกสิ่งที่ตัวเองกำลังคิด

นอกจากนี้ Carpenter et al. (2000) ยังให้ความสำคัญกับแนวทางการจัดการเรียนการสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดสรุปได้ดังนี้ 1) เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่ใช้ในการพัฒนาความคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน 2) ในการเรียนการสอนครูเป็นผู้มีอิทธิพลต่อการพัฒนา

ความเข้าใจและความคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน 3) ความรู้และความเชื่อของครูมีอิทธิพลต่อการเรียนการสอนและการฝึกปฏิบัติของนักเรียน และ 4) ความรู้ ความเชื่อและการฝึกปฏิบัติของครูเป็นผลมาจากการทำความเข้าใจความคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน

National Council of Teachers of Mathematics (2016) กล่าวถึง เป้าหมายของการเรียนการสอนตามแนวคิด (CGI) คือ ผู้เรียนเป็นผู้ที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างอิสระด้วยตนเอง และมีความสามารถที่จะหาวิธีการแก้ปัญหาได้

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2553) กล่าวถึงการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ว่า การเรียนการสอนต้องเกิดจากความรู้ของผู้เรียนและให้ความสำคัญกับการคิดการแก้ปัญหาด้วยตัวของผู้เรียนเองโดยมีผู้สอนเป็นผู้สนับสนุนและเอื้ออำนวยความสะดวกในการจัดการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องโดยใช้กระบวนการต่างๆที่นำไปสู่คำถามเพื่อการแก้ปัญหาเป็นการเรียนรู้ที่มีการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ทำงานเป็นกลุ่มมีโอกาสนำเสนอความคิดของตนเองร่วมกันอภิปรายก่อให้เกิดความเชื่อมโยงความรู้เดิมของ ผู้เรียนให้สัมพันธ์และสอดคล้องกับกระบวนการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง

Carpenter et al. (1999) กล่าวถึงบทบาทของครูในห้องเรียนการสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) สามารถสรุปได้ ดังนี้

1. ครูต้องมีความกระตือรือร้นอยู่เสมอ

2. พัฒนาตามเข้าใจความคิดของนักเรียนอย่างต่อเนื่อง

3. เลือกกิจกรรมที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาของนักเรียนและส่งเสริมความรู้ทางคณิตศาสตร์แก่นักเรียน

4. สร้างบรรยากาศของการเรียนรู้ซึ่งส่งเสริมต่อการพัฒนาความสามารถด้านการสื่อสาร การแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับนักเรียน และสร้างบรรยากาศที่ทำให้นักเรียนรู้สึกดีและผูกพัน

5. ใช้ความรู้ ความคิดของนักเรียนเป็นพื้นฐานในการสร้างกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน

นอกจากนี้ เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2553)กล่าวถึง บทบาทของครูแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) มีดังนี้

1. ครูควรใช้คำถามหรือการชี้แนะในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมแล้วไม่สามารถแก้ปัญหาได้

2. ครูควรมีความกระตือรือร้นและมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องในการทำความเข้าใจถึงความคิดของนักเรียนแต่ละคน

3. ครูควรเตรียมสื่อวัสดุอุปกรณ์ต่างๆที่เอื้ออำนวยต่อการแก้ปัญหาของนักเรียน

4. ครูควรสร้างบรรยากาศที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้สึกดีในการคิดเชิงคณิตศาสตร์และเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถสื่อสารแนวคิดและให้เหตุผลได้หลากหลายไม่ว่าจะเป็นการพูดการเขียนหรือการ

วาดภาพซึ่งเป็นแนวทางที่ให้นักเรียนเข้าใจตนเองว่ากำลังคิดอะไรหรือทำอะไรรวมทั้งครูจะ สามารถประเมินความคิดและเหตุผลของนักเรียนได้ด้วย

5. ครูควรนำเสนอปัญหาสถานการณ์หรือกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนทุกคนและสามารถพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้

6. ครูควรจัดสภาพแวดล้อมที่ส่งเสริมให้นักเรียนสร้างความรู้ได้ด้วยตนเองแทนที่จะเป็นผู้ถ่ายทอดความรู้

7. ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่มและมีการอภิปรายแนวคิดของตนเองกับผู้อื่น ส่งเสริมให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กันในชั้นเรียน

8. ครูควรให้เวลาที่เหมาะสมแก่นักเรียนในการแก้ปัญหาต่างๆ

9. ครูไม่ควรเตรียมแนวทางการสอนที่ชัดเจนตายตัวหรือใช้สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอนที่เฉพาะเจาะจงแต่ครูควรเตรียมการสอนอย่างกว้างกว้างและปรับกิจกรรมการเรียนการสอนตามความต้องการหรือแนวการความคิดของนักเรียน

อัมพร ม้าคนอง (2546)กล่าวถึง ตัวอย่างการสอนเพื่อความเข้าใจมีแนวทางปฏิบัติในด้านการสอนบนพื้นฐานความรู้เดิม และการสอนเน้นการคิด ดังนี้

- การสอนบนพื้นฐานความรู้เดิม เช่น พิจารณาความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมี เพื่อตัดสินใจว่าควรสอนเสริมพื้นฐานในเรื่องใด ไม่ควรปล่อยให้ขาดความรู้พื้นฐานเป็นอุปสรรคหรือกีดขวางโอกาสในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ให้โอกาสผู้เรียนในการใช้ความรู้เดิมแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริง เตรียมการสอนเนื้อหาใหม่ตามความรู้เดิมที่ผู้เรียนมี การเพิ่มหรือลดเนื้อหาบางเนื้อหา ควรทำเมื่อจะเป็นประโยชน์สูงสุดต่อผู้เรียน

- เน้นการคิด เช่น เน้นกระบวนการคิด(Thinking Process) ทั้งในการสอนเนื้อหาและการนำไปใช้เพื่อผู้เรียนจะได้เรียนรู้ในวิถีทางที่ตนถนัดและสามารถเข้าใจได้เป็นอย่างดี และเพื่อจะสามารถอธิบายหรือถ่ายทอดสิ่งที่เรียนรู้ให้ผู้อื่นได้อย่างมีเหตุผล ฝึกการคิดแก้ปัญหาโดยให้ผู้เรียนคิดค้นกลวิธีที่หลากหลาย เพื่อจะได้เปรียบเทียบกลวิธีเหล่านั้น ไม่ควรยึดขั้นตอนหรือวิธีการ (Algorithm) เฉพาะใดๆในการให้ผู้เรียนแก้ปัญหา

จากข้อมูลข้างต้น ผู้วิจัยสรุปหลักการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่สำคัญ ดังนี้

1. การจัดการเรียนรู้ที่มีความหมายต่อตัวนักเรียนเน้นการเรียนรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ ทักษะหรือการแก้ปัญหา

2. การจัดการเรียนรู้เน้นให้นักเรียนสร้างความรู้และเชื่อมโยงความรู้บนพื้นฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนผ่านการแก้ปัญหา

3. การจัดการเรียนรู้เน้นการประเมินอย่างต่อเนื่องด้วยวิธีการที่เหมาะสม โดยเน้นประเมินทั้งกระบวนการทางความคิดและผลลัพธ์หรือคำตอบ

4. การจัดการเรียนรู้หรือการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้เน้นใช้ผลการประเมินกระบวนการทางความคิดในการพัฒนาความรู้ความเข้าใจของนักเรียน

4. ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

Carpenter et al. (1999) (อ้างถึงใน ชัยวัฒน์ อุ้ยปาอาจ, 2552) กล่าวถึงขั้นตอนที่สำคัญ 4 ขั้นตอนในการกระบวนจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน CGI ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นครูนำเสนอปัญหา (poses the problem)

ขั้นแรกของกิจกรรมในชั้นเรียน CGI นั้นครูจะนำเสนอปัญหาตามวัตถุประสงค์และความมุ่งหมายที่ตั้งไว้ถ้านักเรียนมีความยุ่งยากหรืออุปสรรคในการแก้ปัญหาครูควรมีการให้ปัญหาที่คล้ายกันกับนักเรียนอีกครั้งหนึ่งหรือใช้วิธีการและแนวทางสำหรับการแก้ปัญหาแก่นักเรียนเพิ่มเติมในการเลือกปัญหาครูควรเลือกปัญหาที่น่าสนใจและควรเป็นปัญหาที่ให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหา ที่รักหลายปัญหาที่ครูเลือกมาควรมีความสอดคล้องกับบริบทในชีวิตจริงของนักเรียน

ขั้นที่ 2 ขั้นวิเคราะห์ข้อมูลและแก้ปัญหา (solve the problem)

ในขั้นที่สองหลังจากครูนำเสนอปัญหาแก่นักเรียนแล้วครูช่วยแนะนำให้นักเรียนมีความเข้าใจในปัญหาและเปิดโอกาสให้นักเรียนแก้ปัญหาในขั้นตอนนี้ครูควรให้เวลานักเรียนเพื่อทำความเข้าใจในปัญหาที่ให้และ ช่วยแนะนำจนครูมีความแน่ใจว่านักเรียนเกิดความเข้าใจและสามารถแก้ปัญหานั้นนั้นได้แล้วครูเปิดโอกาสให้นักเรียนมีอิสระในการแก้ปัญหานอกจากนี้สิ่งที่สำคัญของชั้นเรียน CGI คือในระหว่างนักเรียนแก้ปัญหาครูต้องอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับสื่ออุปกรณ์หรือเครื่องมือต่างๆที่นักเรียนต้องการ

ขั้นที่ 3 ขั้นรายงานคำตอบและวิธีการแก้ปัญหา (report the solutions and strategies)

ในขั้นที่สามหลังจากที่ครูนำเสนอปัญหาและให้เวลานักเรียนแก้ปัญหาแล้วครูจะเลือกถามนักเรียน เป็นรายบุคคลถึงวิธีการที่พวกเขาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมเหตุผลเพื่อนำเสนอต่อนักเรียนในชั้นเรียนและในระหว่างที่นักเรียนรายงานคำตอบนั้นครูอาจใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงแนวคิดของตนเองออกมา

ขั้นที่ 4 ขั้นอภิปรายคำตอบและวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหา (discuss the solutions and strategies)

ในขั้นตอนสุดท้ายของชั้นเรียน CGI คือการอภิปราย ถึงคำตอบและวิธีการในการแก้ปัญหาของนักเรียนในขั้นนี้ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายคำตอบและวิธีการที่ใช้หลังจากที่นักเรียนรายงาน

คำตอบวิธีการและเหตุผลของตนเองแล้วนักเรียนทั้งชั้นช่วยกันอภิปรายถึงคำตอบและวิธีการที่แตกต่างโดยครูจะเป็นผู้นำให้เกิดการอภิปรายโดยใช้คำถาม

ตอนที่ 3 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. ความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาความหมายของการให้เหตุผลและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สถาบันองค์กร และนักการศึกษาหลายๆท่านได้ให้ความหมายไว้ดังนี้

O' Daffer and Thornquist (1993) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์และให้ความหมายเกี่ยวกับความคิดทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึงการใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิดค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดสร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

Krulik and Rudnick (1993) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ โดยสรุปดังนี้ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการคิดหาข้อสรุปจากการสังเกต และการคาดเดาจากข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อนำมาสร้างข้อความคาดการณ์และผู้เรียนต้องสามารถที่จะอธิบายและแสดงเหตุผลเกี่ยวกับข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น ซึ่งข้อสรุปข้างต้นนั้นก็จะมีความเกี่ยวข้องกับการสร้างความรู้ใหม่ต่อไป

Russell (1999) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ โดยสรุปดังนี้ คณิตศาสตร์เป็นโครงข่ายของความคิดที่สัมพันธ์กันระหว่างการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และรากฐานของการให้เหตุผลการสร้างข้อสรุปที่เป็นนัยทั่วไปในเชิงคณิตศาสตร์ยังช่วยให้การแก้ปัญหาและสนับสนุนผู้เรียนเพื่อให้สามารถมองเห็นถึงโครงสร้างพื้นฐานของปัญหา และปัญหาที่กว้างขึ้นต่อไป

Kilpatrick, Swafford, and and Findell (2001) ได้กล่าวถึงการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ โดยสรุปดังนี้ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับการพัฒนา การตัดสินใจ และการสรุปที่เป็นนัยทั่วไปในเชิงคณิตศาสตร์ โดยที่การสรุปที่เป็นนัยทั่วไปในเชิงคณิตศาสตร์นั้นจะสร้างโครงข่ายความเชื่อมโยงกันระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์และความเข้าใจเชิงประจักษ์

ทิศนา เขมมณี (2551) ได้กล่าวว่า การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล เป็นการคิดที่มีจุดมุ่งหมายเพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริงและ

พิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัยซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อยๆ ดังนี้

1. สามารถแยกข้อเท็จจริงและความคิดเห็นออกจากกันได้
2. สามารถใช้เหตุผลแบบนิรนัย หรืออุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้
3. สามารถใช้เหตุผลทั้งแบบนิรนัย และอุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้

นาเดีย กองเป็ง (2555) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หมายถึงความสามารถในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือข้อเท็จจริงต่างๆที่กำหนดและเชื่อมโยงความรู้ในการหาข้อสรุปรวมทั้งสามารถแสดงแนวคิดในการยืนยันข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของตน

วรนารถ อยู่สุข (2555) ได้กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลประกอบไปด้วยการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหา ความสัมพันธ์และความสามารถในการอธิบายข้อสรุปโดยใช้ข้อมูลในการสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

สำนักทดสอบทางการศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (2556) ได้กล่าวไว้ว่า ความสามารถด้านเหตุผล (Reasoning Abilities) หมายถึงความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้และประสบการณ์ด้านวิทยาศาสตร์และสิ่งแวดล้อมด้านสังคมศาสตร์และเศรษฐศาสตร์ และด้านการดำเนินชีวิต โดยการวิเคราะห์ สังเคราะห์ประเมินค่าแก้ปัญหา หรือตัดสินใจอย่างมีหลักการและเหตุผลบนพื้นฐานของข้อมูลสถานการณ์หรือสารสนเทศที่เพียงพอ โดยยึดหลักคุณธรรมและจริยธรรม

พีชาณิกา เพชรสังข์ (2557) ได้กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หมายถึง ความสามารถในการคิดทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยการวิเคราะห์การคิดสร้างสรรค์ตรึกตรองหาเหตุผลรวบรวมข้อเท็จจริงข้อมูลข้อความแนวคิดสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆและหาความสัมพันธ์เพื่อทำให้เกิดข้อเท็จจริงรู้สถานการณ์ใหม่

วิชัย เสวกงาม (2557) ได้กล่าวไว้ว่า การให้เหตุผลเป็นความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผลและการแก้ปัญหาในสถานการณ์ใหม่ที่เป็นอิสระจากความรู้เดิมที่ได้มาการให้เหตุผลเป็นองค์ประกอบสำคัญของการพัฒนาองค์ความรู้ในขณะที่ความสามารถในการให้เหตุผลนี้จะทำหน้าที่เป็นสิ่งที่ช่วยเสริมต่อให้เด็กเกิดความสามารถในด้านอื่นๆความสามารถในการให้เหตุผลในวัยเด็กสามารถทำนายผลสัมฤทธิ์ในโรงเรียนมหาลัยและผลของการปฏิบัติงานในการประกอบอาชีพได้

จากความหมายของหน่วยงานและนักการศึกษาข้างต้น ผู้วิจัยสรุป ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการคิดและอธิบายข้อสรุปซึ่งได้จากการวิเคราะห์ข้อมูลในปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

2. ความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักการศึกษา องค์กรหรือสถาบันการศึกษา ดังนี้

Ross (1998) กล่าวว่า รากฐานของคณิตศาสตร์คือการให้เหตุผล ในขณะที่วิทยาศาสตร์ยืนยันโดยการสังเกต คณิตศาสตร์ยืนยันด้วยการใช้เหตุผลเชิงตรรกะ กล่าวคือสาระสำคัญของคณิตศาสตร์อยู่บนพื้นฐานของการพิสูจน์ การคาดคะเน และการพิสูจน์ การให้เหตุผลจึงเป็นอีกหนึ่งสิ่งที่ควรให้ความสำคัญ และควรพึงระลึกว่าผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์จะมีผลเฉลยที่ถูกต้องก็ต่อเมื่อได้รับการพิสูจน์อย่างรอบคอบแล้วเท่านั้น ผลเฉลยอาจเป็นเพียงสิ่งเล็กน้อยในกรณีศึกษา แต่นักเรียนจะต้องตระหนักว่าทุกสิ่งที่ได้รับจากการศึกษาหรือกรณีศึกษาเป็นเพียงหลักฐานจากการคาดคะเนไปเท่านั้น จนกว่าสิ่งนั้นจะได้รับการพิสูจน์อย่างละเอียดจึงจะเรียกได้ว่าเป็นผลเฉลยได้ การสร้างข้อโต้แย้งและการพิสูจน์รวมไปถึงการวิจารณ์ข้อโต้แย้งเป็นส่วนสำคัญของคณิตศาสตร์

Artzt and Yaloz-Femia (1999) ได้กล่าวถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นส่วนที่ทำให้การแก้ปัญหาสมบูรณ์ ผู้เรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหาหรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้ หากปราศจากการให้เหตุผล

National Council of Teachers of Mathematics (2000) กล่าวโดยสรุปว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์เป็นการแสดงวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการพัฒนาและแสดงข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับปรากฏการณ์ที่หลากหลาย คนที่มีเหตุผลและคิดวิเคราะห์มีแนวโน้มที่จะสังเกตรูปแบบโครงสร้างหรือความสม่ำเสมอในสถานการณ์จริงและวัตถุสัญลักษณ์ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการอย่างเป็นทางการในการแสดงเหตุผล

Brodie (2009) กล่าวโดยสรุปว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่นักคณิตศาสตร์สร้างขึ้นเพื่อเป็นเส้นทางเชื่อมต่อการสร้างและการสื่อสารระหว่างแนวคิดหนึ่งกับแนวคิดถัดไป เมื่อนักเรียนสร้างเส้นทางเหล่านี้พวกเขาจะเข้ามามีส่วนร่วมและสนุกกับวิชาคณิตศาสตร์ มีความเข้าใจเหตุผลและหลักการทำงานของแนวคิด และสามารถพัฒนารูปแบบองค์ความรู้ที่เชื่อมโยงกัน

กรมวิชาการ (2546b) ได้กล่าวถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นทักษะที่นักเรียนจำเป็นต้องได้รับการพัฒนาให้เกิดความเชื่อมั่นความสามารถด้านเหตุผลและการคิดการตัดสินใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และในชีวิตประจำวันจะช่วยให้นักเรียนมี สมรรถนะของการรับรู้ในทางคณิตศาสตร์มีตรรกะในการคิดและสามารถอธิบายให้เหตุผลต่างๆให้ผู้อื่นรับรู้ข้อเท็จจริงได้การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงตรรกะขึ้นอยู่กับพัฒนาการด้านเชาว์ปัญญาและการใช้ภาษาของนักเรียน

กระทรวงศึกษาธิการ (2551) ได้กำหนดให้ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งในสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เป็นมาตรฐานหนึ่งในสาระหลักที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนทุกคน โดยอ้างถึงในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2556) ได้กล่าวว่า ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถที่จะนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งความรู้และประยุกต์ใช้ในชีวิตชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในที่นี้เน้นที่ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและต้องการพัฒนาให้เกิดขึ้นกับผู้เรียนได้แก่ความสามารถต่อไปนี้

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง
4. การคาดการณ์
5. **การให้เหตุผล**
6. การคิดสร้างสรรค์
7. การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวถึง การให้เหตุผลมีความสำคัญต่อชีวิตมนุษย์ทุกวัยในแต่ละวันมนุษย์ต้องให้เหตุผลกับคนอื่นและต้องการเหตุผลจากคนอื่นไม่ว่าจะเป็นเรื่องเล็กน้อยหรือเรื่องสำคัญมากมนุษย์ต้องการคำอธิบายที่เป็นเหตุเป็นผลและคนส่วนใหญ่รับได้ด้วยเหตุนี้การฝึกการให้เหตุผลจึงเป็นเรื่องจำเป็นที่ผู้เรียนต้องฝึกฝนให้เกิดเป็นทักษะหรือความชำนาญ

จากที่กล่าวมา สามารถสรุปความสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นทักษะที่ช่วยพัฒนาให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์อย่างเป็นเหตุเป็นผล สามารถตัดสินใจได้อย่างมั่นใจ และยัง

เป็นทักษะที่ช่วยให้การพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาสมบูรณ์ขึ้น ดังนั้นการฝึกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเป็นเรื่องจำเป็นที่ผู้สอนจะต้องฝึกฝนนักเรียนให้เกิดเป็นทักษะหรือความชำนาญ

3. ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สามารถจำแนกได้เป็นประเภทต่างๆ ตามเหตุผลในการจำแนก ซึ่งนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายไว้ ดังนี้

Baroody and Coslick (1993) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลนั้นมี 3 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลเชิงอย่างรู้ (Intuitive reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากลางสังหรณ์ ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจจึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็นหรือจากความรู้สึกภายในเหตุผลเชิงอย่างรู้จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสมมุติฐานซึ่งสิ่งปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือสิ่งที่เป็นจริงอยู่แล้วเพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

3. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลของสมาชิกบางสมาชิกในเซตหนึ่งหนึ่งเพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไปหรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในเซตนั้น

Cooney, Brown, Dossey, Schrage, and Wittmann (1996) ได้เสนอการเหตุผลทางคณิตศาสตร์ 4 ประเภทดังต่อไปนี้

1. การให้ผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ได้จากการสังเกตเห็นสิ่งที่ร่วมกันจากหลายหลายตัวอย่างหรือการทดลองซ้ำหลายครั้งแล้วสรุปออกมาอย่างมีเหตุมีผลสนับสนุน

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลจากหลักการทั่วไปหรือหลักการใหญ่ใหญ่แล้วอ้างอิงไปยังที่ที่ต้องการที่มีความจำเพาะเจาะจง

3. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงซึ่งสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับสัดส่วนในการคำนวณเพื่อ สนับสนุนหรือคัดค้านคำตอบที่ได้มา

4. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (Spatial Reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่มีมิติเป็นสองมิติหรือสามมิติ

อัมพร ม้าคนอง (2554) แบ่งประเภทการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่ามีหลายลักษณะดังนี้

1. การให้เหตุผลเชิงตรรก (Logical reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ในการคิดเชิงตรรกะ ประกอบด้วยการให้เหตุผลสองประเภทต่อไปนี้

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลตามการคิดแบบอุปนัยซึ่งเป็นการคิดจากข้อเท็จจริงย่อยโดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญหรือแบบแผนของสิ่งที่พบเพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไปการให้เหตุผลแบบนี้จึงใช้ข้อมูลที่เป็นจริงจากข้อมูลย่อยย่อยไปสู่ข้อสรุปหรือความจริงทั่วไปหรือเป็นการมองเห็นตัวอย่างหลายหลายตัวอย่างแล้วใช้เหตุผลสรุปความสัมพันธ์ในรูปแบบทั่วไปของตัวอย่างเหล่านั้น

1.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เป็นการให้เหตุผลแบบตามการคิดแบบนิรนัยซึ่งเป็นการคิดจากกฎเกณฑ์หลักการหรือข้อสรุปทั่วไปไปสู่ข้อเท็จจริงย่อยการให้เหตุผลแบบนี้จึงเป็นการใช้ข้อสรุปหรือหลักเกณฑ์ทั่วไปที่ยอมรับกันว่าเป็นจริงโดยมีการพิสูจน์มาแล้วเป็นหลักในการหาข้อสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎหรือเกณฑ์นั้น

2. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยใช้ความคิดเกี่ยวกับสัดส่วนทั้งสัดส่วนที่เกี่ยวข้องกับจำนวนและตัวเลขและข้อมูลเชิงคุณภาพการให้เหตุผลเชิงสัดส่วนมีหลายลักษณะดังต่อไปนี้

2.1 การให้เหตุผลเชิงคุณภาพ (Qualitative reasoning) เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของอัตราส่วนและเศษส่วน

2.2 การให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เกี่ยวข้องกับตัวเลข

3. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ (Spatial reasoning) เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับมิติสัมพันธ์หรือสิ่งที่ปรากฏในมิติต่างๆเช่นภาพสองมิติหรือส่งสามมิติและการให้เหตุผลเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตทั้งในมิติเดียวกันและ มิติต่างกัน

กฤษมันต์ วัฒนาณรงค์ (2554) ได้กล่าวถึง พื้นฐานทักษะการใช้เหตุผลเป็นกระบวนการทางปัญญาที่อยู่ในรูปแบบต่างๆ จำแนกเพื่อการศึกษาและทำความเข้าใจได้ 3 กลุ่ม ดังนี้

1. ทักษะการจดจำบันทึกและการเรียกใช้ (Storage and Retrieval Skills) เป็นสมรรถนะในการถ่ายโยง ส่งผ่านข้อมูลความรู้จากสมองในส่วนความจำระยะยาว (Long-term Memory) ที่ทำหน้าที่เข้ารหัสจัดเก็บข้อมูล สารสนเทศ เมื่อมีการพบเห็นสิ่งใหม่ก็สามารถนำสาระความรู้ข้อมูลที่ถูกจัดเก็บไว้นานแล้วออกมาได้ ตัวอย่างของทักษะในการจัดเก็บและเรียกใช้คือ การสร้างภาพสำนึก (Visual Imagery Mediation) ซึ่งเป็นสภาวะของการสร้างตัวแทนของข้อมูลความรู้ต่างๆทั้งในรูปของภาพ เสียง ท่าทาง หรือภาพลักษณ์ที่เป็นตัวแทนของสิ่งที่ได้จดจำไว้ วิธีการที่เรียกว่า ยุทธวิธีช่วยจำ

หรือ Mnemonic Strategies เป็นตัวอย่างของการพัฒนาสมรรถนะของทักษะด้านการจำบันทึกและเรียกใช้

2. ทักษะการจับคู่สัมพันธ์ (Matching Skills) เป็นสมรรถนะในการค้นหาความเหมือนและความแตกต่างของปรากฏการณ์ระหว่างสิ่งที่มีอยู่แล้วในความจำกับสิ่งใหม่ที่ได้พบ แยกออกเป็นสมรรถนะย่อยๆเพื่อความเข้าใจได้อีก 5 สมรรถนะ ได้แก่ 1) สมรรถนะด้านการจัดกลุ่ม (Categorization) 2) สมรรถนะด้านสัมพันธ์ความต่าง (Extrapolation) 3) สมรรถนะด้านสัมพันธ์ความเหมือน (Analogical Reasoning) 4) สมรรถนะด้านการประเมินตรรกะ (Evaluation of Logic) และ 5) สมรรถนะด้านการประเมินเพื่อการตัดสินคุณค่า (Evaluation of Value)

3. ทักษะการดำเนินการจัดการ (Execution Skills) เป็นสมรรถนะสุดท้ายในกระบวนการทางปัญญาของทักษะการใช้เหตุผลซึ่งมีความหมายเหมือนกับการบริหารงานของผู้บริหารงานในองค์กรต่างๆที่มีภารกิจหลายอย่างทั้งด้านบุคลากรการเงินการผลิตการขายการบริการ เป็นต้น สมรรถนะในด้านนี้แยกออกเป็นสมรรถนะย่อยย่อยเพื่อความเข้าใจได้อีกสองสมรรถนะได้แก่หนึ่งสมรรถนะด้านการอธิบายขยายความ (Elaboration) และสองสมรรถนะด้านการแก้ปัญหา (Problem Solving)

นาเดีย กองเป็ง (2555) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการแอบสแตรกชั่นที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ได้สรุปรูปแบบการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ใน 3 ลักษณะ คือ

1.การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning) หมายถึงความสามารถในการวิเคราะห์และระบุความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้จากการสังเกตสิ่งที่ร่วมกันหลายหลายตัวอย่างและนำสิ่งเหล่านั้นมาสรุปในรูปแบบทั่วไป

2.การให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) หมายถึงความสามารถในการใช้กฎข้อตกลงบทนิยามรู้สิ่งที่เคยรับทราบมาก่อนว่าเป็นจริงมาใช้ในการพิจารณาข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับความจริงเหล่านั้นและสามารถหาข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลได้

3.การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน (Proportional Reasoning) หมายถึงความสามารถในการใช้ความรู้เกี่ยวกับสัดส่วนในการหาคำตอบในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับปริมาณที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง

วิชัย เสวกงาม (2557) ได้แบ่งความสามารถในการให้เหตุผลออกเป็น 5 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) เริ่มต้นด้วยการอ้างถึงกฎโดยทั่วไปเพื่อยืนยันผลสรุปที่เฉพาะเจาะจงการนิรนัยเป็นการยืนยันข้อสรุปที่เฉพาะเจาะจงจากกฎหรือข้อสรุปที่เป็นนายโดยทั่วไปถ้าโกรธหรือข้อสรุปที่เป็นในโดยทั่วไปที่นำมาอ้างนั้นเป็นจริงแล้วข้อสรุปที่เกิดขึ้นต้องเป็นจริงด้วยและข้อสรุปนั้นต้องเป็นไปตามข้ออ้างอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) เริ่มต้นโดยการสังเกตที่มีความเฉพาะเจาะจงและจำกัดอยู่ในขอบเขตและวิธีการที่จะได้ข้อสรุปทั่วไปที่อาจเป็นไปได้แต่ใช่ว่าจะไม่เกิดข้อผิดพลาดทั้งนี้ขึ้นอยู่กับหลักฐานเชิงประจักษ์ที่รวมกันไว้อาจกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการอ้างข้อเท็จจริงเฉพาะย่อยย่อยไปสู่ข้อสรุป ที่เป็นในโดยทั่วไปการวิจัยทางวิทยาศาสตร์จำนวนมากจึงดำเนินการด้วยวิธีอุปนัยซึ่งเป็นการรวบรวมหลักฐานเพื่อมองหาทุกแบบแล้วตั้งสมมุติฐานจากนั้นจึงทดสอบแล้วพัฒนาเป็นทฤษฎีที่อธิบายสิ่งที่พบการให้เหตุผลอุปนัยอาจเรียกได้ว่าเป็นการอ้างเหตุผลในชีวิตประจำวันเกี่ยวข้องกับการลงข้อสรุปที่มีความไม่แน่นอนทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเหตุผลความน่าจะเป็นรวมถึงข้อสรุปที่มีแนวโน้มเหมาะสมและน่าเชื่อถือ

3. การให้เหตุผลเชิงอธิบาย (Abductive Reasoning)เริ่มต้นด้วยชุดที่ไม่สมบูรณ์ของการสังเกตและวิธีการที่จะอธิบายความเป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับชุดที่ไม่สมบูรณ์นั้นการให้เหตุผลเชิงอธิบายทำให้การตัดสินใจที่ดีที่สุดในชีวิตประจำวันขึ้นกับข้อมูลที่อยู่ในมือซึ่งมักจะไม่สมบูรณ์การให้เหตุผลเชิงอธิบาย เป็นการให้เหตุผลที่พิจารณาข้ออ้างที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดในการได้มาซึ่งข้อสรุปหรือเป็นการคาดเดาเหตุการณ์อย่างมีหลักการที่เป็นการอธิบายข้อสรุปที่เกิดขึ้นซึ่งเป็นเพียงการพี่นาถึงความน่าจะเป็นแต่ไม่ได้ยืนยันว่าเหตุการณ์ที่ถูกต้อง

4. การให้เหตุผลเชิงอุปมา (Analogical Reasoning) เป็นวิธีการประมวลผลข้อมูลที่มีการเปรียบเทียบความคล้ายคลึงกันระหว่างแนวคิดใหม่กับแนวคิดที่เข้าใจแล้วและใช้ความคล้ายถึงกันนั้นเพื่อให้เข้าใจแนวคิดใหม่การให้เหตุผลเชิงอุปมาเป็นรูปแบบของการให้เหตุผลแบบอุปนัยเพราะมุ่งที่จะทำความเข้าใจในสิ่งที่มีความเป็นไปได้ที่จะเป็นจริงมากกว่าการนิรนัยเพื่อพิสูจน์สิ่งที่เป็นจริงการให้เหตุผลเชิงอุปมานี้ สามารถนำมาใช้เป็นวิธีการเรียนรู้ข้อมูลใหม่และเป็นส่วนหนึ่งของการอ้างเหตุผลที่ใช้อย่างแพร่หลาย นอกจากนี้การให้เหตุผลเชิงอุปมาอยู่ที่ความสามารถของสมองในการสร้างรูปแบบด้วยการสร้างความสัมพันธ์สมองจะเข้าใจแนวคิดใหม่ได้ง่ายขึ้นและรวดเร็วถ้าสมองเคยรับรู้รูปแบบที่คล้ายกันหรือเหมือนกันกับแนวคิดใหม่นั้น

5. การให้เหตุผลเชิงจริยธรรม (Moral Reasoning) เป็นกิจกรรมทางจิตสำนึกที่ประกอบด้วยการเปลี่ยนแปลงในการกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับผู้คนเพื่อให้สามารถเข้าถึงการตัดสินทางจริยธรรมเหตุผลเชิงจริยธรรมช่วยในการตัดสินใจว่าควรทำหรือไม่ควรทำอะไรเพื่อดำรงไว้ซึ่งจริยธรรม การอ้างเหตุผลทางจริยธรรมเป็นการใช้เหตุผลอย่างมีหลักการและน่าเชื่อถือการตัดสินใจทางจริยธรรมอาจใช้การให้เหตุผลเชิงจริยธรรมที่ชัดเจนชี้ถูกผิดควรทำไม่ควรทำได้ง่ายแต่ถ้ามีเงื่อนไขที่ซับซ้อนขึ้นมาเกี่ยวกับการตัดสินใจแล้วการให้เหตุผลเชิงจริยธรรมอาจต้องมีการจัดลำดับความสำคัญด้วย

จากข้อมูลข้างต้นพบว่านักการศึกษาหลายท่านได้จำแนกประเภทของการให้เหตุผลที่หลากหลายมีทั้งที่เหมือนกันและแตกต่างกันไปตามเกณฑ์ที่ใช้ในการจำแนก แต่ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและพบเห็นค่อนข้างมากคือ การให้เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive

Reasoning) ซึ่งเป็นการคิดจากข้อเท็จจริงย่อยโดยการสังเกตลักษณะร่วมที่สำคัญหรือแบบแผนของสิ่งที่พบเพื่อนำไปสู่กฎเกณฑ์หรือหลักการทั่วไป และการให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning) ซึ่งเป็นการคิดจากกฎเกณฑ์หลักการหรือข้อสรุปทั่วไปไปสู่ข้อเท็จจริงย่อย

4. แนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

เนื่องจากความสามารถในการให้เหตุผลนั้นเป็นความสามารถหรือทักษะที่มีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้และการดำเนินชีวิตของนักเรียน อีกทั้งยังเป็นทักษะที่ช่วยส่งเสริมและพัฒนาทักษะอื่นๆได้อีกด้วย นักการศึกษาหลายท่านได้ให้แนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้หลายแนวทางดังนี้

Guilford and Hoepfner (1971)กล่าวโดยสรุปว่า การพัฒนาบุคคลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลนั้นต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการคิดอย่างมีเหตุผล ควรมีการฝึกความสามารถในการให้เหตุผลควบคู่กับวิชา และสถานการณ์อื่นๆ

Baroody and Coslick (1993) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาการให้เหตุผลคณิตศาสตร์ว่าควรจัดการเรียนการสอนตามลักษณะดังต่อไปนี้

1. ควรบูรณาการการให้เหตุผลกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้นนักเรียนควรได้รับการส่งเสริมการให้เหตุผลแบบอย่างรู้และแบบอุปนัยเพื่อคาดการณ์และการให้เหตุผลแบบนิรนัยง่ายๆ
2. ควรมีการชี้แนะให้นักเรียนได้เห็นว่ามีรูปแบบที่แตกต่างกันมากมายทั้งกฎเกณฑ์ในสถานการณ์ต่างๆ
3. การใช้กิจกรรมที่มีการจำแนกอย่างชัดเจน
4. ส่งเสริมให้นักเรียนได้ประเมินการคาดการณ์และการนิรนัยอย่างมีแบบแผน

Ross (1998) กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล โดยสรุปว่า การที่จะให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลนั้นครูผู้สอนจำเป็นที่จะต้องทำให้คณิตศาสตร์เป็นเสมือนสิ่งที่มีชิวิตชีวา น่าตื่นเต้น และมีบทบาทหน้าที่สำคัญในการศึกษาของนักเรียนทุกคนตลอดทั้งปีการศึกษา และครูผู้สอนควรเข้าใจถึงธรรมชาติของการให้เหตุผลและสามารถอธิบายแนวคิดเชิงประจักษ์อย่างมีหลักการเพื่อความเข้าใจและสามารถตีความสถานการ์ต่าง ๆ ได้ บทบาทที่กล่าวมานั้นสามารถประยุกต์ใช้งานได้อย่างหลากหลาย

Malloy (1999) ได้เสนอแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาโดยเสนอให้ใช้แนวทางในการสืบสอบ (Inquiry Approach) ในการส่งเสริมการให้นักเรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการตรวจสอบ และเชื่อมโยงความรู้ มโนทัศน์ต่างๆที่เกี่ยวข้อง

National Council of Teachers of Mathematics (2000) กล่าวโดยสรุปว่า การพัฒนาการให้เหตุผลของนักเรียนครูควรทำอย่างสม่ำเสมอ จัดบรรยากาศในการเรียนคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล อีกทั้งตรวจสอบพัฒนาการของการให้เหตุผลของนักเรียนอย่างสม่ำเสมอ สนับสนุนการอภิปรายการให้เหตุผลของนักเรียนและครู

Heaton (2000) กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลว่า การที่ครูพยายามบอกนักเรียนว่าถูกหรือผิดเท่านั้นไม่ใช่สิ่งที่จำเป็นหรือสำคัญในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล หากแต่ครูจะต้องอธิบายโดยการนำเอาสิ่งที่นักเรียนพยายามคิดหรือกำลังคิดมา นักเรียนคิดผิด เข้าใจผิดในขั้นตอนไหนจึงจะทำให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการให้เหตุผล

Brodie (2009) กล่าวถึง แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลว่า กุญแจสำคัญในการสอนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพ คือ ประเภทและวิธีการของงานที่ผู้เรียนมีส่วนร่วม และรูปแบบของปฏิสัมพันธ์ระหว่างครูผู้สอนและนักเรียน

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีหลากหลายที่สำคัญดังต่อไปนี้

- หาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์
- ใช้ความรู้และข้อมูลในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ และในการอธิบายความคิดของตนเอง
- เข้าใจและสามารถใช้กระบวนการให้เหตุผลในสถานการณ์เฉพาะใดๆ
- สร้าง ทดสอบและประเมินข้อความคาดการณ์และข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์
- ให้เหตุผลโดยใช้การอุปนัยและการนิรนัยทางคณิตศาสตร์
- ตรวจสอบและประเมินความคิดของตนเอง
- เห็นคุณค่าและความสำคัญของการให้เหตุผลซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์และสามารถนำไปใช้ได้

สิ่งที่ควรเพิ่ม

- การให้เหตุผลในชีวิตประจำวัน ในการทำงาน และในบริบทที่หลากหลาย
- ลักษณะของการให้เหตุผลที่อยู่ในการเรียนวิชาอื่นๆ
- การให้เหตุผลแบบอุปนัยและแบบนิรนัย

สิ่งที่ควรลด

- การให้เหตุผลตามความรู้สึก และที่ไม่อิงหลักวิชา

ตารางที่ 5 ตัวอย่างการใช้คำถามในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผล

