



บทที่ 2
ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

ในบทนี้ ได้กล่าวถึง หลักการสมมติฐาน และทฤษฎีต่าง ๆ ที่ใช้ในการศึกษาวิเคราะห์ ลักษณะกระแสในท่อไหล คือ สมการพื้นฐานของการไหล วิธีไฟไนท์เอเลเมนต์ ทฤษฎีน้ำขึ้นน้ำลง และค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณ

2.1 สมการพื้นฐานของการไหล

ในการศึกษานี้เป็นการศึกษาถึงลักษณะการไหลของน้ำในท่อไหล ซึ่งต้องให้ สมการของการเคลื่อนที่ (Equation of Motion) หรือ สมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และ สมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity Equation) มาอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าว

2.1.1 สมมติฐาน

เนื่องจากสภาพทางภูมิศาสตร์ของอ่าวไทยตอนบน มีความลึกน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับความกว้างของอ่าว ดังนั้น จึงสามารถกำหนดสมมติฐานได้ดังนี้

- 1) ความเร็วของการไหลในแนวตั้งมีค่าเป็นศูนย์
- 2) อัตราเร่งในแนวตั้งมีค่าน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับอัตราเร่งของแรงโน้มถ่วงของโลก จึงสามารถตัดออกไม่นำมาพิจารณาได้
- 3) ความดันในแนวตั้ง มีการเปลี่ยนแปลงแบบ hydrostatic

นอกจากนี้ค่าความหนาแน่นของน้ำ จะสมมติว่ามีค่าเท่ากันตลอดทั้งพื้นที่ศึกษา และค่าแรงเสียดทานต่าง ๆ จะรวมอยู่ในรูปของความเค้น เนื่องจากแรงเฉือน (Shear Stress)

จากสมมติฐานดังกล่าว เมื่อคำนึงถึงผลจากการเคลื่อนที่รอบตัวเองของโลกด้วยแล้ว เราสามารถเปลี่ยนสมการ Navier-Stokes และสมการการไหลต่อเนื่อง ให้เป็นสมการพื้นฐานของการไหล 2 มิติ ในแนวราบ คือ

2.1.2 สมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial E}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + F_{bx} - F_{sx} = 0 \text{ ----- (1)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial E}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + F_{by} - F_{sy} = 0 \text{ ----- (2)}$$

2.1.3 สมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity Equation)

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial \{(H+E)U\}}{\partial x} + \frac{\partial \{(H+E)V\}}{\partial y} = 0 \quad \text{-----(3)}$$

โดยที่

U, V = ความเร็วในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ

E = ระดับของผิวน้ำ วัดจากระดับน้ำปานกลาง

H = ความลึกวัดจากท้องทะเลถึงระดับน้ำทะเลปานกลาง

g = อัตราเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก

f = Coriolis Parameter = $2 \omega \sin \psi$

ω = ความเร็วเชิงมุมของโลก

ψ = Latitude

t = เวลา

μ = Eddy Viscosity

F_{bx}, F_{by} = Bottom Friction Stress ในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ

F_{sx}, F_{sy} = Wind Stress ในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ

$$F_{bx} = \frac{gU\sqrt{U^2+V^2}}{C^2(H+E)}$$

$$F_{by} = \frac{gV\sqrt{U^2+V^2}}{C^2(H+E)}$$

$$F_{sx} = \frac{\gamma^2 \rho_a U_o \sqrt{U_o^2+V_o^2}}{\rho_w (H+E)}$$

$$F_{sy} = \frac{\gamma^2 \rho_a V_o \sqrt{U_o^2+V_o^2}}{\rho_w (H+E)}$$

ρ_w = ความหนาแน่นของน้ำ

ρ_a = ความหนาแน่นของอากาศ

U_o, V_o = ความเร็วลมในแนวแกน X และ Y ตามลำดับ

γ^2 = สัมประสิทธิ์ความเค้นของลม (Wind Stress Coefficient)

