

บทที่ 3

การออกแบบตัวควบคุม

จากเนื้อหาที่แสดงอยู่ในบทที่ 2 เราจะเห็นว่า การใช้งานแขนหุ่นยนต์เป็นการผสมผสานของ ความรู้หลายแขนง เช่น สาขาวิศวกรรมเครื่องกลซึ่งมีส่วนในการจัดเตรียมวิธีการที่จะใช้ศึกษาเครื่องจักรทั้ง ในสภาวะสถิตและสภาวะพลวัต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้าซึ่งเป็นส่วนที่เกี่ยวข้องโดยตรงต่อการออกแบบตัวตรวจรู้ (sensor) และวงจรเชื่อมโยง (interface circuit) สาขาทางระบบควบคุมซึ่งเป็นส่วนที่จัดเตรียมความรู้สำหรับการออกแบบตัวควบคุม และสาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นส่วนที่จัดวางพื้นฐานความรู้ในด้านการเขียน โปรแกรม เพื่อให้ส่วนต่าง ๆ ทำงานร่วมกัน เป็นต้น ด้วยเหตุนี้การเลือกหัวข้อเพื่อทำวิจัยทางด้านแขน หุ่นยนต์จึงเป็นไปอย่างกว้างขวาง โดยขึ้นกับว่าผู้สนใจมีพื้นฐานอย่างไร อย่างไรก็ตามเนื่องจากเป้าหมาย ของงานวิทยานิพนธ์นี้ คือ การปรับปรุงวิธีออกแบบตัวควบคุมสำหรับแขนหุ่นยนต์ ดังนั้นเนื้อหาที่จะกล่าวถึง ในบทนี้ จึงเป็นรายละเอียดในส่วนของการออกแบบระบบควบคุมเท่านั้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับแขนหุ่นยนต์เป็นงานวิจัยแขนงหนึ่งที่มีผู้สนใจมาเป็นเวลานาน มีการนำเสนอตัวควบคุมประเภทต่าง ๆ มากมาย แต่ละประเภทก็มีแนวคิด หลักการ และข้อดีข้อเสีย แตกต่างกันไป ดังที่จะกล่าวต่อไป

ถึงแม้ว่าโรงงานอุตสาหกรรมส่วนใหญ่ยังคงใช้ตัวควบคุมแบบเชิงเส้น (linear controller) ซึ่งแยก ควบคุมระบบย่อย ๆ หรือแต่ละข้อต่ออย่างอิสระ (Fu, Gonzales และ Lee, 1987) โดยตัดส่วนของแรงที่เกิด จากการทำงานของข้อต่ออื่น ๆ (coupling forces) และผลกระทบจากความเฉื่อยของโหลดและลำตัวของแขน หุ่นยนต์ ซึ่งเปลี่ยนแปลงค่าไปตามรูปลักษณะการเคลื่อนไหว แต่ในการทำงานที่มีความเร็วสูง ส่วนที่ตัดทิ้ง เหล่านี้จะมีค่าสูงขึ้น และรบกวนการทำงานของตัวควบคุมมากขึ้น ซึ่งจะทำให้ประสิทธิภาพของการทำงานลด ลง (Kuo และ Wang, 1989)

ดังนั้นวิธีการควบคุมที่สามารถรักษาประสิทธิภาพไว้ได้ดี แม้จะต้องทำงานด้วยความเร็วสูง จึงเป็น เป้าหมายสำคัญข้อหนึ่งของงานวิจัย วิธีการแรก ๆ ที่พัฒนาขึ้นได้แก่ วิธีป้อนกลับเพื่อทำให้เป็นเชิงเส้น (feedback linearization method) ขั้นตอนการออกแบบเริ่มต้นด้วยการออกแบบตัวควบคุมแบบไม่เป็นเชิงเส้น เพื่อชดเชยลักษณะที่ไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ หลังจากนั้นจึงออกแบบตัวควบคุมแบบเชิงเส้นซ้ำอีกชั้นหนึ่ง

(Slotine และ Li, 1991) ตัวควบคุมแขนหุ่นยนต์ที่พัฒนาขึ้นตามแนวคิดนี้ ได้แก่ ตัวควบคุมแบบคำนวณแรงบิด (computed-torque controller) (Schilling, 1990) และตัวควบคุมป้อนข้างหน้าแบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear feedforward controller) (Craig, 1989) ในการเปรียบเทียบผลการทำงานระหว่างตัวควบคุมทั้ง 2 แบบ เราพบว่าตัวควบคุมแบบหลังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า ในขณะที่ตัวควบคุมแบบแรกสามารถชดเชยความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบได้ดีกว่า อย่างไรก็ตามวิธีการควบคุมในลักษณะนี้จะทำงานได้ดี ถ้ารู้สมบัติทางพลวัต (dynamic behavior) ของแขนหุ่นยนต์ที่จะควบคุม แต่เนื่องจากความไม่แน่นอนของค่าต่าง ๆ เช่น แรงเสียดทาน โหลด และค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย เป็นต้น เป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยงไม่ได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติแล้วมักจะไม่ได้ผลดีตามที่คิดไว้

ความล้มเหลวดังกล่าวทำให้ความสนใจส่วนใหญ่ มุ่งเป้าหมายไปยังตัวควบคุมที่สามารถทำงานได้ดี แม้ว่าจะไม่ทราบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบอย่างสมบูรณ์ แนวทางการพัฒนาแยกเป็น 2 ทิศทางหลัก ๆ ดังนี้ การพัฒนาตัวควบคุมแบบมั่นคง (robust controller) และการพัฒนาตัวควบคุมแบบปรับตัวเอง (adaptive controller)

การพัฒนาตัวควบคุมแบบมั่นคงมีแนวคิดคือ การออกแบบตัวควบคุมให้ทำงานได้ดีในช่วงกว้าง ๆ ที่คาดว่าค่าพารามิเตอร์ของระบบจะอยู่ในขอบเขตนี้ ตัวควบคุมที่ทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพตามแนวคิดนี้ ได้แก่ ตัวควบคุมชนิดเปลี่ยนแปลงโครงสร้าง (variable structure controller) (Young, 1978) แต่ปัญหาสำคัญในการใช้งานกับแขนหุ่นยนต์ก็คือ การเกิดคอนโทรลแชทเทอริง (control chattering) หรือปรากฏการณ์ที่สัญญาณควบคุมเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วขณะที่อยู่ในโหมดของการเลื่อน (sliding mode) ปรากฏการณ์ดังกล่าวจะกระตุ้นให้เกิดการสั่นในโหมดความถี่สูงของระบบ และเป็นส่วนที่ทำให้ลายความแม่นยำที่ต้องการ (Vukobratovic และ Stokic, 1982, อ้างถึงใน Kuo และ Wang, 1989) แม้ว่าจะมีผู้เสนอเทคนิคการปรับสัญญาณควบคุมให้ต่อเนื่องในช่วงแคบ ๆ ของการสวิตช์ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวก็ตาม (Yeung และ Chen, 1988; Slotine และ Li, 1991) แต่ความแม่นยำก็จะลดลงอย่างผกผันกับความนุ่มนวลของสัญญาณควบคุมที่เพิ่มขึ้น

การพัฒนาตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองมีแนวคิดคือ การออกแบบตัวควบคุมให้สามารถเรียนรู้ค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้น แล้วทำการปรับตัวเองเพื่อลดความผิดพลาดนั้น ในระยะแรกการออกแบบตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองมักกระทำโดยพิจารณาการทำงานของแต่ละแกนแยกจากกัน (Dubowsky และ DesForges, 1979; Koivo และ Guo, 1983) หรือไม่ก็ออกแบบสำหรับระบบที่ถูกย่อเป็นเชิงเส้นรอบ ๆ จุดทำงาน หรือจุดสงบนิ่ง (Lee และ Chung, 1984; Liu และ Lin, 1988; Goldenbreg, Apkarian และ Smith, 1989) วิธีเหล่านี้มี

ข้อจำกัดในการทำงานคือ ความเร็วของเซนเซอร์ต้องไม่สูงมาก หรือพารามิเตอร์ของระบบที่ไม่ทราบค่าแน่นอน และเป็นสาเหตุของความผิดพลาดในการทำงาน ต้องเปลี่ยนแปลงซ้ำเมื่อเปรียบเทียบกับความเร็วในการปรับตัวเองของตัวควบคุม [Lee และ Chung, 1984; Gu และ Tongue, 1990]

ปัญหาเกี่ยวกับความเร็วหมดสิ้นไปในปี ค.ศ. 1986 เมื่อ Craig Hsu และ Sastry (Walker, 1990) ได้เสนอวิธีออกแบบตัวควบคุมชนิดปรับตัวเอง สำหรับระบบเซนเซอร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น และสามารถพิสูจน์หาเสถียรภาพในการติดตามเส้นทางการเคลื่อนที่ในวงกว้าง (globally stable) โดยการใช้ข้อสังเกตที่ว่า เราสามารถจัดรูปแบบของสมการระบบใหม่ โดยจัดพารามิเตอร์ของระบบส่วนที่รู้ค่าแต่มีค่าคงที่หรือค่อนข้างคงที่ให้อยู่ในรูปเชิงเส้น และจัดพารามิเตอร์ของระบบส่วนที่รู้ค่าแต่มีค่าไม่คงที่ ให้เป็นเสมือนกับสัญญาณในสมการของระบบ (Gu และ Tongue, 1990) ดังนั้นเงื่อนไขความเร็วต่ำของการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของระบบจึงเป็นจริง โดยไม่ต้องจำกัดความเร็วในการทำงานของเซนเซอร์ ต่อมาทีมงานวิจัยจำนวนมากที่ใช้หลักการคล้ายคลึงกับงานของ Craig et al. (Slotine และ Li, 1988; Spong และ Ortega, 1990; Spong, Ortega และ Kelly, 1990; Johansson, 1990) งานเหล่านี้จัดแยกได้เป็น 2 วิธีหลัก ๆ (Slotine และ Li, 1988) คือ วิธีปรับตัวเองโดยตรง (direct adaptive method) ที่ปรับค่าประมาณของพารามิเตอร์ระบบจากค่าความผิดพลาดจริง ซึ่งเกิดขึ้นจากการติดตามเส้นทางการเคลื่อนที่ และวิธีปรับตัวเองโดยอ้อม (indirect adaptive method) ที่ปรับค่าประมาณของพารามิเตอร์ระบบ จากความผิดพลาดระหว่างแรงบิดจริงกับแรงบิดที่คำนวณจากค่าประมาณของพารามิเตอร์ระบบ ทั้งสองวิธีพิสูจน์หาเสถียรภาพในการทำงานได้เช่นเดียวกัน แต่วิธีหลังมีความยุ่งยากในการคำนวณมากกว่า

เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณเป็นปัจจัยสำคัญต่อการนำไปใช้งานจริง ผลงานวิจัยทางด้านตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองส่วนใหญ่ที่ออกมาในช่วงหลังจึงมักจะเป็นวิธีปรับตัวเองโดยตรง นอกจากนี้งานวิจัยด้านตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงยังสามารถจัดแบ่งได้อีกเป็น 2 กลุ่มย่อย ๆ (Leal และ De Wit, 1990; Spong และ Ortega, 1990) โดยกลุ่มแรกมีลักษณะการคำนวณคล้ายคลึงกับวิธีควบคุมแบบคำนวณแรงบิด (Craig et al., อ้างถึงใน Walker, 1990) แต่มีข้อเสียได้แก่ การที่ต้องใช้ค่าความเร่งจริงของเซนเซอร์ในการคำนวณหาสัญญาณควบคุม ซึ่งวัดไม่ได้จริง หรือหากใช้วิธีคำนวณเชิงเลขจากความเร็วที่วัดได้ ก็อาจจะมีสัญญาณรบกวนปนมาด้วย และการที่ต้องคำนวณหาเมตริกซ์ผกผันของค่าประมาณของเมตริกซ์ความเฉื่อย ซึ่งสูญเสียเวลามากในการคำนวณ และอาจจะหาค่าไม่ได้ในขณะที่ยังมีการปรับไปเรื่อย ๆ ส่วนแนวทางที่สองเป็นวิธีการควบคุมที่ใช้คุณสมบัติพิเศษของเซนเซอร์ (Slotine และ Li, 1988) ซึ่งสามารถลดปัญหาในการทำงานทั้งสองข้อดังกล่าว ทำให้ช่วยลดภาระในการคำนวณลงไปอีกมาก

ในงานวิทยานิพนธ์ที่นำเสนอจะแสดงการปรับปรุงวิธีออกแบบตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพิเศษของแขนหุ่นยนต์ การใช้วิธีโปรแกรมพลวัต (dynamic programming) ซึ่งเป็นวิธีการควบคุมแบบเหมาะที่สุดวิธีหนึ่ง จะช่วยให้เราสามารถคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดกับลักษณะของงานแต่ละงาน การคำนวณมีจุดเริ่มต้นสำคัญอยู่ที่การสร้างดรชนีสมรรถนะ ซึ่งประกอบด้วยพจน์กำลังสองของค่าความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็ว รวมไปถึงขนาดของสัญญาณควบคุม หลังจากผู้ใช้ทำการเลือกค่าถ่วงน้ำหนัก (weighting factors) ของแต่ละพจน์แล้ว วิธีที่นำเสนอจะคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดกับลักษณะของการทำงานที่ต้องการ และทำให้ค่าของดรชนีสมรรถนะมีขนาดน้อยที่สุด

ทฤษฎีและแนวความคิด

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ (Mathematical Model)

ในงานวิทยานิพนธ์ที่นำเสนอ เราจำเป็นต้องใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ ทั้งในขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม และขั้นตอนการจำลองการทำงาน แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเพื่อใช้งาน จะคำนวณจากแขนหุ่นยนต์ที่มีความแข็งเกร็ง (rigid robot) และมีตัวขับเคลื่อนเป็นแหล่งกำเนิดแรงบิดแท้ (pure torque source) สมการคณิตศาสตร์ที่ได้แสดงความไม่เป็นเชิงเส้น มีการรบกวนการทำงานระหว่างระบบย่อย ๆ ภายใน และมีพารามิเตอร์ระบบที่เปลี่ยนค่าไปตามตำแหน่งการเคลื่อนไหว รูปแบบทั่วไปของสมการดังกล่าวแสดงอยู่ในสมการ (1)

$$H(q, A)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, A)\dot{q} + G(q, A) = \tau(t) \quad (1)$$