ตัวอย่างอย่างคำถามจำแนกตามทักษะที่ต้องการพัฒนา	จุดประสงค์การถาม
ทักษะการให้เหตุผล - ทำไมจึงใช้วิธีคิดอีกวิธีหนึ่งไม่ได้ - เห็นด้วยกับสิ่งที่เพื่อนอธิบายหรือไม่ เพราะเหตุใด - จากวิธีการที่ทำมาทั้งหมด ได้ข้อสรุปในการแก้ปัญหานี้อย่างไร - ข้อสรุปที่ได้เป็นจริงเสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด	เพื่อให้ผู้เรียน - ให้เหตุผลในการเลือกใช้วิธีคิดที่เหมาะสม - ใช้เหตุผลในการอธิบายความคิดเห็นของตนเอง - วิเคราะห์เพื่อหาข้อสรุป - ใช้เหตุผลในการอ้างอิงข้อสรุปไปใช้ทั่วไป

วรนารถ อยู่สุข (2555) ได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ด้วยการจัดสภาพการณ์ให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ได้ให้เหตุผลผ่านการอธิบายและเขียนบรรยายโดยมีการปฏิบัติกิจกรรมเพื่อให้นักเรียนได้วิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์วางแผนการปฏิบัติกิจกรรมหรือสร้างข้อความคาดการณ์ข้อสรุปและการตัดสินใจหรือยืนยันข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผลและได้เสนอหลักการจัดกิจกรรมที่ส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ประการ คือ

1. เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้อธิบายเหตุผลแสดงแนวคิดอย่างอิสระผ่านการพูดหรือเขียน
2. เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ตอบคำถามหาข้อสรุปพร้อมทั้งยืนยันคำตอบหรือข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล
3. เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการปฏิบัติกิจกรรมได้ร่วมกันระดมความคิดสืบค้นค้นหา
4. จัดกิจกรรมที่กระตุ้นให้ผู้เรียนได้ใช้ความคิดและได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรม

เกษณีย์ ยอดไฟอินทร์ (2556) กล่าวถึงการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้บุคคลได้คิดอย่างมีเหตุผลมีอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการใช้และให้เหตุผลของตนเองซึ่งควรสอนควบคู่กับเนื้อหาวิชาปกติหรือสถานการณ์ต่างๆที่เหมาะสม

พีชาณิกา เพชรสังข์ (2557) เสนอแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์คือต้องฝึกจากประสบการณ์ที่หลากหลายและต่อเนื่องผ่านการแลกเปลี่ยนความคิดพูดอธิบายชี้แจงด้วยเหตุผลจึงควรจัดกิจกรรมโดยใช้แนวทางการสืบเสาะเพื่อให้นักเรียนมีโอกาสในการสืบค้นคาดการณ์ค้นหาวิธีการพิสูจน์สังเกตแบบรูปรวมถึงครูควรจัดบรรยากาศให้กับนักเรียนรู้สึกกล้าที่จะแสดงความคิดเห็นในกรณีต่างๆ

จากข้อมูลข้างต้น ผู้วิจัยสรุปแนวทางในการพัฒนาและส่งเสริมความสามารถหรือทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ คือ ส่งเสริมและเปิดโอกาสในการแลกเปลี่ยนความคิดเห็น ให้นักเรียนได้อธิบายเหตุผลแนวคิดของตนเองอย่างอิสระและยืนยันเหตุผลด้วยข้อเท็จจริง ในสถานการณ์ที่หลากหลายและสม่ำเสมอ สำหรับวิธีการสอนที่ช่วยส่งเสริมและพัฒนาทักษะให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นั้นอาจทำได้ด้วยวิธีการสืบสอบ (Inquiry Approach) และการใช้คำถาม (Questioning)

5. การวัดและการประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวทางในการวัดและประเมินผลความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากแนวคิดของ องค์กร สถาบันการศึกษาและนักการศึกษาหลายท่านดังนี้

Sternberg (1999 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2554) กล่าวว่าในการพัฒนาทักษะและการประเมินการให้เหตุผลของผู้เรียน ผู้สอนต้องคำนึงกระบวนการทางปัญญา 5 ขั้น คือ

1. การระบุปัญหา
2. การสร้างกลวิธีเพื่อแก้ปัญหา
3. การสร้างมโนภาพจากข้อมูลในปัญหา
4. การวางแผนและการจัดการทรัพยากรเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา
5. การกำกับและประเมินคำตอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546) กล่าวถึงการประเมินผลทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการให้เหตุผล ประเมินได้จากความสามารถในการแสดงออกตามขั้นตอนของทักษะ ดังต่อไปนี้

1. รวบรวมความรู้ที่เกี่ยวข้องในกระบวนการแก้ปัญหา
2. เลือกใช้ความรู้เพื่อจัดลำดับขั้นตอนของการให้เหตุผลและลงข้อสรุป
3. ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของการให้เหตุผล

สมเดช บุญประจักษ์ (2540) ได้กล่าวถึง พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลไว้ ดังนี้

1. ความสามารถในการวิเคราะห์และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล

1.1 อธิบายความหมายของคำศัพท์เฉพาะได้

1.2 แสดงถึงความสัมพันธ์ของข้อมูลและแทนความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยสัญลักษณ์ที่เหมาะสม

1.3 คาดเดาคำตอบของปัญหาและตรวจสอบข้อคาดเดาอย่างมีเหตุผล

2. ความสามารถในการหาข้อสรุป

2.1 สรุปแนวคิดในการแก้ปัญหาได้

2.2 อธิบายเหตุผลสำหรับผลสรุปนั้นได้

3. ความสามารถในการแสดงข้อสรุป ยืนยันข้อสรุปของแนวคิด

3.1 ตรวจสอบข้อสรุปของแนวคิดในการแก้ปัญหา

3.2 อธิบายการได้มาซึ่งข้อสรุปของแนวคิดในการแก้ปัญหา

3.3 ขยายข้อสรุปไปสู่รูปทั่วไปได้

อัมพร ม้าคนอง (2554) ได้กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีหลายประเภทการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลจึงมักประเมินตามประเภทของการให้เหตุผลและลักษณะของเนื้อหาคณิตศาสตร์โดยทั่วไปผู้สอนมักประเมินการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สามประเภทดังต่อไปนี้

1. การให้เหตุผลเชิงตรรก เป็นการใช้หลักตรรกศาสตร์ในการอธิบายสิ่งต่างๆที่เกิดขึ้น

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการสังเกตเห็นตัวอย่างหลายหลายตัวอย่างที่เหมือนกันหรือมีความสัมพันธ์แบบเดียวกันจึงทำให้ได้ข้อสรุปที่มีเหตุผล

1.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการใช้หลักหรือกดทั่วไปอ้างอิงไปสู่สิ่งที่กำลังพิจารณาในทางคณิตศาสตร์มักเป็นการให้เหตุผลที่อ้างอิงทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ

2. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วนเป็นการให้เหตุผลโดยใช้ความคิดเกี่ยวกับสัดส่วนของปริมาณที่หายไปหรือที่เปลี่ยนด้วยการเพิ่มขึ้นหรือลดลงเช่นการให้เหตุผลว่าเศษส่วนที่กำหนดให้จะมีค่าลดลงถ้าเสดลดลงในขณะที่ตัวส่วนมีค่าเท่ากัน

3. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิเป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับสิ่งที่ปรากฏเป็นมิติต่างๆเช่นภาพ 2 มิติหรือทรง 3 มิติเช่นการให้เหตุผลเพื่ออธิบายความสัมพันธ์หรือความเกี่ยวข้องกันระหว่างภาพสองมิติของวัตถุชิ้นหนึ่งกับภาพที่แสดงวัตถุนั้นในสามมิติ

การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลส่วนมากใช้ปัญหาหรือกิจกรรมเป็นเครื่องมือและประเมินการให้เหตุผลตามบริบทของปัญหาหรือกิจกรรมนั้นซึ่งอาจจะประเมินการให้เหตุผลหลายอย่างในปัญหาเดียวกัน นอกจากนี้ คำถามที่ใช้ในการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลนั้นควรเป็นคำถามที่กระตุ้นให้ผู้เรียนคิดเพื่อหาเหตุผลมาอธิบายคำตอบและเอื้อต่อการให้เหตุผลที่หลากหลาย เพื่อผู้สอนจะประเมินได้ว่า การให้เหตุผลของผู้เรียนมีลักษณะอย่างไร และอยู่ในระดับใด

เกษณีย์ ยอดไฟอินทร์ (2556) เสนอแนวทางในการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สามารถวัดตามองค์ประกอบดังนี้ 1) การนำสมบัติ กฎ บทนิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทมาอธิบาย/อ้างอิง/แสดงแนวคิดได้อย่างถูกต้องครบถ้วน และ 2) การหาคำตอบที่ถูกต้อง

สำหรับในงานวิจัยนี้องค์ประกอบที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มี 3 ลักษณะ ดังนี้

1) การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล เป็นความสามารถในการใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดให้

2) การหาข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล

3) การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

ตอนที่ 4 ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

1. ความหมายของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยศึกษาความหมายของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จากนักการศึกษา องค์กรหรือสถาบันทางการศึกษา ดังนี้

National Council of Teachers of Mathematics (1991) กล่าวโดยสรุปว่าความหมายของการเชื่อมโยงคือการผสมผสานแนวคิดที่มีความสำคัญเกี่ยวข้องกันให้รวมเป็นองค์ประกอบเดียวกัน

Kennedy, Tipps, and Johnson (2007) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญ นักเรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรม ได้แก่ รูปภาพ แผนภาพ สัญลักษณ์ กับกระบวนการ เนื้อหาและวิธีการต่างๆทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันและจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง

Ontario (2007) กล่าวว่าความสามารถในการเชื่อมโยงเป็นการเชื่อมโยงระหว่างความรู้และทักษะกระบวนการ รวมถึงแนวคิดและหลักการทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในสถานการณ์หรือบริบทที่เหมาะสม

Nordheimer (2010) กล่าวถึงความหมายของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการบูรณาการระหว่างองค์ความรู้ทางวิทยาศาตร์และคณิตศาสตร์ นำไปสู่การได้มาของเครื่องมือที่มีประโยชน์เพื่อสนับสนุนครูผู้สอนให้สามารถสร้างความเชื่อมโยงให้เกิดกับผู้เรียนได้ โดยอาจเป็นการบูรณาการระหว่างวิชาคณิตศาสตร์และชีวิตประจำวันของนักเรียนหรือความสัมพันธ์กันระหว่างสาขาวิชาต่าง ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น เรขาคณิตและพีชคณิต

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2550) การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่ต้องอาศัยการคิดวิเคราะห์ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และหลักการทางคณิตศาสตร์มาสร้างความสัมพันธ์อย่างเป็นเหตุเป็นผลระหว่างความรู้และทักษะ / กระบวนการที่มีในเนื้อหาคณิตศาสตร์กับงานที่เกี่ยวข้องเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาและการเรียนรู้แนวคิดใหม่ที่ซับซ้อนหรือสมบูรณ์ขึ้น

อาทิตย์ สำราญอินทร์ (2553) กล่าวว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถของนักเรียนในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กับความรู้หรือแนวคิดที่เกี่ยวข้องเพื่อใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่หรือช่วยในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นที่นักเรียนพบ

เกศินี เพ็ชรรุ่ง (2556) กล่าวว่าความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หมายถึงความสามารถของนักเรียนในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับความรู้ในสาขาวิชาอื่นๆที่สถานการณ์ต่างๆในชีวิตจริง

สุธารัตน์ สมรรถการ (2556)กล่าวว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์หมายถึงความสามารถในการนำความรู้เนื้อหาสาระทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กับสาระภายในวิชาหรือวิชาอื่นๆหรือชีวิตประจำวันโดยเชื่อมโยงหลักการวิธีการทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆสามารถนำไปใช้ในการเรียนรู้และการดำเนินชีวิตประจำวันทำให้นักเรียนเห็น คุณประโยชน์ของวิชาคณิตศาสตร์

จากข้อมูลข้างต้น ผู้วิจัยสรุปความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถในการนำความรู้ และหลักการทางคณิตศาสตร์มาสัมพันธ์กับปัญหาหรือสถานการณ์และการแก้ปัญหา

2. ลักษณะของการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษา องค์กร และสถาบันการศึกษาต่างๆจำแนกลักษณะของการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน ดังนี้

National Council of Teachers of Mathematics (1991) แบ่งลักษณะของการเชื่อมโยงออกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

1. การเชื่อมโยงภายในวิชาเป็นการนำเนื้อหาภายในวิชาเดียวไปสัมพันธ์กันให้ผู้เรียนได้ประยุกต์ความรู้และทักษะไปใช้ในชีวิตจริงช่วยนักเรียนให้ทำความเข้าใจถึงความแตกต่างของเนื้อหาวิชารวมทั้งภิสักคณิตเรขาคณิตและตรีโกณมิติซึ่งจะทำให้การเรียนของผู้เรียนมีความหมาย

2. การเชื่อมโยงระหว่างวิชาเป็นการรวมศาสตร์ต่างๆตั้งแต่สองสาขาขึ้นไปภายใต้เนื้อเรื่องที่เกี่ยวข้องกันให้มาสัมพันธ์กันเช่นวิชาคณิตศาสตร์กับวิทยาศาสตร์เศรษฐศาสตร์สังคมกีฬาหรือศิลปะเป็นการเรียนรู้โดยใช้ความรู้ความเข้าใจและทักษะในวิชาต่างๆมากกว่าหนึ่งวิชาขึ้นไปจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่ลึกซึ้งและตรงกับสภาพชีวิตจริง

Hau (1993) กล่าวว่า แนวคิดสำหรับการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ จำแนกได้ 2 ลักษณะ ได้แก่การเชื่อมโยงภายใน (internal connections) และ การเชื่อมโยงภายนอก (external connections)

1. การเชื่อมโยงภายใน (internal connections) อ้างอิงถึงการใช้ประโยชน์ภายในเนื้อหาคณิตศาสตร์และจำแนกออกเป็น 4 ลักษณะ ดังนี้

1.1 การนำ ไปใช้ (applied) เป็นการประยุกต์ใช้เกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการพัฒนาในเรื่องความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ใหม่

1.2 โครงสร้าง (structural) เป็นการเชื่อมโยงในเชิงการจัดการเพื่อจะบรรยาย แนวคิดและความคิดรวบยอดในสาขาให้เป็นระบบ

1.3 ความคิดรวบยอดและขั้นตอน(conceptual-procedural) เป็นความสัมพันธ์ระหว่างทักษะและความคิดรวบยอด

1.4 ประวัติศาสตร์และวัฒนธรรม(historical/cultural) เป็นการเชื่อมโยงตามช่วงเวลา ซึ่งระบุบทบาทของประวัติศาสตร์และวัฒนธรรมในคณิตศาสตร์และผลที่เกิดขึ้นจากการกระตุ้น

2. การเชื่อมโยงภายนอก (external connections) อ้างอิงเพื่อใช้ในสาขาอื่นที่นอกเหนือจากสาขาคณิตศาสตร์จำแนกออกเป็น สังคมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ธรรมชาติผู้บริโภคที่เกี่ยวข้อง อาชีพเกี่ยวข้อง และชีวิตประจำวัน

Marshall (1995) กล่าวถึง การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยสรุปว่าเป็นส่วนประกอบของสคีมาหรือกลุ่มของแผนผังที่เชื่อมต่อภายในตัวแทนทางความคิด สคีมา คือ "โครงสร้างหน่วยความจำที่พัฒนาขึ้นจากประสบการณ์ของแต่ละบุคคลและแนะนำการตอบสนองต่อสิ่งแวดล้อมของแต่ละบุคคล

National Council of Teachers of Mathematics (2000) กล่าวโดยสรุปดังนี้ รูปแบบการเรียนการสอนตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ควรทำให้นักเรียนทุกคนสามารถรับรู้และใช้การเชื่อมโยงระหว่างความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความคิดทางคณิตศาสตร์นั้นจะต้องสร้างความเชื่อมโยงกันเพื่อสร้างความสอดคล้องกันระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด รู้จักและประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในบริบทนอกคณิตศาสตร์ และเมื่อนักเรียนสามารถเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ความเข้าใจของพวกเขาจะลึกและยั่งยืนมากขึ้น พวกเขาสามารถมองเห็นการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ในการมีส่วนร่วมที่หลากหลายระหว่างหัวข้อทางคณิตศาสตร์ในบริบทที่เกี่ยวข้องกับวิชาคณิตศาสตร์กับวิชาอื่น ๆ

Sawyer (2008) กล่าวถึงลักษณะของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์โดยสรุปไว้ว่าเป็นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในหลากหลายสาขาวิชาเข้าด้วยกัน หรือระหว่างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และประสบการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง นำไปสู่ความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในบริบทต่าง ๆ นอกเหนือไปจากวิชาคณิตศาสตร์ได้

Eli, Mohr-Schroeder, and Lee (2011) กล่าวถึง การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์สามารถเรียกได้ว่าเป็นการเชื่อมโยง (หรือสะพาน) ของความรู้ก่อนหน้าหรือความรู้ใหม่ ๆ ใช้ในการสร้างหรือเสริมสร้างความเข้าใจความสัมพันธระหวางแนวความคิดทางคณิตศาสตรหรือใช้แทนตัวแทนทางความคิด

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวว่า การเชื่อมโยงอาจทำได้หลากหลาย แต่ที่นิยมทำกันในห้องเรียนคณิตศาสตร์มี 3 ลักษณะ ดังนี้

1. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับคณิตศาสตร์เป็นการเชื่อมโยงเนื้อหาสาระองค์ความรู้หรือกระบวนการภายในคณิตศาสตร์เช่นการเชื่อมโยงความรู้เรื่องเส้นจำนวนระบบพิกัดฉาก คู่ลำดับกราฟความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2.การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นเป็นการเชื่อมโยงความรู้หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นในเรื่องที่เกี่ยวข้องกันเช่นการเชื่อมโยงความรู้เรื่องสัญญากรณ์วิทยาศาสตร์กับนาโนเทคโนโลยีและการแบ่งตัวของแบคทีเรีย

3. การเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวันเป็นการเชื่อมโยงความรู้หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับสิ่งที่เกิดขึ้นจริงในชีวิตประจำวันเช่นการใช้ความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสอธิบายว่าการเดินทางลัดเป็นการเดินทางในระยะทางที่สั้นกว่าการเดินตามเส้นทางปกติ

วาสุกรี ใจจันทร์ (2555) กล่าวถึงลักษณะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามกรอบแนวคิด Evitts เป็นดังนี้

1. การเชื่อมโยงเชิงโมเดล (modeling connections) เป็นสิ่งที่เชื่อมต่อระหว่างโลกของ คณิตศาสตร์และโลกของความเป็นจริงของนักเรียน

2. การเชื่อมโยงเชิงโครงสร้าง (structural connections) คือการอาศัยดูโครงสร้างที่เหมือนกัน จากแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกันระหว่าง สองแนวคิดจากการวางลำดับของเนื้อหา

3. การเชื่อมโยงทางการแสดงแทน (representational connections) การแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่แทนความเข้าใจของ นักเรียนซึ่งแสดงในรูปแบบต่างๆเช่นกราฟแผนภูมิจำนวนสัญลักษณ์รูปภาพและภาษาพูด

4. การเชื่อมโยงเกี่ยวกับขั้นตอนและความ คิดรวบยอด (procedure - concept connections) คือความสัมพันธ์ของความรู้ที่เป็นความคิดรวบยอด และที่เป็นขั้นตอนซึ่งแต่ละคนสามารถอธิบายหรือ ลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการสูตรการรับรู้ เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

5. การเชื่อมโยงระหว่างสาระของคณิตศาสตร์ (connection between strands of mathematics) เป็นการมองจากสถานการณ์ปัญหาแล้ววิเคราะห์จาก สถานการณ์ปัญหาเพื่อสามารถอ้างอิงสิ่งที่ทำไปยัง เนื้อหาคณิตศาสตร์

จากข้อมูลข้างต้นพบว่านักการศึกษาหลายท่านได้จำแนกลักษณะของการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ไว้ในหลายลักษณะแต่มีลักษณะของการเชื่อมโยงความรู้ที่คล้ายคลึงกันที่สำคัญ 3 ลักษณะ คือ การเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ภายในวิชา ระหว่างวิชา และในชีวิตประจำวัน

3. ความสำคัญของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญและเป็นทักษะที่จำเป็นที่ต้องพัฒนาให้เกิดกับนักเรียนอย่างต่อเนื่อง สถาบันการศึกษา นักการศึกษาและนักวิจัยหลายท่านได้กล่าวถึงความสำคัญของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

National Council of Teachers of Mathematics (2000) กล่าวถึงความสำคัญของการเชื่อมโยงกับนักเรียนในระดับเกรด 9-12 ดังนี้

1. นักเรียนควรจะใช้ความรู้ของพวกเขาในการวิเคราะห์ข้อมูล และการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ในการสร้างความเข้าใจในประเด็นปัญหาเหล่านั้นได้อย่างลึกซึ้ง
2. นักเรียนควรใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยความมั่นใจเพื่ออธิบายความซับซ้อนและประยุกต์ใช้ความรู้ รวมถึงการเชื่อมโยงเข้าสู่ในโลกจริงได้
3. นักเรียนไม่เพียงแต่เรียนรู้ที่จะคาดหวังถึงการเชื่อมโยงเท่านั้นแต่จะต้องเรียนรู้ที่จะใช้ประโยชน์จากการเข้าใจอย่างถ่องแท้เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ที่แตกต่างจากเดิม

Baki, Çatlıoğlu, Coştu, and Birgin (2009) กล่าวว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงมีความสำคัญกับการเรียนรู้ของนักเรียนกล่าวคือเป็นความสามารถของนักเรียนในการเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์กับความรู้ที่เกิดขึ้นทั้งในโรงเรียนและนอกโรงเรียน

Ontario (2007) กล่าวว่า การสร้างความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรียนมากับการนำไปใช้ในชีวิตจริงมีส่วนสำคัญที่ช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจถึงประโยชน์และความจำเป็นของคณิตศาสตร์นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียน

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวว่าการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สะท้อนให้เห็นถึงการใช้งานของคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงที่สามารถพบเห็นได้ทั่วไป การเชื่อมโยงมีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย (Meaningful learning)

วาสุกรี ใจจันทร์ (2555) กล่าวถึง การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบสำคัญที่กำหนดไว้ในเป้าหมายหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนเป็นสิ่งสำคัญทั้งครูและนักเรียนในชั้นเรียนอีกทั้งสนับสนุนการคิดทางคณิตศาสตร์ในสาขาอื่นๆจากบริบทคณิตศาสตร์ที่ให้ผู้เรียนเห็นคณิตศาสตร์ในฐานะ วิธีการเพื่อช่วยให้เข้าใจลูกด้วยตัวนักเรียนทำให้เป้าหมายการเน้นการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนอาศัยข้อสนับสนุนที่นักเรียนแสดงบทบาทหลักในการเชื่อมโยงจึงจำเป็นสำหรับนักเรียนอย่างมากที่ต้องมองคณิตศาสตร์เชื่อมโยงกันโดยสามารถดูว่าความรู้จะถูกใช้เมื่อไหร่และอย่างไรเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนได้พัฒนาขีดความสามารถของตนเองอย่างเต็มศักยภาพโดยยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางการเรียนรู้

นุชนารถ ทองกระจ่าง (2556) กล่าวถึง ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะที่จำเป็นของนักเรียน ซึ่งกระทรวงศึกษาธิการได้ระบุถึงการพัฒนาทักษะกระบวนการเชื่อมโยงว่า ในการจัดกิจกรรมการเรียน การสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้นักเรียนมีความรู้และพื้นฐานในการนำไปศึกษาต่อ จำเป็นจะต้องเชื่อมโยงเนื้อหาภายในวิชาคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ โดย ใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้และแก้ปัญหาแล้ว ยังจำเป็นต้องนำคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ ใช้ในชีวิตประจำวัน ดังนั้นครูผู้สอนคณิตศาสตร์มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องปรับเปลี่ยนวิธีสอน ของตนให้เข้ากับยุคสมัย โดยจัดการเรียนการสอนด้วยการบูรณาการเนื้อหาสาระที่มีความเกี่ยวข้องกันมาสัมพันธ์ให้เป็นเรื่องเดียวกัน และจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ผู้เรียนเกิดความรู้ความเข้าใจในลักษณะ ที่เป็นองค์รวม และสามารถนำความรู้ ความเข้าใจไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้

วาสุกรี แสงป้อม (2558) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ ซึ่งกำหนดไว้ทั้งในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานและการศึกษาขั้นสูง เพื่อช่วยให้ผู้เรียนบรรลุผลสำเร็จเกี่ยวกับการเชื่อมโยงภายในหัวข้อและระหว่างหัวข้อทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเชื่อมโยงในสาขาวิชาอื่นที่ผู้เรียนสามารถสร้างความรู้โดยผู้เรียนเอง

จากข้อมูลข้างต้น ผู้วิจัยสรุปเกี่ยวกับความสำคัญของความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะที่มีบทบาทในการเชื่อมโยงสิ่งที่เรียนในห้องเรียนกับนอกห้องเรียนและสะท้อนถึงการใช้งานคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงอันจะทำให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์

4. แนวทางการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

Marchisotto (1993) ได้ทำงานวิจัยเพื่อนำเสนอการใช้ความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยองค์ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์มาเชื่อมโยงเพื่อการอธิบายองค์ความรู้ขั้นสูงกล่าวคือการสอนให้นักเรียนเห็นว่าแนวคิดทางคณิตศาสตร์มักมีความเกี่ยวข้องซึ่งกันและกันโดยใช้

ตัวอย่างการอธิบายตัวเลขฟิโบนักชีด้วยทฤษฎีสามเหลี่ยมพีทาโกรัส ความสำเร็จของการทดลองคือการช่วยให้นักเรียนเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างกันในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และเพิ่มพูนประสบการณ์การสร้างความเชื่อมโยงให้นักเรียน นำไปสู่การสร้างบรรยากาศในการเรียนการสอนให้นักเรียนมีความสนใจที่จะใช้ทักษะการเชื่องโยงทางคณิตศาสตร์ต่อไป

Dean (2008) ได้ทำงานวิจัยเกี่ยวกับการทดลองใช้กิจกรรมที่มีความแปลกใหม่เพื่อการเสริมสร้างความสามารถในการเชื่องโยงทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการยกมือตอบคำถาม การเขียนบรรยาย และการสื่อสารด้วยคำพูดกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน เพื่อนักเรียนใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์แบบใหม่ ๆ ร่วมกับความรู้เดิม หรือประยุกต์กับประสบการณ์ที่พบเจอในชีวิตประจำวัน พบว่าการใช้กิจกรรมที่แปลกใหม่ไปจากเดิมเหล่านี้นำไปสู่การเพิ่มความสามารถในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันของนักเรียน อีกทั้งยังเป็นการพัฒนาทักษะการตีความ อธิบายและการใช้ภาษาของผู้เรียน

Jaijan and Suttiamporn (2012) ศึกษาการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากการศึกษาบทเรียนและวิธีการเปิด (lesson study and open approach) เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมายประกอบด้วยครูและนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 27 คน โดยรวบรวมข้อมูลระหว่างการมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ใน 4 สถานการณ์ปัญหา ผลการศึกษาพบว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นใน 5 แบบของการศึกษาบทเรียนและวิธีการแบบเปิด ดังนี้ 1) การสร้างแบบจำลองการเชื่อมโยงความรู้ที่นักเรียนพยายามจะจดจำคุ้นเคยสิ่งต่างๆ ทั้งจากชีวิตประจำวันของพวกเขาและชั้นเรียนก่อนหน้าเป็นฐานในการเข้าโลกทางคณิตศาสตร์ 2) การเชื่อมต่อโครงสร้างโดยที่นักเรียนได้เรียนรู้เพื่อให้รูปสมบูรณ์โดยการตัดการเคลื่อนย้ายและวาดเส้นเชื่อมเพื่อให้รูปสมบูรณ์ 3) การเชื่อมโยงความรู้ที่เป็นตัวแทนสำหรับความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบของตัวเลขและคำพูดที่ทำจากนักเรียน "ความเข้าใจเพื่อสื่อสารความคิด” 4) ขั้นตอน – แนวคิดในการเชื่อมโยงความรู้ซึ่งนักเรียนพยายามที่จะสร้างสูตรสำหรับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้วยตัวเอง และ 5) การเชื่อมโยงความรู้ระหว่างคณิตศาสตร์ - เนื้อหาถูกฝังอยู่ในสถานการณ์ปัญหาสำหรับนักเรียนที่จะค้นพบพวกเขาด้วยตัวเอง

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวถึงความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเป็นความสามารถดังนี้

- เชื่อมโยงและสัมพันธ์ความรู้เชิงมโนทัศน์กับความรู้เชิงขั้นตอนหรือกระบวนการ
- ใช้คณิตศาสตร์ในสาขาวิชาอื่น เช่น ศิลปะ ดนตรี จิตวิทยา วิทยาศาสตร์ ธุรกิจ และในชีวิตประจำวัน

- เชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาหรือหัวข้อคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย รวมถึงการใช้ของเนื้อหาหรือหัวข้อเหล่านั้น และมองเห็นคณิตศาสตร์เป็นภาพรวมของการบูรณาการ

- วิเคราะห์ปัญหาและอธิบายผลโดยใช้กราฟ ตัวเลข วัตถุ ภาษา แบบจำลอง และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

- ใช้ความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ในการทำความเข้าใจความคิดทางคณิตศาสตร์อื่น และความคิดในศาสตร์อื่น

- เชื่อมโยงวิธีการที่แตกต่างกันที่ใช้ในการแสดงมโนทัศน์เดียวกัน และที่ใช้ในการนำเสนออย่างเดียวกัน

- เห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ในสังคมและวัฒนธรรมของตนเอง

- ใช้และเห็นคุณค่าของการเชื่อมโยงระหว่างหัวข้อต่างๆของคณิตศาสตร์และระหว่างคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ

สิ่งที่ควรเพิ่ม

- การเชื่อมโยงเนื้อหาภายในคณิตศาสตร์เอง
- การนำคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เป็นประโยชน์
- การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆและกับสิ่งที่อยู่นอกชั้นเรียน

สิ่งที่ควรลด

- การเรียนหัวข้อต่างๆแยกจากกัน
- การพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงโดยปราศจากบริบทที่เหมาะสม

นอกจากนี้สิ่งสำคัญที่จะทำให้ผู้เรียนพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงได้ดีผู้เรียนต้องมีความรู้และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องที่จะนำไปเชื่อมโยงเป็นอย่างดีมีประสบการณ์ในการมองเห็นความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันของสิ่งที่จะเชื่อมโยง และมีทักษะในการเชื่อมโยงหรือสร้างความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์

นอกจากนี้ อัมพร ม้าคนอง (2554) ก็ได้กล่าวถึงการใช้คำถามในการพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง ดังนี้

ตารางที่ 6 ตัวอย่างการใช้คำถามในการพัฒนาทักษะการเชื่อมโยง

ตัวอย่างคำถามจำแนกตามทักษะที่ต้องการพัฒนา	จุดประสงค์ของการถาม
ทักษะการเชื่อมโยง - ต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้างในการแก้ปัญหานี้ - เราใช้ความรู้เรื่องนี้ในชีวิตประจำวันอย่างไรบ้าง ลองยกตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจน	เพื่อให้ผู้เรียน - เชื่อมโยงความรู้ไปใชในการแก้ปัญหา -เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน

- เรื่อง.....ที่เรียนอยู่นี้เกี่ยวข้องกับเรื่อง....ที่เรียนมาก่อนหน้านี้อย่างไร - ข่าวเรื่อง....ที่กำลังเป็นประเด็นอยู่ในขณะนี้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์อย่างไร	- เชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ระหว่างเรื่องที่เกี่ยวข้อง - เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับเรื่องใกล้ตัว

นุชนารถ ทองกระจ่าง (2556) กล่าวถึงการนำทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ มาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้นั้น เป็นการเรียนที่ส่งผลให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้และทักษะที่ได้ เป็นเครื่องมือเรียนรู้ในการแก้ปัญหาและนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน อีกทั้งยังฝึกกระบวนการ คิดวิเคราะห์ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการนำความรู้ เนื้อหาสาระ และหลักการทางคณิตศาสตร์มาสร้างความสัมพันธ์อย่างเป็นเหตุเป็นผลอีกด้วย ดังนั้น จึงควรนำทักษะการเชื่อมโยงมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เพื่อให้ผู้เรียนได้เกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตามหลักสูตร แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

จากข้อมูลข้างต้น การพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงควรเป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมและเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถนำความรู้ที่หลากหลายมาสัมพันธ์กับสถานที่เกี่ยวข้อง ไม่ควรแยกเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกันออกจากกันแต่ควรสอนร่วมกัน การใช้คำถาม (Questioning) เป็นแนวทางหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนสามารถคิดเชื่อมโยงและดึงความรู้ที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ในการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงได้ดีและประสบความสำเร็จนั้น ผู้เรียนต้องมีความรู้และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องที่จะนำไปเชื่อมโยงเป็นอย่างดีมีประสบการณ์ในการมองเห็นความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันของสิ่งที่จะเชื่อมโยง และมีทักษะในการเชื่อมโยงหรือสร้างความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์

5. การวัดและประเมินผลความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

Saminanto and Kartono (2015) กล่าวว่าในความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนควรจะสามารถแสดงพฤติกรรมในลักษณะ ดังต่อไปนี้

1. สามารถเชื่อมโยงความรู้ภายในหัวข้อเดียวกันในวิชาคณิตศาสตร์
2. สามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างหัวข้อภายในวิชาคณิตศาสตร์
3. สามารถเชื่อมโยงความรู้ระหว่างความรู้คณิตศาสตร์กับความรู้วิทยาศาสตร์
4. สามารถเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวันได้

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546) กล่าวถึงการประเมินผลทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านการเชื่อมโยงความรู้ ประเมินได้จากความสามารถในการแสดงออกตามขั้นตอนของทักษะ ดังต่อไปนี้

1. เปรียบเทียบความรู้ของแต่ละสาระ
2. เชื่อมโยงสถานการณ์จริงกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
3. หาข้อสรุปจากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์
4. เชื่อมโยงความรู้ในแต่ละสาระทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆเพื่อนำไปสู่การเรียนรู้มโนทัศน์ที่ซับซ้อน
5. สรุปสาระสำคัญที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่นๆ

กรมวิชาการ (2546a) ได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไว้ ดังนี้

ตารางที่ 7 เกณฑ์การให้คะแนนด้านความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

คะแนน	**ทักษะการเชื่อมโยงที่ปรากฏให้เห็น**
4	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงกับสาระคณิตศาสตร์/ สาระอื่น/ ในชีวิตประจำวัน เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา หรืออธิบายข้อสรุปได้อย่างชัดเจนและนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง
3	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงกับสาระ คณิตศาสตร์/ สาระอื่น/ ในชีวิตประจำวัน เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาเพื่ออธิบายข้อสรุปแต่ได้คำตอบไม่ถูกต้อง
2	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงกับสาระคณิตศาสตร์/ สาระอื่น/ ในชีวิตประจำวัน เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาได้บางส่วนและอธิบายข้อสรุปไม่ถูกต้อง
1	นำความรู้ หลักการ และวิธีการทางคณิตศาสตร์ในการเชื่อมโยงกับสาระคณิตศาสตร์ / สาระอื่น/ ในชีวิตประจำวัน เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาไม่เหมาะสม แต่มีความพยายามในการเขียนอธิบาย
0	ไม่มีการเชื่อมโยง/ ไม่มีร่องรอยในการหาคำตอบ

อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวว่า การประเมินความสามารถในการเชื่อมโยงนั้นส่วนใหญ่ประเมินการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับคณิตศาสตร์และระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน ซึ่งมักจะเกี่ยวข้องกับการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริง

ตัวอย่างการประเมินความสามารถในการเชื่อมโยง เช่น ผู้สอนให้ผู้เรียนทำงานเป็นกลุ่มโดยใช้แผนที่ประเทศไทยและอุปกรณ์อื่นเช่นไม้บรรทัดดินสอในการใช้ความรู้เรื่องทิศ มาตราส่วน อัตราส่วนหาทิพย์และระยะทางที่จังหวัดสำคัญต่างๆอยู่ห่างจากกรุงเทพรวมทั้งคำนวณเวลาที่ใช้ในการเดินทางโดยให้ผู้เรียนกำหนดความเร็วในการเดินทางตามความเหมาะสม

ตัวอย่างการประเมินข้างต้นผู้สอนจะเห็นความสามารถของผู้เรียนในการเชื่อมโยงเนื้อหาคณิตศาสตร์ย่อยย่อยที่เรียนเป็นเรื่องเรื่องแยกจากกันเข้าด้วยกันและเมื่อจะนำไปใช้งานผู้สอนจะต้องประมวลความรู้ในเรื่องที่เกี่ยวข้องมาใช้ให้เหมาะสมกับสถานการณ์

สำหรับในงานวิจัยนี้องค์ประกอบที่แสดงถึงความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์มี 3 ลักษณะ ดังนี้

1) การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถในการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในสถานการณ์ปัญหาและการแก้ปัญหา

2) การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในประมวลความรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาจากข้อที่ 1) แล้วกำหนดเป็นแนวทางหรือวิธีการในการแก้ปัญหา

3) การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เดิม เป็นความสามารถในการระบุตัวอย่างหรือ ระบุปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในข้อที่ 1)

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง เรื่อง ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Research) ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดกลุ่มเป้าหมายและกลุ่มตัวอย่าง
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
    4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
    4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การดำเนินการทดลองและการเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

โดยแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดดังนี้

1. การศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศเพื่อเป็นข้อมูลและแนวทางในการทำวิจัยดังนี้

1. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งใน และต่างประเทศเกี่ยวกับการแก้ปัญหาโดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และการสอนตามแนวคิดแนะให้รู้คิดเพื่อนำมาเป็นแนวทางในการศึกษาวิจัย

2. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร

3. ศึกษาเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีการวิจัย การสร้างเครื่องมือในการวิจัย วิธีการวัดและการประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ วิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Research) ซึ่งประกอบด้วย กลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม

ตารางที่ 8 แสดงแบบแผนการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
E	- ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์	X	- ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
C	- ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์	~X	- ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง

C แทน กลุ่มควบคุม

X แทน การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

~X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. การกำหนดกลุ่มเป้าหมายและกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ใกล้เคียงกัน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 จำนวน 70 คน สังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร โดยดำเนินการกำหนดกลุ่มตัวอย่างตามขั้นตอนดังนี้

3.1 การเลือกโรงเรียน

ผู้วิจัยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) โดยมีเกณฑ์ในการพิจารณา คือ เป็นโรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร และโรงเรียนที่จัดระบบการเรียนการสอนที่ทันสมัยรวมทั้งมีการสร้างหลักสูตรที่เป็นของตนเองโดยยึดตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของกระทรวงศึกษาธิการ ในระดับชั้นมัธยมศึกษามีจำนวนนักเรียนเพียงพอในการเก็บรวบรวมข้อมูล แต่ละห้องเรียนจะเป็นห้องเรียนที่คละความสามารถของนักเรียน สภาพแวดล้อมทางกายภาพของห้องเรียนเป็นห้องเรียนที่ทันสมัย