C = Chezy's Constant

เนื่องจากสมการที่ (1), (2) และ (3) เป็นสมการ nonlinear partial differential เพื่อให้การแก้สมการง่ายขึ้น สามารถเปลี่ยนให้เป็นสมการ quasilinear ได้ โดยเปลี่ยน non-linearized term บางเทอมให้เป็น linearized term โดยการแทนค่า U, V และ E บางเทอมใน non-linearized term ด้วย U, V และ E ที่รู้ค่าซึ่งอาจได้จาก initial condition หรือจาก time step ที่แล้วนั้นคือ สมการที่ (1) ถึง (3) เปลี่ยนแปลง

ได้เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{V} \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial E}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \hat{\lambda} U - \hat{W}_x = 0 \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{V} \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial E}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \hat{\lambda} V - \hat{W}_y = 0 \quad \text{----- (5)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{\eta}U)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{\eta}V)}{\partial y} = 0 \quad \text{----- (6)}$$

โดยที่ ค่าของ $\hat{U}, \hat{V}, \hat{E}$ เท่ากับค่าของ U, V, E ที่รู้ค่าจาก initial condition หรือจาก time step ที่แล้ว

$$\hat{\lambda} = \frac{g \sqrt{\hat{U}^2 + \hat{V}^2}}{C^2 \hat{\eta}} \quad \text{----- (7)}$$

$$\hat{W}_x = \frac{\gamma^2 \rho_0 U_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\rho_w \hat{\eta}} \quad \text{----- (8)}$$

$$\hat{W}_y = \frac{\gamma^2 \rho_0 V_0 \sqrt{U_0^2 + V_0^2}}{\rho_w} \quad \text{----- (9)}$$

$$\hat{\eta} = H + \hat{E} \quad \text{----- (10)}$$

2.1.4 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (Initial Condition and Boundary Condition)

ในการแก้สมการของการไหล จำเป็นต้องรู้เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบเขตเพื่อใช้ในการคำนวณ โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้น คือ ค่าของตัวแปรในเวลาที่จะเริ่มทำการคำนวณ ซึ่งอาจจะทำการวัดในสนามหรือกำหนดค่าที่เหมาะสมขึ้น นั่นคือ

$$\begin{aligned} U &= U^*(x, y, t = 0) \\ V &= V^*(x, y, t = 0) \\ E &= E^*(x, y, t = 0) \end{aligned} \quad \text{----- (11)}$$

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการคำนวณ สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ส่วน คือ

- (1) S_0 คือ ขอบเขตด้านที่กำหนดระดับน้ำ (Water Level Condition) ได้แก่ ด้านขอบเขตเปิด (Open Boundary) ซึ่งอาจรวมถึงขอบเขตแม่น้ำ (River Boundary) และขอบเขตชายฝั่ง (Land Boundary) ในกรณีที่รู้

ค่าของระดับน้ำที่ขอบเขตนั้น ๆ โดยที่เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$E = E^* \quad \text{----- (12)}$$

- (2) S_p คือ ขอบเขตด้านที่มีการถ่ายเทมวล (Mass Transfer Condition) ได้แก่ ด้านขอบเขตเปิด (Open Boundary) และด้านขอบเขตแม่น้ำ (River Boundary) ในกรณีที่รู้ค่าของมวลน้ำที่มีการไหลเข้าหรือออกจากขอบเขต เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$Un_x + Vn_y = R^* \quad \text{----- (13)}$$

เมื่อ R^* = หน่วยปริมาตรที่มีการถ่ายเทที่ขอบเขต

n_x, n_y = directional cosine ตั้งฉากกับขอบเขต

- (3) S_q คือ ขอบเขตด้านที่มีการถ่ายเทโมเมนตัม (Momentum Transfer Condition) ได้แก่ ด้านขอบเขตเปิด (Open Boundary) ซึ่งมีการถ่ายเทโมเมนตัม ระหว่างภายในและภายนอกขอบเขต เงื่อนไขขอบเขต คือ

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \frac{\partial U}{\partial y} &= Q_x^* \\ \mu \frac{\partial V}{\partial x} + \mu \frac{\partial V}{\partial y} &= Q_y^* \end{aligned} \quad \text{----- (14)}$$

เมื่อ Q_x^*, Q_y^* = หน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ขอบเขต