เมื่อ q , \dot{q} , \ddot{q} คือ เวกเตอร์ที่แสดงตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของแต่ละข้อต่อ ซึ่งมีมิติ n

A คือ เวกเตอร์ของพารามิเตอร์ของระบบ ซึ่งปกติไม่รู้ค่าแน่นอน เช่น มวลของลิงค์ โมเมนต์ของความเฉื่อย และตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล เป็นต้น

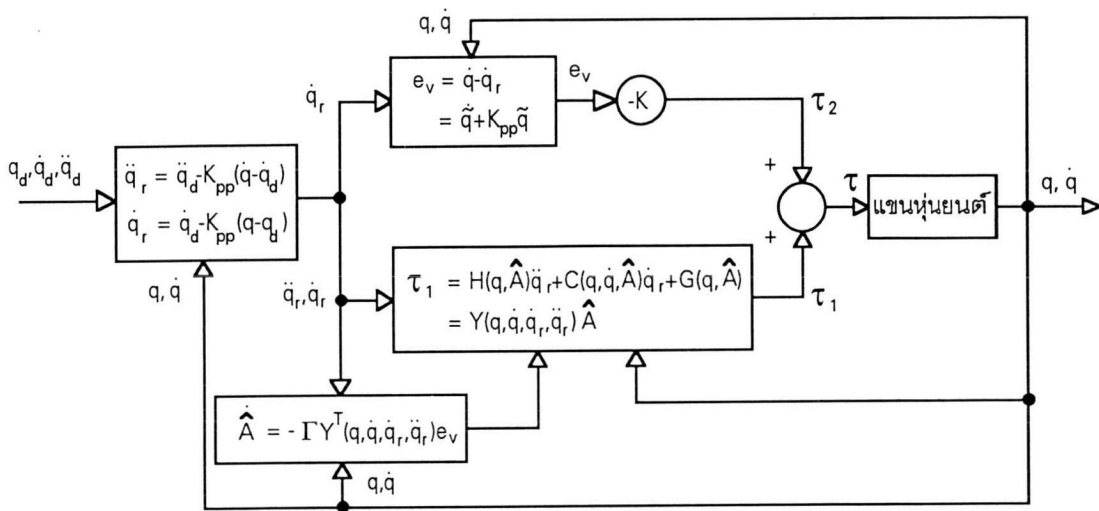
$H(q, A)$ คือ เมตริกซ์ที่แสดงผลกระทบอันเนื่องมาจากความเฉื่อยของระบบ และเป็นเมตริกซ์สมมาตรและมากกว่าศูนย์ (symmetric and positive definite matrix) ซึ่งมีมิติ $n \times n$

$C(q, \dot{q}, A)$ คือ เมตริกซ์ที่แสดงผลกระทบจากแรงคอริโอลิส และแรงเซนทริพิทอล (Coriolis และ Centripetal forces) ซึ่งมีมิติ $n \times n$

$G(q, A)$ คือ เวกเตอร์ที่แสดงผลกระทบจากแรงโน้มถ่วง ซึ่งมีมิติ n

$\tau(t)$ คือ เวกเตอร์ของแรงหรือแรงบิดที่กระทำในแต่ละข้อต่อ ทำหน้าที่เป็นสัญญาณควบคุมที่ป้อนให้กลับแขนหุ่นยนต์ ซึ่งมีมิติ n

2. ตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพลัสซีฟ (เดิม)



ภาพที่ 6 แสดงโครงสร้างของตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพลัสซีฟ (เดิม)

จากภาพที่ 6 ได้แสดงโครงสร้างของตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพลัสซีฟของแขนหุ่นยนต์ ซึ่งเป็นวิธีการควบคุมที่เสนอโดย Slotine และ Li (1988) รายละเอียดและขั้นตอนของการออกแบบมีดังนี้

2.1 การจัดเรียงพารามิเตอร์ใหม่ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบแขนหุ่นยนต์ ตามที่ได้แสดงในงานวิจัยของ Slotine และ Li เราสามารถจัดเรียงพารามิเตอร์ในส่วนของเวกเตอร์ $H(q, A)\ddot{q}$, $C(q, \dot{q}, A)\dot{q}$ และ $G(q, A)$ ซึ่งอยู่ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ ให้อยู่ในรูปผลคูณระหว่างเมตริกซ์ที่เป็นฟังก์ชันของพิกัดของข้อต่อซึ่งหาค่าได้ และเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ซึ่งมีค่าคงที่แต่เราไม่ทราบค่า ผลที่ได้จากการจัดเรียงพารามิเตอร์แสดงอยู่ในสมการที่ (2) ลักษณะการจัดเรียงพารามิเตอร์ดังกล่าวเป็นส่วนสำคัญที่ใช้มากในการออกแบบตัวควบคุม ดังที่จะได้เห็นต่อไป

$$H(q, A)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, A)\dot{q} + G(q, A) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)A \quad (2)$$

เมื่อ $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q})$ คือ เมตริกซ์ที่เกิดจากการจัดเรียงพารามิเตอร์ในส่วนของเวกเตอร์ $H(q, A)\ddot{q}$, $C(q, \dot{q}, A)\dot{q}$ และ $G(q, A)$

2.2 ส่วนที่คำนวณแรงบิด ตามที่แสดงในภาพที่ 6 เราสามารถคำนวณหาแรงหรือแรงบิด เพื่อป้อนให้กับแต่ละข้อต่อของแขนหุ่นยนต์ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\tau(t) &= H(q, \hat{A})[\ddot{q}_d - K_{pp}\dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \hat{A})[\dot{q}_d - K_{pp}\tilde{q}] + G(q, \hat{A}) \\ &\quad - K[\dot{\tilde{q}} + K_{pp}\tilde{q}] \\ &= \hat{H}\ddot{q}_r + \hat{C}\dot{q}_r + \hat{G} - K[\dot{\tilde{q}} + K_{pp}\tilde{q}] \\ &= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)\hat{A} - K[\dot{\tilde{q}} + K_{pp}\tilde{q}]\end{aligned}\quad (3)$$

เมื่อ q_d , \dot{q}_d , \ddot{q}_d คือ เวกเตอร์ที่แสดงตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งของแต่ละข้อต่อ ที่ต้องการ ซึ่งมีมิติ n

K คือ เมตริกซ์ที่แสดงอัตราขยายของสัญญาณ e_v และเป็นเมตริกซ์แยงที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

K_{pp} คือ เมตริกซ์ที่แสดงอัตราส่วนของการรวมแบบเชิงเส้นระหว่างค่าความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็ว เพื่อสร้างสัญญาณ e_v และเป็นเมตริกซ์แยงที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