2. การเลือกห้องเรียน

ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 ซึ่งมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ใกล้เคียงกัน ผู้วิจัยทำการสุ่มห้องเรียน 2 ห้อง เพื่อใช้เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1) ผู้วิจัยนำคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 ของนักเรียนทั้ง 7 ห้องมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S)

2) ผู้วิจัยเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ใกล้เคียงกันมากที่สุดจำนวน 2 ห้อง

3) ผู้วิจัยนำค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ของนักเรียนทั้ง 2 ห้องมาทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ผลพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไม่แตกต่างกัน จากนั้นผู้วิจัยทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องโดยใช้ค่าที (t-test) ผลพบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไม่แตกต่างกัน จึงถือว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานก่อนการทดลองไม่แตกต่างกัน

4) ผู้วิจัยทำการสุ่มอย่างง่ายโดยการจับสลากเพื่อจัดกลุ่มตัวอย่างเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยที่ กลุ่มทดลอง คือ กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด และกลุ่มควบคุม คือ กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ประกอบด้วยแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

4.2.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.2.2 แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

4.2.3 แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

มีรายละเอียดดังนี้

4.1 เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดสำหรับกลุ่มทดลอง และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม ซึ่งครอบคลุมสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จำนวน 12 แผน แผนละ 50 นาที เป็นเวลา 4 สัปดาห์

1.1 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ผู้วิจัยดำเนินการสร้าง ดังนี้

1) ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี ที่เกี่ยวข้องกับแผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนซึ่งพัฒนามาจากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

3) ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ และตัวชี้วัด รายละเอียดของสาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล แล้วแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

4) วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ สำหรับเนื้อหาที่จะใช้ในการทดลอง ในหัวข้อเรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร

5) เขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จำนวน 12 แผน 12 คาบ โดยแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนระบุรายละเอียด หัวข้อเรื่อง มาตรฐานการเรียนรู้

ตัวชี้วัด จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วย ขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล บันทึกหลังการสอน

6) นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องและเหมาะสมของเนื้อหา และได้ให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข ดังนี้

ก. ควรเขียนอธิบายการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองให้มีความละเอียดและชัดเจนขึ้น โดยเน้นรายละเอียดตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ด้วยการใช้คำถามที่ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนคิด และค้นหาคำตอบด้วยตนเอง

ข. ระบุคำถามและกิจกรรมที่ชัดเจนในแต่ละขั้นที่ช่วยเสริมสร้างทักษะการคิดเพื่อนำสู่ความสามารถในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

ค. ในขั้นตอนของการ ถอดรหัส (decoding) ครูควรมีคำถามในการตรวจสอบความเข้าใจปัญหาของนักเรียนที่ชัดเจน ควรคาดการณ์คำถามคำตอบที่ทำให้รู้ว่านักเรียนเข้าใจปัญหาแล้วหรือยัง

ง. ในขั้นตอนของการ ดำเนินการ (implementing) ครูควรเขียนอธิบายให้ชัดเจนว่าจะสอนให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบ ความสมเหตุสมผลของคำตอบ รวมถึงการขยายแนวคิดไปยังปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริงอย่างไร

จ. ในการประเมินความเข้าใจของนักเรียนในแต่ละขั้นตอนครูควรคาดการณ์คำถามคำตอบที่สำคัญของการที่แสดงว่านักเรียนผ่านขั้นตอนนั้นได้

7) นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาแล้วไปใช้จริงกับกลุ่มทดลอง

1.2 แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้การสอนแบบปกติ ผู้วิจัยดำเนินการสร้าง ดังนี้

1) ศึกษาหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนซึ่งพัฒนาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

2) ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด รายละเอียดของสาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล แล้วแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

3) วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ สำหรับเนื้อหาที่ใช้ในการทดลองในหัวข้อเรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตร

4) เขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จำนวน 12 แผน 12 คาบ โดยแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละแผนระบุรายละเอียดหัวข้อเรื่อง เรื่อง มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้

ประกอบด้วย ขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นสรุป สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล บันทึกหลังการสอน

5) นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา และให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข

6) นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษาแล้วไปใช้จริงกับกลุ่มควบคุม

ตารางที่ 9 แสดงแผนการจัดการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร

แผนการเรียนรู้ที่	**สาระการเรียนรู้**	**เนื้อหา**
1	ปริซึม	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม
2	ปริซึม	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับปริมาตรของปริซึม
3	ทรงกระบอก	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอก
4	ทรงกระบอก	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับปริมาตรของทรงกระบอก
5	พีระมิด	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับพื้นที่ผิวของพีระมิด
6	พีระมิด	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับปริมาตรของพีระมิด
7	กรวย	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับพื้นที่ผิวของกรวย
8	กรวย	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับปริมาตรของกรวย
9	ทรงกลม	- โจทย์ปัญหาการประยุกต์เกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงกลม
10 -11	การนำไปใช้	- โจทย์ประยุกต์เกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวยและทรงกลม
12	พีระมิดยอดตัดและกรวยยอดตัด	- โจทย์ประยุกต์เกี่ยวกับปริมาตรพีระมิดยอดตัดและกรวยยอดตัด

ตารางที่ 10 แสดงกรอบแนวคิดของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

<u>**ขั้นนำ**</u>

- ครูเตรียมความพร้อมนักเรียนด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐานหรือมโนทัศน์ที่จำเป็นสำหรับการแก้ปัญหา
- ครูใช้คำถามกระตุ้นการคิดให้นักเรียนสงสัย ให้นักเรียนอยากค้นหาคำตอบและสนใจในเนื้อหาบทเรียน
- ครูชี้ให้นักเรียนเห็นความสำคัญของบทเรียน และความจำเป็นของบทเรียน เช่น เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันนักเรียนอย่างไร หรือเป็นเนื้อหาบทเรียนที่เป็นพื้นฐานของการเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้น
- ครูใช้การชี้แนะให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงประสบการณ์ความรู้เดิม

ขั้นสอน	
กลุ่มทดลอง	**กลุ่มควบคุม**
ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อแก้ปัญหาตามตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด 4 ขั้นตอน ดังนี้ **ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding)** - ครูยกตัวอย่างปัญหาจากนั้นกระตุ้นให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหาด้วยการตีความข้อมูลในปัญหาให้มีความชัดเจน หรืออยู่ในรูปของประโยคภาษาที่เข้าใจง่าย - ครูกระตุ้นนักเรียนในประเด็นต่างๆ เพื่อให้นักเรียนค้นหาเกี่ยวกับสาระสำคัญในปัญหา (background theme) ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ (data) และรูปแบบการดำเนินการหรือการกระทำกันระหว่างข้อมูล (operating schemes) รวมถึงระบุเงื่อนไขที่กำหนดหรือเงื่อนไขที่เป็นไปได้ (the constraints) ในปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา - ครูคอยชี้แนะให้นักเรียนคิดวิเคราะห์ปัญหาอย่างเป็นระบบบนพื้นฐานความรู้ความเข้าใจและประสบการณ์ความรู้เดิมของนักเรียน - ครูใช้คำถามในประเมินความเข้าใจของนักเรียนแล้วใช้เป็นแนวทางในการชี้แนะจนนักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ด้วยตนเอง **ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing)** - ครูกระตุ้นให้นักเรียนใช้ตัวแทนทางความคิด (mental model) เพื่อแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อให้นักเรียนสามารถเข้าใจปัญหาได้ชัดเจนและเป็นรูปธรรมมากขึ้น	ครูดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามคำแนะนำในคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมที่หลากหลาย ดังนี้ - ครูแจกใบกิจกรรมประกอบการเรียนรู้จากนั้นครูดำเนินการสอนการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการถามตอบประกอบการอธิบายกับนักเรียนเป็นรายบุคคล ดังนี้ - ครูยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาให้นักเรียนอ่านและวิเคราะห์ และทำความเข้าใจปัญหา จากนั้นครูสุ่มถามให้นักเรียนแสดงความคิดเห็น และวิเคราะห์ปัญหา เพื่อบอกและอธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่โจทย์ต้องการหา - ครูและนักเรียนร่วมกันวางแผนแก้ปัญหาโดยครูให้นักเรียนทำกิจกรรมกลุ่ม/จับคู่ทำกิจกรรมในชั้นเรียน ให้มีการระดมความคิดระหว่างสมาชิกในกลุ่ม เพื่อค้นหาแนวทางในการแก้ปัญหาร่วมกันจนได้คำตอบของกลุ่ม - ครูให้นักเรียนแต่กลุ่มร่วมกันดำเนินการแก้ปัญหาตามแนวทางที่วางไว้ จากนั้นครูขออาสาสมัครนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำ หรือแสดงแนวคิดหน้าชั้นเรียน หรือครูและนักเรียนอาจร่วมกันดำเนินการแก้ปัญหาโดยใช้การถามตอบประกอบการอธิบาย - ครูใช้คำถามคอยกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันสรุปคำตอบ และพิจารณาความสมเหตุสมผลของ

- ครูใช้การสังเกตและใช้คำถามในการประเมินความเข้าใจ ผ่านกระบวนการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างเพื่อนในชั้นเรียน ให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์ตัวแทนทางความคิดที่น่าสนใจ แล้วครูใช้เป็นแนวทางในการชี้แนะจนนักเรียนสามารถสร้างหรือใช้ตัวแทนทางความคิดด้วยตนเอง - ครูคอยชี้แนะด้วยการใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนคิดและใช้ตัวแทนทางความคิดซึ่งอาจจะแสดงออกในรูปแบบต่างๆ เช่น การวาดรูป การกำหนดตัวแปร การเขียนกราฟหรือการแปลงปัญหาในรูปประโยคภาษาที่เข้าใจง่ายขึ้น เป็นต้น **ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing)** - ครูกระตุ้นให้นักเรียนนำตัวแทนทางความคิดที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลเพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ให้สัมพันธ์กับปัญหา หรือเพื่อกำหนดรูปแบบหรือแนวทางในการแก้ปัญหา - ครูใช้คำถามในการประเมินความเข้าใจ ด้วยการแลกเปลี่ยนความคิดระหว่างเพื่อนในชั้นเรียน ให้นักเรียนร่วมกันวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ แล้วใช้เป็นแนวทางในการชี้แนะนักเรียน - ครูคอยชี้แนะให้นักเรียนคิดและกระตุ้นให้นักเรียนประมวลความรู้ทางคณิตศาสตร์ของตนเอง ร่วมกับตัวแทนทางความคิดที่สร้างขึ้นเพื่อนำไปสู่การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมกับปัญหา เช่น สมการ หรือเป็นแนวทางในการแก้ปัญหา หรือวิธีการดำเนินการหาคำตอบ	คำตอบที่ได้ รวมถึงการให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับคำตอบที่สมเหตุสมผล และไม่สมเหตุสมผล - ครูยกตัวอย่างเพิ่มเติมให้นักเรียนได้ลองฝึกปฏิบัติด้วยตนเอง หรือเป็นกิจกรรมกลุ่มให้นักเรียนได้ปรึกษาหารือกับเพื่อนในชั้นเรียน โดยมีครูคอยกระตุ้นและชี้แนะนักเรียนขณะทำกิจกรรมการเรียนรู้ - ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเพิ่มเติมอย่างอิสระเพื่อตรวจสอบความเข้าใจ จากนั้นครูสุ่มคำตอบจากนักเรียนเป็นรายบุคคล - ครูประเมินความรู้ ความเข้าใจของนักเรียนระหว่างเรียนโดยใช้การตั้งคำถาม และใช้การสังเกต - ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนสอบถามข้อสงสัย หรือนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างและน่าสนใจ

<table>
<tr>
<td>ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing)
- ครูกระตุ้นให้นักเรียนประยุกต์เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ร่วมกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นในการดำเนินการหาคำตอบ
- ครูประเมินความเข้าใจของนักเรียนด้วยการสุ่มถามแนวทางในการแก้ปัญหาของนักเรียนแต่ละคนเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนความรู้ ความเข้าใจระหว่างนักเรียน แล้วใช้เป็นแนวทางในการชี้แนะนักเรียน
- ครูคอยชี้แนะให้นักเรียนดำเนินการหาคำตอบด้วยตนเองบนพื้นฐานความรู้ ความเข้าใจของนักเรียน
- ครูคอยชี้แนะด้วยการใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนคิดและวิเคราะห์คำตอบที่ได้มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขปัญหาหรือไม่ และสมเหตุสมผลหรือไม่
- ครูขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>ขั้นสรุป</u>
- ครูให้นักเรียนแต่ละคนฝึกทักษะการแก้ปัญหาเพิ่มเติม
- ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายในประเด็นสำคัญเกี่ยวกับขั้นตอนการแก้ปัญหาแต่ละขั้นตอน
- ครูให้นักเรียนร่วมกัน หรือสุ่มนักเรียนให้สรุปสาระสำคัญของบทเรียน
- ครูใช้แบบทดสอบในการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน
- ครูทำความเข้าใจกระบวนการคิด ความรู้ ความเข้าใจของนักเรียน เพื่อนำไปออกแบบในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครั้งถัดไป</td>
</tr>
</table>

4.2 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ใบกิจกรรม และแบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.2.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จำนวน 2 ฉบับ คือ ฉบับก่อนการทดลองและฉบับหลังการทดลองซึ่งมีลักษณะเป็นข้อสอบอัตนัย

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน สร้างเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนเรียน โดยผู้วิจัยเลือกเนื้อหาที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นข้อสอบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน สร้างเพื่อวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนเรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร โดยผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนเป็นข้อสอบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน

ผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้ง 2 ฉบับมีวิธีการดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาความหมาย นิยามเชิงปฏิบัติการและวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จากเอกสาร ตำราและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จากเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. ศึกษาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
4. สร้างตารางวิเคราะห์แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับตามสาระการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ และกำหนดอัตราส่วนจำนวนข้อสอบในแต่ละหัวข้อตามความเหมาะสม

ตารางที่ 11 โครงสร้างของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน

<table>
<tr><th rowspan="2">แบบวัด</th><th rowspan="2">เนื้อหา</th><th colspan="2">จำนวนข้อสอบ</th></tr>
<tr><th>ทดลอง</th><th>ใช้จริง</th></tr>
<tr><td rowspan="4">แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน</td><td>1. การประยุกต์อัตราส่วนและร้อยละ</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2. การวัดเกี่ยวกับพื้นที่</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4. เศษส่วนและทศนิยม</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">รวม</td><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="6">แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน</td><td>1. ปริซึม</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>2. ทรงกระบอก</td></tr>
<tr><td>3. พีระมิด</td></tr>
<tr><td>4. กรวย</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>5. ทรงกลม</td></tr>
<tr><td>6. กรวยและพีระมิดยอดตัด</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">รวม</td><td>6</td><td>4</td></tr>
</table>

5. กำหนดกรอบการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแสดงความสามารถออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1) การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล เป็นความสามารถในการใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้

2) การหาข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาอย่างสมเหตุสมผล

3) การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา เป็นความสามารถในการอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

6. สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์พร้อมกับเกณฑ์การให้คะแนนข้อสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรชนิดอัตนัยจำนวน 6 ข้อ นำไปใช้จริง 4 ข้อ โดยครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ตามตารางวิเคราะห์หลักสูตรที่ได้สร้างขึ้น

ตารางที่ 12 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
3	นักเรียนวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
2	นักเรียนวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
1	นักเรียนวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย
0	นักเรียนไม่เขียนตอบแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ หรือเขียนแสดงความสัมพันธ์แต่ไม่ถูกต้อง

2. การหาข้อสรุปของปัญหา

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
3	นักเรียนใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
2	นักเรียนใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
1	นักเรียนใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย
0	นักเรียนไม่ใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์หาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา หรือ ใช้ข้อมูลและความรู้ทางคณิตศาสตร์แต่ไม่ถูกต้อง

3. การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
3	นักเรียนเขียนอธิบายเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องและชัดเจน
2	นักเรียนเขียนอธิบายเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
1	นักเรียนเขียนอธิบายเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องเพียงเล็กน้อย
0	นักเรียนไม่เขียนอธิบายสนับสนุนหรือ ไม่เขียนคัดค้านข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ หรือเขียนอธิบายข้อสรุปแต่ไม่ถูกต้อง

7. นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข ซึ่งอาจารย์ได้ให้ข้อเสนอแนะ ดังนี้

7.1) ควรปรับเปลี่ยนข้อคำถามย่อยในแต่ละข้อ ให้ตรงตามองค์ประกอบในการวัดความสามารถในการให้เหตุผล โดยในบางข้อคำถามยังไม่ชัดตามองค์ประกอบจึงมีการปรับเปลี่ยนข้อคำถามในบางสถานการณ์ปัญหา

7.2) ปรับความยาก ง่ายของแบบวัดให้มีความเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนไม่ยากเกินไป และง่ายเกินไป โดยปรับแก้บางสถานการณ์ปัญหาที่มีข้อมูลและเงื่อนไขในปัญหาที่ซับซ้อนจนเกินไปให้มีความซับซ้อนตามระดับของความสามารถของนักเรียน

7.3) เขียนคำชี้แจงและเน้นคำสั่งที่สำคัญในสถานการณ์ปัญหาให้มีความชัดเจน

7.4) ใส่ตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่มีการระบุแนวทางการเขียนตอบตามองค์ประกอบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

8. นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความสอดคล้องกับกรอบการประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ความเหมาะสมด้านภาษาของข้อคำถามที่ใช้ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข จากการตรวจสอบของผู้ทรงคุณวุฒิมีความเห็นให้ปรับปรุงและให้ข้อเสนอแนะ ดังนี้

- ควรปรับเงื่อนไขในสถานการณ์ปัญหาให้มีความซับซ้อนน้อยลง เพื่อให้เหมาะสมกับความสามารถของนักเรียน ตัวอย่างเช่น

<u>ข้อความเดิม</u> ในการสอบเพื่อยื่นคะแนนเข้ามหาลัยแห่งหนึ่งจำนวน 5 ครั้งของนาย

อนุวัฒน์ ในการสอบแต่ครั้งจะเป็นวัดความสามารถของนักเรียน 4 ด้าน ได้แก่ ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านการอ่าน ความสามารถด้านความรู้รอบตัว และความสามารถด้านภาษาอังกฤษ ซึ่งการสอบแต่ละครั้งแบบวัดความสามารถแต่ละด้านมีคะแนนเต็ม 50 , 100 , 50 และ 75 คะแนน ตามลำดับ แต่จะคิดน้ำหนักของความสามารถแต่ละด้านแตกต่างกัน กล่าวคือ

ความสามารถทั้ง 4 ด้านจะคิดค่าน้ำหนักเท่ากันคือ ร้อยละ 25 **โดยมีคะแนนขั้นต่ำแต่ละวิชาต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 40 ของคะแนนเต็ม** ถ้าคะแนนสอบแต่ละครั้งของนายอนุวัฒน์เป็นดังตาราง

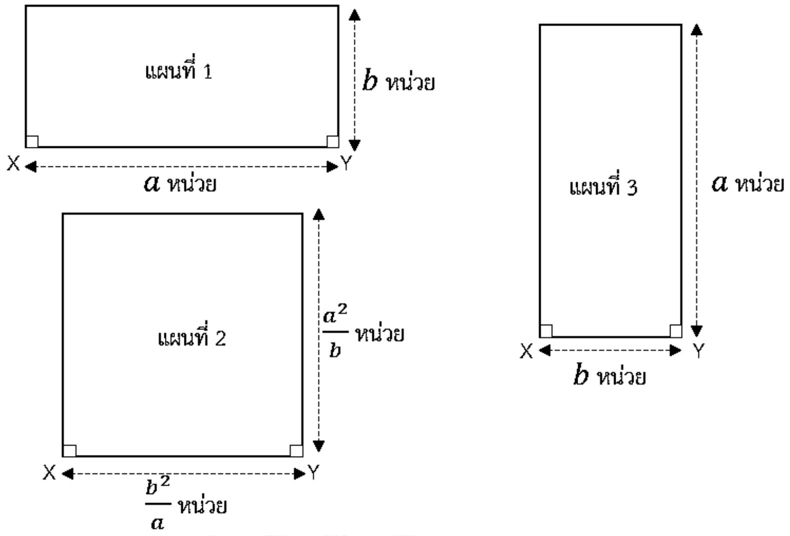
วิชา	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์	28	36	40	44	40
ความสามารถด้านการอ่าน	40	48	36	60	76
ความสามารถด้านความรู้รอบตัว	24	16	28	36	32
ความสามารถด้านภาษาอังกฤษ	39	51	36	60	63

แก้ไขเป็น ในการสอบเพื่อยื่นคะแนนเข้ามหาลัยแห่งหนึ่งจำนวน 3 ครั้งของนายอนุวัฒน์ ซึ่งการสอบแต่ครั้งจะเป็นการวัดความสามารถของนักเรียน 4 ด้าน ได้แก่ ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านการอ่าน ความสามารถด้านความรู้รอบตัว และความสามารถด้านภาษาอังกฤษ

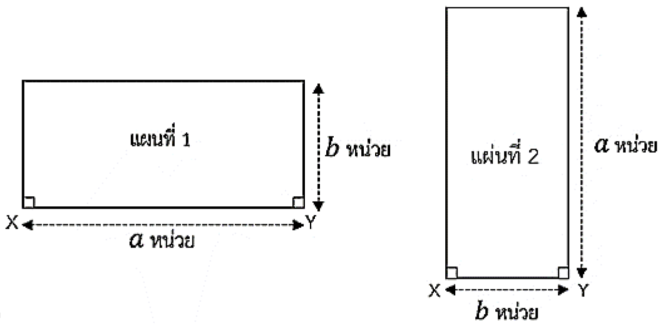
โดยคะแนนความสามารถทั้ง 4 ด้านจะถูกคิดด้วยค่าน้ำหนักที่เท่ากัน คือ ร้อยละ 25 **และคะแนนขั้นต่ำแต่ละวิชาต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 40 ของคะแนนเต็มจึงจะมีสิทธิ์ยื่นคะแนนครั้งนั้นเข้ามหาลัยได้** ถ้าคะแนนสอบแต่ละครั้งของนายอนุวัฒน์เป็นดังตาราง

วิชา	คะแนนเต็ม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3
ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์	50	36	40	44
ความสามารถด้านการอ่าน	100	48	36	60
ความสามารถด้านความรู้รอบตัว	50	16	28	36
ความสามารถด้านภาษาอังกฤษ	75	51	36	60

ข้อความเดิม กระดาษ 3 แผ่นซึ่งมีความยาวด้านแตกต่างกัน โดยที่ $a > b > 1$ ดังรูป นำกระดาษ 3 แผ่นมาม้วนให้เป็นทรงกระบอกแบบไม่มีฝา โดยให้ด้าน XY เป็นความยาวของรอบรูปของฐานของทรงกระบอก



<u>แก้ไขเป็น</u> กระดาษ 2 แผ่นซึ่งมีความยาวด้านแตกต่างกันโดยที่ $a > b > 1$ ดังรูป นำกระดาษ 2 แผ่นมาม้วนให้เป็นทรงกระบอกแบบไม่มีฝา โดยให้ด้าน XY เป็นความยาวของรอบรูปของฐานของทรงกระบอก



- ปรับแก้ข้อคำถามให้มีความชัดเจนขึ้น และการเน้นคำในประโยคเงื่อนไขที่ต้องพิจารณา ตัวอย่างเช่น

<u>ข้อความเดิม</u> จากข้อ 1 จงอธิบายความสัมพันธ์ของความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม XYZ ทั้ง 6 รูปแบบ

<u>แก้ไขเป็น</u> จากข้อ 1 ความยาวด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม XYZ ทั้ง 6 รูปแบบมีความสัมพันธ์กันอย่างไร จงอธิบาย

<u>ข้อความเดิม</u> จากข้อมูลข้างต้น "ถ้าปรับเปลี่ยนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมใหม่เป็นรูปแบบ G ที่มีอัตราส่วนของมุมภายในเท่ากับ 7 : 3 : 8 แล้วความสัมพันธ์ของความยาวด้านยังเป็นเหมือน ข้อ 2" เป็นจริงหรือไม่อย่างไร จงอธิบาย

แก้ไขเป็น **“ถ้าปรับเปลี่ยนความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมใหม่เป็นรูปแบบ G ที่มีอัตราส่วนของมุมภายในเท่ากับ 7 : 3 : 8 แล้วความสัมพันธ์ของความยาวด้านยังเป็นเหมือน ข้อ 2”** ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบ

ข้อความเดิม พิจารณาภาชนะบรรจุน้ำ A และ B ดังรูปจากรูปภาชนะทั้งสองมีส่วนสูงเท่ากัน และความยาวของเส้นทแยงมุมของฝาซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (บริเวณแรเงา) ภาชนะ A เท่ากับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของฝา (บริเวณแรเงา) ภาชนะ B

แก้ไขเป็น พิจารณาภาชนะบรรจุน้ำ A และ B ดังรูปจากรูปภาชนะทั้งสองมีส่วนสูงเท่ากัน และความยาวของ**เส้นทแยงมุมของฝาซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส** (บริเวณแรเงา)**ภาชนะ A เท่ากับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของฝาภาชนะ B** (บริเวณแรเงา)

ข้อความเดิม จงพิจารณาว่าปริมาตรของบีกเกอร์เป็นกี่เท่าของปริมาตรกรวย พร้อมแสดงแนวคิดประกอบ

แก้ไขเป็น จงพิจารณาข้อมูลเพื่อหาความจุของ**บีกเกอร์ที่ถูกบรรจุกรวย**ลงไปดังรูป (รวมปริมาตรน้ำตอนเริ่มต้นด้วย) พร้อมแสดงแนวคิดประกอบ

9. นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ผ่านการพิจารณาและปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียน โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ฝ่ายมัธยม โดย

- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน ผู้วิจัยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/3 จำนวน 53 คน
- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน ผู้วิจัยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/4 จำนวน 33 คน

จากนั้นนำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ แล้วนำผลคะแนนที่ได้ไปวิเคราะห์ ความเที่ยง (Reliability) โดยมีเกณฑ์คือ มีค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป แล้วนำมาหาค่าความยาก (Difficulty) และหาค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) เป็นรายข้อ โดยมีเกณฑ์คือ ค่าความยากมีค่า 0.2 – 0.8 และค่าอำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ค่าความเที่ยง 0.751

ค่าความยาก (p) 0.23 – 0.28

ค่าอำนาจจำแนก (r) 0.25 – 0.35

- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ค่าความเที่ยง 0.664

ค่าความยาก (p) 0.23 – 0.29

ค่าอำนาจจำแนก (r) 0.27 – 0.36

จากการทดลองใช้ครั้งที่ 1 พบว่าแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ทั้งฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน จำนวน 6 ข้อ ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ทั้ง 6 ข้อ

10. เลือกแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีค่าความเที่ยง ค่าความยากและอำนาจจำแนก ผ่านเกณฑ์ตามที่กำหนด ฉบับละ 4 ข้อมาวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบอีกครั้ง ซึ่งผลการวิเคราะห์แสดงดังนี้

ตารางที่ 13 ค่าความเที่ยง ค่าความยาก และอำนาจจำแนกแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน

	ฉบับก่อนเรียน	**ฉบับหลังเรียน**
ค่าความเที่ยง	0.788	0.819
ค่าความยาก (p)	0.25 – 0.41	0.27 – 0.38
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.34 – 0.50	0.38 – 0.45

11. นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดทั้งสองฉบับ ฉบับละ 4 ข้อไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

4.2.2 แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จำนวน 2 ฉบับ คือ ฉบับก่อนการทดลองและฉบับหลังการทดลองซึ่งมีลักษณะเป็นข้อสอบอัตนัย

แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน สร้างเพื่อวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนเรียน โดยผู้วิจัยเลือกเนื้อหาที่นักเรียนได้เรียนรู้มาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 ผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนเป็นข้อสอบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน

แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน สร้างเพื่อวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนเรื่อง พื้นที่ผิวและ

ปริมาตร โดยผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนเป็นข้อสอบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน

ผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 2 ฉบับมีวิธีการดำเนินการสร้างดังนี้

1. ศึกษาความหมาย นิยามเชิงปฏิบัติการและวิเคราะห์พฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จากเอกสาร ตำราและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ จากเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. ศึกษาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จากหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551
4. สร้างตารางวิเคราะห์แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับตามสาระการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้และกำหนดอัตราส่วนจำนวนข้อสอบในแต่ละหัวข้อตามความเหมาะสม

ตารางที่ 14 โครงสร้างของแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน และฉบับก่อนเรียน

<table>
<tr><th rowspan="2">แบบวัด</th><th rowspan="2">เนื้อหา</th><th colspan="2">จำนวนข้อสอบ</th></tr>
<tr><th>ทดลอง</th><th>ใช้จริง</th></tr>
<tr><td rowspan="2">แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน</td><td>1. การวัดเกี่ยวกับพื้นที่</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">รวม</td><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="6">แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน</td><td>1. ปริซึม</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>2. ทรงกระบอก</td></tr>
<tr><td>3. พีระมิด</td></tr>
<tr><td>4. กรวย</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>5. ทรงกลม</td></tr>
<tr><td>6. กรวยและพีระมิดยอดตัด</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">รวม</td><td>6</td><td>4</td></tr>
</table>

5. กำหนดกรอบการสร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยแสดงความสามารถออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1) การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา เป็นความสามารถในการระบุ/เลือกความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในสถานการณ์ปัญหาและการแก้ปัญหา

2) การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในประมวลความรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาจากข้อที่ 1) แล้วกำหนดเป็นแนวทางหรือวิธีการในการแก้ปัญหา

3) การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม เป็นความสามารถในการระบุตัวอย่างหรือ ระบุปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในข้อที่ 1)

6. สร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์พร้อมกับเกณฑ์การให้คะแนนข้อสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรชนิดอัตนัยจำนวน 6 ข้อ โดยครอบคลุมเนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ตามตารางวิเคราะห์หลักสูตรที่ได้สร้างขึ้น เสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสมและให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไขต่อไป

ตารางที่ 15 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

1. การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
3	นักเรียนเลือก/ระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน
2	นักเรียนเลือก/ระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
1	นักเรียนเลือก/ระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเพียงเล็กน้อย
0	นักเรียนไม่เลือก/ระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้ หรือเลือก/ระบุแต่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหา

2. การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
3	นักเรียนเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหาด้วยการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ของปัญหาได้อย่างถูกต้องชัดเจน
2	นักเรียนเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหาด้วยการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ของปัญหาได้เป็นส่วนใหญ่
1	นักเรียนเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหาด้วยการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ของปัญหาได้เพียงเล็กน้อย
0	นักเรียนไม่เขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหาใดเลย หรือเขียนอธิบายแต่ไม่ถูกต้อง

3. การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม

ระดับคะแนน	คำอธิบาย
3	นักเรียนระบุตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงที่สัมพันธ์กับความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 ได้ทั้งหมด และมีการอธิบายแนวทางในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นได้ถูกต้อง
2	นักเรียนระบุตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงที่สัมพันธ์กับความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 ได้ส่วนใหญ่ และมีการอธิบายแนวทางในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นได้
1	นักเรียนระบุตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงที่สัมพันธ์กับความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 ได้เล็กน้อย และมีการอธิบายแนวทางในการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นได้แต่ไม่ชัดเจน
0	นักเรียนไม่ระบุตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงสถานการณ์ปัญหาใดเลย หรือระบุตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงแต่ไม่สัมพันธ์กับความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 เลย

7. นำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความเหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข ซึ่งอาจารย์ได้ให้ข้อเสนอแนะ ดังนี้

ก. ปรับปรุงข้อคำถามให้มีความชัดเจนตามองค์ประกอบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะข้อคำถามย่อยที่ 3 ที่ใช้วัดองค์ประกอบด้าน การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม โดยไม่ต้องให้นักเรียนระบุขั้นตอนในการแก้ปัญหา เพียงแต่ตรวจสอบความเป็นไปได้ของสถานการณ์ปัญหา

ข. ปรับระดับความยาก ง่ายของแบบวัดเนื่องจากถ้าแบบวัดยากจนเกินไปจะให้นักเรียนไม่สามารถระบุขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ และไม่สามารถวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่ได้ตามองค์ประกอบ

ค. เน้นข้อความที่สำคัญๆ และเพิ่มสั่งในคำถามย่อยให้นักเรียนเขียนและระบุขั้นตอนการหาคำตอบเป็นข้อๆ ตามลำดับก่อนหลังให้ถูกต้อง

ง. ปรับเกณฑ์การให้คะแนนให้สอดคล้องตรงตามองค์ประกอบการวัดและข้อคำถามย่อยในแต่ละองค์ประกอบ

จ. ใส่ตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่มีการระบุแนวทางในการเขียนตอบของข้อคำถามย่อยแต่ละข้ออย่างชัดเจน ให้ตรงตามองค์ประกอบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

8. นำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิ จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความสอดคล้องกับกรอบการประเมินความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ความเหมาะสมด้านภาษาของข้อคำถามที่ใช้ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข จากการตรวจสอบของผู้ทรงคุณวุฒิมีความเห็นให้ปรับปรุงและให้ข้อเสนอแนะ ดังนี้

- ปรับข้อคำถามย่อยในแต่ละปัญหาให้สอดคล้องกับองค์ประกอบการวัดมากขึ้น
ตัวอย่างเช่น

<u>ข้อความเดิม</u> หากนักเรียนต้องการแก้ปัญหานี้ นักเรียนจะใช้ความรู้คณิตศาสตร์ใดบ้าง ให้ระบุในรูปของทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ให้เพียงพอในการแก้ปัญหา

<u>แก้ไขเป็น</u> หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบโดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม (ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ)

<u>ข้อความเดิม</u> จากความรู้คณิตศาสตร์ที่ระบุในข้อที่ 1 ให้นักเรียนเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหา โดยระบุเป็นข้อๆ โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

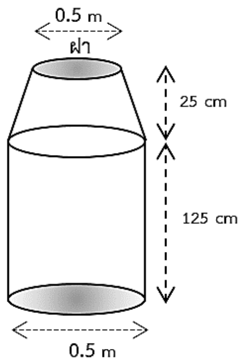
<u>แก้ไขเป็น</u> ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ

<u>ข้อความเดิม</u> ให้นักเรียนลองยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง โดยใช้ความรู้ในข้อที่ 1 พร้อมทั้งอธิบายแนวทางในการใช้ความรู้คณิตศาสตร์นั้นอย่างคร่าวๆ โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

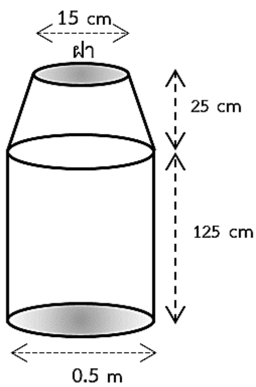
<u>แก้ไขเป็น</u> ให้ลองยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง โดยใช้ความรู้ในข้อที่ 1 โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

- *ปรับความถูกต้องของสถานการณ์ปัญหาให้มีหน่วยที่สอดคล้องกับความเป็นจริง* ตัวอย่างเช่น

<u>ข้อความเดิม</u> ถังใบหนึ่งมีลักษณะดังรูป ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 0.5 เมตร ถังสูง 125 เซนติเมตร และฝาครอบถังหนา 2 เซนติเมตร ตัวฝาสูง 25 เซนติเมตร และเส้นผ่านศูนย์กลางของฝายาว 0.5 เมตร ถังใบนี้มีปริมาตรโดยประมาณกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร



<u>แก้ไขเป็น</u> ถังใบหนึ่งมีลักษณะดังรูป ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 15 เซนติเมตร ถังสูง 125 เซนติเมตร และฝาครอบถังหนา 2 เซนติเมตร ตัวฝาสูง 25 เซนติเมตร และเส้นผ่านศูนย์กลางของฝายาว 15 เซนติเมตร ถังใบนี้มีปริมาตรโดยประมาณกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร



9. นำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ผ่านการพิจารณาและปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้ทรงคุณวุฒิแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่นักเรียนกลุ่มตัวอย่าง โดย

- แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน ผู้วิจัยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3/5 จำนวน 36 คน
- แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน ผู้วิจัยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4/2 จำนวน 32 คน

จากนั้นนำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ แล้วนำผลคะแนนที่ได้ไปวิเคราะห์ ความเที่ยง (Reliability) โดยมีเกณฑ์คือ มีค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป แล้วนำมาหาค่าความยาก (Difficulty) และหาค่าอำนาจจำแนก (Discrimination) เป็นรายข้อ โดยมีเกณฑ์คือ ค่าความยากมีค่า 0.2 – 0.8 และค่าอำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป ซึ่งผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

- แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ค่าความเที่ยง	0.763
ค่าความยาก (p)	0.25 – 0.30
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.22 – 0.38

- แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ค่าความเที่ยง	0.757
ค่าความยาก (p)	0.29 – 0.41
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.19 – 0.42

จากการทดลองใช้ครั้งที่ 1 พบว่าแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทั้งฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน จำนวน 6 ข้อ ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ทั้ง 6 ข้อ

10. เลือกแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีค่าความเที่ยง ค่าความยากและอำนาจจำแนก ผ่านเกณฑ์ตามที่กำหนด ฉบับละ 4 ข้อมาวิเคราะห์คุณภาพข้อสอบอีกครั้ง ซึ่งผลการวิเคราะห์แสดงดังนี้

ตารางที่ 16 ค่าความเที่ยง ค่าความยาก และอำนาจจำแนกแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน

	ฉบับก่อนเรียน	ฉบับหลังเรียน
ค่าความเที่ยง	0.783	0.808
ค่าความยาก (p)	0.22 – 0.40	0.33 – 0.41
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.38 – 0.40	0.32 – 0.42

11. นำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดทั้งสองฉบับ ฉบับละ 4 ข้อไปใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

4.2.3 แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างแบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ตามขั้นตอนดังนี้

1. วิเคราะห์พฤติกรรมในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

2. สร้างแบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ จะสังเกตตามองค์ประกอบต่อไปนี้

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1) การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล

- การใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล

2) การหาข้อสรุปของปัญหา

- การใช้ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเพื่อหาข้อสรุปของปัญหา

3) การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา

- การอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา
- การยกตัวอย่างสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

1) การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา

- การระบุ/เลือกความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม

- การระบุ/เลือกหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในสถานการณ์ปัญหาและการแก้ปัญหา

2) การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการการแก้ปัญหา

- การประมวลความรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหา

- การอธิบายและกำหนดเป็นแนวทางหรือวิธีการในการแก้ปัญหา

3) การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม

- การระบุตัวอย่างหรือ ระบุปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในข้อที่ 1)

3. นำสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาพิจารณาแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข

4. ปรับปรุงแบบสังเกตพฤติกรรมในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์จากนั้นจัดพิมพ์เป็นฉบับบที่สมบูรณ์เพื่อนำไปใช้ในการเก็บข้อมูลกับนักเรียนกลุ่มทดลอง

5. การดำเนินการทดลองและการเก็บรวบรวมข้อมูล

ขั้นเตรียมการ

1. ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดสำหรับกลุ่มทดลองและแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติสำหรับกลุ่มควบคุม พร้อมทั้งจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์สำหรับกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่ม

2. ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการวิจัยนี้ ทั้งฉบับก่อนเรียน ระหว่างเรียน และหลังเรียน

3. ผู้วิจัยทำหนังสือขอความร่วมมือในการทำวิจัยจากคณะครุศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยถึงผู้อำนวยการโรงเรียนเพื่อขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลการวิจัยเพื่อขอความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยทำการทดสอบก่อนเรียนกับนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน จำนวน 4 ข้อ และแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน จำนวน 4 ข้อ ก่อนเริ่มการทดลองจัดกิจกรรม

2. ผู้วิจัยดำเนินการทดลองจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง และแผนการจัดการเรียนรู้ปกติกับนักเรียนกลุ่มควบคุม คาบละ 50 นาที สัปดาห์ละ 3 คาบ จำนวน 4 สัปดาห์

3. ระหว่างดำเนินการทดลองในแต่ละคาบจะมีการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อศึกษาพัฒนาการของพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์โดยใช้ใบงานและแบบสังเกตพฤติกรรม

4. เมื่อดำเนินการทดลองเสร็จสิ้น ผู้วิจัยดำเนินการจัดทดสอบหลังเรียน โดยใช้แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นกับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มแล้วนำผลการทดสอบมาตรวจให้คะแนนและทำการวิเคราะห์ข้อมูล

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ทั้งข้อมูลทั้งเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพ ดังนี้

6.1 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมาตรวจให้คะแนนและวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences : SPSS) โดยมีการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

2) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดและนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติด้วยการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3) เปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

4) เปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดและนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติด้วยการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6.2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

วิเคราะห์พัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจากข้อมูลที่เป็นร่องรอยการทำงานของนักเรียนจากแบบวัด ใบกิจกรรม และแบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะนำข้อมูลในแต่ละสัปดาห์มาวิเคราะห์เพื่อแสดงพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เปลี่ยนแปลงในแต่ละสัปดาห์โดยใช้การวิเคราะห์เนื้อหา (Content analysis)

7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

สถิติที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

7.1 สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางความรู้คณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ได้แก่

1) การหาค่าความเที่ยง (Reliability) เป็นแบบอัตนัย โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach)

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{k} {s_i}^2}{{s_t}^2}\right]$$

เมื่อ α แทน ค่าความเที่ยงของแบบวัด

k แทน จำนวนข้อของแบบวัด

s_i^2 แทน ความแปรปรวนของข้อสอบในแต่ละข้อ

s_t^2 แทน ความแปรปรวนของข้อสอบทั้งหมด

(พร้อมพรรณ อุดมสิน , 2544)

2) การค่าความยาก (p) และอำนาจจำแนก (r) รายข้อของแบบทดสอบแบบอัตนัย โดยใช้สูตรของวิทเนย์และซาเบอร์ (Whitnet and Sabers) ดังนี้

$$p = \frac{S_h + S_l - (n_t)(X_{\min})}{(n_t)(X_{\max} - X_{\min})}$$

$$r = \frac{S_h - S_l}{(n_h)(X_{\max} - X_{\min})}$$

เมื่อ S_h แทน ผลรวม fx ของคะแนนกลุ่มสูง

S_l แทน ผลรวม fx ของคะแนนกลุ่มต่ำ

$X_{\max}$ แทน คะแนนสูงสุดที่ได้

$X_{\min}$ แทน คะแนนต่ำสุดที่ได้

n_t แทน จำนวนคนกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำรวมกัน

n_h แทน จำนวนคนกลุ่มสูง

(พร้อมพรรณ อุดมสิน , 2544)

7.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลของวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางความรู้คณิตศาสตร์ ได้แก่

วิเคราะห์ข้อมูลโดยการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ความแปรปรวน การวิเคราะห์ค่าที (t-test) และการวิเคราะห์ค่าเอฟ (F-test) ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for Social Science : SPSS)

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัย เรื่อง ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ และผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน นำเสนอผลการวิเคราะห์ในตารางที่ 17
2. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ นำเสนอผลการวิเคราะห์ในตารางที่ 18
3. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน นำเสนอผลการวิเคราะห์ในตารางที่ 19
4. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ นำเสนอผลการวิเคราะห์ในตารางที่ 20

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน ครู และนักเรียน
2. ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

1. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

ตารางที่ 17 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และค่าที (t - test) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

กลุ่มทดลอง	คะแนนเต็ม	n	$\bar{x}$	S	t	Sig.
ก่อนเรียน	36	33	14.21	7.944	6.840	0.000*
หลังเรียน	36	33	23.87	6.804		

*p < .05

จากตารางที่ 17 ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนเท่ากับ 14.21 คะแนน และ 23.87 คะแนน ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t - Paired Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ตารางที่ 18 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และค่าที (t - test) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

กลุ่มตัวอย่าง	คะแนนเต็ม	n	$\bar{x}$	S	t	Sig.
กลุ่มทดลอง	36	33	23.87	6.804	4.182	0.000*
กลุ่มควบคุม	36	33	15.90	8.574		

*p < .05

จากตารางที่ 18 ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนเท่ากับ 23.87 คะแนน และ 15.90 คะแนน ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

ตารางที่ 19 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และค่าที (t - test) ของคะแนนความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

กลุ่มทดลอง	คะแนนเต็ม	n	$\bar{x}$	S	t	Sig.
ก่อนเรียน	36	33	16.45	5.921	5.817	0.000*
หลังเรียน	36	33	23.18	7.213		

*$p < .05$

จากตารางที่ 19 ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนเท่ากับ 16.45 คะแนน และ 23.18 คะแนน ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t – Paired Samples Test) พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4. ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ตารางที่ 20 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และค่าที (t - test) ของคะแนนความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

กลุ่มตัวอย่าง	คะแนนเต็ม	n	$\bar{x}$	S	t	Sig.
กลุ่มทดลอง	36	33	23.18	7.213	3.218	0.002*
กลุ่มควบคุม	36	33	16.87	8.637		

*p < .05

จากตารางที่ 20 ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มทดลองกับนักเรียนกลุ่มควบคุม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของคะแนนความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนเท่ากับ 23.18 คะแนน และ 16.87 คะแนน ตามลำดับ และจากการทดสอบค่าที (t - Independent Samples Test) พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่านักเรียนควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผลการศึกษาวิจัยมีดังนี้

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน ครู และนักเรียน

1.1 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียน

สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (ในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ) เขตกรุงเทพมหานคร เป็นสถานศึกษาระดับมัธยมศึกษา มีนักเรียนจำนวนประมาณ 1,294 คน จำนวนครูประมาณ 128 คน เป็นโรงเรียนที่จัดตั้งภายใต้การดูแลของคณะครุศาสตร์ของมหาวิทยาลัย เพื่อใช้เป็นสถานฝึกปฏิบัติการทางการศึกษาและเป็นสถานที่ฝึกปฏิบัติงานของคณะศึกษาศาสตร์และคณะครุศาสตร์ก่อนนิสิตนักศึกษาจะสำเร็จการศึกษา เปิดสอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 6 มีจำนวนห้องเรียนทั้งหมด 42 ห้องเรียน แบ่งเป็นระดับชั้นละ 7 ห้องเรียน แต่ละห้องเรียนมีนักเรียนห้องละประมาณ 35 คน ซึ่งแต่ละห้องเรียนจะเป็นห้องเรียนที่คละความสามารถของนักเรียน สภาพแวดล้อมทางกายภาพของห้องเรียนเป็นห้องเรียนที่ทันสมัย

1.2 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับอาจารย์

อาจารย์ส่วนใหญ่จบการศึกษาจากคณะครุศาสตร์/ศึกษาศาสตร์ สาขาที่เกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ โดยอาจารย์ทั้งหมดสำเร็จการศึกษามีทั้งระดับปริญญาตรี ปริญญาโท และระดับปริญญาเอก และมีอาจารย์ที่มีตำแหน่งทางวิชาการระดับ ผู้ช่วยศาสตร์จารย์ ด้านภาระงานอาจารย์ประจำแต่ละคนมีคาบสอนเฉลี่ย 14 คาบต่อสัปดาห์ นอกจากนี้ยังมีภาระงานเพิ่มเติมอื่นๆ อีก เช่น อาจารย์ประจำชั้น อาจารย์ที่ปรึกษาชมรม อาจารย์ที่ทำหน้าที่ฝ่ายบริหาร หรือการเป็นวิทยากรรับเชิญเพื่อบรรยายในประเด็นต่างๆ ของทั้งหน่วยงานของรัฐและเอกชน เป็นต้น ในด้านกระบวนการจัดการเรียนการสอนอาจารย์แต่ละคนในกลุ่มสาระมีกระบวนการสอนที่หลากหลายและทันสมัย มีการใช้สื่อการเรียนการสอน ร่วมกับเอกสารประกอบการเรียนที่โรงเรียนพัฒนาขึ้นเองตามกรอบแนวทางของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

1.3 ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียน

นักเรียนส่วนใหญ่มีความกระตือรือร้น กล้าคิดกล้าแสดงออก พฤติกรรมของนักเรียนในห้องเรียนชอบการมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน ให้ความสนใจและมีความพร้อมในการเรียนสูง และระดับความสามารถของนักเรียนแต่ละห้องเรียนมีลักษณะคละความสามารถ ทำให้ทั้งสองกลุ่มมีผลการเรียนเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกัน ผลการเรียนเฉลี่ยของนักเรียนส่วนใหญ่ประมาณร้อยละ 80 ที่มีผลการเรียนเฉลี่ยในช่วง 3.00 – 4.00

2. ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

2.1 ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

ในการวิเคราะห์พัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลที่รวบรวมจากการตรวจแบบทดสอบและใบกิจกรรม การตอบคำถามในชั้นเรียน และแบบสังเกตพฤติกรรม โดยผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์พัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็น 3 ด้าน คือ ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ด้านการหาข้อสรุปของปัญหา และด้านการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา โดยแต่ละด้านนำเสนอพัฒนาการเป็น 3 ระยะ คือ ก่อนเรียน ระหว่างเรียนและหลังเรียน

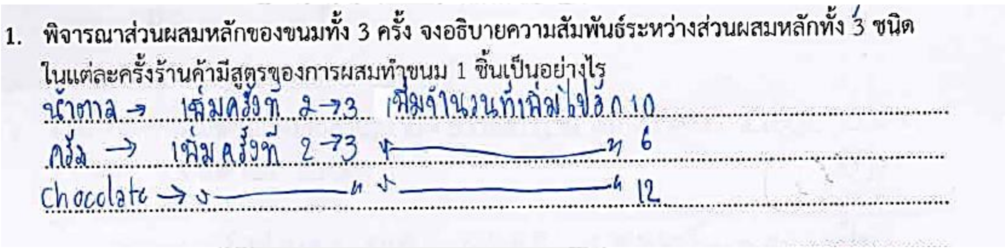
1) การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล

❑ ก่อนเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 45) สามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ “ถูกต้องเพียงเล็กน้อย” ขณะนักเรียนที่สามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ถูกต้องทั้งหมดมีเพียงร้อยละ 5 เท่านั้น มีข้อสังเกตว่านักเรียนประมาณร้อยละ 10 ที่ไม่สามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

ส่วนผสมของขนมชนิดหนึ่งประกอบด้วยส่วนผสมหลัก 3 ชนิด ได้แก่ น้ำตาล ครีม และผงช็อคโกแล็ต โดยทางร้านมีวัตถุดิบในการผลิตแต่ละครั้งดังนี้

ครั้งที่	น้ำตาล (ช้อนชา)	ครีม (ช้อนชา)	ผงช็อคโกแล็ต (ช้อนชา)	ปริมาณขนม (ชิ้น)
1	70	42	84	14
2	90	54	108	18
3	120	72	144	24


1. พิจารณาส่วนผสมหลักของขนมทั้ง 3 ครั้ง จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างส่วนผสมหลักทั้ง 3 ชนิด ในแต่ละครั้งร้านค้ามีสูตรของการผสมทำขนม 1 ชิ้นเป็นอย่างไร

น้ำตาล → เพิ่มครั้งที่ 2→3 เพิ่มจำนวนที่เพิ่มไปอีก 10

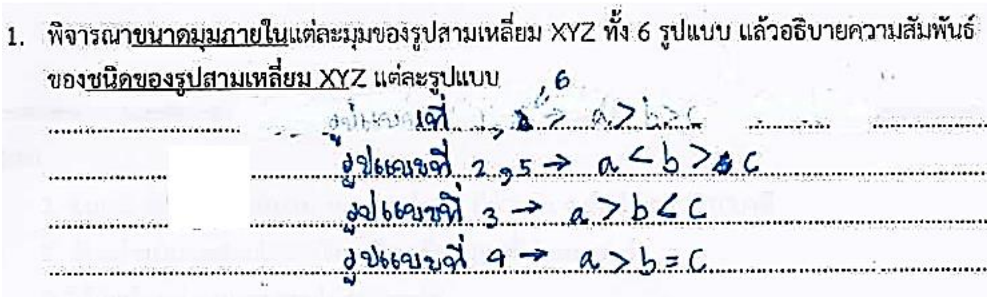
ครีม → เพิ่มครั้งที่ 2→3 " 6

Chocolate → " " 12

ภาพที่ 5 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ก่อนเรียน

พิจารณาอัตราส่วนของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม XYZ ซึ่งมีความยาวด้านแต่ละด้านเป็น a , b , c และ $a \le b < c$ เมื่อมีการปรับเปลี่ยนความยาวด้านใน 6 รูปแบบ พบว่าอัตราส่วนของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม XYZ เป็นดังนี้

รูปสามเหลี่ยม XYZ	อัตราส่วนของมุมภายใน
รูปแบบ 1	9 : 8 : 1
รูปแบบ 2	1 : 6 : 5
รูปแบบ 3	2 : 1 : 3
รูปแบบ 4	2 : 1 : 1
รูปแบบ 5	2 : 3 : 5
รูปแบบ 6	9 : 5 : 4



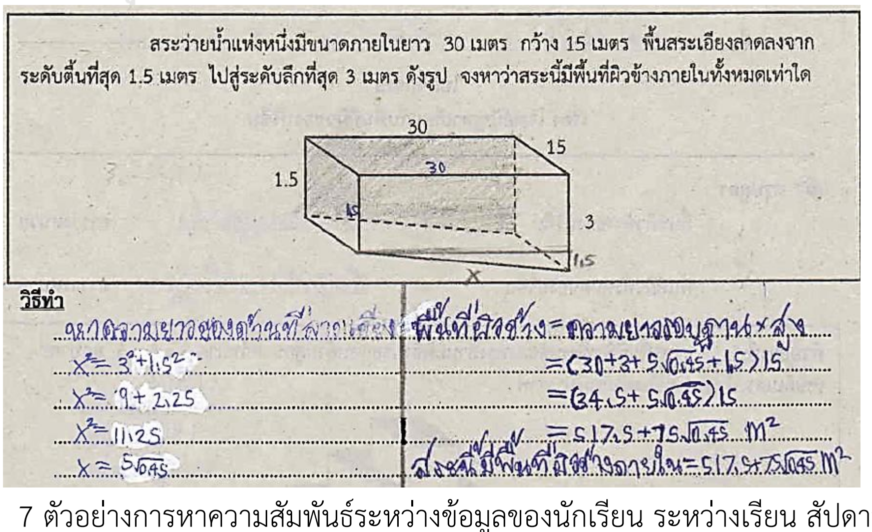
ภาพที่ 6 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ก่อนเรียน

จากภาพที่ 5 นักเรียนระบุความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลไม่ชัดเจน โดยนักเรียนระบุในรูปแบบข้อความโดยอธิบายการเพิ่มขึ้นของปริมาณส่วนผสม แต่ไม่ได้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างส่วนผสมของสูตรขนมต่อ 1 ชิ้น ส่วนภาพที่ 6 นักเรียนพยายามเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล แต่อธิบายได้เพียงความสัมพันธ์มากกว่าน้อยกว่าเท่านั้น แต่ไม่ได้ระบุเป็นความสัมพันธ์ของชนิดของรูปสามเหลี่ยม

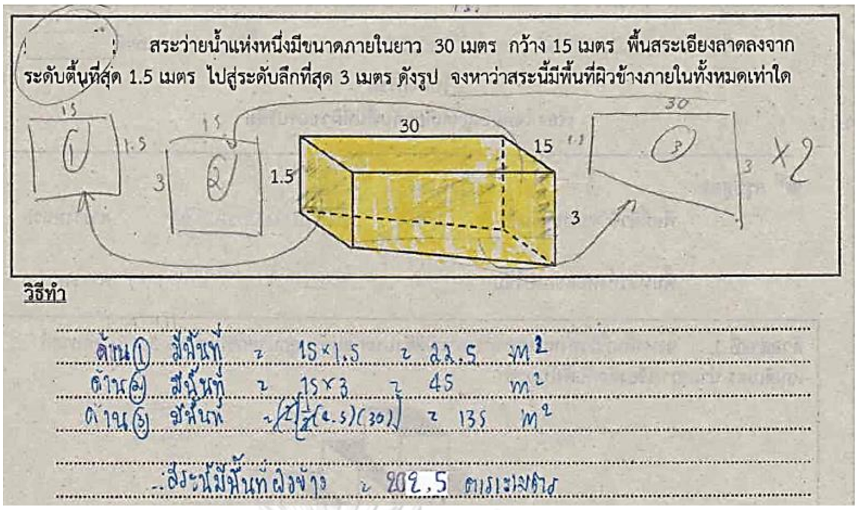
❑ ระหว่างเรียน

- สัปดาห์ที่ 1 (คาบเรียนที่ 1 – 3)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนส่วนใหญ่มีพัฒนาการไม่แตกต่างจากก่อนเรียนมากนัก กล่าวคือ นักเรียนส่วนมากหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลถูกต้องเพียงเล็กน้อย หรือเขียนแสดงความสัมพันธ์แต่ไม่ถูกต้อง ดังจะเห็นได้จากการสังเกตและเดินดูนักเรียนขณะทำกิจกรรมที่ครูต้องชี้แนะและอธิบายเพิ่มเติม นักเรียนจึงจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลนั้นได้ ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ภาพที่ 7 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 1

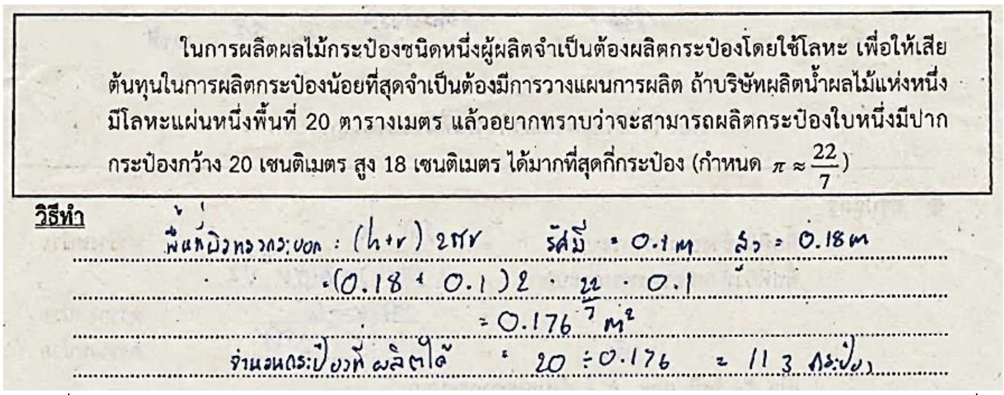


ภาพที่ 8 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 1

จากภาพที่ 7 นักเรียนหาความสัมพันธ์ระหว่างด้านของสระว่ายน้ำไม่ถูกต้อง อาจเป็นไปได้ว่านักเรียนแปลความหมายข้อมูลจากสถานการณ์ไม่ถูกต้องโดยมองภาพประกอบที่กำหนดให้ซึ่งแทนลักษณะของสระว่ายน้ำเป็นการหาพื้นที่ผิวข้างของปรีซึม ซึ่งไม่ถูกต้อง แต่นักเรียนบางคนสามารถแปลความหมายข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหานี้ได้ถูกต้อง ดังภาพที่ 8 นักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของด้านของสระว่ายน้ำได้อย่างถูกต้องโดยสามารถแยกกรณีเพื่อหาพื้นที่ตามสิ่งที่โจทย์กำหนด

- สัปดาห์ที่ 2 (คาบเรียนที่ 4 – 6)

ในสัปดาห์นี้พัฒนาการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดีขึ้นกว่าสัปดาห์แรกไม่มากนัก กล่าวคือ นักเรียนสามารถแยกแยะพิจารณาหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่จำเป็นต้องนำไปใช้ได้ชัดเจน และครบถ้วนมากขึ้น อย่างไรก็ตามยังมีนักเรียนบางคนยังจำเป็นต้องให้ครูช่วยชี้แนะจึงจะสามารถหาความสัมพันธ์หรือบอกความสัมพันธ์ได้ ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ในการผลิตผลไม้กระป๋องชนิดหนึ่งผู้ผลิตจำเป็นต้องผลิตกระป๋องโดยใช้โลหะ เพื่อให้เสียต้นทุนในการผลิตกระป๋องน้อยที่สุดจำเป็นต้องมีการวางแผนการผลิต ถ้าบริษัทผลิตน้ำผลไม้แห่งหนึ่งมีโลหะแผ่นหนึ่งพื้นที่ 20 ตารางเมตร แล้วอยากทราบว่าจะสามารถผลิตกระป๋องใบหนึ่งมีปากกระป๋องกว้าง 20 เซนติเมตร สูง 18 เซนติเมตร ได้มากที่สุดกี่กระป๋อง (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

พื้นที่ผิวทรงกระบอก : $(h+r)2\pi r$ รัศมี $= 0.1m$ สูง $= 0.18m$

$= (0.18+0.1)2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 0.1$

$= 0.176\ m^2$

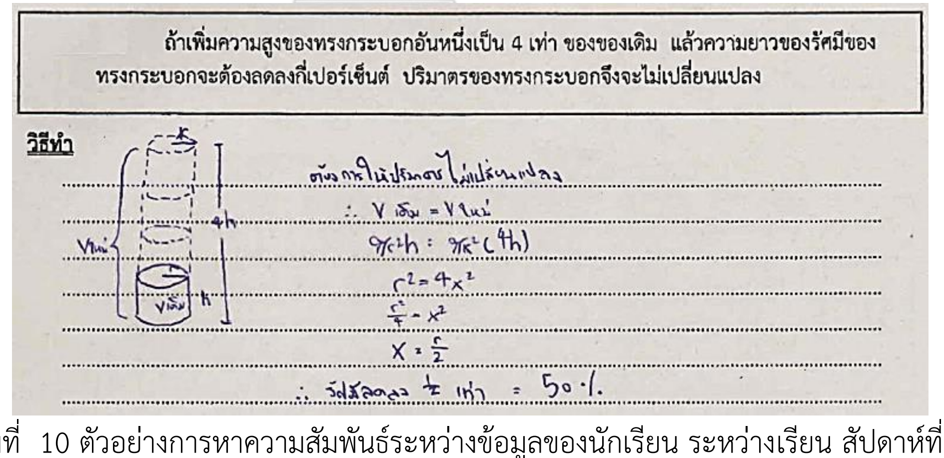
จำนวนกระป๋องที่ผลิตได้ $= 20 \div 0.176 = 113$ กระป๋อง

ภาพที่ 9 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 2

จากภาพที่ 9 นักเรียนวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ของความกว้างรอบปากของกระป๋อง และสามารถหารัศมีของทรงกระบอกได้ถูกต้อง

- สัปดาห์ที่ 3 (คาบเรียนที่ 7 – 9)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนหาความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ดีขึ้นกว่าสัปดาห์ที่ 2 อย่างชัดเจน โดยนักเรียนแสดงการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยการวาดรูปประกอบเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ดีขึ้น และแสดงเทคนิคและร่องรอยการวิเคราะห์ข้อมูลได้ชัดเจนขึ้นซึ่งสังเกตได้จากใบกิจกรรม ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ถ้าเพิ่มความสูงของทรงกระบอกอันหนึ่งเป็น 4 เท่า ของของเดิม แล้วความยาวของรัศมีของทรงกระบอกจะต้องลดลงกี่เปอร์เซ็นต์ ปริมาตรของทรงกระบอกจึงจะไม่เปลี่ยนแปลง

วิธีทำ

ต้องการให้ปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง

$\therefore$ V เดิม = V ใหม่

$\pi r^2 h = \pi x^2 (4h)$

$r^2 = 4x^2$

$\frac{r^2}{4} = x^2$

$x = \frac{r}{2}$

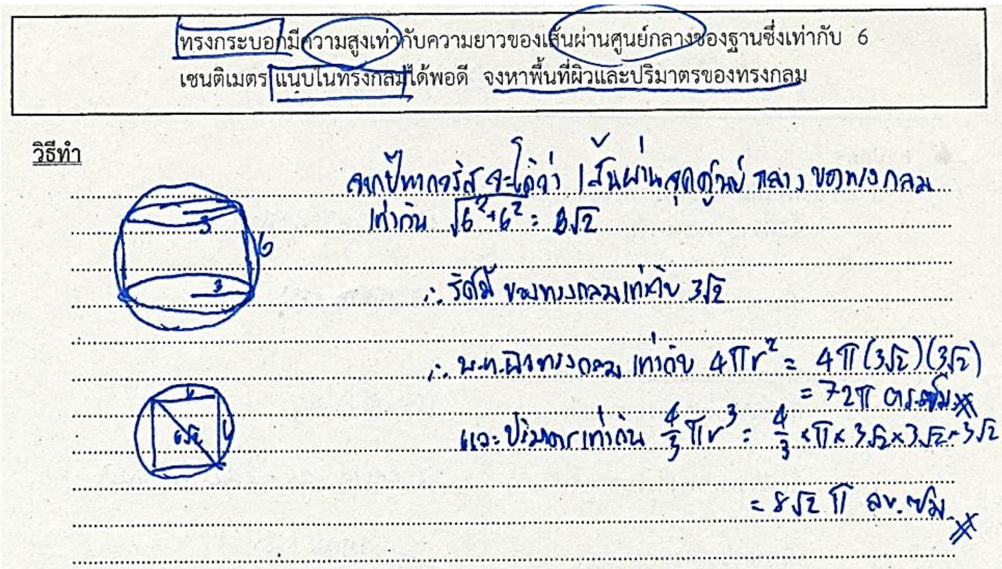
$\therefore$ รัศมีลดลง $\frac{1}{2}$ เท่า $= 50\%$

ภาพที่ 10 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 3

จากภาพที่ 10 นักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาและหาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรเดิมและปริมาตรใหม่ได้ถูกต้อง ด้วยการวาดรูปประกอบสถานการณ์พิจารณา โดยแสดงการเพิ่มขึ้นของปริมาตรทรงกระบอกเมื่อปริมาตรเพิ่มขึ้น 4 เท่าของปริมาตรเดิม และสามารถระบุเงื่อนไขที่สำคัญและจำเป็นได้

- สัปดาห์ที่ 4 (คาบเรียนที่ 10 – 12)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนมีพัฒนาการการให้เหตุผลดีขึ้นเป็นลำดับ นักเรียนสามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ถูกต้องและชัดเจน โดยนักเรียนแสดงการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้อย่างหลากหลายจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้ ซึ่งสังเกตได้จากการตอบคำถามในชั้นเรียนและร่องรอยในใบกิจกรรม ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

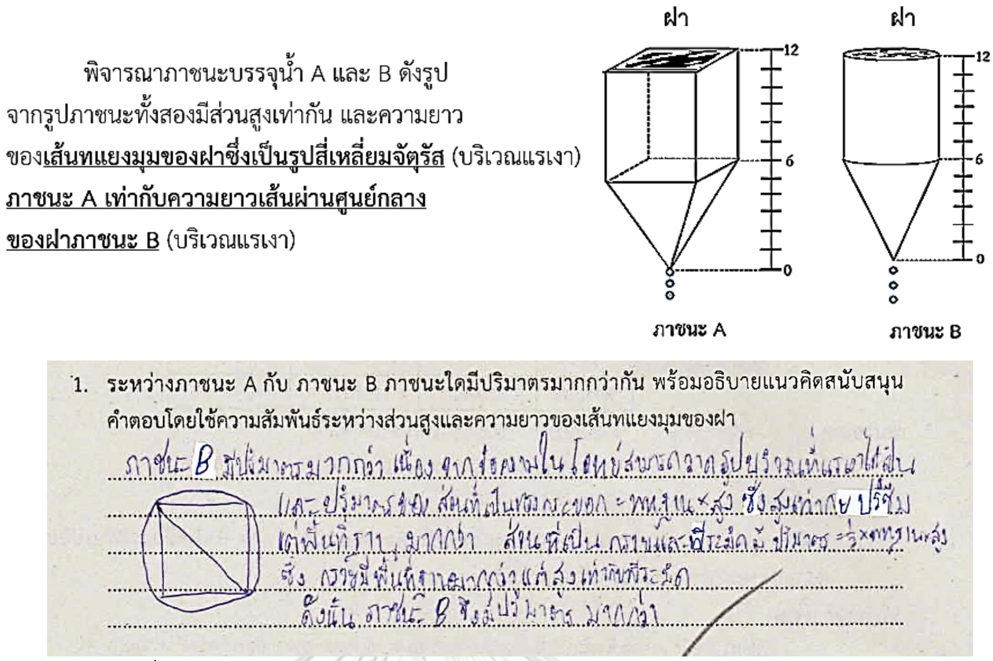


ภาพที่ 11 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 4

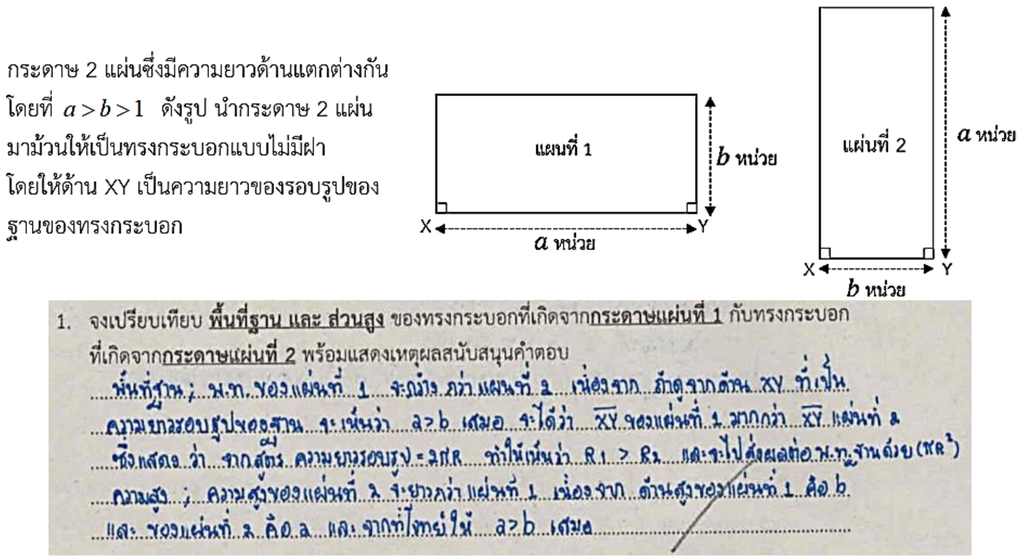
จากภาพที่ 11 นักเรียนสามารถระบุความสัมพันธ์ของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมกับความสูงของทรงกระบอกที่แนบในวงกลมได้อย่างถูกต้อง และมีการเขียนอธิบายที่ชัดเจน

❑ หลังเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 46) สามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ “ถูกต้องและชัดเจน” และระดับของความสามารถในการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลมีพัฒนาการดีขึ้นเมื่อเทียบกับก่อนเรียน และมีข้อสังเกตว่าไม่มีนักเรียนคนใดที่ไม่สามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ภาพที่ 12 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน หลังเรียน



ภาพที่ 13 ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลของนักเรียน หลังเรียน

จากภาพที่ 12 นักเรียนสามารถวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้องและชัดเจน และสามารถแสดงความสัมพันธ์โดยการอธิบายผ่านการวาดรูปประกอบ เพื่อขยายความสัมพันธ์ระหว่างเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมได้อย่างชัดเจนซึ่งนำไปสู่การระบุว่าภาชนะ B มีปริมาตรมากกว่าภาชนะ A ได้ ในทำนองเดียวกันจากภาพที่ 13 นักเรียนวิเคราะห์และเขียนแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ได้

อย่างถูกต้องและชัดเจน กล่าวคือนักเรียนสามารถเขียนอธิบายเพื่อเปรียบเทียบพื้นที่ฐานและส่วนสูงโดยการอ้างข้อมูลสนับสนุนคำตอบได้อย่างชัดเจน

2) การหาข้อสรุปของปัญหา

❑ ก่อนเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 54) สามารถใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ “ถูกต้องเพียงเล็กน้อย” ขณะที่นักเรียนที่สามารถใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมดมีเพียงร้อยละ 13 เท่านั้น มีข้อสังเกตว่านักเรียนประมาณร้อยละ 15 ยังไม่สามารถใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

ในการสอบเพื่อยื่นคะแนนเข้ามหาลัยแห่งหนึ่งจำนวน 3 ครั้งของนายอนุวัฒน์ ซึ่งการสอบแต่ครั้งจะเป็นการวัดความสามารถของนักเรียน 4 ด้าน ได้แก่ ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านการอ่าน ความสามารถด้านความรู้รอบตัว และความสามารถด้านภาษาอังกฤษ

โดยคะแนนความสามารถทั้ง 4 ด้านจะถูกคิดด้วยค่าน้ำหนักที่เท่ากัน คือ ร้อยละ 25 **และคะแนนขั้นต่ำแต่ละวิชาต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 40 ของคะแนนเต็มจึงจะมีสิทธิ์ยื่นคะแนนครั้งนั้นเข้ามหาลัยได้** ถ้าคะแนนสอบแต่ละครั้งของนายอนุวัฒน์เป็นดังตาราง

วิชา	คะแนนเต็ม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3
ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์	50	36	40	44
ความสามารถด้านการอ่าน	100	48	36	60
ความสามารถด้านความรู้รอบตัว	50	16	28	36
ความสามารถด้านภาษาอังกฤษ	75	51	36	60

2. จงอธิบายว่านายอนุวัฒน์ควรยื่นครั้งใดจึงจะเป็นผลดีต่อตัวเขามากที่สุด

ควรยื่นครั้งที่3 เพราะ มันเป็นคะแนนที่ดีที่สุด

ภาพที่ 14 ตัวอย่างการหาข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน ก่อนเรียน

จากภาพที่ 14 นักเรียนหาข้อสรุปของปัญหาถูกต้อง แต่ไม่มีการอธิบายเหตุผลโดยการนำความรู้หรือหลักการทางคณิตศาสตร์มาเขียนเพื่ออธิบายความสมเหตุสมผลของข้อสรุป

❑ ระหว่างเรียน

- สัปดาห์ที่ 1 (คาบเรียนที่ 1 – 3)

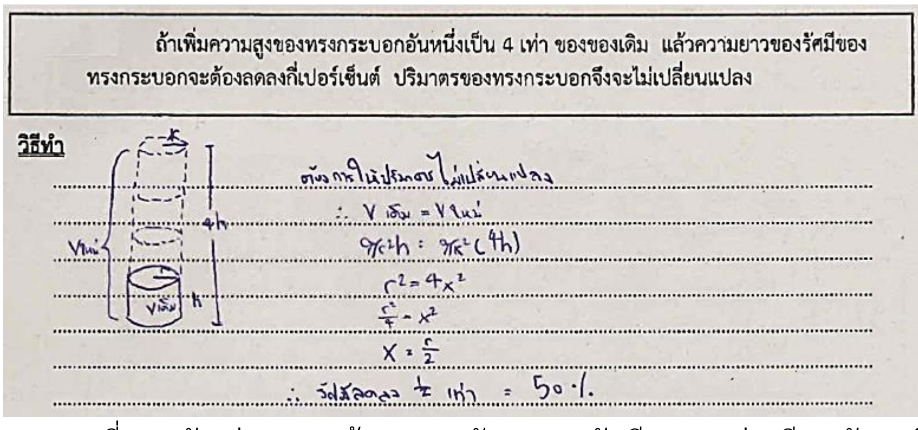
ในสัปดาห์นี้นักเรียนส่วนมากหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อยเท่านั้น ส่วนใหญ่ข้อสรุปจะยังไม่ชัดเจนและไม่สามารถการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาหาข้อสรุปได้ เช่น นักเรียนจำสูตรการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าไม่ได้ ในสัปดาห์นี้ครูจึงต้องคอยแนะนำและช่วยเหลืออยู่มาก นักเรียนจึงสามารถดำเนินการหาข้อสรุปได้ถูกต้อง

- สัปดาห์ที่ 2 (คาบเรียนที่ 4 – 6)

ในสัปดาห์นี้พัฒนาการด้านนี้เริ่มดีขึ้น นักเรียนสามารถทำได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ ครูสังเกตพบว่ามีนักเรียนส่วนหนึ่งเริ่มที่สามารถหาข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้องสมบูรณ์ แต่อย่างไรก็ตามนักเรียนบางส่วนยังมีความสับสนในการนำข้อมูลจากปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหา ครูจึงต้องคอยแนะนำ ช่วยเหลือและอธิบายเพื่อให้นักเรียนกลุ่มนี้สามารถหาข้อสรุปได้

- สัปดาห์ที่ 3 (คาบเรียนที่ 7 – 9)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้องและชัดเจนขึ้นเป็นลำดับ โดยการนำข้อมูลจากปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ได้ดีขึ้น นอกจากนี้ในระหว่างที่เรียนครูใช้การถามตอบเพื่อชี้แนะให้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปได้อย่างชัดเจนขึ้นด้วย ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

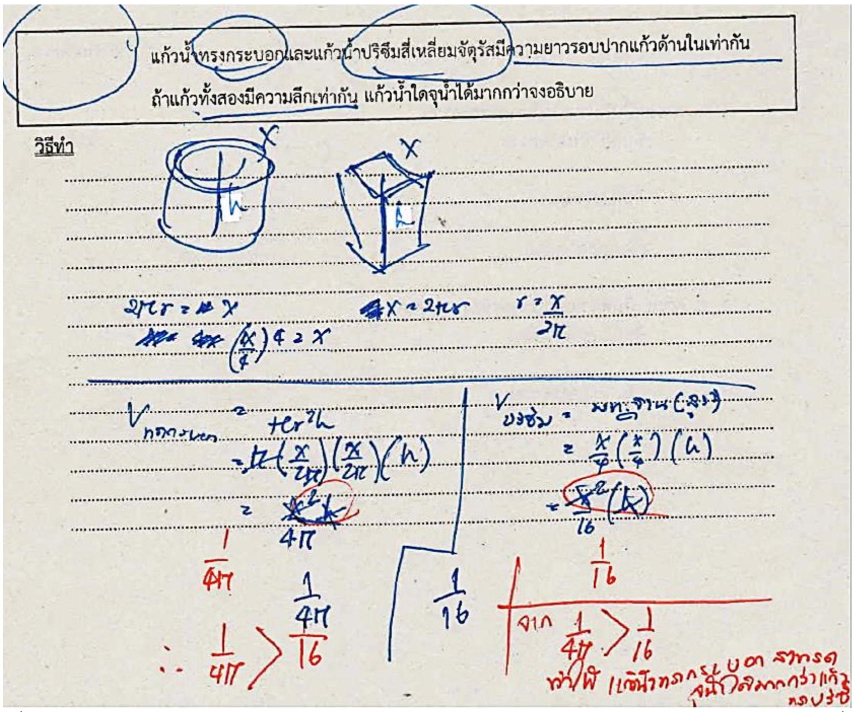


ภาพที่ 15 ตัวอย่างการหาข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 3

จากภาพที่ 15 นักเรียนใช้ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างความสูงและความยาวของรัศมีทรงกระบอกเดิม นำไปใช้สรุปความสัมพันธ์ของความยาวรัศมีใหม่กับรัศมีเดิมได้อย่างถูกต้อง