ในการศึกษานี้ ขอบเขตของพื้นที่ศึกษา แบ่งได้เป็น 3 ส่วน คือ ขอบเขตเปิด ขอบเขตแม่น้ำ และขอบเขตชายฝั่ง โดยที่เงื่อนไขขอบเขตของขอบเขตเปิด คือ $E = E^*$ และสำหรับเงื่อนไขของการถ่ายเทโมเมนตัมนั้น จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่ามีค่าน้อยกว่าแรงเสียดทานที่ท้องน้ำ (bottom friction) มาก จึงไม่นำมาพิจารณา (Kawachi, 1987) สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของขอบเขตแม่น้ำนั้น เนื่องจากมีการบันทึกข้อมูลระดับน้ำที่บริเวณขอบเขตแม่น้ำ แต่ไม่มีการบันทึกข้อมูลของการไหลเข้าออกของมวล ดังนั้น จึงจะใช้เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดระดับน้ำ คือ $E = E^*$ และสำหรับเงื่อนไขขอบเขตด้านชายฝั่งนั้น จะพิจารณาว่ามวลของน้ำไม่สามารถผ่านเข้าออกที่ขอบเขตชายฝั่งได้ นั่นคือ $R^* = 0$

2.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

เนื่องจากสมการของการไหลในแนวราบ 2 มิติ ที่กล่าวถึงในหัวข้อที่แล้ว เป็นสมการ partial differential ซึ่งไม่สามารถแก้สมการด้วยวิธี อินทิเกรต โดยตรงได้ ดังนั้น จึงต้องใช้วิธีการทาง numerical เช่น วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในการศึกษานี้ จะเลือกใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เริ่มต้นโดยการแบ่งพื้นที่ศึกษาออกเป็นพื้นที่ย่อย ๆ ขนาดเล็ก ซึ่ง

เชื่อมต่อกันด้วย Node ที่ขอบเขตของแต่ละเอลิเมนต์ (รูปที่ 2-1) และจะทำการประมาณค่าตัวแปรในแต่ละเอลิเมนต์ โดยสมการ polynomial คือ

$$U = \sum_{i=1}^N L_i(x,y)U_i(t) = [L]\{U\}^e \quad \text{-----(15)}$$

โดยที่ $L_i(x,y)$ = ค่า interpolation function ที่ node i ของแต่ละเอลิเมนต์
 $U_i(t)$ = ค่าตัวแปร U ที่ node i ของแต่ละเอลิเมนต์
 N = จำนวน node ในแต่ละเอลิเมนต์

ในการศึกษานี้ทำการแบ่งพื้นที่ โดยใช้ linear triangular element ซึ่งมีจำนวน 3 node ในแต่ละเอลิเมนต์ และค่า interpolation function ของแต่ละ node คือ