$H(q, \hat{A})$ คือ ค่าประมาณของเมตริกซ์ $H(q, A)$

$C(q, \dot{q}, \hat{A})$ คือ ค่าประมาณของเมตริกซ์ $C(q, \dot{q}, A)$

$G(q, \hat{A})$ คือ ค่าประมาณของเมตริกซ์ $G(q, A)$

\hat{A} คือ ค่าประมาณของเมตริกซ์ A

$$\begin{aligned}\text{และ} \quad \dot{q}_r &= \dot{q}_d - K_{pp}\tilde{q} \\ \ddot{q}_r &= \ddot{q}_d - K_{pp}\dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} &= q - q_d \\ \dot{\tilde{q}} &= \dot{q} - \dot{q}_d \\ \ddot{\tilde{q}} &= \ddot{q} - \ddot{q}_d\end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าแรงบิดจากสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (1) จะได้ {ละอาร์กิวเมนต์ในวงเล็บ}

$$\begin{aligned}H\ddot{q} + C\dot{q} + G &= \tau(t) \\ &= \hat{H}\ddot{q}_r + \hat{C}\dot{q}_r + \hat{G} - K[\dot{\tilde{q}} + K_{pp}\tilde{q}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H[\ddot{q} - \ddot{q}_r] + C[\dot{q} - \dot{q}_r] + K[\dot{q} + K_{pp}\ddot{q}] &= [\hat{H} - H]\ddot{q}_r + [\hat{C} - C]\dot{q}_r + [\hat{G} - G] \\
&= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)(\hat{A} - A) \\
&= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)\tilde{A} \\
H\dot{e}_v + C\dot{e}_v + Ke_v &= Y(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r)\tilde{A} \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เมื่อ} \quad e_v &= \dot{q} + K_{pp}\ddot{q} \\
\dot{e}_v &= \ddot{q} + K_{pp}\dot{\ddot{q}} \\
\tilde{H} &= \hat{H} - H \\
\tilde{C} &= \hat{C} - C \\
\tilde{g} &= \hat{g} - g \\
\tilde{A} &= \hat{A} - A
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (3) เราจะเห็นว่ามีการใช้ค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบแขนหุ่นยนต์ เพื่อคำนวณหาแรงหรือแรงบิด ดังนั้นเราต้องสร้างส่วนที่ใช้คำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบ

2.3 ส่วนที่คำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบ กำหนดฟังก์ชันของเลียปูนอฟ ดังที่แสดงในสมการที่ (5)

$$V(t) = (1/2)[e_v^T He_v + \ddot{q}^T P \ddot{q} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \tilde{A}] \quad (5)$$

$$\text{เมื่อ } P = 2K_{pp}K$$

หลังจากทำการดิฟเฟอเรนเชียลฟังก์ชันของเลียปูนอฟจะได้

$$\dot{V}(t) = (1/2)[e_v^T \dot{H} e_v + 2e_v^T \dot{H} \dot{e}_v + 2\ddot{q}^T P \dot{\ddot{q}} + 2\tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}}] \quad (6)$$

แทนค่า $\dot{H} e_v$ จากสมการที่ (4) ลงในสมการที่ (6) จะได้

$$\dot{V}(t) = (1/2)e_v^T \dot{H} e_v + e_v^T [Y\tilde{A} - Ce_v - Ke_v] + \ddot{q}^T P \dot{\ddot{q}} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}}$$

เนื่องจาก $\dot{H}(q, A) - 2C(q, \dot{q}, A)$ เป็นเมตริกซ์เสกึ่งสมมาตร (skew-symmetric matrix) (Slotine และ Li, 1991) ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= e_v^T Y \tilde{A} - e_v^T K e_v + \ddot{q}^T P \dot{\ddot{q}} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}} \\
&= -e_v^T K e_v + 2\ddot{q}^T K_{pp} K \dot{\ddot{q}} + e_v^T Y \tilde{A} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}} \\
&= -\dot{\ddot{q}}^T K \dot{\ddot{q}} - \dot{\ddot{q}}^T K_{pp} K K_{pp} \ddot{q} + e_v^T Y \tilde{A} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}} \quad (7)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (7) เราจะสังเกตเห็นว่า ส่วนของ 2 พจน์แรกทางด้านขวามือทำให้ $\dot{V}(t)$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แต่สำหรับ 2 พจน์หลังเราไม่สามารถรู้ได้ว่ามากหรือน้อยกว่าศูนย์อย่างไร ดังนั้นวิธีที่จะทำให้ $\dot{V}(t)$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ (negative semidefinite) เราจะต้องทำให้ 2 พจน์สุดท้าย

ทำให้นั้นหักล้างกันเป็นศูนย์ไป จากแนวคิดดังกล่าวทำให้เราได้ส่วนที่ใช้คำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบดังที่แสดงอยู่ในสมการที่ (8) และทำให้ $\dot{V}(t)$ มีค่าตามที่แสดงในสมการที่ (9)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}} &= \dot{A} \\ &= -\Gamma Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r) e_v \end{aligned} \quad (8)$$

เมื่อ Γ คือ เมตริกซ์ที่แสดงอัตราขยายของการปรับตัว (adaptive gain) และเป็นเมตริกซ์แยงที่มากกว่าศูนย์

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_v^T Y \dot{\hat{A}} - e_v^T K e_v + 2\ddot{q}^T K_{pp} K \dot{q} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} (-\Gamma Y^T e_v) \\ &= -e_v^T K e_v + 2\ddot{q}^T K_{pp} K \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K \dot{q} - \ddot{q}^T K_{pp} K K_{pp} \dot{q} \end{aligned} \quad (9)$$