- สัปดาห์ที่ 4 (คาบเรียนที่ 10 – 12)

ในสัปดาห์นี้พัฒนาการด้านนี้ดีขึ้นเป็นลำดับและชัดเจนขึ้น กล่าวคือ นักเรียนสามารถหาข้อสรุปของปัญหาได้ดีขึ้นมาก สังเกตได้จากการตอบคำถามในชั้นเรียน และการทำเอกสารใบกิจกรรม ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ภาพที่ 16 ตัวอย่างการหาข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 4

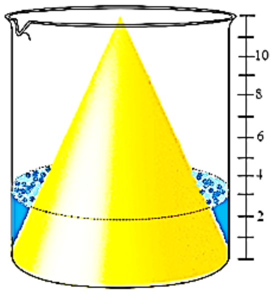
จากภาพที่ 16 นักเรียนหาข้อสรุปเพื่อเปรียบเทียบปริมาตรของทรงกระบอกและปริมาตรของพีระมิดได้อย่างถูกต้อง โดยนักเรียนใช้ข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาทั้งทรงกระบอกและพีระมิดที่มีความสูงเท่ากัน จากนั้นพิจารณาเปรียบเทียบปริมาตรจากค่าคงที่เท่านั้น

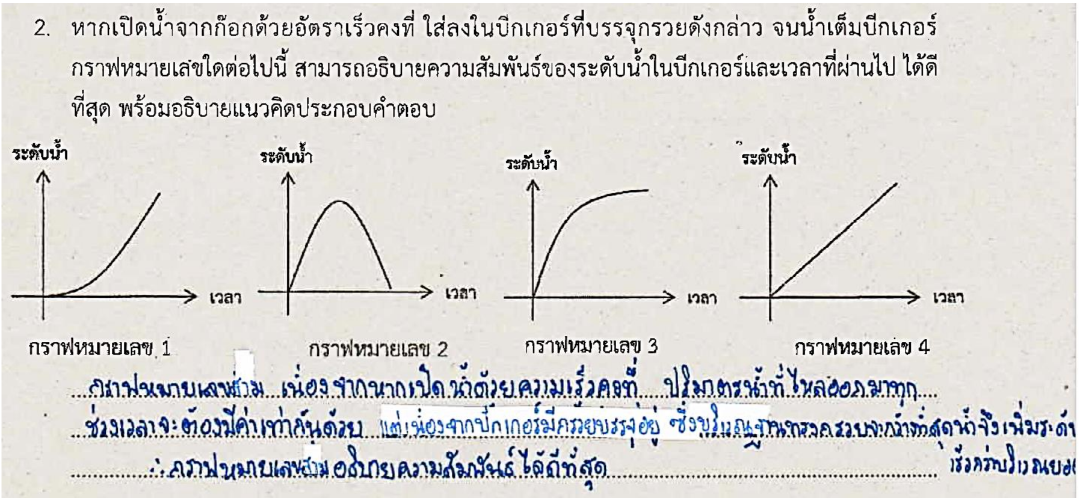
❑ หลังเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 42) สามารถใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ “ถูกต้องและชัดเจน” และระดับของความสามารถในการใช้

ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้ มีพัฒนาการที่สูงขึ้นเมื่อเทียบกับก่อนเรียน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

จากรูปแท่งเหล็กซึ่งมีลักษณะเป็นกรวยอันหนึ่ง ถูกบรรจุอยู่ในบีกเกอร์ซึ่งมีความจุ 12 หน่วย³ ได้พอดี กล่าวคือทำให้ส่วนสูงของกรวยและบีกเกอร์เท่ากัน ซึ่งเริ่มต้นมีน้ำในบีกเกอร์อยู่ที่ระดับหมายเลข 3 ดังรูป



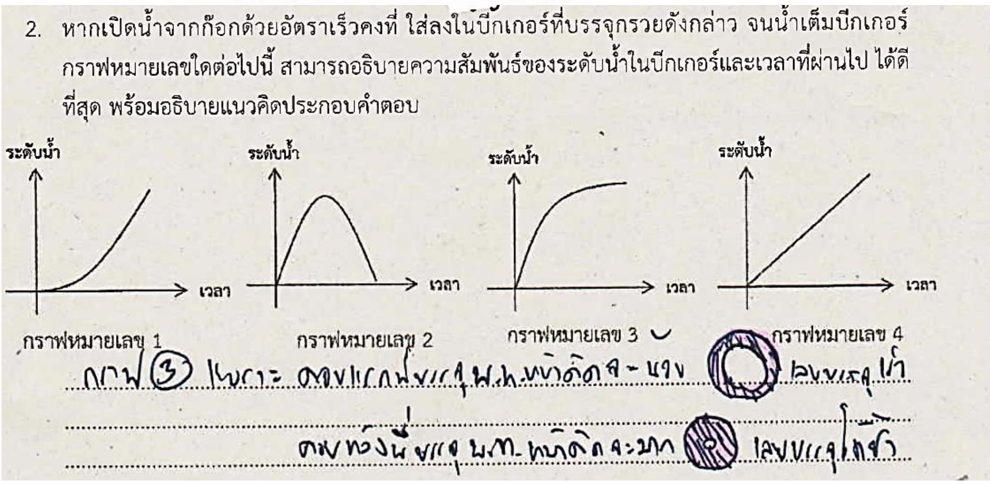


2. หากเปิดน้ำจากก๊อกด้วยอัตราเร็วคงที่ ใส่ลงในบีกเกอร์ที่บรรจุกรวยดังกล่าว จนน้ำเต็มบีกเกอร์ กราฟหมายเลขใดต่อไปนี้ สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของระดับน้ำในบีกเกอร์และเวลาที่ผ่านไป ได้ดีที่สุด พร้อมอธิบายแนวคิดประกอบคำตอบ

ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 1
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 2
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 3
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 4

กราฟหมายเลข[illegible] เนื่องจากหากเปิดน้ำด้วยความเร็วคงที่ ปริมาตรน้ำที่ไหลออกมาทุกช่วงเวลาจะต้องมีค่าเท่ากันด้วย แต่เนื่องจากบีกเกอร์มีกรวยบรรจุอยู่ ซึ่งบริเวณ[illegible] [illegible] เรื่อยๆ [illegible]
∴ กราฟหมายเลข[illegible] อธิบายความสัมพันธ์ได้ดีที่สุด

ภาพที่ 17 ตัวอย่างการหาข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน หลังเรียน



2. หากเปิดน้ำจากก๊อกด้วยอัตราเร็วคงที่ ใส่ลงในบีกเกอร์ที่บรรจุกรวยดังกล่าว จนน้ำเต็มบีกเกอร์ กราฟหมายเลขใดต่อไปนี้ สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของระดับน้ำในบีกเกอร์และเวลาที่ผ่านไป ได้ดีที่สุด พร้อมอธิบายแนวคิดประกอบคำตอบ

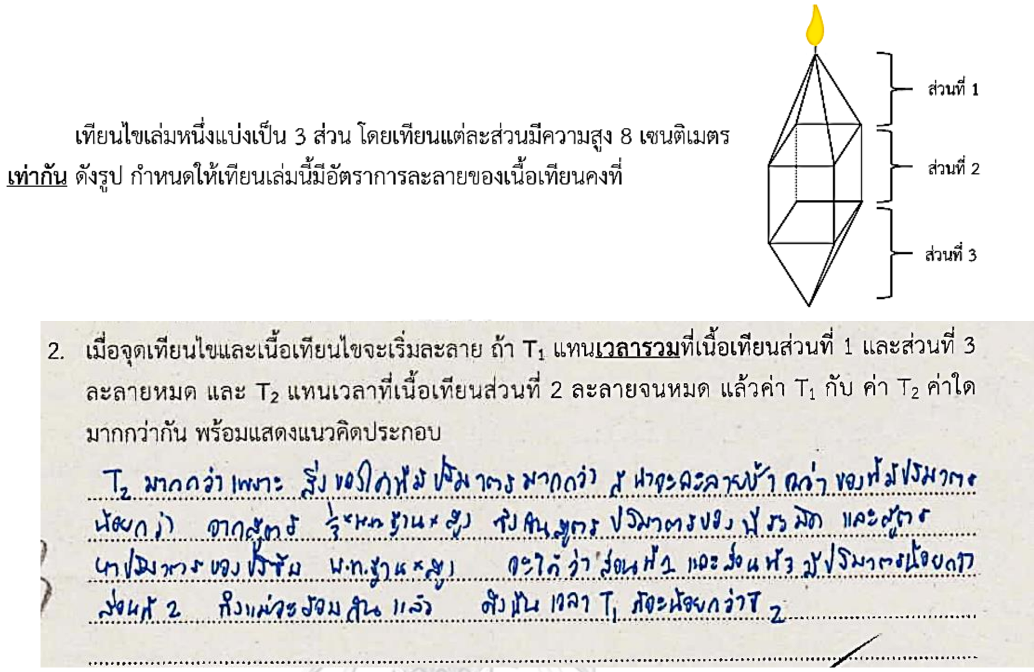
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 1
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 2
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 3
ระดับน้ำ เวลา กราฟหมายเลข 4

กราฟ 3 เพราะ [illegible] พ.ท. หน้าตัด[illegible] [illegible]
[illegible] พ.ท. หน้าตัดจะมาก [illegible]

ภาพที่ 18 ตัวอย่างการหาข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

จากภาพที่ 17 และ 18 ในปัญหาข้อเดียวกันนักเรียนทั้งสองคนเขียนอธิบายคำตอบในลักษณะที่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามนักเรียนทั้งสองคนใช้ข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์

ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน



ภาพที่ 19 ตัวอย่างการหาข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

จากภาพที่ 19 นักเรียนหาข้อสรุปของปัญหาได้อย่างถูกต้องชัดเจน และมีการใช้ข้อมูลในปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น สูตรในการหาปริมาตรของพีระมิดและปริซึมอ้างเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของปัญหาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

3) การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา

❑ **ก่อนเรียน**

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 43) สามารถเขียนอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผลได้ “ถูกต้องเพียงเล็กน้อย” ขณะที่ไม่มีนักเรียนคนใดที่สามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาได้ในระดับที่ถูกต้องและชัดเจน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

ในการสอบเพื่อยื่นคะแนนเข้ามหาลัยแห่งหนึ่งจำนวน 3 ครั้งของนายอนุวัฒน์ ซึ่งการสอบแต่ครั้งจะเป็นการวัดความสามารถของนักเรียน 4 ด้าน ได้แก่ ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านการอ่าน ความสามารถด้านความรู้รอบตัว และความสามารถด้านภาษาอังกฤษ

โดยคะแนนความสามารถทั้ง 4 ด้านจะถูกคิดด้วยค่าน้ำหนักที่เท่ากัน คือ ร้อยละ 25 **และคะแนนขั้นต่ำแต่ละวิชาต้องไม่ต่ำกว่าร้อยละ 40 ของคะแนนเต็มจึงจะมีสิทธิ์ยื่นคะแนนครั้งนั้นเข้ามหาลัยได้** ถ้าคะแนนสอบแต่ละครั้งของนายอนุวัฒน์เป็นดังตาราง

วิชา	คะแนนเต็ม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3
ความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์	50	36	40	44
ความสามารถด้านการอ่าน	100	48	36	60
ความสามารถด้านความรู้รอบตัว	50	16	28	36
ความสามารถด้านภาษาอังกฤษ	75	51	36	60

3. **"ถ้าหากเปลี่ยนเงื่อนไขของการยื่นคะแนนเข้ามหาวิทยาลัยดังกล่าวเป็นคะแนนรวมของการสอบแต่ละครั้งต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 40 แล้วในการสอบทั้ง 3 ครั้งของนายอนุวัฒน์จะอยู่ในเกณฑ์ที่สามารถนำไปยื่นคะแนนเข้ามหาวิทยาลัยได้ทุกครั้ง"** ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบ

จริง เพราะ พอคำนวนเป็นร้อยละ แล้วเกิน 40 ทุกครั้ง

ภาพที่ 20 ตัวอย่างการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน ก่อนเรียน

ส่วนผสมของขนมชนิดหนึ่งประกอบด้วยส่วนผสมหลัก 3 ชนิด ได้แก่ น้ำตาล ครีม และผงช็อคโกแล็ต โดยทางร้านมีวัตถุดิบในการผลิตแต่ละครั้งดังนี้

ครั้งที่	น้ำตาล (ช้อนชา)	ครีม (ช้อนชา)	ผงช็อคโกแล็ต (ช้อนชา)	ปริมาณขนม (ชิ้น)
1	70	42	84	14
2	90	54	108	18
3	120	72	144	24

3. **"ถ้าต้องการทำขนมให้ได้ 80 ชิ้น แล้วทางร้านจะต้องใช้น้ำตาล 400 ช้อนชา ครีม 2400 ช้อนชา และผงช็อคโกแล็ต 4400 ช้อนชา"** ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบ

เท็จ ใช้ครีมกับผงช็อคมากเกินไป

ภาพที่ 21 ตัวอย่างการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน ก่อนเรียน

จากภาพที่ 20 และ 21 นักเรียนทั้งสองคนยังไม่สามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปได้อย่างสมเหตุสมผล กล่าวคือนักเรียนเขียนเพียงคำตอบโดยไม่ได้มีการเขียนอ้างเหตุผลสนับสนุนข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล

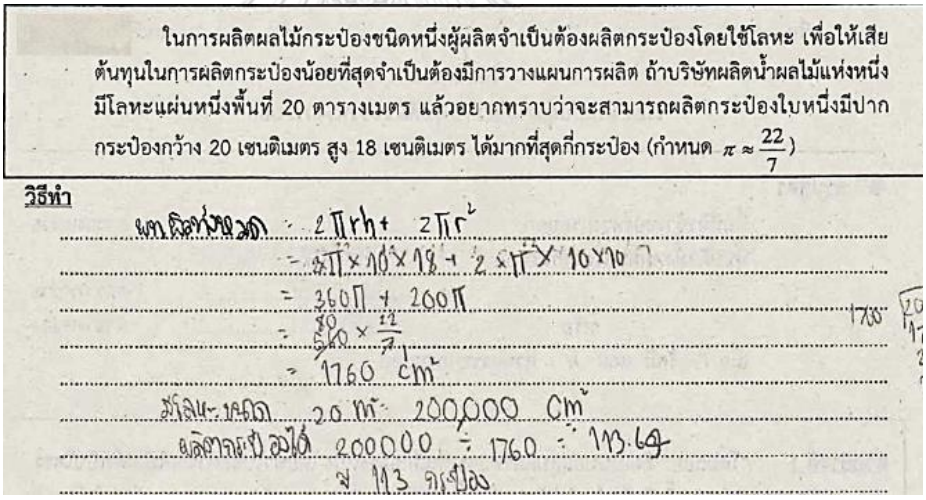
❑ ระหว่างเรียน

- สัปดาห์ที่ 1 (คาบเรียนที่ 1 – 3)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนส่วนมากยังไม่สามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล พบว่าในสัปดาห์นี้ส่วนใหญ่ครูจำเป็นต้องใช้การชี้แนะและกระตุ้นการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบของนักเรียนเป็นช่วง ๆ เนื่องจากนักเรียนส่วนมากเมื่อได้คำตอบแล้วจะรีบสรุปทันทีโดยไม่ได้พิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ

- สัปดาห์ที่ 2 (คาบเรียนที่ 4 – 6)

ในสัปดาห์นี้พัฒนาการด้านนี้ยังไม่แตกต่างจากสัปดาห์แรก แต่อย่างไรก็ตามมีนักเรียนบางส่วนที่เริ่มพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาได้ดีขึ้น เมื่อเทียบกับสัปดาห์ที่ 1 โดยสังเกตเห็นจากการเขียนอธิบายเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อสรุปของปัญหาตามตัวอย่างผลงานของนักเรียนด้านล่าง


ในการผลิตผลไม้กระป๋องชนิดหนึ่งผู้ผลิตจำเป็นต้องผลิตกระป๋องโดยใช้โลหะ เพื่อให้เสียต้นทุนในการผลิตกระป๋องน้อยที่สุดจำเป็นต้องมีการวางแผนการผลิต ถ้าบริษัทผลิตน้ำผลไม้แห่งหนึ่งมีโลหะแผ่นหนึ่งพื้นที่ 20 ตารางเมตร แล้วอยากทราบว่าจะสามารถผลิตกระป๋องใบหนึ่งมีปากกระป๋องกว้าง 20 เซนติเมตร สูง 18 เซนติเมตร ได้มากที่สุดกี่กระป๋อง (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

พท.ผิวทั้งหมด = $2\pi rh + 2\pi r^2$

= $2\pi \times 10 \times 18 + 2 \times \pi \times 10 \times 10$

= $360\pi + 200\pi$

= $\overset{80}{\cancel{560}} \times \frac{22}{\cancel{7}}$

= $1760\ cm^2$

มีโลหะหมด $20\ m^2 = 200{,}000\ cm^2$

ผลิตกระป๋องได้ $200000 \div 1760 = 113.64$

≈ 113 กระป๋อง

ภาพที่ 22 ตัวอย่างการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 2

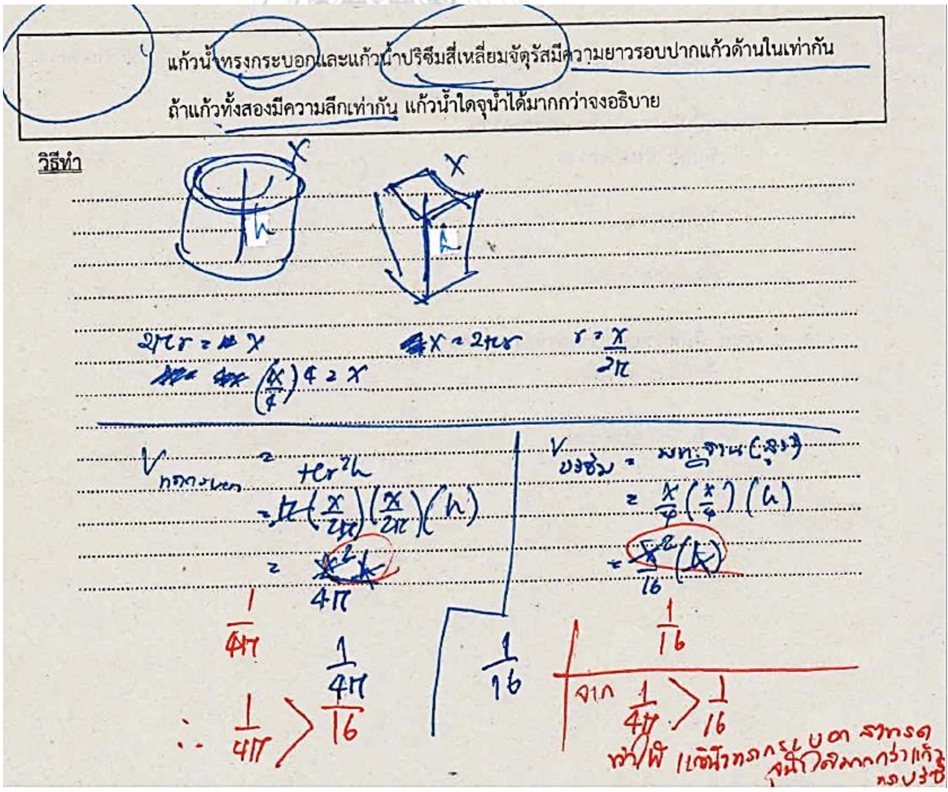
จากภาพที่ 22 นักเรียนมีการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา ซึ่งในตัวอย่างนี้ต้องการหาว่าจะสามารถผลิตกระป๋องได้มากที่สุดกี่กระป๋อง จากการคำนวณจะได้จำนวนกระป๋องเท่ากับ 113.64 กระป๋อง ซึ่งนักเรียนสรุปคำตอบได้ถูกต้องโดยการประมาณเป็น 113 กระป๋อง ถ้าเกินจากนี้ย่อมทำให้โลหะที่ใช้ทำกระป๋องไม่เพียงพอ

- สัปดาห์ที่ 3 (คาบเรียนที่ 7 – 9)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนส่วนมากมีพัฒนาการด้านนี้ดีและถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ กล่าวคือ นักเรียนสามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาได้ชัดเจนขึ้น โดยครูใช้การสังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน พบว่า นักเรียนสามารถใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์อ้างเหตุผลสนับสนุนหรือคัดค้านได้สมเหตุสมผลมากขึ้น แต่มีนักเรียนบางคนที่ครูยังจำเป็นต้องช่วยเหลือโดยการชี้แนะเพื่อชี้ให้นักเรียนพิจารณาความสมเหตุสมผลได้

- สัปดาห์ที่ 4 (คาบเรียนที่ 10 – 12)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนมีพัฒนาการความสามารถในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาได้ดีขึ้นตามลำดับ พบว่า นักเรียนอ้างเหตุผลโดยการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาสนับสนุนคำตอบได้อย่างชัดเจน แต่อย่างไรก็ตามเมื่อเทียบกับ 2 ด้านข้างต้น ด้านนี้จะยังไม่มีความโดดเด่นชัดเจนมากนัก อาจเนื่องด้วยนักเรียนหลายคนถูกฝึกให้คิดคำนวณอย่างเดียวมานาน เน้นความเร็วในการค้นหาคำตอบจนอาจจะละเลยการตรวจสอบความสมเหตุสมผล ครูจึงจำเป็นต้องเตือนและชี้แนะอยู่เป็นส่วนใหญ่ ตามตัวอย่างผลงานของนักเรียนด้านล่าง

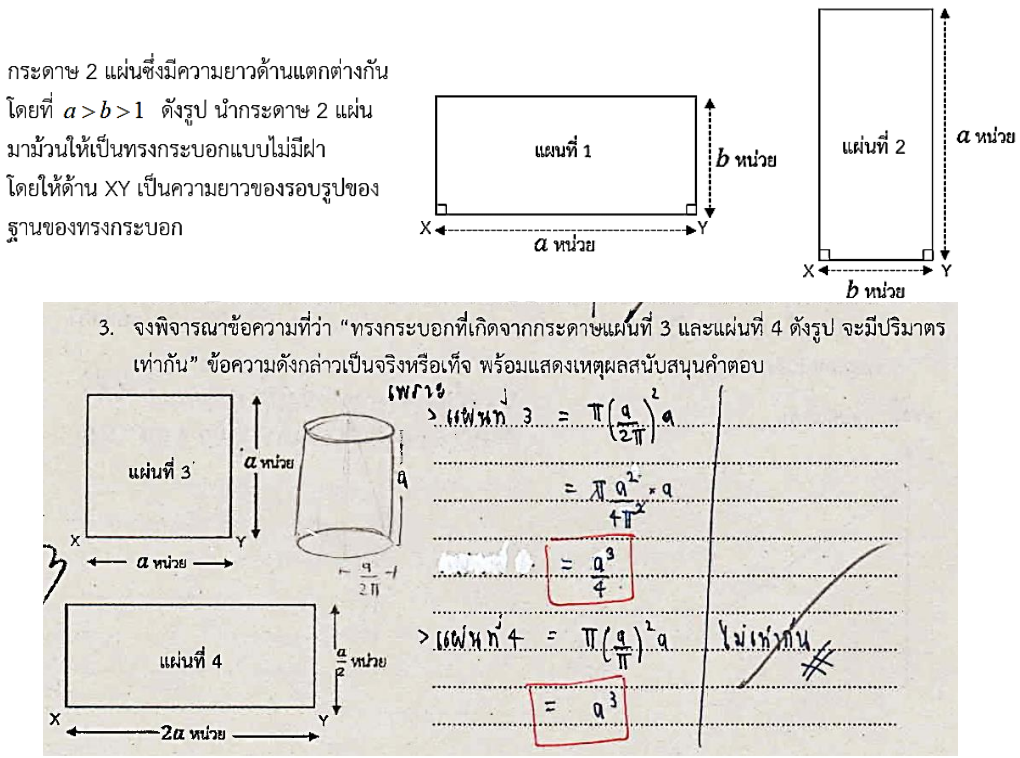


ภาพที่ 23 ตัวอย่างการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาของนักเรียนระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 4

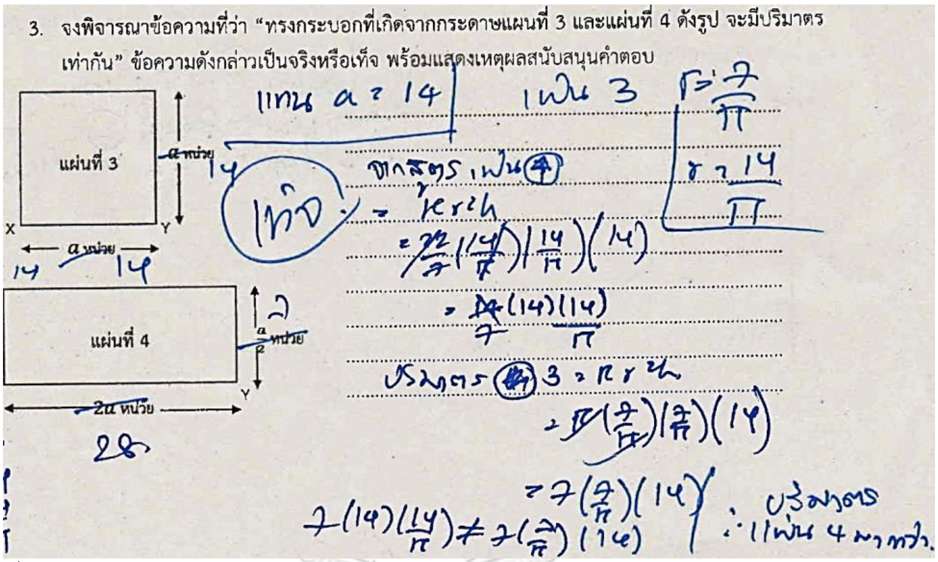
จากภาพที่ 23 นักเรียนเปรียบเทียบปริมาตรของทรงกระบอกกับปริมาตรของปริซึม โดยใช้การเปรียบเทียบค่าของ $\frac{1}{4\pi}$ และ $\frac{1}{16}$ เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาได้อย่างสมเหตุสมผล เนื่องจากปริมาตรทั้งสองมีค่าตัวแปรที่เท่ากัน คือ x^2h ดังนั้นเหตุผลของการเปรียบเทียบค่าของ $\frac{1}{4\pi}$ และ $\frac{1}{16}$ จึงสามารถสนับสนุนคำตอบได้อย่างสมเหตุสมผล

❑ หลังเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 40) สามารถเขียนอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผลได้ “ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่” และระดับของความสามารถเขียนอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผลมีพัฒนาการที่สูงขึ้นเมื่อเทียบกับก่อนเรียน มีข้อสังเกตว่ามีนักเรียนเพียงร้อยละ 3 เท่านั้นที่เขียนอธิบายข้อสรุปแต่ไม่ถูกต้อง ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ภาพที่ 24 ตัวอย่างการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาของนักเรียนหลังเรียน



ภาพที่ 25 ตัวอย่างการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

จากภาพที่ 24 นักเรียนเขียนอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น สูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอกเพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องและชัดเจน และจากภาพที่ 25 นักเรียนสามารถเขียนอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น การลองแทนค่าความยาวด้านของกระดาษแต่ละแผ่น ซึ่งนักเรียนสมมติให้ a = 14 หน่วย จากนั้นแทนค่าในสูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอก เพื่อสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผลถูกต้องและชัดเจน

2.2 ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลอง

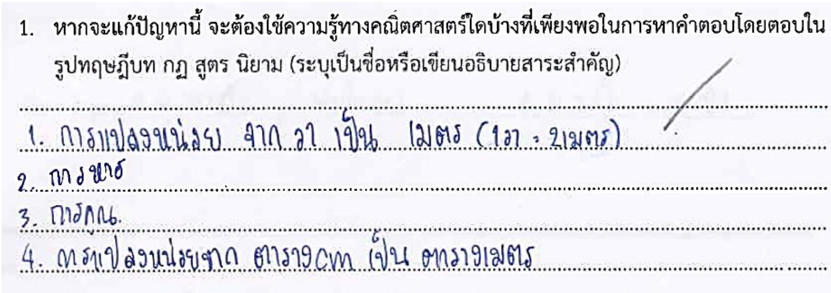
จากการศึกษาพัฒนาการในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ซึ่งผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์พัฒนาการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์โดยการนำข้อมูลที่ได้จากการตรวจแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ การทำใบกิจกรรม การถามตอบของนักเรียนและแบบสังเกตพฤติกรรม สรุปตามองค์ประกอบได้ดังนี้

1) การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา

❑ **ก่อนเรียน**

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนเกินครึ่ง (ร้อยละ 54) ที่สามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ “ถูกต้องเพียงเล็กน้อย” ขณะที่มีนักเรียนเพียงร้อยละ 9 เท่านั้นที่สามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

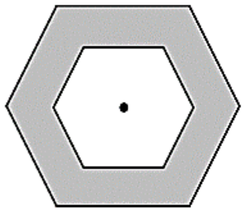
ช่างปูกระเบื้องซื้อกระเบื้องที่มีขนาด 20×20 ตารางเซนติเมตร เพื่อนำไปปูพื้นในบริเวณสวนแห่งหนึ่ง โดยปูเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้าง 3 วา ด้านยาว 8 เมตร ถ้าซื้อกระเบื้องเป็นกล่องแต่ละกล่องมีกระเบื้อง 25 แผ่น เขาจะต้องซื้อกระเบื้องทั้งหมดกี่กล่อง

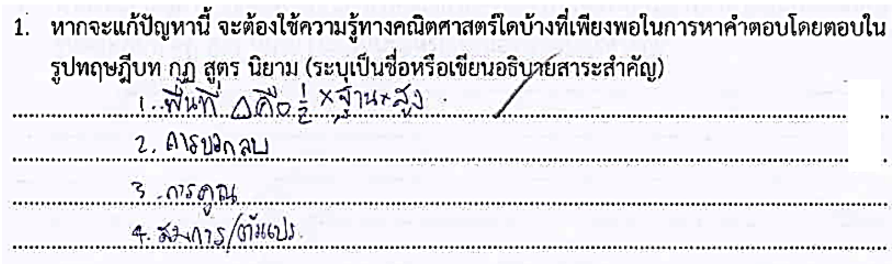

1. หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบโดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม (ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ)

1. การแปลงหน่วย จาก วา เป็น เมตร (1วา = 2เมตร)
2. การหาร
3. การคูณ
4. การแปลงหน่วยจาก ตารางcm เป็น ตารางเมตร

ภาพที่ 26 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียนก่อนเรียน

รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปมีจุดศูนย์กลางร่วมกันดังรูป
ถ้ารูปใหญ่มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 48 หน่วย
รูปเล็กมีความยาวรอบรูป 36 หน่วย จงหาพื้นที่ที่แรเงา




1. หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบโดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม (ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ)

1. พื้นที่ △ คือ $\frac{1}{2}$ × ฐาน × สูง
2. การบวกลบ
3. การคูณ
4. สมการ/ตัวแปร

ภาพที่ 27 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียนก่อนเรียน

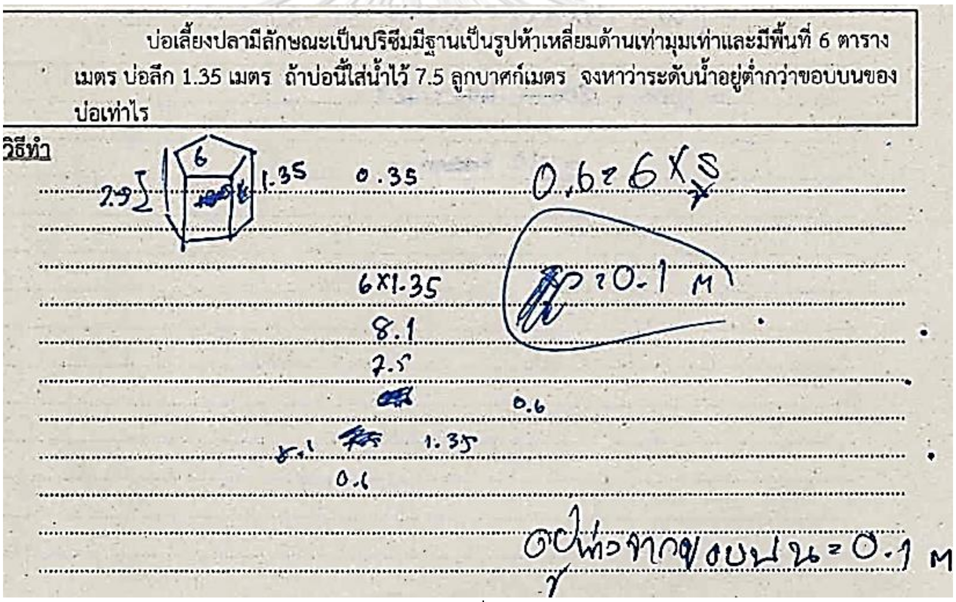
จากภาพที่ 26 และ 27 นักเรียนเลือกหรือระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย กล่าวคือ ในภาพที่ 26 นักเรียนไม่ได้ระบุสูตรในการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และสูตรในการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และภาพที่ 27

นักเรียนไม่ได้ระบุสูตรการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับการหาคำตอบของสถานการณ์ปัญหา

❑ ระหว่างเรียน

- สัปดาห์ที่ 1 (คาบเรียนที่ 1 – 3)

ในช่วงสัปดาห์แรก นักเรียนยังไม่สามารถเลือกหรือระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม หรือหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจนนัก นักเรียนส่วนใหญ่ยังมีแนวทางการเขียนตอบที่ไม่ชัดเจน ซึ่งในช่วงแรกนี้ครูจำเป็นต้องใช้วิธีการชี้แนะด้วยการถามตอบตลอดเวลา เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนบอกสูตรหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในปัญหา ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

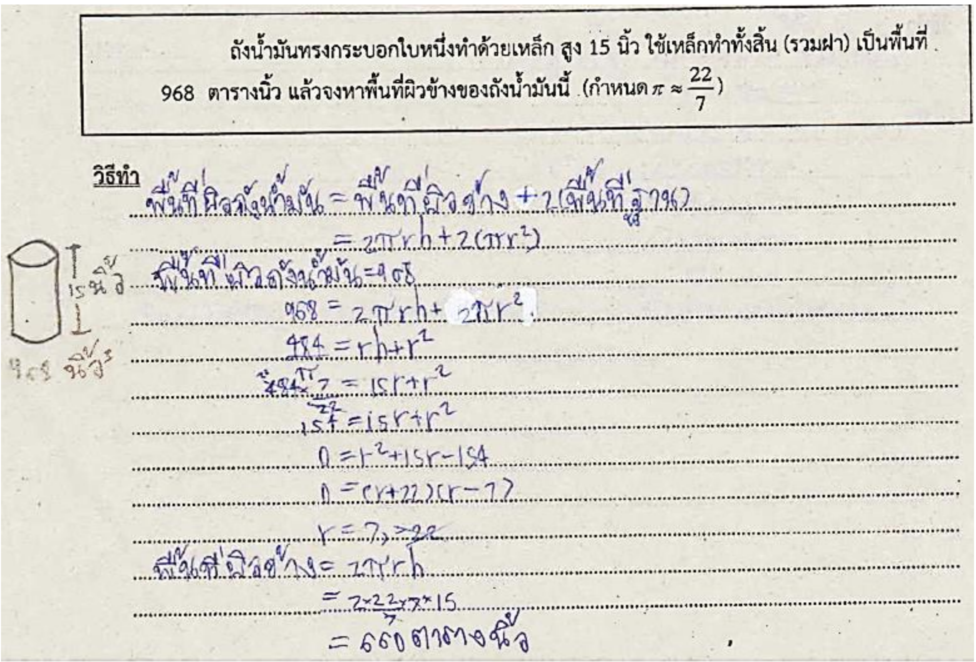


ภาพที่ 28 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียนระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 1

จากภาพที่ 28 นักเรียนไม่ได้ระบุสูตรการหาปริมาตรของปริซึม อาจเนื่องมาจากนักเรียนดูสูตรประกอบตลอดเวลา แล้วแทนค่าและคำนวณ นักเรียนเน้นหาเพียงคำตอบเท่านั้นจึงทำให้นักเรียนจำสูตรไม่ได้ และเมื่อมีการประยุกต์ที่ซับซ้อนขึ้น กล่าวคือ สถานการณ์ไม่ได้ให้ข้อมูลในลักษณะที่ชัดเจน นักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้มาแก้ปัญหาได้

- สัปดาห์ที่ 2 (คาบเรียนที่ 4 – 6)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนมีพัฒนาการด้านการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ แตกต่างจากสัปดาห์แรกอย่างชัดเจน โดยครูใช้การสังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

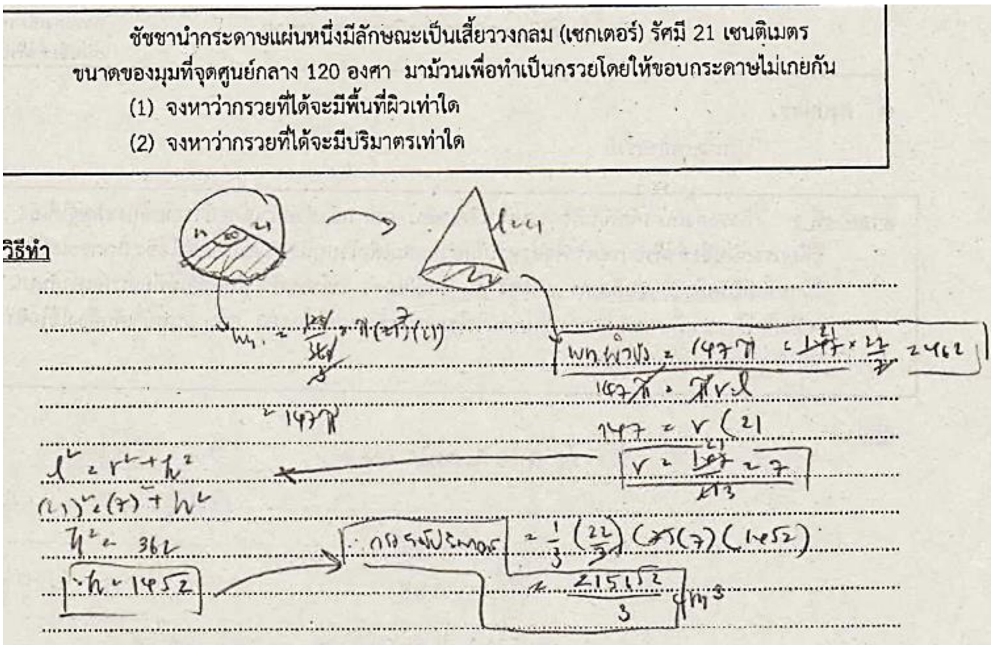


ภาพที่ 29 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 2

จากภาพที่ 29 นักเรียนระบุระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์และสูตรในการหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอกได้อย่างถูกต้องและชัดเจน