$$L_1(x,y) = \frac{1}{2\Delta}(a_1+b_1x+c_1y) \quad \text{-----(16)}$$

$$L_2(x,y) = \frac{1}{2\Delta}(a_2+b_2x+c_2y) \quad \text{-----(17)}$$

$$L_3(x,y) = \frac{1}{2\Delta}(a_3+b_3x+c_3y) \quad \text{-----(18)}$$

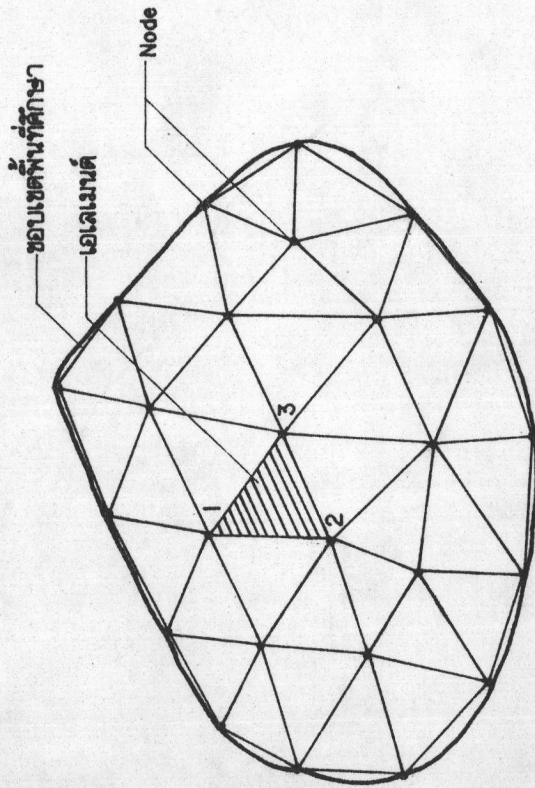
โดยที่ $L_1(x,y)+L_2(x,y)+L_3(x,y) = 1$

เมื่อ Δ = พื้นที่ของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ -----(19)

และ $a_1 = x_2y_3 - x_3y_2$, $b_1 = y_2 - y_3$, $c_1 = x_3 - x_2$
 $a_2 = x_3y_1 - x_1y_3$, $b_2 = y_3 - y_1$, $c_2 = x_1 - x_3$ -----(20)
 $a_3 = x_1y_2 - x_2y_1$, $b_3 = y_1 - y_2$, $c_3 = x_2 - x_1$

โดยตำแหน่งของ node ที่ 1,2 และ 3 เรียงลำดับตามเข็มนาฬิกา

เมื่อแทนค่าประมาณของตัวแปรจากสมการที่ (15) ลงในสมการที่ (4) (5) และ (6) ค่าของตัวแปรที่ได้ จะมีความคลาดเคลื่อนอยู่ ซึ่งหลักการของวิธี Weighted Residual จะทำการคูณสมการด้วยค่า weighting function แล้วอินทิเกรต ทั้งโดเมนให้มีค่าเท่ากับศูนย์ เพื่อเป็นการขจัดค่าความคลาดเคลื่อน ซึ่งโดยวิธีของ Galerkin จะใช้ transposed matrix ของ Interpolation function เป็น weighting function นั่นคือ จากสมการที่ (4) ถึง (6) เปลี่ยนแปลงได้เป็น



รูปที่ 2-1 การแบ่งพื้นที่ออกเป็น NODE และเอลิเมนต์ย่อย

$$\int_A [L]^T \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{V} \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial E}{\partial x} - \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \hat{\lambda} U - W_x \right\} dA = 0 \quad (21)$$

$$\int_A [L]^T \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{V} \frac{\partial V}{\partial y} - fU + g \frac{\partial E}{\partial y} - \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \hat{\lambda} V - W_y \right\} dA = 0 \quad (22)$$

$$\int_A [L]^T \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(\hat{\kappa}U)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{\kappa}V)}{\partial y} \right\} dA = 0 \quad (23)$$

โดยที่ $[L]^T$ คือ transposed matrix ของ $[L]$

เนื่องจากยังมีบางเทอมในสมการที่ (21), (22) และ (23) เป็น second order derivative ซึ่งทำให้ยุ่งยากในการแทนค่าเงื่อนไขขอบเขต จึงต้องแปลงให้เป็น first order derivative ก่อน นั่นคือ เทอมที่ 6 ของสมการที่ (21) และ (22) กระจายได้โดยใช้ Green's Theorem คือ

$$- \int_A [L]^T \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dA = \mu \int_A \left(\frac{\partial [L]^T}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial [L]^T}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) dA - \int_{S_q} [L]^T Q_x^* ds_q \quad (24)$$

$$- \int_A [L]^T \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) dA = \mu \int_A \left(\frac{\partial [L]^T}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial [L]^T}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) dA - \int_{S_q} [L]^T Q_y^* ds_q \quad (25)$$

และเทอมที่ 2 และ 3 ของสมการที่ (23) สามารถกระจายได้โดยใช้ Gauss' Diversion Theorem คือ

$$\int_A [L]^T \left\{ \frac{\partial(\hat{\kappa}U)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{\kappa}V)}{\partial y} \right\} dA = - \int_A \left(\frac{\partial [L]^T}{\partial x} \hat{\kappa}U + \frac{\partial [L]^T}{\partial y} \hat{\kappa}V \right) dA + \int_{S_r} [L]^T \hat{\kappa}R^* ds_r \quad (26)$$