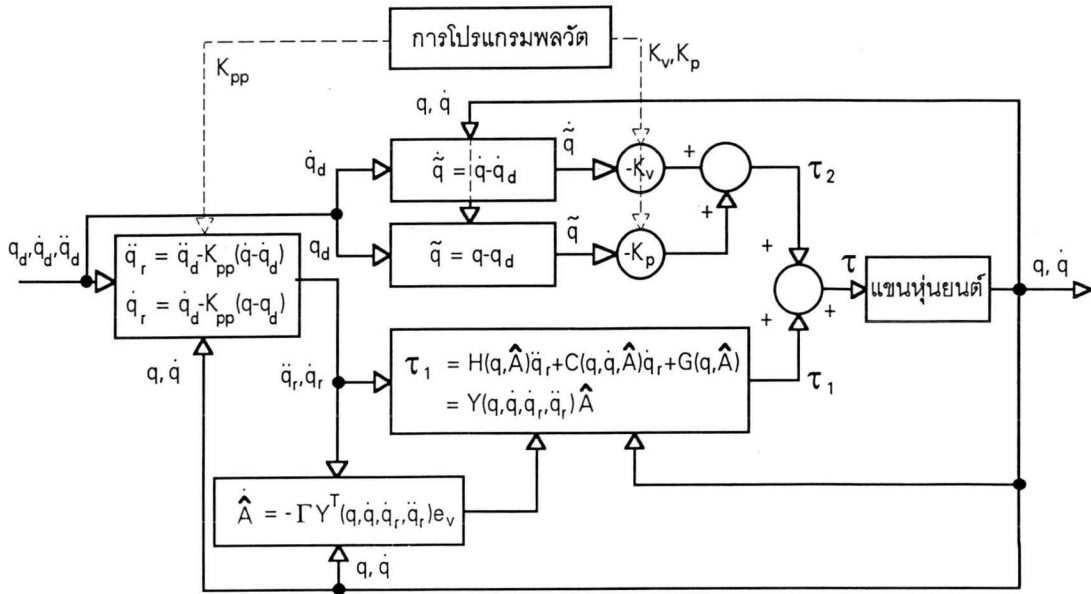
จากสมการที่ (5) เราพบว่า $V(t)$ มีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ (positive definite matrix) ตราบใดที่ค่าผิดพลาดต่าง ๆ ยังไม่เป็นศูนย์ ขณะที่สมการ (9) แสดงให้เห็นว่า $V(t)$ อาจลดลงหรือหยุดนิ่งก็ได้ แม้ว่า $V(t)$ จะยังไม่เท่ากับศูนย์ก็ตาม ดังนั้นเราสามารถสรุปได้แต่เพียงว่า $V(t)$ จะลู่เข้าหาค่า ๆ หนึ่ง (converges) นั่นคือเรายังไม่สามารถบอกได้ว่า ค่าความผิดพลาดของตำแหน่ง (\ddot{q}) และของความเร็ว (\dot{q}) จะลู่เข้าหาศูนย์ ขั้นตอนที่เราจะทำต่อไปก็คือ พิสูจน์ว่า $\dot{V}(t)$ จะลู่เข้าหาศูนย์แทน เนื่องจากระบบรวมเป็นระบบที่มีเงื่อนไขของเวลามาเกี่ยวข้อง (non-autonomous system) ดังนั้นเงื่อนไขที่จะพิสูจน์ได้ว่า $\dot{V}(t)$ จะลู่เข้าหาศูนย์ก็คือ $\dot{V}(t)$ มีความต่อเนื่องในทางเวลาอย่างสม่ำเสมอ (uniformly continuous in time) หรือหาว่า $\ddot{V}(t)$ มีขอบเขต (Slotine และ Li, 1991)

จากสมการที่ (9) หลังจากทำการดิฟเฟอเรนเชียลจะได้

$$\ddot{V}(t) = -2\dot{q}^T K \ddot{q} - 2\ddot{q}^T K_{pp} K K_{pp} \dot{q} \quad (10)$$

จากสมการที่ (5) และสมการที่ (9) เราพบว่า e_v , \dot{q} และ \ddot{q} มีขอบเขต ดังนั้น \dot{q} ก็มีขอบเขต และเมื่อพิจารณาสมการ (4) เนื่องจาก H เป็นเมตริกซ์ที่หาเมตริกซ์ผกผันได้เสมอ ดังนั้น e_v ก็จะมีขอบเขต และก็ทำให้ \ddot{q} มีขอบเขตด้วย ด้วยเหตุนี้เราจึงพิสูจน์ได้ว่า $\ddot{V}(t)$ มีขอบเขต ซึ่งหมายความว่า $\dot{V}(t)$ จะลู่เข้าหาศูนย์เมื่อเวลาผ่านไปเรื่อย ๆ เราจึงสรุปได้ว่าค่าความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็วจะลู่เข้าหาศูนย์แบบเชิงเส้นกำกับในวงกว้าง

3. ตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพิเศษที่เหมาะสมที่สุด



ภาพที่ 7 แสดงโครงสร้างของตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพิเศษที่เหมาะสมที่สุด

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงวิธีออกแบบตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพิเศษที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งเป็นจุดประสงค์หลักของงานวิทยานิพนธ์นี้ โครงสร้างการทำงานทั้งหมดแสดงอยู่ในภาพที่ 7 โดยมีรายละเอียดดังนี้

3.1 ส่วนที่คำนวณแรงบิด ก่อนอื่นเราจะดัดแปลงวิธีคำนวณหาแรงหรือแรงบิดของตัวควบคุมชนิดปรับตัวเองโดยตรงที่ใช้คุณสมบัติพิเศษ เพื่อให้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของตัวควบคุมมีความเป็นอิสระต่อกันมากขึ้น

$$\begin{aligned} \tau(t) &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \hat{A} - K[\dot{q} + K_{pp} \tilde{q}] \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \hat{A} - K\dot{q} + KK_{pp} \tilde{q} \end{aligned} \tag{3}$$

จากสมการ (3) เราจะสังเกตเห็นว่าอัตราขยายของค่าความผิดพลาดตำแหน่ง (KK_{pp}) จะมีค่าขึ้นอยู่กับอัตราขยายของค่าความผิดพลาดความเร็ว (K) และค่าคงที่ที่ใช้ในการสร้างสัญญาณ \dot{q}_r (K_{pp}) ดังนั้นเราจึงเสนอให้มีการปรับปรุงในส่วนของการคำนวณแรงหรือแรงบิดดังนี้

$$\begin{aligned} \tau(t) &= H(q, \hat{A})[\dot{q}_d - K_{pp} \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}, \hat{A})[\dot{q}_d - K_{pp} \tilde{q}] + G(q, \hat{A}) - K_v \dot{\tilde{q}} - K_p \tilde{q} \\ &= \hat{H} \dot{q}_r + \hat{C} \dot{q}_r + \hat{G} - K_v \dot{\tilde{q}} - K_p \tilde{q} \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \hat{A} - K_v \dot{\tilde{q}} - K_p \tilde{q} \end{aligned} \tag{11}$$

เมื่อ K_v คือ เมตริกซ์ที่แสดงอัตราขยายของค่าความผิดพลาดของความเร็ว และเป็นเมตริกซ์แยงที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

K_p คือ เมตริกซ์ที่แสดงอัตราขยายของค่าความผิดพลาดของตำแหน่ง และเป็นเมตริกซ์แยงที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

หลังจากแทนค่าแรงบิดในสมการที่ (11) ลงในสมการที่ (1) จะได้ (ละอาร์กิวเมนต์ในวง

เล็บ)

$$\begin{aligned}
 H\ddot{q} + C\dot{q} + G &= \tau(t) \\
 &= \hat{H}\ddot{q}_r + \hat{C}\dot{q}_r + \hat{G} - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q} \\
 H[\ddot{q} - \ddot{q}_r] + C[\dot{q} - \dot{q}_r] + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} &= [\hat{H} - H]\ddot{q}_r + [\hat{C} - C]\dot{q}_r + [\hat{G} - G] \\
 &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)[\hat{A} - A] \\
 &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{A} \\
 H\dot{e}_v + Ce_v + K_v\dot{\tilde{q}} + K_p\tilde{q} &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{A} \\
 H\ddot{\tilde{q}} + HK_{pp}\dot{\tilde{q}} + C\dot{\tilde{q}} + CK_{pp}\tilde{q} &= Y\tilde{A} - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q} \quad (12)
 \end{aligned}$$