- สัปดาห์ที่ 3 (คาบเรียนที่ 7 – 9)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนมีพัฒนาการด้านการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้นชัดเจนขึ้นตามลำดับ ส่วนมากสามารถแสดงพฤติกรรมการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ชัดเจน อย่างไรก็ตามนักเรียนบางส่วนสามารถคำนวณหาคำตอบโดยการแทนค่าตามสูตร ซึ่งอาจจะละการเขียนสูตรประกอบด้วยและได้คำตอบที่ถูกต้องเช่นกัน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้



ภาพที่ 30 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียนระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 3

จากภาพที่ 30 นักเรียนระบุความรู้ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งมีความสัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน เช่น ทฤษฎีบทปีทาโกรัส และสูตรการหาปริมาตรของกรวย

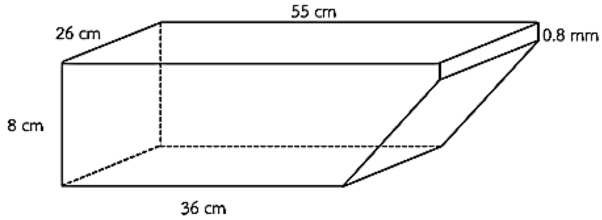
- สัปดาห์ที่ 4 (คาบเรียนที่ 10 – 12)

นักเรียนมีพัฒนาการที่ดีขึ้นจากสัปดาห์ที่ผ่านมาอย่างต่อเนื่อง กล่าวคือ นักเรียนสามารถระบุความรู้และเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ดีขึ้น ซึ่งครูสังเกตเห็นจากการตอบคำถามในชั้นเรียนที่ให้นักเรียนบอกสูตรในการคำนวณ และมีข้อสังเกตว่านักเรียนส่วนใหญ่เมื่อนักเรียนระบุความรู้ที่จำเป็นในการแก้ปัญหาได้โดยการตอบคำถามในห้องระหว่างเรียน แล้วนักเรียนหลายคนจะไม่ระบุสูตรหรือความรู้ในวิธีทำ แต่จะใช้การแทนค่าตัวแปรไปเลยซึ่งได้คำตอบที่ถูกต้องเช่นกัน

❑ หลังเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 56) สามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ “ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่” และระดับของความสามารถในการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้มีพัฒนาการที่สูงขึ้นเมื่อเทียบกับก่อนเรียน มีข้อสังเกตว่านักเรียนที่สามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องและครบถ้วนมีร้อยละ 36 ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

ทรงสามมิติหนึ่งมีลักษณะดังรูป ถ้าต้องการติดกระดาษสีหลายๆสี ที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสภายในทรงสามมิตินี้ทั้งหมด ซึ่งกระดาษสีขนาดยาวด้านละ 2 เซนติเมตร จะต้องใช้กระดาษสีอย่างน้อยกี่แผ่น

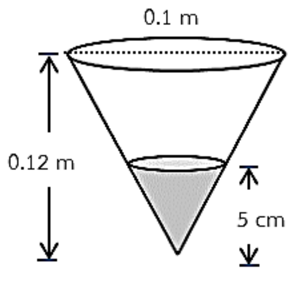


หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบโดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม หรือ ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ

1. สูตรการหาพื้นที่ผิวรูปปริซึม (ความยาวรอบฐาน×สูง)+(2)พื้นที่ฐาน ← พื้นที่ผิวข้าง+2 พื้นที่ฐาน
2. สูตร □ จัตุรัส → ด²
3. สูตร □ ผืนผ้า → ก×ย
4. สูตร □ คางหมู → ½(ผลบวกด้านคู่ขนาน× สูง)
5. สูตรพื้นที่ผิวข้างปริซึม → (ความยาวรอบฐาน×สูง)
6. ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
7. 10 cm = 1 mm

ภาพที่ 31 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

จากรูปกรวยอันหนึ่ง ปากกรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 0.1 เมตร กรวยนี้สูง 0.12 เมตร บรรจุน้ำสูง 5 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวที่เปียกน้ำของกรวย (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)



หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบโดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม หรือ ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ

ใช้สูตร หาพื้นที่ของกรวย เท่ากับ $\pi r l + \pi r^2$

แปลงหน่วย m เป็น cm

ทฤษฎีบท พีทาโกรัส เท่ากับ $a^2 + b^2 = c^2$

รัศมี เท่ากับ เส้นผ่านศูนย์กลาง ÷ 2

สามเหลี่ยมคล้าย

ภาพที่ 32 ตัวอย่างการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

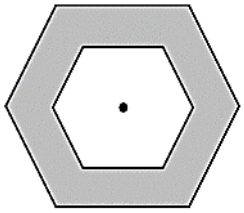
จากภาพที่ 31 และ 32 นักเรียนระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาของนักเรียนได้อย่างถูกต้องและชัดเจนเป็นข้อๆ ได้ กล่าวคือ นักเรียนระบุ ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน

2) การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา

❑ **ก่อนเรียน**

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 42) สามารถระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้ “ถูกต้องเพียงเล็กน้อย” ขณะที่มีนักเรียนเพียงร้อยละ 16 ที่สามารถระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปมีจุดศูนย์กลางร่วมกันดังรูป
ถ้ารูปใหญ่มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 48 หน่วย
รูปเล็กมีความยาวรอบรูป 36 หน่วย จงหาพื้นที่ที่แรเงา

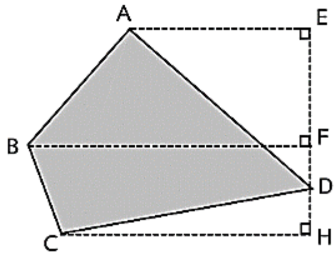


2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ

เอารูปใหญ่ลบรูปเล็ก จะได้คำตอบ

ภาพที่ 33 ตัวอย่างการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาของนักเรียน ก่อนเรียน

จากรูป กำหนดให้ AD = 30 หน่วย , BF = 32 หน่วย,
CH = 27 หน่วย, EF = 14 หน่วย, FH = 8 หน่วย
และ D เป็นจุดกึ่งกลางของ FH จงหาพื้นที่แรเงา



2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ

1. หาความสูงของ □ AGFB โดยใช้สูตร พท. □คางหมู

ภาพที่ 34 ตัวอย่างการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาของนักเรียน ก่อนเรียน

จากภาพที่ 33 นักเรียนไม่สามารถเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหานี้ได้เป็นข้อๆ และไม่ได้เขียนรายละเอียดในการแก้ปัญหาที่ชัดเจน แต่อย่างไรก็ตามจากหลักการที่นักเรียนเขียนก็เป็นหลักการแก้ปัญหาข้อนี้ที่ถูกต้อง เพียงแต่ขาดการเรียบเรียงและระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาที่ชัดเจน และภาพที่ 34 นักเรียนเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหาไม่สมบูรณ์ จะพบว่านักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ หรือนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ในคำถามข้อ 1 มาเรียบเรียงเป็นลำดับก่อนหลังได้ และในปัญหานี้ไม่จำเป็นต้องหาความสูงดังที่นักเรียนเขียน

❑ ระหว่างเรียน

- สัปดาห์ที่ 1 (คาบเรียนที่ 1 – 3)

ในสัปดาห์แรกนี้ นักเรียนส่วนมากยังไม่สามารถกำหนดแนวทางการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องชัดเจนและสมบูรณ์ ครูใช้การชี้แนะด้วยการใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนสามารถกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง พบว่านักเรียนส่วนมากยังกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาไม่เป็นลำดับก่อนหลัง ครูจึงต้องแนะนำช่วยเหลือและอธิบายเพิ่มเติม นักเรียนจึงสามารถทำได้

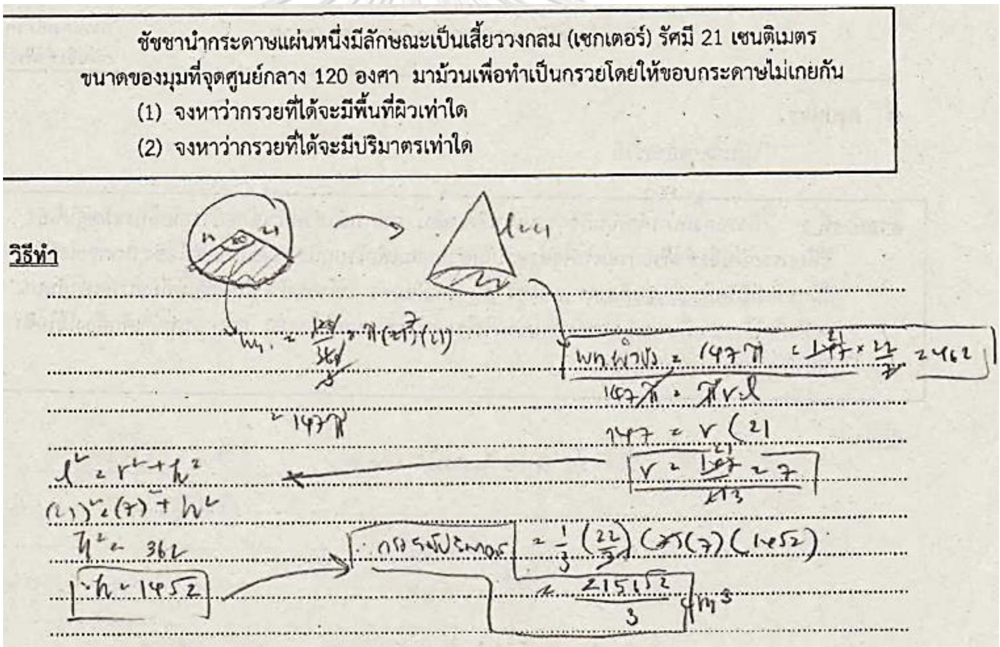
- สัปดาห์ที่ 2 (คาบเรียนที่ 4 – 6)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นจากสัปดาห์แรกอย่างต่อเนื่อง โดยนักเรียนส่วนมากสามารถเขียนแสดงแนวทางการหาคำตอบโดยมีการเรียงลำดับตามขั้นตอนในการดำเนินการก่อนหลังได้ถูกต้องและชัดเจนขึ้น มีข้อสังเกตว่ามีเพียงบางปัญหาเท่านั้นที่ครู

จำเป็นชี้แนะหรืออธิบายเพิ่มเติม เนื่องด้วยประสบการณ์ชีวิตของนักเรียนแตกต่างกันจึงอาจะยังไม่เข้าใจบริบทของปัญหา เช่น บริบทเรื่องโคมลอยที่มีลักษณะเปิดด้านเดียว คำว่าเซกเตอร์ที่ปรากฏในปัญหา ซึ่งนักเรียนหลายคนไม่คุ้นเคยกับคำๆนี้ว่าหมายถึงอะไร

- สัปดาห์ที่ 3 (คาบเรียนที่ 7 – 9)

ในสัปดาห์นี้ นักเรียนมีพัฒนาการในการเลือกและระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้ดีขึ้นอย่างชัดเจน กล่าวคือ นักเรียนสามารถเขียนอธิบายแนวทางและลำดับขั้นในการคำนวณหาคำตอบด้วยตนเอง นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนมีการใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ร่วมด้วย และจากการสังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียนนักเรียนส่วนมากสามารถอธิบายแนวทางการแก้ปัญหาได้โดยที่ครูไม่จำเป็นต้องใช้การชี้แนะหรือมีการชี้แนะแต่ความถี่ในการแนะน้อยลง ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้


ชัชชานำกระดาษแผ่นหนึ่งมีลักษณะเป็นเสี้ยววงกลม (เซกเตอร์) รัศมี 21 เซนติเมตร ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง 120 องศา มาม้วนเพื่อทำเป็นกรวยโดยให้ขอบกระดาษไม่เกยกัน
(1) จงหาว่ากรวยที่ได้จะมีพื้นที่ผิวเท่าใด
(2) จงหาว่ากรวยที่ได้จะมีปริมาตรเท่าใด

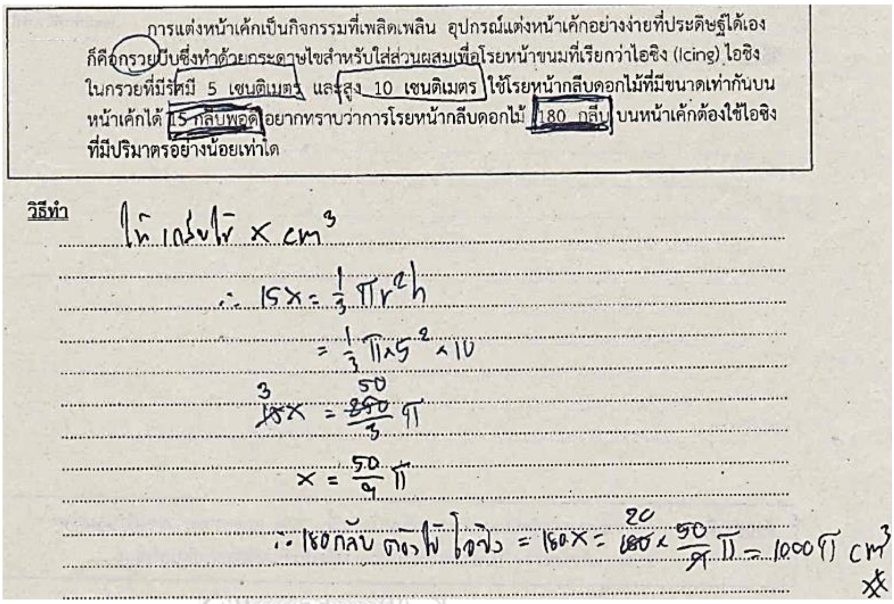
วิธีทำ

ภาพที่ 35 ตัวอย่างการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 3

จากภาพที่ 35 นักเรียนเขียนสูตรการหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกได้ถูกต้อง รวมถึงสามารถเขียนเรียงลำดับก่อนหลังขั้นตอนในการดำเนินการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง กล่าวคือ นักเรียนสามารถระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง

- สัปดาห์ที่ 4 (คาบเรียนที่ 10 – 12)

ในสัปดาห์นี้ นักเรียนมีพัฒนาการด้านนี้ดีขึ้นตามลำดับ กล่าวคือเมื่อครูถามขั้นตอนในการแก้ปัญหานักเรียนสามารถบอกได้อย่างเป็นลำดับขั้นและนักเรียนสามารถเขียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาที่ซับซ้อนมากยิ่งขึ้นได้ดีขึ้น นอกจากนี้นักเรียนยังมีการประยุกต์ใช้เทคนิคการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้


การแต่งหน้าเค้กเป็นกิจกรรมที่เพลิดเพลิน อุปกรณ์แต่งหน้าเค้กอย่างง่ายที่ประดิษฐ์ได้เองก็คือกรวยบีบซึ่งทำด้วยกระดาษไขสำหรับใส่ส่วนผสมเพื่อโรยหน้าขนมที่เรียกว่าไอซิง (Icing) ไอซิงในกรวยที่มีรัศมี 5 เซนติเมตร และสูง 10 เซนติเมตร ใช้โรยหน้ากลีบดอกไม้ที่มีขนาดเท่ากันบนหน้าเค้กได้ 15 กลีบพอดี อยากทราบว่าการโรยหน้ากลีบดอกไม้ 180 กลีบ บนหน้าเค้กต้องใช้ไอซิงที่มีปริมาตรอย่างน้อยเท่าใด

วิธีทำ ให้ เค้กใช้ x cm^3

$\therefore 15x = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 10$

$\cancel{15}^{3}x = \frac{\cancel{250}^{50}}{3}\pi$

$x = \frac{50}{9}\pi$

$\therefore$ 180 กลีบ ดอกไม้ ใช้ไอซิง $= 180x = \cancel{180}^{20} \times \frac{50}{\cancel{9}}\pi = 1000\pi\ cm^3$ #

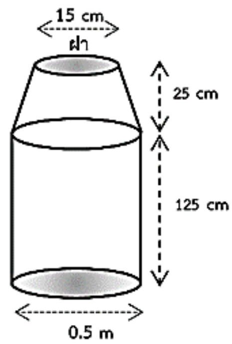
ภาพที่ 36 ตัวอย่างการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาของนักเรียน ระหว่างเรียน สัปดาห์ที่ 4

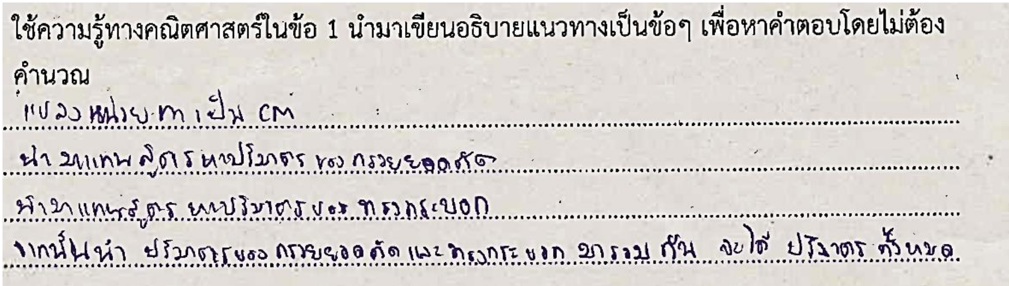
จากภาพที่ 36 นักเรียนเขียนอธิบายแนวทางการแก้ปัญหาตามลำดับก่อนหลังได้อย่างถูกต้องชัดเจน แสดงการใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ร่วมกันกับสูตรในการคำนวณหาปริมาตรของทรงกระบอกได้

❑ หลังเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 49) สามารถระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้ “ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่” ขณะที่มีนักเรียนร้อยละ 36 ที่สามารถระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและชัดเจน ซึ่งเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียน ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

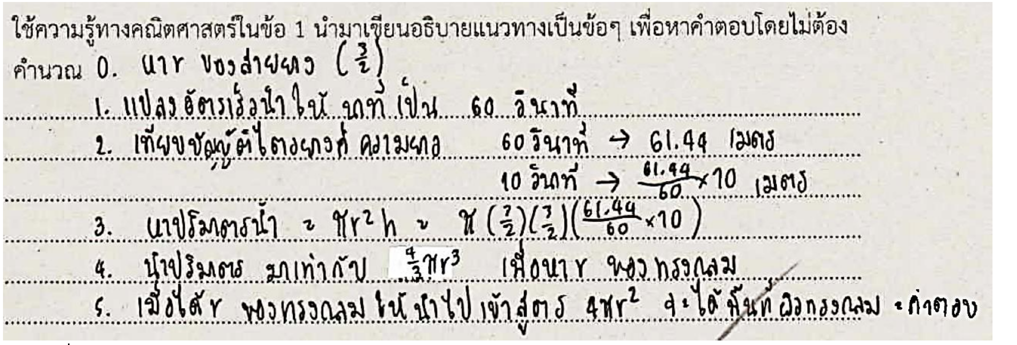
ถังใบหนึ่งมีลักษณะดังรูป ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 0.5 เมตร
ถังสูง 125 เซนติเมตร และฝาครอบถังหนา 2 เซนติเมตร
ตัวฝาสูง 25 เซนติเมตร และเส้นผ่านศูนย์กลางของฝายาว 15 เซนติเมตร
ถังใบนี้มีปริมาตรโดยประมาณกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร




ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ
แปลงหน่วย m เป็น cm
ฝา แทนสูตร หาปริมาตร ของ กรวยยอดตัด
หาฐาน แทนสูตร หาปริมาตร ของ ทรงกระบอก
จากนั้นนำ ปริมาตรของ กรวยยอดตัด และ ทรงกระบอก มารวม กัน จะได้ ปริมาตร ทั้งหมด

ภาพที่ 37 ตัวอย่างการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

สายยางฉีดน้ำเส้นหนึ่งมีหน้าตัดเป็นวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 3 เซนติเมตร น้ำไหลออกจากสายยางเส้นนี้ด้วยอัตราเร็ว 61.44 เมตรต่อนาที ถ้าเปิดน้ำให้ไหลออกจากสายยางเส้นนี้เป็นเวลา 10 วินาที ใส่ในลูกบอลพลาสติกทรงกลมใบหนึ่งที่ไม่มีน้ำอยู่จนน้ำเต็ม จงหาว่าลูกบอลนี้จะมีพื้นที่ผิวเท่าใด


ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ
0. หา r ของสายยาง $(\frac{3}{2})$
1. แปลงอัตราเร็วน้ำใน นาที เป็น 60 วินาที
2. เทียบบัญญัติไตรยางศ์ ความยาว 60 วินาที → 61.44 เมตร
10 วินาที → $\frac{61.44}{60} \times 10$ เมตร
3. หาปริมาตรน้ำ $= \pi r^2 h = \pi (\frac{3}{2})(\frac{3}{2})(\frac{61.44}{60} \times 10)$
4. นำปริมาตร มาเท่ากับ $\frac{4}{3}\pi r^3$ เพื่อหา r ของทรงกลม
5. เมื่อได้ r ของทรงกลม ให้นำไปเข้าสูตร $4\pi r^2$ จะได้พื้นที่ผิวทรงกลม = คำตอบ

ภาพที่ 38 ตัวอย่างการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาของนักเรียน หลังเรียน

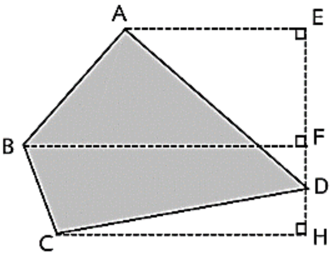
จากภาพที่ 37 และ 38 ของนักเรียนทั้งสองคนในสถานการณ์ปัญหาที่ต่างกัน พบว่านักเรียนทั้งสองคนเขียนอธิบายแนวทางในการแก้ปัญหาด้วยการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ของปัญหาได้อย่างถูกต้องชัดเจน

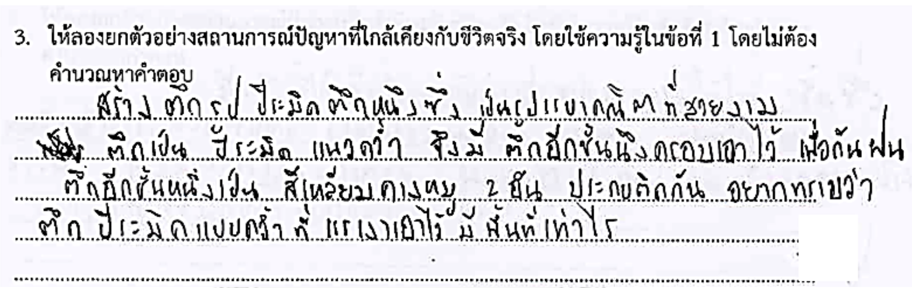
3) การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม

❑ ก่อนเรียน

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 45) สามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมได้ “ถูกต้องเพียงเล็กน้อย” ขณะที่มีนักเรียนร้อยละ 15 ที่ไม่สามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

จากรูป กำหนดให้ AD = 30 หน่วย , BF = 32 หน่วย, CH = 27 หน่วย, EF = 14 หน่วย, FH = 8 หน่วย และ D เป็นจุดกึ่งกลางของ FH จงหาพื้นที่แรเงา




3. ให้ลองยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง โดยใช้ความรู้ในข้อที่ 1 โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

สร้างตึกรูปปิระมิดตึกหนึ่งซึ่งเป็นรูปแบบเรขาคณิตที่สวยงาม
ตึกเป็นปิระมิดแนวดิ่ง จึงมีตึกอีกชั้นหนึ่งครอบเอาไว้ เพื่อกันฝน
ตึกอีกชั้นหนึ่งเป็นสี่เหลี่ยมคางหมู 2 ชิ้น ประกบติดกัน อยากทราบว่า
ตึกปิระมิดแบบคว่ำที่แรเงาเอาไว้ มีพื้นที่เท่าไร

ภาพที่ 39 ตัวอย่างการระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมก่อนเรียน

จากภาพที่ 39 พบว่าเมื่ออ่านสถานการณ์ปัญหาที่นักเรียนสร้างขึ้นมาจะเห็นว่ายังไม่มีความเป็นไปได้และมีอยู่จริงในชีวิตประจำวันการเขียนยกตัวอย่างสถานการณ์นี้จึงยังไม่สัมพันธ์กับความรู้ทางคณิตศาสตร์ในคำถามข้อ 1

❑ ระหว่างเรียน

- สัปดาห์ที่ 1 (คาบเรียนที่ 1 – 3)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหาในตัวอย่างไปยังสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ เมื่อครูใช้คำถามเพื่อถามเกี่ยวกับปัญหาที่นักเรียนเคยพบเจอในชีวิตประจำวันที่เกี่ยวข้องหรือคล้ายคลึงกับสถานการณ์ปัญหาบ้าง นักเรียนส่วนใหญ่ระบุได้ไม่ชัดเจน

- สัปดาห์ที่ 2 (คาบเรียนที่ 4 – 6)

ในสัปดาห์นี้ครูใช้คำถามในการชี้แนะให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหาไปยังสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง พบว่านักเรียนหลายคนเริ่มเชื่อมโยงความรู้ไปยังปัญหาในชีวิตจริงได้เพียงเล็กน้อยและยังไม่ชัดเจน แต่ปัญหาที่นักเรียนพยายามยกส่วนใหญ่จะมีลักษณะที่ใกล้เคียงคล้ายกับสถานการณ์ปัญหามากเพียงแค่เปลี่ยนตัวเลข

- สัปดาห์ที่ 3 (คาบเรียนที่ 7 – 9)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนมีพฤติกรรมการระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมไม่แตกต่างกันมากจากสัปดาห์ที่ 1 – 2 แต่มีข้อสังเกตว่านักเรียนเริ่มพยามที่จะเชื่อมโยงไปยังสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงได้เพิ่มขึ้น ซึ่งครูสังเกตจากการตอบคำถามและยกตัวอย่างในชั้นเรียน

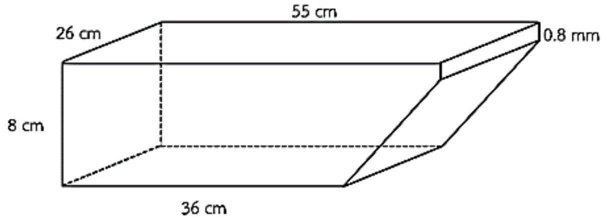
- สัปดาห์ที่ 4 (คาบเรียนที่ 10 – 12)

ในสัปดาห์นี้นักเรียนส่วนใหญ่สามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายคลึงกัน และสถานการณ์ปัญหาที่สามารถใช้ความรู้คล้ายกันได้ แต่ในบางปัญหาครูจำเป็นชี้แนะเนื่องด้วยประสบการณ์ชีวิตของนักเรียนแตกต่างกันจึงอาจจะยังไม่เข้าใจ จึงทำให้ความสามารถในการยกตัวอย่างของนักเรียนแต่ละคนจึงมีความแตกต่างกัน มีข้อสังเกตว่าพัฒนาการด้านนี้อาจจะยังไม่ชัดเจนนัก ส่วนใหญ่ครูใช้การสังเกตในระหว่างสอน โดยครูใช้การสุ่มถามนักเรียนให้นักเรียนยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง

❑ **หลังเรียน**

จากข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักเรียนส่วนมาก (ร้อยละ 36) สามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมได้ "ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่" ซึ่งเมื่อเทียบกับองค์ประกอบด้านอื่นแล้ว พบว่าพัฒนาการด้านนี้อาจจะยังไม่เด่นชัดเจนนักเพียงแค่พัฒนาอย่างค่อยเป็นค่อยไป และมีข้อสังเกตว่านักเรียนประมาณร้อยละ 12 ยังไม่สามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม ตัวอย่างผลงานนักเรียนแสดงดังนี้

ทรงสามมิติหนึ่งมีลักษณะดังรูป ถ้าต้องการติดกระดาษสีหลายๆสี ที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ภายในทรงสามมิตินี้ทั้งหมด ซึ่งกระดาษสีขนาดยาวด้านละ 2 เซนติเมตร จะต้องใช้กระดาษสีอย่างน้อยกี่แผ่น



ให้ลองยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง โดยใช้ความรู้ในข้อที่ 1 โดยไม่ต้องคำนวณหา

คำตอบ

สระว่ายน้ำแห่งหนึ่ง เป็นรูปปริซึม ดังรูป ต้องการ ติดกระเบื้องรอบสระ กระเบื้อง ยาวด้านละ 2 cm ต้องใช้ กระเบื้องกี่แผ่น

ภาพที่ 40 ตัวอย่างการระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมหลังเรียน

จากภาพที่ 40 นักเรียนสามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมได้ถูกต้อง แต่อย่างไรก็ตามจำนวนนักเรียนที่ทำไม่ได้ในองค์ประกอบนี้ก็ใกล้เคียงกับจำนวนที่นักเรียนทำได้ถูกต้องและชัดเจน ทั้งนี้อาจจะเนื่องมาจากประสบการณ์ชีวิตของนักเรียนแต่ละคนแตกต่างกัน นักเรียนบางคนอาจจะมองไม่เห็นปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความรู้ในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดก็ได้

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น มีวัตถุประสงค์ของการวิจัย ดังนี้

1. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดก่อนเรียนและหลังเรียน

4. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระหว่างกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

5. เพื่อศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกตัวอย่างประชากรในการวิจัยโดยใช้เทคนิคการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ใกล้เคียงกัน ทั้งหมด 7 ห้องเรียน จำนวนนักเรียนเฉลี่ยห้องละ 36 คน ผู้วิจัยเลือกกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยพิจารณาคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559 ของนักเรียนทั้ง 7 ห้องมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) แล้วเลือกนักเรียนจำนวน 2 ห้องที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) ใกล้เคียงกันมากที่สุดจำนวน 2 ห้อง คือ ห้อง ม.3/1 และ ม.3/6 ผู้วิจัยนำค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของนักเรียนทั้ง 2 ห้องมาทดสอบความ

แปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F - test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องโดยใช้ค่าที (t-test) พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความรู้รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานก่อนการทดลองไม่แตกต่างกัน หลังจากนั้นผู้วิจัยทำการสุ่มอย่างง่ายโดยการจับฉลากเพื่อกำหนดกลุ่มตัวอย่าง ผลปรากฏว่านักเรียนห้อง ม.3/1 เป็นกลุ่มทดลองที่ได้ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด และนักเรียนห้องม.3/6 เป็นกลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้องทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน ซึ่งได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบห้อง ม. 3/1 และ ม.3/6 เท่ากับ 14.21 และ 15.36 คะแนน ตามลำดับ จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนด้วยการทดสอบค่าที (t-test) พบว่า คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

จากนั้นผู้วิจัยให้นักเรียนทั้ง 2 ห้องทำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน ซึ่งได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบห้อง ม. 3/1 และ ม.3/6 เท่ากับ 16.45 และ 13.27 คะแนน ตามลำดับ จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไปทดสอบความแปรปรวนโดยใช้ค่าเอฟ (F-test) ซึ่งผลการทดสอบพบว่า ความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนทั้ง 2 ห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 จากนั้นทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตจากการทำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนด้วยการทดสอบค่าที (t-test) พบว่า คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้งสองห้องไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 แสดงว่านักเรียนทั้งสองห้องมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ประกอบด้วย

1.1 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด

1.2 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดและแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ครอบคลุมสาระการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนระบุรายละเอียด หัวข้อเรื่อง มาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัด จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ ประกอบด้วย ขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล บันทึกหลังการสอน จำนวน 12 แผน ใช้ในการทดลองสอน 12 คาบ เป็นเวลา 4 สัปดาห์ จากนั้นนำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้งหมดที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจพิจารณาความถูกต้องและเหมาะสมของเนื้อหา และให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไข และนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย

2.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน

ผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ ได้แก่ การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล การหาข้อสรุปของปัญหา และการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา ลักษณะแบบวัดเป็นแบบวัดแบบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ ข้อละ 9 คะแนน ใช้เวลา 50 นาที โดยที่ แบบวัดฉบับก่อนเรียน ครอบคลุมเนื้อหา เรื่อง การประยุกต์อัตราส่วนและร้อยละ การวัดเกี่ยวกับพื้นที่ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เศษส่วนและทศนิยม และแบบวัดฉบับหลังเรียน ครอบคลุมเนื้อหา เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จากนั้นนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบความตรงตามเนื้อหาและความเหมาะสมด้านภาษา เมื่อผู้วิจัยดำเนินการปรับปรุงตามคำแนะนำแล้ว จึงนำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนไปทดลองกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัด ดังนี้

2.1.1 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน มีค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.75 ค่าความยาก (p) เท่ากับ 0.23 – 0.32 และค่าอำนาจจำแนก (r) เท่ากับ 0.22 – 0.30

2.1.2 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน มีค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.81 ค่าความยาก (p) เท่ากับ 0.22 – 0.28 และค่าอำนาจจำแนก (r) เท่ากับ 0.27 – 0.35

2.2 แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนผู้วิจัยสร้างแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ ได้แก่ การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา และการระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม ลักษณะแบบวัดเป็นแบบวัดแบบอัตนัยจำนวน 4 ข้อ ข้อละ 9 คะแนนใช้เวลา 50 นาที โดยที่ แบบวัดฉบับก่อนเรียน ครอบคลุมเนื้อหาเรื่อง การวัดเกี่ยวกับพื้นที่ และทฤษฎีบทพีทาโกรัส และแบบวัดฉบับหลังเรียน ครอบคลุมเนื้อหา เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จากนั้นนำไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบความตรงตามเนื้อหาและความเหมาะสมด้านภาษา เมื่อผู้วิจัยดำเนินการปรับปรุงตามคำแนะนำแล้ว จึงนำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนไปทดลองกับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ผลการวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัด ดังนี้

2.2.1 แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนมีค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.78 ค่าความยาก (p) เท่ากับ 0.22 – 30 และค่าอำนาจจำแนก (r) เท่ากับ 0.22 – 0.34

2.2.2 แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน มีค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.80 ค่าความยาก (p) เท่ากับ 0.33 – 0.41 และค่าอำนาจจำแนก (r) เท่ากับ 0.20 – 0.42

2.3 แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้สร้างแบบสังเกตพฤติกรรมเพื่อสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการสังเกตภาพรวมของพฤติกรรมต่าง ๆที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน โดยเป็นแบบสังเกตแบบตรวจสอบรายการที่มีการระบุของการเกิดพฤติกรรมต่าง ๆ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของกลุ่มตัวอย่างทั้งสองกลุ่มด้วยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน และแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน แล้วดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นสำหรับนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ซึ่งกลุ่มทดลองใช้แผนการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด และกลุ่มควบคุมใช้แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติใช้เวลาสอนสัปดาห์ละ 3 คาบ เป็นเวลา 4 สัปดาห์ รวม 12 คาบ เมื่อดำเนินการสอนครบตามแผนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่กำหนดแล้ว ผู้วิจัยวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง พื้นที่ผิวและ

ปริมาตร จำนวน 4 ข้อ เวลา 50 นาที และแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียน เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตร จำนวน 4 ข้อ เวลา 50 นาที

หลังจากนั้นทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อสรุปผลการวิจัย โดยนำคะแนนที่ได้จากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองโดยใช้ค่าที (t – Paired Sample Test) จากนั้นนำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยใช้ค่าที (t-Independent Samples Test)

จากนั้นนำคะแนนที่ได้จากการทำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองโดยใช้ค่าที (t – Paired Sample Test) แล้วนำคะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยใช้ค่าที (t-Independent Samples Test)

จากนั้นนำร่องรอยจากการตรวจแบบทดสอบและใบกิจกรรม การตอบคำถามในชั้นเรียน และแบบสังเกตพฤติกรรมมาศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

สรุปผลการวิจัย

การวิจัย เรื่อง ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น สรุปผลการวิจัย ดังนี้

1. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
3. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
4. นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
5. ความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีพัฒนาการดีขึ้น

อภิปรายผลการวิจัย

การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ผู้วิจัยนำเสนอการอภิปรายผลการวิจัยเป็น 3 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

จากผลวิจัยพบว่า นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ผู้วิจัยตั้งไว้ในข้อที่ 1 และข้อ 2 ตามลำดับ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่ผู้วิจัยใช้เป็นกรอบในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในแต่ละขั้นมีส่วนช่วยพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังรายละเอียดดังนี้ *ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้ทำความเข้าใจปัญหาด้วยการวิเคราะห์เพื่อแยกแยะและแปลความในประเด็นที่เกี่ยวกับบริบทของปัญหา ข้อมูลทางคณิตศาสตร์ การดำเนินการในปัญหาและเงื่อนไขหรือข้อจำกัดแล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ *ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้ใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น *ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้นำตัวแทนทางความคิดที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลร่วมกันเพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และ *ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้ดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากขั้นที่ 3 ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้น โดยครูกระตุ้นให้นักเรียนสรุปคำตอบของปัญหาด้วยการพิจารณาความสมเหตุสมผลและความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา นอกจากนี้ในแต่ละขั้นของกิจกรรมการเรียนรู้นี้ ครูจะคอยประเมินความเข้าใจของนักเรียนแล้วใช้ผลการประเมินดังกล่าวในการชี้แนะนักเรียนบนฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนจนนักเรียนสามารถวิเคราะห์แยะแยะข้อมูล ใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหา เลือกหรือสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์หาข้อสรุปของปัญหา และพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้อง

จากข้อมูลข้างต้นจะเห็นว่า นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดได้ใช้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในทุกขั้นตอนของกิจกรรม กล่าวคือ นักเรียนได้หาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเพื่อทำความเข้าใจปัญหาด้วยเทคนิคที่หลากหลาย

เช่น การวาดรูปประกอบหรือการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น สอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ Malloy (1999) กล่าวโดยสรุปว่า แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาเสนอให้ใช้แนวทางในการสืบสอบเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการตรวจสอบ และเชื่อมโยงความรู้มโนทัศน์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง และสอดคล้องกับ Fennell and Rowan (2001) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนทางความคิดในการอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ให้มีความชัดเจนและเพื่อทำความเข้าใจ มีส่วนส่วนช่วยส่งเสริมความคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อเพิ่มความเข้าใจของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น เมื่อนักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของข้อมูลได้แล้ว นักเรียนจะใช้ความสัมพันธ์นั้นร่วมกับข้อมูลจากปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาและความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อหาข้อสรุปของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา สอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ Guilford and Hoepfner (1971) กล่าวโดยสรุปว่า การพัฒนาบุคคลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลนั้นต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกการคิดอย่างมีเหตุผล ควรมีการฝึกความสามารถในการให้เหตุผลควบคู่กับวิชา และสถานการณ์อื่นๆ และสอดคล้องกับ Krulik and Rudnick (1993) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการคิดหาข้อสรุปจากการสังเกต และการคาดเดาจากข้อมูลที่กำหนดให้ เพื่อนำมาสร้างข้อความคาดการณ์และผู้เรียนต้องสามารถที่จะอธิบายและแสดงเหตุผลเกี่ยวกับข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น ซึ่งข้อสรุปข้างต้นนั้นก็จะมีความเกี่ยวข้องกับการสร้างความรู้ใหม่ต่อไป จากนั้นนักเรียนพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้ โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล นอกจากนี้ในแต่ละขั้นของกิจกรรมการเรียนรู้ครูมีการประเมินความรู้ความเข้าใจของนักเรียนอย่างต่อเนื่องแล้วกระตุ้นด้วยการชี้แนะให้นักเรียนสามารถดำเนินการหาคำตอบได้ด้วยตนเอง สอดคล้องกับ National Council of Teachers of Mathematics (2000) กล่าวโดยสรุปว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์เป็นการแสดงวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการพัฒนาและแสดงข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับปรากฏการณ์ที่หลากหลาย คนที่มีเหตุผลและคิดวิเคราะห์มีแนวโน้มที่จะสังเกตรูปแบบโครงสร้างหรือความสม่ำเสมอในสถานการณ์จริงและวัตถุสัญลักษณ์ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการอย่างเป็นทางการในการแสดงเหตุผล และสอดคล้องกับ ทิศนา เขมมณี (2551) ได้กล่าวว่า การคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผล เป็นการคิดที่มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริงและพิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัย และอุปนัย ซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อยๆ ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ นักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจึงมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับงานวิจัยที่มีแนวคิดใกล้เคียงของ Fauzan (2002) ได้ศึกษาการจัดการเรียนการสอนในชั้นประถมศึกษาเกี่ยวกับกับการประยุกต์ใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ในการสอนเรขาคณิตในประเทศอินโดนิเซีย จากการศึกษาพบว่า เมื่อนักเรียนได้รับสถานการณ์ปัญหาตามบริบทที่ครูกำหนด นักเรียนเริ่มคิดแก้ปัญหาโดยเริ่มจากการใช้แบบจำลองหรือตัวแทนทางความคิดในรูปแบบของตนเอง เมื่อครูให้สถานการณ์ปัญหาที่ 3 – 4 กับนักเรียน สังเกตพบว่า ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหานักเรียนซักถามครูน้อยลง นอกจากนี้หลังการจัดการเรียนการสอน นักเรียนสามารถให้เหตุผลและเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น สอดคล้องกับ Hendricks (2013) ได้ศึกษาผลการใช้แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดในการจัดการเรียนรู้ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่สอนโดยใช้แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม รวมทั้งสามารถพัฒนาความเข้าใจในคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่า การสอนตามแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีส่วนช่วยในสร้างบรรยากาศในการเรียนการสอนซึ่งมีผลดีต่อนักเรียน ทำให้บรรยากาศในการจัดการเรียนรู้เปลี่ยนแปลงในเชิงบวก และสอดคล้องกับ Lee and Chen (2015) ได้ศึกษาผลของการใช้การสอนการถามแบบโพลยาสำหรับการให้เหตุผลทางเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เป็นการวิจัยที่ใช้วิธีการการแก้ปัญหาของโพลยา 4 ขั้นตอน ร่วมกับการใช้คำถามกระตุ้นและการสาธิต ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการสอนการถามแบบโพลยามีความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตและความรู้สึกทางเรขาคณิตที่ชัดเจนสูงกว่ากลุ่มควบคุม

และงานวิจัยของ เทพสุดา เกตุทอง (2551) ที่ได้ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน จังหวัดลพบุรี พบว่านักเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุม และงานวิจัยของ สาวิตรี มูลสุวรรณ (2557) ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการศึกษาพบว่านักเรียนเรียนกลุ่มทดลองมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

ดังนั้นจากที่กล่าวมาข้างต้นนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจึงมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ตอนที่ 2 ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

จากผลวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีคะแนนความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ผู้วิจัยตั้งไว้ในข้อที่ 3 และข้อ 4 ตามลำดับ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่ผู้วิจัยใช้เป็นกรอบในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในแต่ละขั้นมีส่วนช่วยพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ดังรายละเอียดดังนี้ *ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้ทำแยกแยะและแปลความในประเด็นที่ต่างๆ ที่จำเป็นแล้วหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลต่างๆ จากนั้น*ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้ใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น นำไปสู่*ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้นำตัวแทนทางความคิดที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 2 กับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาประมวลผลร่วมกันเพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และ*ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing)* เป็นขั้นที่นักเรียนได้ดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้จากขั้นที่ 3 ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้น รวมถึงให้นักเรียนพิจารณาการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ในแต่ละขั้นของกิจกรรมการเรียนรู้นี้ ครูจะคอยประเมินความเข้าใจของนักเรียนแล้วใช้ผลการประเมินดังกล่าวในการชี้แนะนักเรียนบนฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนจนนักเรียนสามารถวิเคราะห์แยะแยะข้อมูล ใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหา เลือกหรือสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ หาข้อสรุปของปัญหา และพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา รวมถึงสามารถขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกันได้ถูกต้อง

จากที่กล่าวมานักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดได้ใช้การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ในทุกขั้นตอนของกิจกรรม กล่าวคือนักเรียนได้มีการทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาด้วยเทคนิคที่หลากหลายเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล จากนั้นระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาแล้วเลือกหรือใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับสถานการณ์ปัญหา สอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของ Sawyer (2008) โดยสรุปไว้ว่าการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในหลากหลายสาขาวิชาเข้าด้วยกัน หรือระหว่างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และประสบการณ์ที่เกิดขึ้นในชีวิตจริง นำไปสู่ความเข้าใจแนวคิดทาง

คณิตศาสตร์และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในบริบทต่าง ๆ นอกเหนือไปจากวิชาคณิตศาสตร์ได้ และสอดคล้องกับ National Council of Teachers of Mathematics (2000) กล่าวโดยสรุปดังนี้ รูปแบบการเรียนการสอนตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ควรทำให้นักเรียนทุกคนสามารถรับรู้และใช้การเชื่อมโยงระหว่างความคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความคิดทางคณิตศาสตร์นั้นจะต้องสร้างความเชื่อมโยงกันเพื่อสร้างความสอดคล้องกันระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด รู้จักและประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในบริบทนอกคณิตศาสตร์ จากนั้นนำไปสู่การกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาด้วยการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา จากนั้นครูใช้การชี้แนะนักเรียนเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายเพื่อหาแนวทางการแก้ปัญหาที่เหมาะสม สอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของ Marchisotto (1993) กล่าวว่า การสอนให้นักเรียนเห็นว่าแนวคิดทางคณิตศาสตร์มักมีความเกี่ยวข้องซึ่งกัน และการช่วยให้นักเรียนเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างกันในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และเพิ่มพูนประสบการณ์การสร้างความเชื่อมโยงให้นักเรียน นำไปสู่การสร้างบรรยากาศในการเรียนการสอนให้นักเรียนมีความสนใจที่จะใช้ทักษะการเชื่องโยงทางคณิตศาสตร์ต่อไป และสอดคล้องกับ Eli et al. (2011) กล่าวถึง การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์สามารถเรียกได้ว่าเป็นการเชื่อมโยง (หรือสะพาน) ของความรู้ก่อนหน้าหรือความรู้ใหม่ ๆ ใช้ในการสร้างหรือเสริมสร้างความเข้าใจความสัมพันธ์ระหวางแนวความคิดทางคณิตศาสตรหรือใช้แทนตัวแทนทางความคิด จากนั้นขยายแนวทางการแก้ปัญหานั้นไปสู่การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม สอดคล้องกับ Ontario (2007) กล่าวว่า การสร้างความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรียนมากับการนำไปใช้ในชีวิตจริงมีส่วนสำคัญที่ช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจถึงประโยชน์และความจำเป็นของคณิตศาสตร์นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียน และสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวว่าการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สะท้อนให้เห็นถึงการใช้งานของคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงที่สามารถพบเห็นได้ทั่วไป การเชื่อมโยงมีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย (Meaningful learning) ด้วยเหตุผลดังกล่าวนี้ นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจึงมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับงานวิจัยที่มีแนวคิดใกล้เคียงของ Dean (2008) ได้ทำงานวิจัยเกี่ยวกับการทดลองใช้กิจกรรมที่มีความแปลกใหม่เพื่อการเสริมสร้างความสามารถในการเชื่องโยงทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการยกมือตอบคำถาม การเขียนบรรยาย และการสื่อสารด้วยคำพูดกับเพื่อนร่วมชั้นเรียน เพื่อนักเรียนใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์แบบใหม่ ๆ ร่วมกับความรู้เดิมหรือประยุกต์กับ

ประสบการณ์ที่พบเจอในชีวิตประจำวัน พบว่าการใช้กิจกรรมที่แปลกใหม่ไปจากเดิมเหล่านี้นำไปสู่การเพิ่มความสามารถในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันของนักเรียน อีกทั้งยังเป็นการพัฒนาทักษะการตีความ อธิบายและการใช้ภาษาของผู้เรียนด้วย และสอดคล้องกับ Downton and Sullivan (2017) ศึกษาการตั้งปัญหาที่ซับซ้อนโดยใช้การคิดแบบทวีคูณกระตุ้นให้นักเรียนใช้กลยุทธ์ที่ซับซ้อนและสร้างการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า การตั้งปัญหาที่ซับซ้อนอย่างเหมาะสมจะกระตุ้นการใช้กลยุทธ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งสังเกตเห็นได้จากการทำแบบทดสอบหรืองานที่ได้รับมอบหมายของนักเรียนทำให้เกิดการคิดแบบทวีคูณ และพบว่างานที่เกี่ยวข้องกับจำนวนที่ซับซ้อนทำให้เกิดการใช้ความคิดเชิงทวีคูณที่มีความซับซ้อนมากขึ้น และสอดคล้องกับ สุธารัตน์ สมรรถการ (2556) ที่ได้ศึกษาผลการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 พบว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 หลังการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) สูงกว่าก่อนได้รับการจัดการเรียนรู้ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ เชิดพงศ์ ชาชุมวงศ์ (2557) ศึกษาการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และความใฝ่รู้ใฝ่เรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ปัญหาเป็นฐานร่วมกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์สูงมีทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ปานกลางและต่ำอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ปานกลางมีทักษะการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ สูงกว่านักเรียนที่มีทักษะการคิดวิเคราะห์ต่ำ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และสอดคล้องกับงานวิจัยของ เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร (2556) ที่ได้ศึกษาการให้เหตุผลเชิงสถิติและการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปสู่ชีวิตจริงโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการใช้คำถามระดับสูงสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปสู่ชีวิตจริงหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

ดังนั้นจากที่กล่าวมาข้างต้นนักเรียนกลุ่มที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดจึงมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ตอนที่ 3 พัฒนาการของการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีพัฒนาการดีขึ้น โดยนำเสนอการอภิปรายเป็นรายด้าน ดังนี้

ด้านการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ระยะก่อนเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย ในระยะระหว่างเรียน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด นักเรียนจะได้ฝึกการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล และใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น นอกจากนี้ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครูจะประเมินอย่างต่อเนื่องแล้วใช้การชี้แนะให้นักเรียนสามารถถอดรหัสและใช้ตัวแทนได้ด้วยตนเองอย่างต่อเนื่อง พบว่าพัฒนาการด้านนี้ของนักเรียนสามารถทำได้ดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัดในช่วงสัปดาห์ที่ 3 โดยสังเกตได้จากร่องรอยในใบกิจกรรมและการตอบคำถามในชั้นเรียน เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง จึงอาจจะมีส่วนช่วยพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ จนกระทั่งในระยะหลังเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ถูกต้องและชัดเจนขึ้น

ด้านการหาข้อสรุปของปัญหา ระยะก่อนเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถหาข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย ในระยะระหว่างเรียน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด นักเรียนได้ฝึกการประมวลความรู้ความเข้าใจพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้สัมพันธ์กับปัญหารวมถึงการกำหนดวิธีการหรือแนวทางในการแก้ปัญหา และนักเรียนได้ดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ครูจะมีการประเมินความรู้ความเข้าใจของนักเรียนอย่างต่อเนื่องแล้วนำไปชี้แนะนักเรียนเพื่อให้นักเรียนสามารถใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ร่วมกับการกำหนดแนวทางการหาคำตอบซึ่งนำไปสู่การหาข้อสรุปได้ด้วยตนเอง พบว่าในสัปดาห์แรกนักเรียนหาข้อสรุปของปัญหาถูกต้องเพียงเล็กน้อย แต่เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่องพัฒนาการด้านนี้ดีขึ้นชัดเจนในช่วงต้นสัปดาห์ที่ 3 จนกระทั่งในระยะหลังเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถหาข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้องและชัดเจนและสามารถอธิบายแนวคิดสนับสนุนข้อสรุปได้อย่างถูกต้อง

ด้านการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา ระยะก่อนเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย

เท่านั้น ในระยะระหว่างเรียน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด นักเรียนได้ฝึกการดำเนินการหาคำตอบโดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ร่วมกับเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่มีความเฉพาะกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และการพิจารณาความสมเหตุสมผลและความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา พบว่าในสัปดาห์แรกนั้นนักเรียนส่วนมากไม่พิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาเลย ครูจึงใช้การชี้แนะเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้ด้วยตนเองเมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่องพัฒนาการด้านนี้ดีขึ้นอย่างค่อยเป็นค่อยไปและมีพัฒนาการที่ชัดเจนขึ้นในสัปดาห์ที่ 4 จนกระทั่งในระยะหลังเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหาโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สนับสนุนและคัดค้านข้อสรุปได้อย่างสมเหตุสมผลได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่

ดังนั้นหากพิจารณาพัฒนาการความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อนักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดอย่างต่อเนื่องแล้ว นักเรียนส่วนใหญ่มีพัฒนาการการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้นซึ่งสังเกตได้จากการตอบคำถามและร่องรอยในใบกิจกรรม กล่าวคือ นักเรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลได้ดีขึ้น รวมถึงในขั้นตอนของการหาข้อสรุปของปัญหา นักเรียนมีความตระหนักรู้ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา ให้สอดคล้องกับสถานการณ์ได้ดีขึ้น ด้วยลักษณะพฤติกรรมของนักเรียนที่กล่าวมาสื่อให้เห็นว่านักเรียนได้รับการพัฒนาและใช้ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง สอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของ Malloy (1999) กล่าวโดยสรุปว่า แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาเสนอให้ใช้แนวทางในการสืบสอบเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการตรวจสอบ และเชื่อมโยงความรู้ มโนทัศน์ต่างๆที่เกี่ยวข้อง และสอดคล้องกับ Fennell and Rowan (2001) กล่าวว่า การใช้ตัวแทนทางความคิดในการอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ให้มีความชัดเจนและเพื่อทำความเข้าใจ มีส่วนส่วนช่วยส่งเสริมความคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อเพิ่มความเข้าใจของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น และสอดคล้องกับ National Council of Teachers of Mathematics (2000) ได้กล่าวว่า การพัฒนาการให้เหตุผลของนักเรียน ครูควรทำอย่างสม่ำเสมอ จัดบรรยากาศในการเรียนคณิตศาสตร์เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล อีกทั้งตรวจสอบพัฒนาการของการให้เหตุผลของนักเรียนอย่างสม่ำเสมอ สนับสนุนการอภิปรายการให้เหตุผลของนักเรียนและครูและสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวถึงความสามารถในการให้เหตุผลทาง

คณิตศาสตร์มีหลากหลายที่สำคัญดัง เช่น การหาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การใช้ความรู้และข้อมูลในสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ และในการอธิบายความคิดของตนเอง เป็นต้น

ผลการศึกษาพัฒนาการของความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดมีพัฒนาการดีขึ้น โดยนำเสนอการอภิปรายเป็นรายด้าน ดังนี้

ด้านการระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา ระยะก่อนเรียน นักเรียนส่วนมากสามารถหาระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย ในระยะระหว่างเรียน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด นักเรียนได้ฝึกการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล และใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลหรือเงื่อนไขในปัญหาเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ชัดเจนขึ้น จากนั้นมีการประมวลผลข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์เพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีความเหมาะสมกับปัญหา ในระหว่างกิจกรรมการเรียนรู้ผู้สอนจะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดและระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหาอยู่เสมอ พบว่า เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่องพัฒนาการด้านนี้นักเรียนสามารถทำได้ดีขึ้นอย่างเห็นได้ชัดในช่วงต้นสัปดาห์ที่ 3 ซึ่งสังเกตได้จากการตอบคำถามในชั้นเรียน และมีข้อสังเกตว่าในระยะหลังสัปดาห์ที่ 3 จนถึงระยะสัปดาห์ที่ 4 นักเรียนกลุ่มเก่งจะไม่ได้มีการระบุสูตรหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์ แต่ใช้การแทนค่าตามสูตรหรือตัวแบบทางคณิตศาสตร์เลยได้ถูกต้อง จนกระทั่งในระยะหลังเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่

ด้านการระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหา ระยะก่อนเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถหาข้อสรุปของปัญหาได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อย ในระยะระหว่างเรียน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดนักเรียนได้ฝึกการประมวลผลข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์เพื่อสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์กับปัญหารวมถึงการกำหนดวิธีการหรือแนวทางในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ครูจะใช้แนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดกระตุ้นให้นักเรียนเชื่อมโยงทั้งความรู้และทักษะการแก้ปัญหาเพื่อให้นักเรียนสามารถกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง พบว่า ในสัปดาห์แรกนักเรียนส่วนมากระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการแก้ปัญหาได้ยังไม่ชัดเจน เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่อง นักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้นชัดเจนในช่วงต้นสัปดาห์ที่ 4 ซึ่งสังเกตได้จากการตอบคำถามของนักเรียนในชั้นเรียน

จนกระทั่งในระยะหลังเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่

ด้านการระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์เดิม ระยะก่อนเรียน พบว่านักเรียนส่วนมากสามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมได้ถูกต้องเพียงเล็กน้อยเท่านั้น มีข้อสังเกตว่านักเรียนร้อยละ 15 ไม่สามารถทำคะแนนด้านนี้ได้ ในระยะระหว่างเรียน เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดนักเรียนได้ฝึกการดำเนินการหาคำตอบและการพิจารณาความสมเหตุสมผลที่มีความสอดคล้องของคำตอบกับเงื่อนไขในปัญหา รวมถึงการขยายแนวทางการแก้ปัญหาเดิมไปสู่สถานการณ์ปัญหาใหม่ที่ใกล้เคียงกัน นอกจากนี้ครูจะใช้การกระตุ้นเพื่อชี้แนะด้วยเทคนิคที่หลากหลายด้วยการร่วมกันอภิปรายเพื่อขยายแนวคิดในการแก้ปัญหาไปยังสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริงได้ด้วยตนเอง พบว่าในช่วงสัปดาห์แรกนักเรียนมีพัฒนาการด้านนี้ยังไม่ดีเท่าที่ควร เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนข้างต้นอย่างต่อเนื่องพัฒนาการด้านนี้ดีขึ้นอย่างค่อยเป็นค่อยไปและมีพัฒนาการที่ชัดเจนขึ้นในสัปดาห์ที่ 4 ซึ่งสังเกตเห็นจากการตอบคำถามของนักเรียนในชั้นเรียน แต่มีข้อสังเกตว่าความสามารถด้านนี้นั้นมีนักเรียนจำนวนหนึ่งที่ยังไม่สามารถยกตัวอย่างเพื่อเชื่อมโยงไปสู่ชีวิตจริงได้ ครูจำเป็นต้องมีการชี้แนะอยู่เกือบทุกครั้ง ทั้งนี้อาจจะเนื่องจากประสบการณ์ชีวิตของนักเรียนแต่ละคนแตกต่างกัน จนกระทั่งในระยะหลังเรียนพบว่านักเรียนส่วนมากสามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิมได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่

ดังนั้นหากพิจารณาพัฒนาการความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น เมื่อนักเรียนได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดอย่างต่อเนื่องแล้ว นักเรียนส่วนมากสามารถระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นในสถานการณ์ปัญหาได้สมบูรณ์ขึ้น และสามารถอธิบายขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้ชัดเจนขึ้น รวมถึงสามารถระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาได้ดีขึ้นเมื่อเทียบกับก่อนเรียน ด้วยลักษณะพฤติกรรมของนักเรียนที่กล่าวมาสื่อให้เห็นว่านักเรียนได้รับการพัฒนาและใช้ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง สอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของ Marchisotto (1993) กล่าวว่า การสอนให้นักเรียนเห็นว่าแนวคิดทางคณิตศาสตร์มักมีความเกี่ยวข้องซึ่งกัน และการช่วยให้นักเรียนเข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างกันในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์และเพิ่มพูนประสบการณ์การสร้างความเชื่อมโยงให้นักเรียน นำไปสู่การสร้างบรรยากาศในการเรียนการสอนให้นักเรียนมีความสนใจที่จะใช้ทักษะการเชื่องโยงทางคณิตศาสตร์ต่อไป และสอดคล้องกับ Eli et al. (2011) กล่าวถึง

การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์สามารถเรียกได้ว่าเป็นการเชื่อมโยง (หรือสะพาน) ของความรู้ก่อนหน้าหรือความรู้ใหม่ ๆ ใช้ในการสร้างหรือเสริมสร้างความเข้าใจความสัมพันธ์ระหวางแนวความคิดทางคณิตศาสตรหรือใช้แทนตัวแทนทางความคิด และสอดคล้องกับที่ Baki et al. (2009) กล่าวว่า ความสามารถในการเชื่อมโยงมีความสำคัญกับการเรียนรู้ของนักเรียนกล่าวคือเป็นความสามารถของนักเรียนในการเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์กับความรู้ที่เกิดขึ้นทั้งในโรงเรียนและนอกโรงเรียน และสอดล้องกับ Kennedy et al. (2007) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญ นักเรียนจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่เป็นรูปธรรม ได้แก่ รูปภาพ แผนภาพ สัญลักษณ์ กับกระบวนการ เนื้อหาและวิธีการต่างๆทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกันและจะต้องรู้จักสร้างการเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง และสอดคล้องกับ Ontario (2007) กล่าวว่า การสร้างความสามารถในการเชื่อมโยงระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรียนมากับการนำไปใช้ในชีวิตจริงมีส่วนสำคัญที่ช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจถึงประโยชน์และความจำเป็นของคณิตศาสตร์นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียน และสอดคล้องกับ อัมพร ม้าคนอง (2554) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สะท้อนให้เห็นถึงการใช้งานของคณิตศาสตร์ในชีวิตจริงที่สามารถพบเห็นได้ทั่วไป การเชื่อมโยงมีความสำคัญและจำเป็นสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย (Meaningful learning)

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยใช้

1. การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดนั้นเน้นการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ดังนั้นครูควรมีเข้าใจว่าตัวแทนทางความคิดที่นักเรียนแต่ละคนใช้แทนข้อมูลหรือเงื่อนไขนั้นมีความหลากหลายอาจจะแตกต่างกันได้ ซึ่งครูจะต้องคอยประเมินดูว่าตัวแทนทางความคิดที่นักเรียนสร้างนั้นสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ถูกต้องหรือไม่และครูใช้ข้อมูลการประเมินดังกล่าวชี้แนะนักเรียน ในขณะที่สอนครูจะต้องตระหนักว่าตัวแทนทางความคิดนั้นมีความสำคัญมากเป็นเสมือนสะพานเชื่อมที่จะทำให้นักเรียนสามารถสร้างหรือเลือกใช้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์กับปัญหาได้อย่างถูกต้อง

2. การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดนั้นเน้นให้นักเรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ดังนั้นในกิจกรรมการเรียนรู้ครูจะต้องให้นักเรียนได้พิจารณาสถานการณ์ปัญหาด้วยตนเองก่อนเสมอ ในขณะเดียวกันครูจะต้องคอยประเมินความเข้าใจนักเรียน หากพบว่านักเรียนไม่สามารถทำได้ครูจึงชี้แนะนักเรียนบนฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนซึ่งช่วงเวลากระตุ้นหรือชี้แนะในแต่ละห้องเรียนอาจจะไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน เพราะ

ระดับความสามารถและบริบทของนักเรียนแตกต่างกัน สิ่งสำคัญคือครูต้องใช้ความเข้าใจของนักเรียนเป็นฐานในการชี้แนะให้มากที่สุด

3. การใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด ในการวิจัยครั้งนี้ใช้กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนโรงเรียนสาธิตในสังกัดมหาวิทยาลัยรัฐ/มหาวิทยาลัยในกำกับของรัฐ เขตกรุงเทพมหานคร หากนำไปใช้กับกลุ่มเป้าหมายอื่น ๆ ครูควรปรับปรุงการนำไปใช้ให้สอดคล้องและเหมาะสมกับบริบทของนักเรียนด้วย

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดในเนื้อหาอื่นๆ หรือในระดับอื่นๆ

2. ควรมีการศึกษาผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดในโรงเรียนอื่น ๆ ที่ไม่ใช่โรงเรียนกลุ่มสาธิต เช่น โรงเรียนกลุ่มสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน เป็นต้น

3. ควรมีการศึกษาผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์อื่นๆ ซึ่งเป็นทักษะที่สำคัญ เช่น ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอ เป็นต้น

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจเครื่องมือ

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจเครื่องมือ

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุวรรณา ทิมสถิตย์	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม
2. อาจารย์ ดร.กุลนิดา ปลื้มปิติวิริยะเวช	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม
3. อาจารย์พีชาณิกา เพชรสังข์	อาจารย์สังกัดคณะครุศาสตร์ สาขาวิชาพื้นฐานการศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี

แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุวรรณา ทิมสถิตย์	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม
2. อาจารย์สาวิตรี มูลสุวรรณ	อาจารย์ประจำหลักสูตรคณิตศาสตร์ สาขาวิชาคณิตศาตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยสวนดุสิต
3. อาจารย์ว่าที่ร้อยตรี ไพรัช เจริญตรีเพชร	อาจารย์กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ฝ่ายมัธยม

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างหนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ โทร. 82565-97 ต่อ 6732
ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60-**4200** **วันที่** 18 สิงหาคม 2560
เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุวรรณา ทิมสถิตย์

ด้วย นายวีรพล เทพบรรหาร นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น" โดยมี อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี

เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย : 087 – 696 – 0630 Email : Ajnoom_tep@hotmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60-4193

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

๒1 สิงหาคม 2560

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์ว่าที่ร้อยตรี ไพรัช เจริญตรีเพชร

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายวีรพล เทพบรรหาร นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น" โดยมี อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัยทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย : 087 – 696 – 0630 Email : Ajnoom_tep@hotmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60-4195

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

21 สิงหาคม 2560

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์สาวิตรี มูลสุวรรณ

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายวีรพล เทพบรรหาร นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น" โดยมี อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย : 087 – 696 – 0630 Email : Ajnoom_tep@hotmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60-4132

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

21 สิงหาคม 2560

เรื่อง ขอเชิญบุคลากรในสังกัดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ฝ่ายมัธยม

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายวีรพล เทพบรรหาร นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น" โดยมี อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญ อาจารย์ว่าที่ร้อยตรี ไพรัช เจริญตรีเพชร เป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้ อาจารย์ว่าที่ร้อยตรี ไพรัช เจริญตรีเพชร เป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย : 087 – 696 – 0630 Email : Ajnoom_tep@hotmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.10)/60- **4202**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

21 สิงหาคม 2560

เรื่อง ขอความร่วมมือในการทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ฝ่ายมัธยม

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายวีรพล เทพบรรหาร นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์ เรื่อง "ผลการใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น" โดยมี อาจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

งานหลักสูตรและการจัดการเรียนการสอน ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย : 087 – 696 – 0630 Email : Ajnoom_tep@hotmail.com

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

แผนการจัดการเรียนรู้

วิชา : คณิตศาสตร์พื้นฐาน (ค 33103) ระดับชั้น : มัธยมศึกษาปีที่ 3

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 : พื้นที่ผิวและปริมาตร เรื่อง : พื้นที่ผิวของทรงกระบอก

ผู้สอน : นายวีรพล เทพบรรหาร

สาระที่ 2 : การวัด , สาระที่ 3 : เรขาคณิต และสาระที่ 6 : ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค 2.1 : เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด

ค 2.1 ม. 3/1 : หาพื้นที่ผิวของปริซึมและทรงกระบอก

ค 2.1 ม. 3/2 : หาปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม

มาตรฐาน ค 2.2 : แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัด

ค 2.2 ม. 3/1 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ พื้นที่ผิว และปริมาตรในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

ค 3.1 ม. 3/1 : อธิบายลักษณะและสมบัติของปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวยและทรงกลม

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

สาระสำคัญ

พื้นที่ผิวของปริซึมของทรงกระบอก

1. พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก = $2\pi rh$
2. พื้นที่ผิวของทรงกระบอก = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่หน้าตัดหัวท้าย

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้: นักเรียนสามารถ

1. บอกสูตรการหาพื้นที่ผิวข้างและพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกได้
2. คำนวณหาพื้นที่ผิวข้างและพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ: นักเรียนสามารถ

1. สื่อสารและนำเสนอความคิดเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอกได้
2. เชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอกกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันได้

ด้านคุณลักษณะ: นักเรียน

1. มีความกระตือรือร้นและมีส่วนร่วมในชั้นเรียน
2. มีความรับผิดชอบ และความตรงต่อเวลา

<u>สาระการเรียนรู้</u>

พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก = $2\pi rh$ ตารางหน่วย

พื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอก = พื้นที่หน้าตัดหัวท้าย + พื้นที่ผิวข้าง

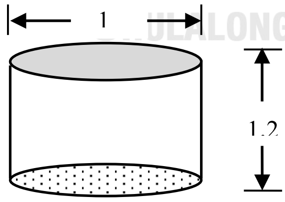
= $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ตารางหน่วย

หรือ = $2\pi r(r+h)$ ตารางหน่วย

เมื่อ r = รัศมี และ h = ส่วนสูงของกระบอก

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> "โคมลอย" ถือเป็นบอลลูนลมร้อนขนาดเล็กอย่างหนึ่ง โดยทั่วไปจะทำจากไม้ไผ่ตั้งเป็นโครงติดกระดาษสาทาน้ำมันข้างใน ใส่เทียนหรือเชื้อเพลิงแล้วจุดไฟ ความร้อนจะก่ออากาศภายในโคม ซึ่งจะทำให้โคมสามารถลอยขึ้นได้ เมื่อไฟดับโคมนั้นก็จะตกลงสู่พื้นโลกดังเดิม นายหนานคำมีอาชีพรับจ้างทำโคมลอยซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกระบอกฐานเปิดหนึ่งด้านเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 เมตรและความสูงของโคมลอยแต่ละลูกสูงมากกว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ 20 เซนติเมตร จำนวน 100 ลูก นายหนานคำจะต้องเตรียมกระดาษอย่างน้อยกี่ตารางเมตร เมื่อกำหนดให้ $\pi \approx 3.14$

<u>วิธีทำ</u> - วาดรูปประกอบคร่าวๆ



- พื้นที่ผิวของโคมลอย $= 2\pi rh + \pi r^2$

$= (2\times 3.14\times 0.5\times 1.2)+(3.14\times 0.5^2)$

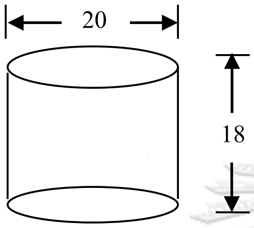
= 3.768 + 0.785

= 4.553 ตร.ม.

เนื่องจากโคมลอย 100 ลูก จะได้พื้นที่ผิวของโคมลอยทั้งหมดเท่ากับ 4.533×100 = 455.3 $\approx$456 ตร.ม. ดังนั้น หนานคำจะต้องเตรียมกระดาษอย่างน้อย 456 ตร.ม.

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ในการผลิตผลไม้กระป๋องชนิดหนึ่งผู้ผลิตจำเป็นต้องผลิตกระป๋องโดยใช้โลหะ เพื่อให้เสียต้นทุนในการผลิตกระป๋องน้อยที่สุดจำเป็นต้องมีการวางแผนการผลิต ถ้าบริษัทผลิตน้ำผลไม้แห่งหนึ่งมีโลหะแผ่นหนึ่งพื้นที่ 20 ตารางเมตร แล้วอยากทราบว่าจะสามารถผลิตกระป๋องใบหนึ่งมีปากกระป๋องกว้าง 20 เซนติเมตร สูง 18 เซนติเมตร ได้มากที่สุดกี่กระป๋อง (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

<u>วิธีทำ</u> - วาดรูปประกอบคร่าวๆ



- ความกว้างปากกระป๋องเท่ากับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางหน้าตัด

หน้าตัดหรือฐานกระป๋องมีรัศมียาว $\frac{20}{2} = 10$ เซนติเมตร

และกระป๋องสูง 18 เซนติเมตร

ดังนั้น พื้นที่ผิวกระป๋อง $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times (10 + 18)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 28$

$= 1,760$ ตารางเซนติเมตร

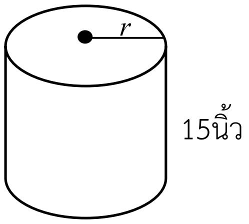
- จากโจทย์มีโลหะแผ่นหนึ่งพื้นที่ 20 ตารางเมตร คิดเป็น 20×10^4 ตารางเซนติเมตร

จะได้ว่า สามารถผลิตกระป๋องลักษณะดังกล่าว ได้เท่ากับ $\frac{20 \times 10^4}{1760} \approx 113.63$ กระป๋อง

ดังนั้น โลหะแผ่นนี้จะสามารถผลิตกระป๋องได้อย่างมากที่สุดเท่ากับ 113 กระป๋อง

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ถังน้ำมันทรงกระบอกใบหนึ่งทำด้วยเหล็ก สูง 15 นิ้ว ใช้เหล็กทำทั้งสิ้น (รวมฝา) เป็นพื้นที่ 968 ตารางนิ้ว แล้วจงหาพื้นที่ผิวข้างของถังน้ำมันนี้ (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

<u>วิธีทำ</u> - วาดรูปประกอบคร่าวๆ



- จากสูตร พื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอก $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$$= 2\pi(r^2 + rh)$$

แทนค่า จะได้

$$
\begin{aligned}
968 &= \left(2\times\frac{22}{7}\right)\left(r^2+15r\right)\\
\frac{968\times 7}{2\times 22} &= r^2+15r\\
154 &= r^2+15r\\
0 &= r^2+15r-154\\
0 &= (r+22)(r-7)\\
r &= \cancel{-22}\ , 7
\end{aligned}
$$

จะได้ว่า รัศมีของฐานของทรงกระบอก คือ 7 นิ้ว

- จากสูตร พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi rh\\
&= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 15\\
&= 660 \text{ ตารางนิ้ว}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก เท่ากับ 660 ตารางนิ้ว

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

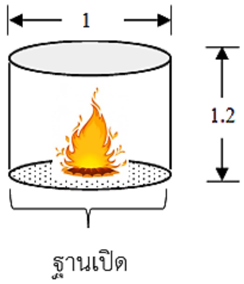
1. ครูทบทวนความรู้ที่จำเป็นในการแก้ปัญหา โดยใช้การถามตอบให้นักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับสูตรของการหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอก จนได้ว่า
   - พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก $= 2\pi rh$
   - พื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอก = พื้นที่หน้าตัดหัวท้าย + พื้นที่ผิวข้าง $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$ หรือ $= 2\pi r(r+h)$

   เมื่อ r = รัศมี และ h = ส่วนสูงของกระบอก

ขั้นสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อแก้ปัญหาโดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวแทนทางความคิดและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับแนวคิดการสอนแนะให้รู้คิด 4 ขั้นตอน ดังนี้ 1. ครูแจกใบกิจกรรม เรื่อง พื้นที่ผิว และพื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก จากนั้นครูยกตัวอย่างที่ 1	ครูดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามคำแนะนำในคู่มือครูรายวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช

ขั้นที่ 1 การถอดรหัส (Decoding) 2. ครูให้นักเรียนทำความเข้าใจปัญหาในตัวอย่างที่ 1 จากนั้นครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนช่วยกันตีความข้อมูล และอธิบายความเข้าใจของตนเอง ดังนี้ - นักเรียนเข้าใจสถานการณ์ปัญหานี้ หรือไม่ อย่างไร และเป็นปัญหาเกี่ยวกับเรื่องใด (พื้นที่ผิวของโคมลอยซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกระบอก) - โคมลอยที่กล่าวถึงในปัญหามีลักษณะอย่างไร(เป็นทรงกระบอกฐานเปิดหนึ่งด้าน มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 เมตรและมีความสูงที่ยาวมากกว่าความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ 20 เซนติเมตร) - ถ้าทรงกระบอกเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 เมตรจะสามารถบอกรัศมีของทรงกระบอก ได้หรือไม่ (ได้ รัศมีเท่ากับ 0.5 เมตร) - ความสูงของโคมลอยแต่ละลูกสูงมากกว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ 20 เซนติเมตร หมายความว่าอย่างไร (ความสูง เท่ากับ1.2 เมตร) - ทรงกระบอกที่นักเรียนจะหาพื้นที่ผิวมีเงื่อนไขอย่างไร และปัญหานี้กำหนดเงื่อนไขอะไรเพิ่มเติมหรือไม่ (เป็นทรงกระบอกฐานเปิดหนึ่งด้าน และกำหนดค่า $\pi \approx 3.14$) - ทำไมปัญหานี้จึงต้องใช้คำว่า “ต้องใช้กระดาษ **อย่างน้อย**กี่ตารางเมตร” (เพราะว่ากระดาษบางส่วนจะต้องเสียไปรอยการติดโคมเป็นทรงกระบอก) - โคมลอยทั้ง 100 ลูกมีขนาดเท่ากันหรือไม่ แล้วจะหากระดาษทั้งหมดได้อย่างไร (เท่ากัน โดยหาแค่พื้นที่ผิวโคมลอยเพียงลูกเดียวแล้วคูณด้วย 100 ก็จะได้พื้นที่กระดาษทั้งหมด)	2551 ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมที่หลากหลาย ดังนี้ 1. ครูยกตัวอย่างที่ 1 ซึ่งเป็นตัวอย่างการพื้นที่ผิวของโคมลอย โดยครูกระตุ้นและชี้แนะนักเรียนดังนี้ - ให้นักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาและทำความเข้าใจประเด็นปัญหา - ให้นักเรียนลองจินตนาการภาพของโคมลอยที่มีพื้นที่ฐานเพียงด้านเดียว - ให้นักเรียนจำลองสถานการณ์ด้วยการวาดรูปโคมลอย - ให้นักเรียนอธิบายลักษณะและบอกส่วนประกอบ - ครูและนักเรียนร่วมกันแสดงวิธีการหาคำตอบโดยครูใช้การถามตอบประกอบการอธิบายจนได้คำตอบที่ถูกต้อง - ครูให้นักเรียนสรุปคำตอบโดยการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ 2. ครูยกตัวอย่างที่ 2 ซึ่งเป็นตัวอย่างการหาจำนวนกระป๋องเมื่อกำหนดแผ่นโลหะให้แผ่นหนึ่ง โดยครูกระตุ้นและชี้แนะนักเรียนดังนี้ - ให้นักเรียนอ่านโจทย์ปัญหาและทำความเข้าใจประเด็นปัญหา - ให้นักเรียนพิจารณาว่าความกว้างของปากกระป๋องตรงกับส่วนประกอบใดของทรงกระบอก (เส้นผ่านศูนย์กลางของหน้าตัด) - ครูถามนักเรียนว่า 1 ลูกบาศก์เมตร เท่ากับกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (10,000 ตารางเซนติเมตร)