เมื่อแทนสมการที่ (24) ถึง (26) ลงในสมการที่ (21) ถึง (23) และใช้สมการที่ (15) เป็นการประมาณค่าตัวแปรต่าง ๆ ก็จะได้ชุดของสมการ finite element คือ

$$[k_1]^e \frac{d\{U\}^e}{dt} + [k_2]^e \{U\}^e + [k_3]^e \{V\}^e + [k_4]^e \{E\}^e + \{F_1\}^e = 0 \quad (27)$$

$$[k_1]^e \frac{d\{V\}^e}{dt} + [k_5]^e \{U\}^e + [k_6]^e \{V\}^e + [k_7]^e \{E\}^e + \{F_2\}^e = 0 \quad (28)$$

$$[k_1]^e \frac{d\{E\}^e}{dt} + [k_8]^e \{U\}^e + [k_9]^e \{V\}^e + [k_{10}]^e \{E\}^e + \{F_3\}^e = 0 \quad (29)$$

ซึ่งสามารถเขียนรวมในรูปแบบ matrix ได้เป็น

$$[P]^e \frac{d\bar{X}^e}{dt} + [T]^e \bar{X}^e + \bar{F}^e = 0 \quad (30)$$

โดยที่

$$\bar{X}^e = \begin{Bmatrix} \{U\}^e \\ \{V\}^e \\ \{E\}^e \end{Bmatrix}, \quad [P]^e = \begin{bmatrix} [k_1]^e & 0 & 0 \\ 0 & [k_1]^e & 0 \\ 0 & 0 & [k_1]^e \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}^e = \begin{Bmatrix} \{F_1\}^e \\ \{F_2\}^e \\ \{F_3\}^e \end{Bmatrix}, \quad [T]^e = \begin{bmatrix} [k_2]^e & [k_3]^e & [k_4]^e \\ [k_5]^e & [k_6]^e & [k_7]^e \\ [k_8]^e & [k_9]^e & [k_{10}]^e \end{bmatrix}$$

$$[k_1]^e = \int_A [L]^T [L] dA \quad \text{-----} (31)$$

$$[k_2]^e = \int_A [L]^T U \frac{\partial [L]}{\partial x} dA + \int_A [L]^T V \frac{\partial [L]}{\partial y} dA + \mu \int_A \left(\frac{\partial [L]^T}{\partial x} \frac{\partial [L]}{\partial x} + \frac{\partial [L]^T}{\partial y} \frac{\partial [L]}{\partial y} \right) dA + \int_A [L]^T \lambda [L] dA \quad \text{-----} (32)$$

$$[k_3]^e = -f \int_A [L]^T [L] dA \quad \text{-----} (33)$$

$$[k_4]^e = g \int_A [L]^T \frac{\partial [L]}{\partial x} dA \quad \text{-----} (34)$$

$$[k_5]^e = -[k_3]^e \quad \text{-----} (35)$$

$$[k_6]^e = [k_2]^e \quad \text{-----} (36)$$

$$[k_7]^e = g \int_A [L]^T \frac{\partial [L]}{\partial y} dA \quad \text{-----} (37)$$

$$[k_8]^e = - \int_A \frac{\partial [L]^T}{\partial x} \hat{n} [L] dA \quad \text{-----} (38)$$

$$[k_9]^e = - \int_A \frac{\partial [L]^T}{\partial y} \hat{n} [L] dA \quad \text{-----} (39)$$

$$[k_{10}]^e = 0 \quad \text{-----} (40)$$

$$\{F_1\}^e = - \int_A [L]^T W_x dA - \int_{S_q} [L]^T Q_x^* ds_q \quad \text{-----} (41)$$

$$\{F_2\}^e = - \int_A [L]^T W_y dA - \int_{S_q} [L]^T Q_y^* ds_q \quad \text{-----} (42)$$

$$\{F_3\}^e = \int_{S_r} [L]^T \{R\}^* dS_r \quad \text{-----(43)}$$

เนื่องจากตัวแปรในสมการที่ (30) มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้นจึงต้องประมาณค่า time derivative โดยจะพิจารณาตัวแปรที่เวลา $t = t-1$ และ $t=t$ ให้มีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้น คือ

$$\frac{d\bar{X}^e}{dt} \cong \frac{\bar{X}_t^e - \bar{X}_{t-1}^e}{\Delta t} \quad \text{-----(44)}$$