3.2 ส่วนที่คำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบ กำหนดฟังก์ชันของเลียปูโนฟ ดังที่แสดงในสมการที่ (13)

$$V(t) = (1/2)[e_v^T H e_v + \tilde{q}^T P \tilde{q} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \tilde{A}] \quad (13)$$

$$\text{เมื่อ } P = K_p + K_{pp} K_v$$

หลังจากทำการดิฟเฟอเรนเชียลฟังก์ชันของเลียปูโนฟจะได้

$$\dot{V}(t) = (1/2)[e_v^T \dot{H} e_v + 2e_v^T H \dot{e}_v + 2\tilde{q}^T P \dot{\tilde{q}} + 2\tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}}] \quad (14)$$

แทนค่า $\dot{H} e_v$ จากสมการที่ (12) ลงในสมการที่ (14) จะได้

$$\dot{V}(t) = (1/2)e_v^T \dot{H} e_v + e_v^T [Y\tilde{A} - Ce_v - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q}] + \tilde{q}^T P \dot{\tilde{q}} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}}$$

เนื่องจาก $\dot{H}(q, A) - 2C(q, \dot{q}, A)$ เป็นเมตริกซ์เสถียรสมมาตร ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= e_v^T Y\tilde{A} - e_v^T K_v\dot{\tilde{q}} - e_v^T K_p\tilde{q} + \tilde{q}^T [K_p + K_{pp} K_v]\dot{\tilde{q}} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}} \\
 &= -e_v^T K_v\dot{\tilde{q}} - e_v^T K_p\tilde{q} + \tilde{q}^T [K_p + K_{pp} K_v]\dot{\tilde{q}} + e_v^T Y\tilde{A} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}} \\
 &= -\dot{\tilde{q}}^T K_v\dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T K_{pp} K_p\tilde{q} + e_v^T Y\tilde{A} + \tilde{A}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{A}} \quad (15)
 \end{aligned}$$

จากสมการ (15) เราจะสังเกตเห็นว่า ส่วนของ 2 พจน์แรกทางด้านขวามือทำให้ $\dot{V}(t)$

มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ แต่สำหรับ 2 พจน์หลังเราไม่สามารถรู้ได้ว่ามากหรือน้อยกว่าศูนย์อย่างไร

ดังนั้นวิธีที่จะทำให้ $\dot{V}(t)$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เราจะต้องทำให้ 2 พจน์สุดท้ายนั้นหักล้างกันเป็นศูนย์

ไป จากแนวคิดดังกล่าวทำให้เราได้กฎการปรับตัวดังที่แสดงอยู่ในสมการที่ (16) และทำให้ $\dot{V}(t)$ มีค่าตาม
ที่แสดงในสมการที่ (17)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{A}} &= \dot{\hat{A}} \\ &= -\Gamma Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{q}_r) e_v\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= e_v^T Y \dot{\hat{A}} - e_v^T K_v \dot{q} - e_v^T K_p \ddot{q} + \ddot{q}^T (K_p + K_{pp} K_v) \dot{q} \\ &\quad + \dot{\hat{A}}^T \Gamma^{-1} (-\Gamma Y^T e_v) \\ &= -e_v^T K_v \dot{q} - e_v^T K_p \ddot{q} + \ddot{q}^T (K_p + K_{pp} K_v) \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T K_v \dot{q} - \ddot{q}^T K_{pp} K_p \dot{q}\end{aligned}\quad (17)$$

จากสมการที่ (13) เราพบว่า $V(t)$ มีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ (positive definite matrix) ครอบคลุมที่ค่าผิดพลาดต่าง ๆ ยังไม่เป็นศูนย์ ขณะที่สมการ (17) แสดงให้เห็นว่า $V(t)$ อาจลดลงหรือหยุด
นิ่งก็ได้ แม้ว่า $V(t)$ จะยังไม่เท่ากับศูนย์ก็ตาม ดังนั้นเราสรุปได้แต่เพียงว่า $V(t)$ จะลู่เข้าหาค่า ๆ หนึ่ง
(converges) นั่นคือเรายังสรุปไม่ได้ว่า ค่าความผิดพลาดของตำแหน่ง (\dot{q}) และของความเร็ว (\ddot{q}) จะลู่เข้า
หาศูนย์ ขั้นตอนที่เราจะทำต่อไปก็คือ พิสูจน์ว่า $\dot{V}(t)$ จะลู่เข้าหาศูนย์แทน เนื่องจากระบบรวมเป็นระบบ
ที่มีเงื่อนไขของเวลามาเกี่ยวข้อง (non-autonomous system) ดังนั้นเงื่อนไขที่จะพิสูจน์ได้ว่า $\dot{V}(t)$ จะลู่เข้าหา
ศูนย์ก็คือ $\dot{V}(t)$ มีความต่อเนื่องในทางเวลาอย่างสม่ำเสมอ หรือหาว่า $\ddot{V}(t)$ มีขอบเขต

จากสมการที่ (17) หลังจากทำการดิฟเฟอเรนเชียลจะได้

$$\ddot{V}(t) = -2\dot{q}^T K_v \ddot{q} - 2\ddot{q}^T K_{pp} K \dot{q}\quad (18)$$

จากสมการที่ (13) และสมการที่ (17) เราพบว่า e_v , \dot{q} และ \ddot{q} มีขอบเขต ดังนั้น \dot{q} ก็มี
ขอบเขต และเมื่อพิจารณาสมการที่ (12) เนื่องจาก H เป็นเมตริกซ์ที่หาเมตริกซ์ผกผันได้เสมอ ดังนั้น \dot{e}_v ก็
จะมีขอบเขต และก็ทำให้ \ddot{q} มีขอบเขตด้วย ด้วยเหตุนี้เราจึงพิสูจน์ได้ว่า $\ddot{V}(t)$ มีขอบเขต ซึ่งหมายความว่า
 $\dot{V}(t)$ จะลู่เข้าหาศูนย์เมื่อเวลาผ่านไปเรื่อย ๆ เราจึงสรุปได้ว่าค่าความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็วจะ
ลู่เข้าหาศูนย์แบบเชิงเส้นกำกับในวงกว้าง

จากการดัดแปลงวิธีคำนวณหาแรงหรือแรงบิด เราจะสังเกตเห็นว่า ค่าพารามิเตอร์ของ
ตัวควบคุมแต่ละตัวมีความเป็นอิสระต่อกันมากขึ้น แต่ในขณะเดียวกันปัญหาการเลือกใช้ค่าที่เหมาะสมต่อ
ลักษณะของการทำงานก็เพิ่มมากขึ้นด้วย การค้นหาวิธีที่ใช้สำหรับคำนวณว่า จะต้องใช้ค่าพารามิเตอร์
ของตัวควบคุมแต่ละตัวมากน้อยอย่างไร ควรจะเป็นหนทางที่ดีที่สุด สำหรับการลดเวลาของขั้นตอนการปรับ
จูนค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม

3.3 การใช้วิธีโปรแกรมพลวัตเพื่อคำนวณหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุม จากแบบจำลองเชิงเลขของแขนหุ่นยนต์ ส่วนคำนวณแรงบิด และระบบควบคุมปิดที่ได้จากการแทนค่าแรงบิดจากสมการที่ (11) ลงในสมการที่ (1)

$$H(q, A)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, A)\dot{q} + G(q, A) = \tau(t) \quad (1)$$

$$\tau(t) = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{A} - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q} \quad (11)$$

$$H\ddot{\tilde{q}} + HK_{pp}\dot{\tilde{q}} + C\dot{\tilde{q}} + CK_{pp}\tilde{q} = Y\tilde{A} - K_v\dot{\tilde{q}} - K_p\tilde{q} \quad (12)$$

พิจารณาสมการ (12) จะเห็นว่าเป็นสมการของความผิดพลาด (error equation) โดยที่พจน์ในทางขวามือจะมีลักษณะเหมือนกับอินพุตที่ป้อนให้กับพจน์ในทางซ้ายมือ พจน์แรกของทางขวามือเกิดจากความผิดพลาดระหว่างค่าจริงและค่าประมาณของพารามิเตอร์ระบบ ขณะที่ 2 พจน์ที่เหลือเป็นส่วนหนึ่งของแรงหรือแรงบิดที่คำนวณได้ ทั้ง 2 พจน์นี้มีลักษณะเป็นตัวควบคุมแบบพีดี ซึ่งมีส่วนช่วยให้แขนหุ่นยนต์สามารถติดตามเส้นทางการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นกำกับ เรากำหนดให้ 2 พจน์นี้รวมกันเป็นสัญญาณควบคุมที่ต้องการออกแบบให้มีค่าที่เหมาะสมที่สุดดังแสดงในสมการที่ (19) เพื่อจะได้คำนวณหาอัตราขยายที่เหมาะสมของตัวควบคุมแบบพีดี

$$H\ddot{\tilde{q}} + HK_{pp}\dot{\tilde{q}} + C\dot{\tilde{q}} + CK_{pp}\tilde{q} = Y\tilde{A} + u \quad (19)$$

จัดการเขียนให้อยู่ในรูปสมการสถานะ (state equation) โดยรวมเอาส่วนที่คำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบเข้าเป็นส่วนหนึ่งของสมการ ดังแสดงในสมการที่ (20)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{A}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -H^{-1}C - K_{pp} & -H^{-1}CK_{pp} & H^{-1}Y \\ I_{n \times n} & 0 & 0 \\ -\Gamma Y^T & -\Gamma Y^T K_{pp} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \\ \tilde{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} -H^{-1}C - K_{pp} & -H^{-1}CK_{pp} & H^{-1}Y \\ I_{n \times n} & 0 & 0 \\ -\Gamma Y^T & -\Gamma Y^T K_{pp} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} H^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (20)$$

การคำนวณหาสัญญาณควบคุม u ที่เหมาะสมที่สุด เริ่มต้นโดยการสร้างดัชนีสมรรถนะ (performance index) ตามที่แสดงในสมการที่ (21)

$$J = (1/2)\tilde{A}^T(\infty)\Gamma_1^{-1}\tilde{A}(\infty) + (1/2)\int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u + 2x^T S u] dt \quad (21)$$

$$\text{เมื่อ } Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$(Q - S^T R^{-1} S) > 0$$

และ Q_1 เป็นเมตริกซ์ที่แสดงค่าถ่วงน้ำหนักของค่าความผิดพลาดตำแหน่งและความเร็ว ซึ่งมีมิติ $2n \times 2n$

R เป็นเมตริกซ์ที่แสดงค่าถ่วงน้ำหนักของขนาดสัญญาณควบคุม u และเป็นเมตริกซ์ที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

S_1 เป็นเมตริกซ์ที่แสดงค่าถ่วงน้ำหนัก สำหรับพจน์ที่ประกอบด้วยความผิดพลาดของตำแหน่งและความเร็ว กับขนาดของสัญญาณควบคุม u ซึ่งมีมิติ $2n \times n$

Γ_1^{-1} เป็นเมตริกซ์ที่แสดงค่าถ่วงน้ำหนักของค่าความผิดพลาด ที่เกิดจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ของระบบ ที่เวลานั้น

หลังจากใช้วิธีโปรแกรมพลวัตคำนวณหาสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งแสดงอยู่ในภาคผนวก ข จะได้

$$\begin{aligned} u &= u^* \\ &= -R^{-1} H^{-1}(q) T_{11} H(q) B^T T_0 x - R^{-1} S^T x \\ &= -t_{11} R^{-1} B^T T_0 x - R^{-1} S^T x \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{เมื่อ } B^T &= [I \ 0 \ 0] \\ T_0 &= \begin{bmatrix} t_{11} & T_{12} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ค่าของ t_{11} T_{12} และ K_{pp} จะคำนวณจากสมการ (23) และ (24)

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Q - (S^T + t_{11} B^T T_0)^T R^{-1} (S^T + t_{11} B^T T_0) = 0 \quad (23)$$

เมื่อ P เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์

$$K_{pp} = t_{11}^{-1} T_{12} \quad (24)$$

ในส่วนของการปรับค่าประมาณของพารามิเตอร์ระบบจะเป็นไปตามสมการ (25)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{A}} \\ &= -t_{11}^2 \Gamma_1 Y^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) \mathbf{e}_v\end{aligned}\quad (25)$$

3.4 ผลกระทบจากความเสียดทานต่อการออกแบบตัวควบคุม เนื่องจากการคำนวณหาสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของผลกระทบจากแรงเสียดทาน เป็นเรื่องค่อนข้างยาก ดังนั้นงานวิจัยจำนวนมาก ที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบตัวควบคุม จึงไม่ได้พิจารณาผลกระทบอันอาจจะเกิดจากความเสียดทานของระบบ ในหัวข้อนี้เราจะแสดงการออกแบบตัวควบคุม เมื่อพิจารณาให้แขนหุ่นยนต์ได้รับผลกระทบจากแรงเสียดทานฝืด (viscous friction) ในขณะที่ทำงาน

จากสมการ (26) ซึ่งเป็นสมการของระบบแขนหุ่นยนต์ ที่ครอบคลุมถึงผลกระทบจากแรงเสียดทานฝืด โดยการใช้เทคนิคการจัดเรียงพารามิเตอร์ เราสามารถเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์ได้ใหม่ ดังแสดงในสมการที่ (27)

$$H(q, A)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, A)\dot{q} + G(q, A) + F_v\dot{q} = \tau(t) \quad (26)$$

$$H(q, A)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, A)\dot{q} + G(q, A) + F_v\dot{q} = Y(q, \dot{q}, \dot{q}, \ddot{q})A + Y_f(\dot{q})K_f \quad (27)$$