- ครูตรวจสอบความเข้าใจนักเรียนจากการตอบคำถาม ถ้าพบว่านักเรียนยังไม่เข้าใจปัญหาในประเด็นต่างๆ ครูใช้การชี้แนะบนฐานความรู้ความเข้าใจของนักเรียนจนนักเรียนสามารถหาความสัมพันธ์และสรุปประเด็นต่างๆได้ด้วยตนเอง **ขั้นที่ 2 การใช้ตัวแทน (Representing)** 3. หลังจากที่นักเรียนทำความเข้าใจปัญหาแล้ว ครูกระตุ้นให้นักเรียนใช้ตัวแทนทางความคิดด้วยการวาดรูปเพื่อจำลองลักษณะของโคมลอยโดยให้นักเรียนวาดรูปลักษณะของโคมลอยพร้อมทั้งระบุส่วนประกอบตามข้อมูลในปัญหา ดังนี้  - ครูตรวจสอบความเข้าใจนักเรียนจากการสังเกตการใช้ตัวแทนทางความคิดและการตอบคำถาม ถ้าพบว่านักเรียนไม่สามารถใช้หรือสร้างตัวแทนทางความคิดได้ ครูใช้การชี้แนะเพื่อให้นักเรียนสามารถสร้างหรือใช้ตัวแทนทางความคิดแทนข้อมูลได้อย่างเหมาะสมและสัมพันธ์กับข้อมูลในปัญหา **ขั้นที่ 3 การประมวลผล (Processing)** 4. ครูให้นักเรียนวิเคราะห์แนวทางในการหาพื้นที่ผิวของโคมลอย และสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากตัวแทนทางความคิดที่นักเรียนจำลองขึ้นร่วมกับความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ จากนั้นครูใช้คำถามกระตุ้นความคิด ดังนี้	- ให้นักเรียนลองหาคำตอบด้วยตนเอง โดยครูคอยกระตุ้นและชี้แนะนักเรียน - สุ่มถามคำตอบนักเรียนเป็นรายบุคคล พร้อมเฉลยคำตอบที่ถูกต้องบนกระดาน 3. ครูยกตัวอย่างที่ 3 ซึ่งเป็นตัวอย่างเกี่ยวกับการนำสูตรของพื้นที่ผิวของทรงกระบอกไปประยุกต์ใช้ในการหารัศมีของทรงกระบอก และพื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก โดยครูกระตุ้นและชี้แนะนักเรียนดังนี้ - ครูสุ่มถามสูตรในการหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกคืออะไร $(2\pi rh + 2\pi r^2)$ - ครูชี้แนะให้นักเรียนใช้ความรู้เรื่องการแก้สมการกำลังสองมาช่วยในการแก้ปัญหาเพื่อหารัศมีของทรงกระบอก - ครูสุ่มถามสูตรในการหาพื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอกคืออะไร $(2\pi rh)$ - ครูสุ่มนักเรียนออกมาแสดงวิธีทำหน้าชั้นเรียน

- นักเรียนบอกได้หรือไม่ว่าบริเวณที่ต้องใช้กระดาษในการสร้างโคมลอยคือบริเวณใดบ้าง (ด้านข้างและด้านบนของโคมลอย)
- สูตรการหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกเท่ากับเท่าไร ($2\pi rh + 2\pi r^2$)
- สำหรับสูตรการพื้นที่ผิวของโคมลอยนี้หาได้อย่างไร (พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่หน้าตัดด้านบนเพียงด้านเดียว = $2\pi rh + \pi r^2$)
- ครูตรวจสอบความเข้าใจและใช้เป็นแนวทางในการชี้แนะนักเรียนจนนักเรียนสร้างหรือเลือกตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง

ขั้นที่ 4 การดำเนินการ (Implementing)

5. ครูให้นักเรียนใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นในขั้นที่ 3 ร่วมกับการประยุกต์เทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นเพื่อหากระดาษทั้งหมดสำหรับโคมลอย 100 ลูก ครูใช้การถาม-ตอบ จากนั้นประเมินเพื่อชี้แนะจนนักเรียนสามารถสรุปได้ ดังนี้

- เนื่องจากพื้นที่ผิวของโคมลอยเท่ากับ $\pi r^2 + 2\pi rh$ นักเรียนอาจจะเทคนิคทางคณิตศาสตร์ด้วยการดึงตัวร่วมดังนี้ $\pi r(r+2h)$ เพื่อให้คำนวณค่าได้ง่ายขึ้น และยังเป็นการแทนค่า $\pi \approx 3.14$ เพียงครั้งเดียวซึ่งทำให้การคำนวณได้ง่ายขึ้น

6. ครูกระตุ้นให้นักเรียนพิจารณาคำตอบที่ได้พบว่า พื้นที่ผิวของโคมลอย 1 ลูกเท่ากับ 4.553 ตร.ม. เนื่องจากต้องการสร้างโคมลอย 100 ลูก พื้นที่ผิวของโคมลอยทั้งหมดเท่ากับ $4.533 \times 100 = 455.3$ ตร.ม.ครูกระตุ้นนักเรียนด้วยการชี้แนะนักเรียนให้คิดและวิเคราะห์คำตอบที่ได้มีความสอดคล้องกับเงื่อนไขปัญหาหรือไม่ และสมเหตุสมผลหรือไม่จนนักเรียน

ร่วมกันสรุปได้ว่า หนานคำจะต้องเตรียมกระดาษอย่างน้อย 456 ตร.ม. 7. ครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนด้วยการถามนักเรียนว่า ถ้านักเรียนเป็นหนานคำ นักเรียนจะต้องเตรียมกระดาษอย่างไร สิ่งใดที่นักเรียนต้องพิจารณาเพิ่มเติม (เนื่องจากกระดาษในการทำโคมลอยส่วนหนึ่งจะต้องเสียไปกับรอยพับกระดาษตามขอบของโคมลอยด้วย ดังนั้นต้องเตรียมกระดาษชดเชยส่วนนี้ด้วย) 8. ครูขยายแนวทางในการแก้ปัญหาจากตัวอย่างที่ 1 โดยครูยกตัวอย่างที่ 2 และ 3 ซึ่งครูให้นักเรียนฝึกปฏิบัติตามแนวทางการแก้ปัญหาตามขั้นตอนในตัวอย่างที่ 1 ด้วยตนเอง โดยครูทำหน้าที่สังเกตและคอยประเมินพร้อมทั้งตรวจสอบความเข้าใจนักเรียนอย่างต่อเนื่อง แล้วใช้เป็นแนวทางในการชี้แนะจนนักเรียนสามารถแก้ปัญหานั้นได้ด้วยตนเอง	
<u>ขั้นสรุป</u> 1. ครูใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนร่วมกันสรุปสาระสำคัญเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวข้าง และพื้นที่ผิวของทรงกระบอกจนนักเรียนสรุปได้ดังนี้ - พื้นที่ผิวของปริซึมของทรงกระบอก • พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก = $2\pi rh$ • พื้นที่ผิวของทรงกระบอก = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่หน้าตัดหัวท้าย 2. ครูมอบหมายงานให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน	

<u>สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้</u>

1. ใบกิจกรรม เรื่อง พื้นที่ผิวและพื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก
2. เอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ค 33103 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1/2560จัดทำโดยกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม พ.ศ.2560
3. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 1 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

<u>การวัดและประเมินผลการเรียนรู้</u>

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	วิธีการวัดผล	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน	ผลการประเมิน
ด้านความรู้: นักเรียนสามารถ 1. บอกสูตรการหาพื้นที่ผิวข้างและพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกได้ 2. คำนวณหาพื้นที่ผิวข้างและพื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอกได้	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียน	เอกสารประกอบการเรียน	ตอบได้ถูกต้องมากกว่า 80% ถือว่าผ่าน	
ด้านทักษะ/กระบวนการ: นักเรียนสามารถ 1. สื่อสารและนำเสนอความคิดเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอกได้ 2. เชื่อมโยงความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอกกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันได้	สังเกตจากการทำแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัด	ทำได้ถูกต้องมากกว่า 80% ถือว่าผ่าน	
<u>ด้านคุณลักษณะ</u>: นักเรียน 1. มีความกระตือรือร้นและมีส่วนร่วมในชั้นเรียน 2. มีความรับผิดชอบ และความตรงต่อเวลา	สังเกตพฤติกรรมในชั้นเรียนรวมถึงการส่งงาน	แบบสังเกตพฤติกรรม	นักเรียนส่วนใหญ่ของห้องเรียนปฏิบัติได้ถือว่าผ่าน	

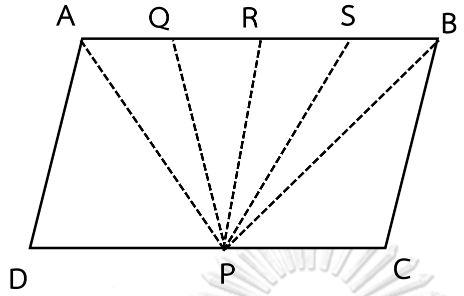
ภาคผนวก ง

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน
- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน
- แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน
- แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน
- แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
- แบบสังเกตพฤติกรรมการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
- ตัวอย่างใบกิจกรรม เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอก

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (ก่อนเรียน)

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ถ้า P เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน CD และจุด Q , R , S แบ่งด้าน AB เป็นสี่ส่วนเท่าๆ กัน ดังรูป



จากสถานการณ์ข้างต้น จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงอธิบายความสัมพันธ์เกี่ยวกับ**<u>ส่วนสูง</u>** และ **<u>ความยาวฐาน</u>** ของ $\triangle$APQ , $\triangle$BCP, $\triangle$RPS , $\triangle$SPB , $\triangle$ADP และ $\triangle$QPR

2. จากข้อมูลในข้อ 1 สามเหลี่ยมรูปใดที่มีพื้นที่เท่ากันบ้าง พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

3. *“ถ้ากำหนดให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้เท่ากับ 64 ตารางหน่วย แล้ว รูปสี่เหลี่ยม PSBC เท่ากับ 22 ตารางหน่วย”* ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบ

....

....

....

....

....

....

....

✍ แนวทางการตอบ

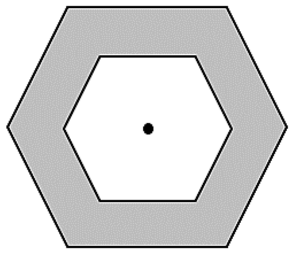
1. พบว่า ส่วนสูง และความยาวฐานของรูป △APQ , △QPR , △RPS , △SPB ทั้ง 4 รูปมีค่าเท่ากัน เพราะ Q , R , S แบ่ง AB เป็นสี่ส่วนเท่าๆ กัน และพบว่า ส่วนสูง และความยาวฐานของรูป △DPA , △PCB เพราะ P เป็นจุดแบ่งครึ่ง CD

2. เนื่องจากสูตรพื้นที่รูปสามเหลี่ยม เท่ากับ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง และจากข้อมูลในข้อ 1 พบว่า พื้นที่รูป △APQ = △QPR = △RPS = △SPB เพราะมีส่วนสูงยาวเท่ากัน และความยาวของฐานเท่ากันและพบว่าพื้นที่รูป △PDA = △PCB เพราะมีส่วนสูงยาวเท่ากัน และความยาวของฐานเท่ากัน

3. ไม่เป็นจริง เพราะ PR เป็นส่วนของเส้นตรงที่แบ่งรูป □ABCD ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน และพื้นที่ □ PSBC เท่ากับ พื้นที่△SPB + พื้นที่△PCB = 16 + 8 = 24 ตารางหน่วย

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ (ก่อนเรียน)

รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสองรูปมีจุดศูนย์กลางร่วมกันดังรูป
ถ้ารูปใหญ่มีความยาวรอบรูปเท่ากับ 48 หน่วย
รูปเล็กมีความยาวรอบรูป 36 หน่วย จงหาพื้นที่ที่แรเงา



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบ โดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม (ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ)

2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบ โดยไม่ต้องคำนวณ

3. ให้ลองยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง โดยใช้ความรู้ในข้อที่ 1 โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

....

....

....

....

....

....

....

✍ **แนวทางการตอบ**

1. - พื้นที่รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับ พื้นที่ฐาน × สูง
   - รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า คือ รูปเหลี่ยมที่มีเหลี่ยมทั้ง 6 เหลี่ยมยาวเท่ากันและมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับเหลี่ยมเหล่านั้นยาวขนาดเท่ากัน
   - ความยาวรอบรูป คือ ความยาวของด้านทุกด้าน
   - พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{4} \times$ ด้าน^2
   - การลบและการหาร
2. แนวทางในการแก้ปัญหาคร่าว ๆ ดังนี้

   1. หาความยาวด้านแต่ละด้านของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าของรูปเล็กและรูปใหญ่โดยการนำความยาวรอบรูปแต่ละรูปหารด้วย 6

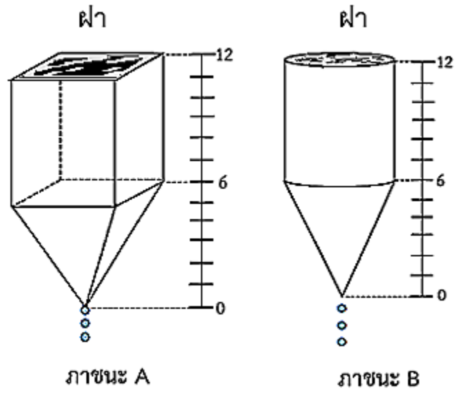
   2. แบ่งรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าของแต่ละรูปเป็น 6 ส่วนเท่าๆกัน จะได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าของรูปใหญ่และรูปเล็กอย่างละ 6 รูป

   3. หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าของทั้งรูปใหญ่และรูปเล็กอย่างละ 1 รูป จากนั้นนำพื้นที่ของแต่ละรูปไปคูณด้วย 6 จะได้พื้นที่รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าของรูปใหญ่และรูปเล็ก

   4. นำพื้นที่รูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ารูปใหญ่ ลบด้วยพื้นที่หกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ารูปเล็ก จะได้พื้นที่แรเงาตามต้องการ
3. สวนสาธารณะแห่งหนึ่งมีลักษณะเป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งมีความยาวรอบรั้วสวนสาธารณะนี้เท่ากับ 480 เมตรต้องการทำทางเดินล้อมรอบสวนสาธารณะแห่งนี้ให้ความกว้างของทางเดินเท่ากันตลอดช่วง และพบว่าพื้นที่ที่เหลือที่ใช้ปลูกต้นไม้ตรงกลางมีพื้นที่เท่ากับ 3,000 ตารางเมตร จงหาว่าพื้นที่ทั้งหมดที่ถูกใช้ในการทำทางเดินมีพื้นที่กี่ตารางเมต

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (หลังเรียน)

พิจารณาภาชนะบรรจุน้ำ A และ B ดังรูป จากรูปภาชนะทั้งสองมีส่วนสูงเท่ากัน และความยาวของเส้นทแยงมุมของฝาซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (บริเวณแรเงา)ภาชนะ A เท่ากับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของฝาภาชนะ B (บริเวณแรเงา)



จากสถานการณ์ข้างต้น จงตอบคำถามแต่ละข้อต่อไปนี้

1. ระหว่างภาชนะ A กับ ภาชนะ B ภาชนะใดมีปริมาตรมากกว่ากัน พร้อมอธิบายแนวคิดสนับสนุนคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนสูงและความยาวของเส้นทแยงมุมของฝา

....

....

....

....

....

....

....

2. ถ้าเปิดน้ำจากภาชนะทั้งสองออกไป 1 ใน 4 ของปริมาตรแต่ละภาชนะ แล้วระดับน้ำจะอยู่ในระดับหมายเลขใด พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบ

....

....

....

....

....

....

....

3. จงพิจารณาข้อความที่ว่า “ถ้าเปิดน้ำออกจากภาชนะทั้งสอง โดยให้ปริมาณน้ำของภาชนะแต่ละใบเหลือเพียงครึ่งเดียว แล้วระดับน้ำของภาชนะทั้งสองจะอยู่ที่ระดับหมายเลข 6” ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลสนับสนุนคำตอบ

....

....

....

....

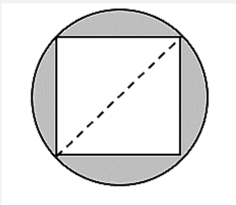
....

....

....

แนวทางการตอบ

1. ภาชนะ B มีปริมาตรมากกว่าภาชนะ A เนื่องจากภาชนะทั้งสองมีส่วนสูงเท่ากัน และความยาวของเส้นทแยงมุมของฝาซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (บริเวณแรเงา) ภาชนะ A เท่ากับความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของฝา (บริเวณแรเงา) ภาชนะ B ดังรูป จะพบว่าพื้นที่ฝาของภาชะ B มากกว่าภาชนะ A ส่งผลให้ปริมาตรของภาชนะ B มากกว่าภาชนะ A



2. ระดับหมายเลข 10 เพราะว่า เมื่อพิจารณาปริมาตรภาชนะ A ประกอบด้วย ปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยม จัตุรัส กับปริมาตรของพีระมิดพบว่า “ปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ 3 เท่าของปริมาตรของพีระมิด”

กล่าวคือ พื้นที่ฐาน $\times$ สูง เท่ากับ 3 ($\frac{1}{3}\times$พื้นที่ฐาน $\times$ สูง)

พิจารณาปริมาตรภาชนะ B ประกอบด้วยปริมาตรของทรงกระบอก กับปริมาตรของกรวย พบว่า “ปริมาตรของทรงกระบอก เท่ากับ 3 เท่าของปริมาตรของกรวย”

กล่าวคือ $\pi r^2 h$ เท่ากับ 3 ($\frac{1}{3}\pi r^2 h$)

จะได้ว่า ทั้งปริมาตรของภาชนะ A และ B ระดับหมายเลข 0 – 6 เท่ากับ ระดับหมายเลข 6 – 8

เท่ากับ ระดับหมายเลข 8 – 10

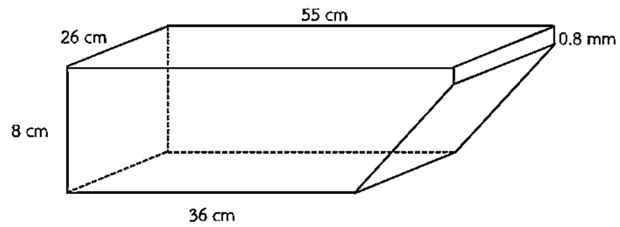
เท่ากับ ระดับหมายเลข 10 – 12

ดังนั้น ถ้าเปิดน้ำแต่ละภาชนะออกไป 1 ใน 4 ของปริมาตรภาชนะ A และ B จะได้ว่าระดับ น้ำของภาชนะทั้งสองจะอยู่ในระดับหมายเลข 10

3. ข้อความดังกล่าวไม่ถูกต้อง เพราะปริมาตรครึ่งหนึ่งของภาชนะทั้งสองต้องสูงกว่าระดับหมายเลข 6 ในระดับหมายเลข 6 เป็นเพียงปริมาตร 1 ใน 4 ของภาชนะแต่ละใบเท่านั้น

ตัวอย่างแบบทดสอบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ (หลังเรียน)

ทรงสามมิติหนึ่งมีลักษณะดังรูป ถ้าต้องการติดกระดาษสีหลาย ๆ สี ที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสภายในทรงสามมิตินี้ทั้งหมด ซึ่งกระดาษสีขนาดยาวด้านละ 2 เซนติเมตร จะต้องใช้กระดาษสีอย่างน้อยกี่แผ่น



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. หากจะแก้ปัญหานี้ จะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ใดบ้างที่เพียงพอในการหาคำตอบโดยตอบในรูปทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม หรือ ระบุเป็นชื่อหรือเขียนอธิบายสาระสำคัญ

....

....

....

....

....

....

....

2. ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในข้อ 1 นำมาเขียนอธิบายแนวทางเป็นข้อๆ เพื่อหาคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ

....

....

....

....

....

....

....

3. ให้ลองยกตัวอย่างสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกับชีวิตจริง โดยใช้ความรู้ในข้อที่ 1 โดยไม่ต้องคำนวณหาคำตอบ

....

....

....

....

....

....

....

แนวทางการตอบ

1. - ปริซึม เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานทั้งสองเป็นรูปเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ ฐานทั้งสองข้างอยู่บนระนาบที่ขนานกัน และด้านข้างแต่ละด้านเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

   - พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู เท่ากับ $\frac{1}{2} \times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน $\times$ ยาว

   - พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เท่ากับ กว้าง $\times$ ยาว

   - การหาร และการประมาณค่า

   - การเปลี่ยนหน่วยจากมิลลิเมตรเป็นเซนติเมตร : 10 มิลลิเมตร เท่ากับ 1 เซนติเมตร

2. แนวทางในการแก้ปัญหาคร่าว ๆ ดังนี้

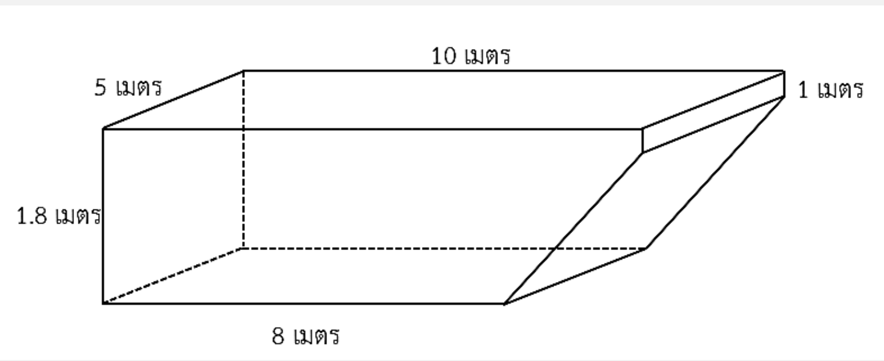
   1. หาพื้นที่ผิวข้างของปริซึม โดยด้านข้างของปริซึมรูปนี้ ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมคางหมู 2 ด้าน รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 3 รูป

   2. นำพื้นที่ที่หาได้ในข้อ 1 นำมารวมกันจะได้พื้นที่ผิวทั้งหมดที่ต้องใช้ปูกระเบื้อง

   3. นำคำตอบในข้อ 2 หารด้วยขนาดของกระดาษสีแต่ละแผ่น ก็จะได้จำนวนกระดาษสีตาม

ต้องการ

3. สระว่ายน้ำหนึ่งมีความยาวด้าน ดังรูป ถ้าต้องการปูกระเบื้องภายในทั้งหมดด้วยกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดยาวด้านละ 8 เซนติเมตร จะต้องใช้กระเบื้องอย่างน้อยกี่แผ่น



แบบสังเกตพฤติกรรมการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	**พฤติกรรมที่สังเกตได้**
1) การหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล - การใช้ความรู้คณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล	....
2) การหาข้อสรุปของปัญหา - การใช้ความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเพื่อหาข้อสรุปของปัญหา	....
3) การพิจารณาความสมเหตุสมผลของข้อสรุปของปัญหา - การอธิบายข้อสรุปปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหา - การยกตัวอย่างสนับสนุนหรือคัดค้านข้อสรุปอย่างสมเหตุสมผล	....

หมายเหตุ ใช้ประกอบการสังเกตขณะจัดกิจกรรมการเรียนรู้

แบบสังเกตพฤติกรรมการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์	**พฤติกรรมที่สังเกตได้**
1) การระบุความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับสถานการณ์ปัญหา - การระบุ/เลือกความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎี กฎ สูตร นิยาม - การระบุ/เลือกหลักการที่จำเป็นต้องใช้ในสถานการณ์ปัญหาและการแก้ปัญหา	....
2) การระบุความสัมพันธ์ระหว่างความรู้ทางคณิตศาสตร์กับแผนการ - การประมวลความรู้คณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการแก้ปัญหา - การอธิบายและกำหนดเป็นแนวทางหรือวิธีการในการแก้ปัญหา	....
3) การระบุตัวอย่างหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่ใกล้เคียงปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาเดิม - การระบุตัวอย่างหรือ ระบุปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงที่เกี่ยวข้องกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ระบุในข้อที่ 1)	....

หมายเหตุ ใช้ประกอบการสังเกตขณะจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ใบกิจกรรม
เรื่อง โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของทรงกระบอก

สรุปสูตร

พื้นที่ผิวข้างของทรงกระบอก = ...

พื้นที่ผิวทั้งหมดของทรงกระบอก = ...

= ....

หรือ = ...

เมื่อ r = รัศมี และ h = ส่วนสูงของกระบอก

ตัวอย่างที่ 1 “โคมลอย” ถือเป็นบอลลูนลมร้อนขนาดเล็กอย่างหนึ่ง โดยทั่วไปจะทำจากไม้ไผ่ตั้งเป็นโครงติดกระดาษสาทาน้ำมันข้างใน ใส่เทียนหรือเชื้อเพลิงแล้วจุดไฟ ความร้อนจะก่ออากาศภายในโคม ซึ่งจะทำให้โคมสามารถลอยขึ้นได้ เมื่อไฟดับโคมนั้นก็จะตกลงสู่พื้นโลกดังเดิม นายหนานคำมีอาชีพรับจ้างทำโคมลอยซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกระบอกฐานเปิดหนึ่งด้านเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 1 เมตรและความสูงของโคมลอยแต่ละลูกสูงมากกว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ 20 เซนติเมตร จำนวน 100 ลูก นายหนานคำจะต้องเตรียมกระดาษอย่างน้อยกี่ตารางเมตร
เมื่อกำหนดให้ $\pi \approx 3.14$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 2 ในการผลิตผลไม้กระป๋องชนิดหนึ่งผู้ผลิตจำเป็นต้องผลิตกระป๋องโดยใช้โลหะ เพื่อให้เสียต้นทุนในการผลิตกระป๋องน้อยที่สุดจำเป็นต้องมีการวางแผนการผลิต ถ้าบริษัทผลิตน้ำผลไม้แห่งหนึ่งมีโลหะแผ่นหนึ่งพื้นที่ 20 ตารางเมตร แล้วอยากทราบว่าจะสามารถผลิตกระป๋องใบหนึ่งมีปากกระป๋องกว้าง 20 เซนติเมตร สูง 18 เซนติเมตร ได้มากที่สุดกี่กระป๋อง (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่างที่ 3 ถังน้ำมันทรงกระบอกใบหนึ่งทำด้วยเหล็ก สูง 15 นิ้ว ใช้เหล็กทำทั้งสิ้น (รวมฝา) เป็นพื้นที่ 968 ตารางนิ้ว แล้วจงหาพื้นที่ผิวข้างของถังน้ำมันนี้ (กำหนด $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

ภาคผนวก จ

ผลการประเมินเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผลการประเมินคุณภาพ (IOC) จากผู้เชี่ยวชาญของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ตารางที่ 21 แสดงผลการประเมินคุณภาพ (IOC) แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ปัญหาที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	0	1	1	0.67
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	0	1	0.67
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

ตารางที่ 22 แสดงผลการประเมินคุณภาพ (IOC) แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ปัญหาที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	1	1	1
2	0	1	1	0.67
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

ผลการประเมินคุณภาพ (IOC) จากผู้เชี่ยวชาญของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 23 แสดงผลการประเมินคุณภาพ (IOC) แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ปัญหาที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	0	1	0.67
4	1	1	1	1
5	0	0	1	0.33
6	0	1	1	0.67

ตารางที่ 24 แสดงผลการประเมินคุณภาพ (IOC) แบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ปัญหาที่	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			IOC
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	
1	1	0	1	0.67
2	1	1	1	1
3	1	1	0	0.67
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1
6	1	1	1	1

ผลการทดสอบคุณภาพของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและ
การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ตารางที่ 25 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจการจำแนกของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงทั้งฉบับ
1	0.2370	0.3556	0.727
2	0.2593	0.2519	
3	0.2852	0.2741	
4	0.2519	0.3111	

ตารางที่ 26 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจการจำแนกของแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงทั้งฉบับ
1	0.4148	0.1926	0.713
2	0.2926	0.3778	
3	0.3593	0.3185	
4	0.3333	0.3111	

ผลการทดสอบคุณภาพของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลและ การเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ตารางที่ 27 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจการจำแนกของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงทั้งฉบับ
1	0.2370	0.3556	0.819
2	0.2852	0.2741	
3	0.2519	0.3111	
4	0.2296	0.3259	

ตารางที่ 28 แสดงค่าความเที่ยง ค่าความยาก และค่าอำนาจการจำแนกของแบบวัดความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงทั้งฉบับ
1	0.4148	0.2926	0.808
2	0.3593	0.3185	
3	0.3333	0.3111	
4	0.3407	0.4296	

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กรมวิชาการ. (2546a). การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ ชันมัธยมศึกษาปีที่ 1-6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ: องค์การรับสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

กรมวิชาการ. (2546b). หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พุทธศักราช 2545. กรุงเทพมหานคร: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ).

กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551: [ออนไลน์]. สืบค้นจาก : http://www.thaischool.in.th/_files/thaischool/04.pdf

กฤษมันต์ วัฒนาณรงค์. (2554). การพัฒนาสมรรถนะของพื้นฐานทักษะการใช้เหตุผล (*Basic Reasoning Skills)*: [ออนไลน์].สืบค้นจาก: https://www.thairath.co.th/content/218036.

เกศินี เพ็ชรรุ่ง. (2556). การพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเพื่อส่งเสริมมโนทัศน์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต) , สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เกษณีย์ ยอดไฟอินทร์. (2556). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลเฟสเมท็อดคอมบิเนชันและกลยุทธ์การพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและการนึกภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต) , สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ขณิษฐา คำทอน. (2539). การศึกษาข้อบกพร่องในกระบวนการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ของโรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์. (2552). แนวคิด/ทฤษฎีการเรียนการสอนที่เน้นทางด้านสติปัญญา. [ออนไลน์]: สืบค้นจาก: http://e-book.ram.edu/e-book/s/SE742/chapter3.pdf

ชัยวัฒน์ อุ้ยปาอาจ. (2552). ผลของการใช้แนวการสอนแนะให้รู้คิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรการสอนและเทคโนโลยีการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เชิดพงศ์ ชาชุมวงศ์. (2557). การพัฒนาทักษะการแก้ปัญหา ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และความใฝ่รู้ใฝ่เรียนของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ปัญหาเป็นฐานร่วมกับการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์. วารสารบัณฑิตศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร (*Sakon Nakhon Graduate Studies Journal),* 11(54), 51-62.

ทิศนา เขมมณี. (2551). ศาสตร์การสอน องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทิศนา แขมมณี. (2554). ศาสตร์การสอน. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เทพสุดา เกตุทอง. (2551). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียน

มัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน จังหวัดลพบุรี. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นาเดีย กองเป็ง. (2555). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กระบวนการแอบสแตรกชั่นที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นุชนารถ ทองกระจ่าง. (2556). การพัฒนาทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็นด้วยกิจกรรมการเรียนรู้แบบใช้ปัญหาเป็นฐานสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. วารสารวิชาการศรีปทุม ชลบุรี, 163-172.

นุชลี อุปภัย. (2558). จิตวิทยาการศึกษา. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ปนิดา ศิริกุลวิเชฐ. (2524). ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์กับผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (ฝ่ายมัธยม). (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พร้อมพรรณ อุดมสิน. (2544). การวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พีชาณิกา เพชรสังข์. (2557). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน *5E* ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิด อย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วรนารถ อยู่สุข. (2555). การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ชุดกิจกรรมเสริมหลักสูตรคณิตศาสตร์และวงจรการเรียนรู้เชิงประสบการณ์. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วัฒนิตา นำแสงวานิช. (2539). ผลของการแก้ไขข้อบกพร่องที่เป็นความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์เรื่อง เศษส่วนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้แบบฝึกทักษะ. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วาสุกรี ใจจันทร์. (2555). การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหา. วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา, 25(1), 114-124.

วาสุกรี แสงป้อม. (2558). การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เพื่อการสร้างองค์ความรู้ของผู้เรียน. วารสารศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร (*Journal of Education Naresuan University),* 17(4), 210-215.

วิชัย เสวกงาม. (2557). ความสามารถในการให้เหตุผลความสามารถที่จำเป็นสำหรับผู้เรียนในศตวรรษที่ ๒๑. *Journal of Education Studies* วารสาร ครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*,* 42(2), 207-223.

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร. (2553). การสอนแนะให้รู้คิด (Cognitively Guided Instruction: CGI): รูปแบบหนึ่งของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์. วารสารศึกษาศาสตร์/ *Journal of Education,* 21(1), 1-12.

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร. (2556). การให้เหตุผลเชิงสถิติและการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปสู่ชีวิตจริงโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับการใช้คำถามระดับสูงสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6. วารสาร ศึกษา ศาสตร์/ *Journal of Education,* 24(2), 15-33.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ ศรีเมืองการพิมพ์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2550). ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2556). คู่มือการใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2556. กรุงเทพฯ: ครุสภาลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558). การศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนไทย:การพัฒนา-ผลกระทบ-ภาวะถดถอยในปัจจุบัน. [ออนไลน์]. สืบค้นจาก: *https://drive.google.com/file/d/0BwqFSkq5b7zSWUduVm1XWVVldlk/view*.

สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). สรุปผลการวิจัยโครงการ *TIMSS* 2015. [ออนไลน์]. สืบค้นจาก: *https://drive.google.com/file/d/0Bza8voFmdFsrRGlYbmdPa0pkXzg/view*.

สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). สรุปผลการวิจัย *PISA* 2015. [ออนไลน์].สืบค้นจาก: *https://drive.google.com/file/d/0BwqFSkq5b7zScUJOOV9ldUNfTlk/view*.

สมเดช บุญประจักษ์. (2540). การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต).มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สมพงษ์ จิตระดับ. (2559). ติงโอเน็ตล้มเหลวผลสอบต่ำ 50% อื้อ. [ออนไลน์]. . สืบค้นจาก : http://www.moe.go.th/moe/th/news/detail.php?NewsID=44879&Key=hotnews

สาวิตรี มูลสุวรรณ. (2557). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สำนักทดสอบทางการศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2556). นิยามความสามารถของผู้เรียนด้านภาษา ด้านคำนวณ และด้านเหตุผล (*Literacy, Numeracy & Reasoning Abilities)*. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

สิริพร ทิพย์คง. (2545). หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ.

สุธารัตน์ สมรรถการ. (2556). ผลการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (*CGI)* เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการมัธยมศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุรชัย วงศ์จันเสือ. (2555). ผลการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด *DAPIC* และ *CGI* ของนักเรียมัธยมศึกษาปีที่ 3. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อภิชญา ลือชัย. (2555). การวิเคราะห์ทักษะที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2536). รายงานการวิจัย เรื่อง การวินิจฉัยข้อผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย: ภาควิชามัธยมศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2546). คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2554). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ : การพัฒนาการเพื่อพัฒนาการ. กรุงเทพฯ โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อาทิตย์ สำราญอินทร์. (2553). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลการปรับมโนทัศน์ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต), สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาษาอังกฤษ

Artzt, A., & Yaloz-Femia, S. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. *Developing mathematical reasoning in grades K*-12, 61, 115.

Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S., & Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematical connections to the real-life. *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 1(1), 1402-1407.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-*8: *Helping children think mathematically*: Prentice Hall.

Brodie, K. (2009). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (Vol. 775): Springer Science & Business Media.

Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1988). Research and cognitively guided instruction. *Integrating research on teaching and learning mathematics*, 2-19.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*: ERIC.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2000). Cognitively Guided Instruction: A Research-Based Teacher Professional Development Program for Elementary School Mathematics. Research Report.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C.-P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children’s mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American educational research journal,* 26(4), 499-531.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM,* 37(3), 149-158.

Cooney, T. J., Brown, S. I., Dossey, J. A., Schrage, G., & Wittmann, E. C. (1996). *Mathematics, Pedagogy, and Secondary Teacher Education*: ERIC.

Dean, S. (2008). Using Non-Traditional Activities to Enhance Mathematical Connections.

Downton, A., & Sullivan, P. (2017). Posing complex problems requiring multiplicative thinking prompts students to use sophisticated strategies and build mathematical connections. *Educational Studies in Mathematics*, 1-26.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal,* 23(3), 297.

Fauzan, A. (2002). *Applying Realistic Mathematics Education (RME) in teaching geometry in Indonesian primary schools*: University of Twente.

Fennell, F., & Rowan, T. (2001). Representation: An important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics,* 7(5), 288.

Guilford, J. P., & Hoepfner, R. (1971). *The analysis of intelligence*: McGraw-Hill Companies.

Hankes, J. E. (1998). *Native American pedagogy and cognitive-based mathematics instruction*: Taylor & Francis.

Hau, S. A. (1993). *An analysis of the mathematical connections recognized by students in an elementary school teacher education program.* University of Georgia,

Heaton, R. M. (2000). *Teaching Mathematics to the New Standard: Relearning the Dance* (Vol. 15): Teachers College Press.

Hendricks, C. (2013). *The Effects of Cognitively Guided Instruction on Mathematics Achievement of Second Grade Children.* Walden University,

Jaijan, W., & Suttiamporn, W. (2012). Mathematical connections of students in lesson study and open approach.

Kennedy, L., Tipps, S., & Johnson, A. (2007). *Guiding children's learning of mathematics*: Cengage Learning.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & and Findell, B. (2001). Adding it up: Helping children learn Mathematics. In: Washington, DC: National Academy Press.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers*: Allyn and Bacon.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26-43.

Lee, C.-Y., & Chen, M.-J. (2015). Effects of Polya Questioning Instruction for Geometry Reasoning in Junior High School. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* 11(6).

Malloy, C. E. (1999). Developing mathematical reasoning in the middle grades: recognizing diversity. *Developing mathematical reasoning in Grades K*-12. *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

Marchisotto, E. A. (1993). Connections in mathematics: an introduction to Fibonacci via Pythagoras. *Fibonacci Quart,* 31(1).

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*: Cambridge University Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: recommendations for school mathematics of the l980s*: Natl Council of Teachers of.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*: Natl Council of Teachers of.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1): National Council of Teachers of.

National Council of Teachers of Mathematics. (2016). Teaching Problem Solving Using Cognitively Guided Instruction to ELL Students. [Online]. Retrieved from https://nctm.confex.com/nctm/2016AM/webprogram/Handout/Session40911/NCTM%20CGI%20Math%20Instruction%20San%20Francisco%202016%20%20UPDATED.pdf

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin,* 39(31-43).

Nordheimer, S. (2010). Mathematical Connection at School Understanding and Facilitating Connections in Mathematics. *Online),(didaktik. mathematik. hu-berlin. de/files/mathematical_connections_*1. *pdf, diakses pada tanggal* 28 *Mei* 2015).

O'Daffer, P. G., & Thornquist, B. A. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. *Research Ideas for the Classroom High School Mathematics. New York: Mac Millan Publishing*.

Ontario. (2007). The Ontario Curriculum Grades 11 and 12.[Online]. Retrieved from http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math1112currb.pdf

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspects of mathematical methods*: Prentice university press.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American mathematical monthly,* 105(3), 252-255.

Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. *Developing mathematical reasoning in grades K*-12*,* 61, 1.

Saminanto and Kartono. (2015). Analysis of mathematical connection ability in linear equation with one variable based on connectivity theory. *International Journal of Education and Research,* 3(4), 259-270.

Sawyer, A. (2008). Making connections: Promoting connectedness in early mathematics education. *Navigating currents and charting directions*, 429-435.

Singer, F. M., & Voica, C. (2012). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 83(1), 9-26.

The Wisconsin Center for Education Resource. (2013). What is CGI ?.[Online]. Retrieved from http://www.sas.com/images/landingpage/venues/mathsummit/2013/111JenniferTaylorCGIInfo.pdf

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวีรพล เทพบรรหาร เกิดวันที่ 26 เมษายน 2531 ภูมิลำเนาเดิม อำเภอจังหาร จังหวัดร้อยเอ็ด สำเร็จการศึกษา ปริญญาครุศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง) สาขามัธยมศึกษา-วิทยาศาสตร์ เอกคณิตศาสตร์ จากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2554 ปัจจุบันเป็นอาจารย์สอนวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม กรุงเทพมหานคร