โดยที่ Δt คือ time increment และสำหรับ non-derivative term จะทำการประมาณค่าโดยใช้วิธี weighted average คือ

$$\bar{X}^e \cong \theta(\bar{X}_t^e - \bar{X}_{t-1}^e) + \bar{X}_{t-1}^e \quad \text{-----(45)}$$

$$\bar{F}^e \cong \theta(\bar{F}_t^e - \bar{F}_{t-1}^e) + \bar{F}_{t-1}^e \quad \text{-----(46)}$$

โดยที่ θ คือ weighting function มีค่าระหว่าง 0.0 ถึง 1.0

เมื่อแทนสมการที่ (44) ถึง (46) ลงในสมการที่ (30) ก็จะได้สมการ finite element ที่มีการ discretization แบบเชิงเส้นทั้ง spatial และ time domain คือ

$$[K]^e \bar{X}_t^e = \bar{G}^e \quad \text{-----(47)}$$

โดยที่

$$[K]^e = \frac{1}{\Delta t} [P]^e + \theta [T]^e \quad \text{-----(48)}$$

$$\bar{G}^e = \frac{1}{\Delta t} [P]^e + (\theta-1)[T]^e \bar{X}_{t-1}^e + (\theta-1)\bar{F}_{t-1}^e - \theta\bar{F}_t^e \quad \text{-----(49)}$$

เมื่อทำการรวมสมการที่ (47) ของแต่ละเอเลเมนต์ด้วยวิธี superposition ของ matrix ก็จะได้เป็นสมการ Global Finite Element คือ

$$[K]^G \bar{X}_t^G = \bar{F}^G \quad \text{-----(50)}$$

ซึ่งจะสามารถทำการแก้สมการที่ (50) โดยวิธี Direct Method หรือ Iterative Method เพื่อหาค่าตัวแปรที่ node ต่าง ๆ ได้ต่อไป

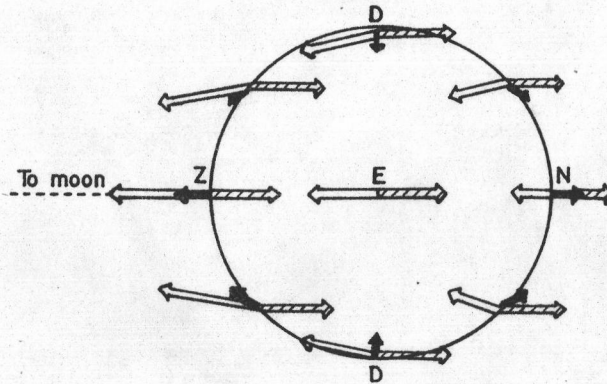


2.3 ทฤษฎีน้ำขึ้นน้ำลง

น้ำขึ้นน้ำลงเป็นคลื่นยาว (long wave) ที่ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงระดับของน้ำทะเล ในขณะที่ระดับน้ำทะเลกำลังสูงขึ้น เราเรียกว่า น้ำขึ้น (flood tide) และในขณะที่ระดับน้ำทะเลกำลังลดต่ำลง เรียกว่า น้ำลง (ebb tide) ระยะในแนวตั้งระหว่างตำแหน่งที่น้ำขึ้นสูงสุด และน้ำลงต่ำสุด เรียกว่า พิสัยน้ำขึ้นน้ำลง (tidal range) ในแต่ละวัน ถ้ามีน้ำขึ้นสูงสุด หรือน้ำลงต่ำสุดสองครั้ง เรียกว่า น้ำคู่ (semi-diurnal) แต่ถ้ามีเพียงครั้งเดียว จะเรียกว่า น้ำเดี่ยว (diurnal)