ในลักษณะเช่นเดียวกับหัวข้อย่อย 3.1 เราได้สมการที่ใช้คำนวณหาแรงหรือแรงบิดตามที่แสดงในสมการ (28) เมื่อแทนค่าสัญญาณควบคุมจากสมการที่ (28) ลงในสมการที่ (26) จะได้ระบบควบคุมปิดดังที่แสดงอยู่ในสมการ (29)

$$\begin{aligned}\tau(t) &= H(q, \hat{A})[\ddot{q}_d - K_{pp}\dot{q}] + C(q, \dot{q}, \hat{A})[\dot{q}_d - K_{pp}\dot{q}] + G(q, \hat{A}) + \hat{F}_v\dot{q} \\ &\quad - K_v\dot{q} - K_p\dot{q} \\ &= \hat{H}\ddot{q}_r + \hat{C}\dot{q}_r + \hat{G} + \hat{F}_v\dot{q} - K_v\dot{q} - K_p\dot{q} \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{A} + Y_f(\dot{q})\hat{K}_f - K_v\dot{q} - K_p\dot{q}\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}H[\ddot{q} - \ddot{q}_r] + C[\dot{q} - \dot{q}_r] &= [\hat{H} - H]\ddot{q}_r + [\hat{C} - C]\dot{q}_r + [\hat{G} - G] \\ &\quad + [\hat{F}_v - F_v]\dot{q} - K_v\dot{q} - K_p\dot{q} \\ &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{A} + Y_f(\dot{q})\tilde{K}_f - K_v\dot{q} - K_p\dot{q} \\ H\mathbf{e}_v + C\mathbf{e}_v &= Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{A} + Y_f(\dot{q})\tilde{K}_f - K_v\dot{q} - K_p\dot{q}\end{aligned}\quad (29)$$

$$H\ddot{q} + HK_{pp}\dot{q} + C\dot{q} + CK_{pp}\dot{q} = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{A} + Y_f(\dot{q})\tilde{K}_f - K_v\dot{q} - K_p\dot{q} \quad (30)$$

เมื่อ F_v คือ เมตริกซ์ที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานฝืด และเป็นเมตริกซ์

แท่งที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

K_f คือ เวกเตอร์ของค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานฝืด ซึ่งเกิดจากการจัดเรียงพารามิเตอร์ในส่วนของแรงเสียดทานฝืด และมีมิติ n

$Y_f(\dot{q})$ คือ เมตริกซ์ที่เกิดจากการจัดเรียงพารามิเตอร์ในส่วนของแรงเสียดทานฝืด และมีมิติ $n \times n$

จากการเปรียบเทียบระหว่างสมการ (30) และสมการ (12) เราจะพบว่าพจน์ที่เพิ่มขึ้นก็คือ พจน์ที่เกิดจากค่าความผิดพลาด ระหว่างค่าจริงและค่าประมาณของค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานฝืด $\{Y_f(\dot{q})\tilde{K}_f\}$ ซึ่งก็มีลักษณะเช่นเดียวกับพจน์ของ $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r, \ddot{q}_r)\tilde{A}$ ดังนั้นเมื่อคำนวณหาส่วนที่ใช้คำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ของระบบแขนหุ่นยนต์โดยวิธีเดียวกับที่แสดงในหัวข้อย่อย 3.2 นอกจากจะได้กฎการปรับตัวเหมือนกับที่แสดงในสมการ (16) แล้ว ยังต้องเพิ่มส่วนที่ใช้คำนวณหาค่าประมาณของสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานฝืด ดังที่แสดงในสมการ (31)

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{K}}_f &= \dot{\tilde{K}}_f \\ &= -\Gamma_f Y_f^T(\dot{q}) e_v\end{aligned}\quad (31)$$

เมื่อ Γ_f คือ เมตริกซ์ที่แสดงอัตราขยายของการปรับตัว (adaptive gain) และเป็นเมตริกซ์แท่งที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งมีมิติ $n \times n$

จากสมการ (30) (31) และ (16) เราสามารถเขียนสมการสถานะในลักษณะเดียวกับสมการ (20) ได้ดังที่แสดงในสมการ (32)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \ddot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{A}} \\ \dot{\tilde{K}}_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -H^{-1}C - K_{pp} & -H^{-1}CK_{pp} & H^{-1}Y & H^{-1}Y_f \\ I_{n \times n} & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma Y^T & -\Gamma Y^T K_{pp} & 0 & 0 \\ -\Gamma_f Y_f^T & -\Gamma_f Y_f^T K_{pp} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \\ \tilde{A} \\ \tilde{K}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \dot{x} &= \begin{bmatrix} -H^{-1}C - K_{pp} & -H^{-1}CK_{pp} & H^{-1}Y & H^{-1}Y_f \\ I_{n \times n} & 0 & 0 & 0 \\ -\Gamma Y^T & -\Gamma Y^T K_{pp} & 0 & 0 \\ -\Gamma_f Y_f^T & -\Gamma_f Y_f^T K_{pp} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} H^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}\quad (32)$$

เมื่อ u คือ ส่วนของสัญญาณควบคุมที่เราต้องการออกแบบให้มีค่าเหมาะสมที่สุด

นอกจากค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ A (\tilde{A}) แล้ว สมการสถานะที่แสดงอยู่ในสมการ (32) ยังประกอบด้วยค่าความผิดพลาดของพารามิเตอร์ K_f (\tilde{K}_f) ด้วยเหตุนี้ตรรกะที่สมรรถนะที่เราต้องการทำให้มีค่าน้อยที่สุดจะต้องดัดแปลงใหม่ เพื่อให้ครอบคลุมถึงส่วนของ \tilde{K}_f ดังแสดงในสมการ (33)

$$J = (1/2)\tilde{A}^T(\infty)\Gamma_1^{-1}\tilde{A}(\infty) + (1/2)\tilde{K}_f^T(\infty)\Gamma_2^{-1}\tilde{K}_f(\infty) + (1/2)\int_0^{\infty}[x^T Q x + u^T R u + 2x^T S u] dt \quad (33)$$

$$\text{เมื่อ } Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

$$(Q - S^T R^{-1} S) > 0$$

และ Γ_1^{-1} เป็นเมตริกซ์ที่แสดงค่าถ่วงน้ำหนักของค่าความผิดพลาด ที่เกิดจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ A ที่เวลาอนันต์

Γ_2^{-1} เป็นเมตริกซ์ที่แสดงค่าถ่วงน้ำหนักของค่าความผิดพลาด ที่เกิดจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ K_f ที่เวลาอนันต์

จากการคำนวณในภาคผนวก ข เราพบว่าการคำนวณหาสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมที่สุดจะเป็นไปตามสมการ (34) ค่าของ t_{11} T_{12} และ K_{pp} คำนวณจากสมการ (35) และ (36) และกฎการปรับค่าประมาณของพารามิเตอร์ระบบก็ได้ตามสมการ (37) และ (38)

$$u = -t_{11}R^{-1}B^T T_0 x - R^{-1}S^T x \quad (34)$$

$$\text{เมื่อ } B^T = [I \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Q - (S^T + t_{11}B^T T_0)^T R^{-1} (S^T + t_{11}B^T T_0) = 0 \quad (35)$$

โดย P ต้องเป็นเมตริกซ์ที่มากกว่าศูนย์

$$K_{pp} = t_{11}^{-1} T_{12} \quad (36)$$

$$\dot{\tilde{A}} = -t_{11}^2 \Gamma_1 Y^T (q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) e_v \quad (37)$$

$$\dot{\tilde{K}}_f = -t_{11}^2 \Gamma_2 Y_f^T (\dot{q}) e_v \quad (38)$$