2.3.1 แรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง

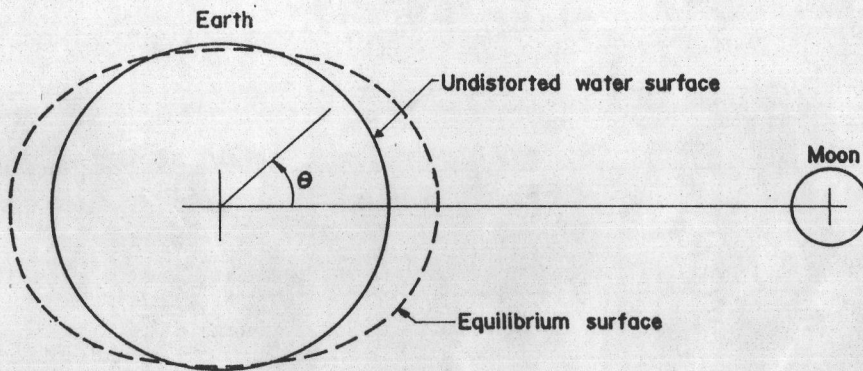
แรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง คือ แรงดึงดูดระหว่างกัน (attractive force) และแรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force) ของโลกกับดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ ซึ่งการเคลื่อนที่ที่สัมพันธ์กันระหว่างโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงระดับของน้ำขึ้นน้ำลง เมื่อพิจารณาแรงระหว่างโลกและดวงจันทร์ จะได้สมดุลย์ของแรงดังรูปที่ 2-2 และเมื่อพิจารณาว่าสัณฐานของโลกเป็นทรงกลมและมีน้ำทะเลครอบคลุมผิวโลกทั้งหมด ก็จะได้ผิวน้ำสมดุลย์ (equilibrium surface) ดังรูปที่ 2-3 จะเห็นได้ว่าในกรณีที่มีมุม เท่ากับ 0 องศา จะเกิดน้ำขึ้นมากที่สุด และเมื่อมุม เท่ากับ 90 องศา จะเกิดน้ำลงต่ำสุด เมื่อพิจารณา การเคลื่อนที่ของโลกและดวงจันทร์ พบว่า ดวงจันทร์ โคจรรอบโลก 1 รอบ ใช้เวลา 29.53 วัน ถ้าเทียบกับการหมุนรอบตัวเองของโลกที่ตำแหน่งคนยืน ดังรูปที่ 2-4 จะพบว่า ตำแหน่งของดวงจันทร์จะตรงศีรษะคนยืนอีกครั้งดวงจันทร์จะเคลื่อนที่ไป $1/29.53$ ของวงโคจรของดวงจันทร์รอบโลก ลักษณะเช่นนี้ จะทำให้น้ำขึ้นสูงสุดหรือลงต่ำสุดที่ตำแหน่งใด ๆ บนผิวโลก จะเกิดช้ากว่าวันก่อน 50 นาที (เมื่อคำนึงเฉพาะระบบโลกและดวงจันทร์) ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาระบบโลกและดวงอาทิตย์ ลักษณะสมดุลย์ของแรง และผิวน้ำสมดุลย์ จะเหมือนกับกรณีระหว่างโลกและดวงจันทร์ แต่การเคลื่อนที่สัมพันธ์ระหว่างโลกและดวงอาทิตย์มีคาบเท่ากับ 24 ชั่วโมง ดังนั้น น้ำขึ้นสูงสุดหรือลงต่ำสุดที่ตำแหน่งใด ๆ บนผิวโลก จะเกิดที่เวลาเดียวกันทุกวัน (เมื่อคำนึงเฉพาะโลก และดวงอาทิตย์) อย่างไรก็ตาม จากการศึกษาพบว่าอัตราส่วนของระดับน้ำ เนื่องจากอิทธิพลของดวงอาทิตย์ต่อระดับน้ำเนื่องจากอิทธิพลของดวงจันทร์เท่ากับ 0.457 (Ippen, 1966) แสดงว่าดวงจันทร์มีอิทธิพลต่อระดับน้ำบนโลก 54.3% เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่สัมพันธ์กันในระหว่างโลก ดวงจันทร์และดวงอาทิตย์ ดังรูปที่ 2-5 ถ้าตำแหน่งของดวงจันทร์ โลก และดวงอาทิตย์ อยู่ในแนวตั้งฉากกัน คือดวงจันทร์อยู่ที่ตำแหน่งเสี้ยวที่ 1 (first quarter) และเสี้ยวสุดท้าย (last quarter) ทำให้เกิดพิสัยน้ำขึ้นน้ำลง (tidal range) น้อยที่สุด เรียกว่าน้ำตาย (neap tide) แต่ถ้าดวงจันทร์ โลกและดวงอาทิตย์ อยู่ในแนวเดียวกัน คือ ดวงจันทร์อยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้นดวงใหม่ อีกครั้ง (New moon) และตำแหน่งดวงจันทร์เต็มดวง (Full moon) จะทำให้เกิดพิสัยน้ำขึ้นน้ำลง



Determination of intensity and direction of the tide generating forces resulting from the difference between attractive and centrifugal forces.
 ⇨, open arrows : attractive forces : ▨, hatched arrows : centrifugal forces : ⇨, black arrows : tide generating forces (after Defant, 1961).

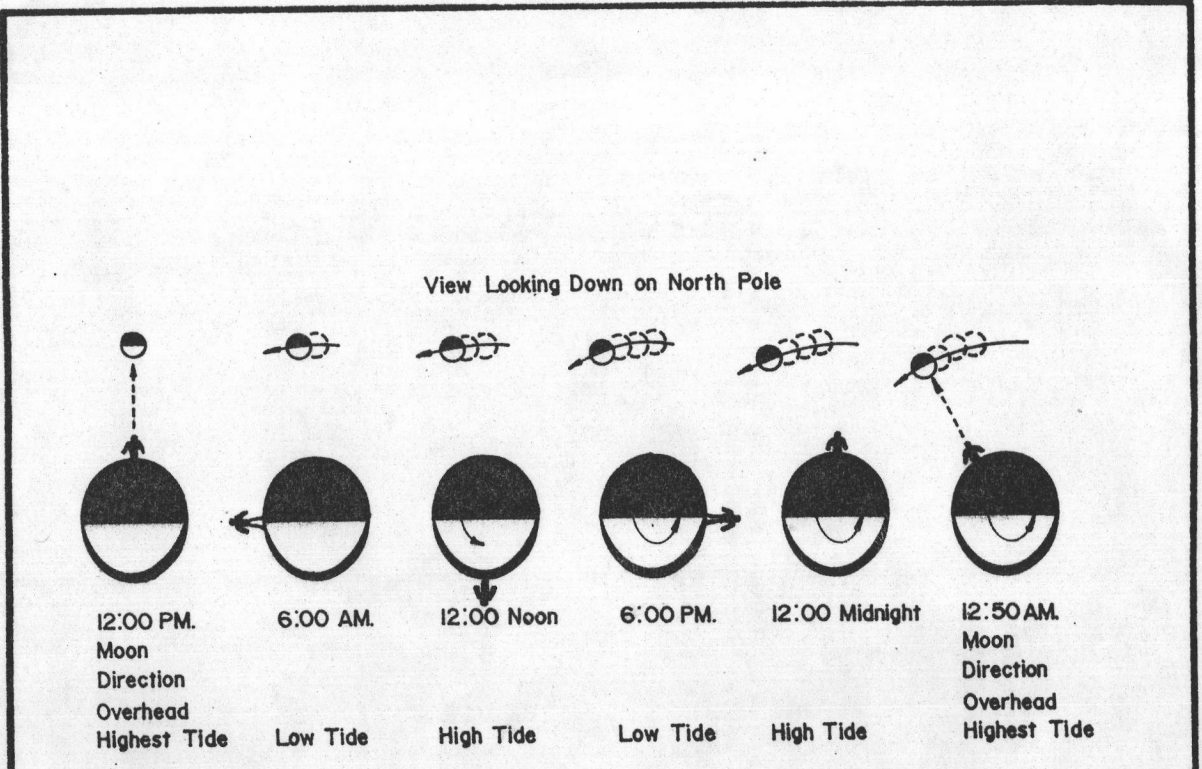
จาก : Kiyoshi (1978)

รูปที่ 2-2 แรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง



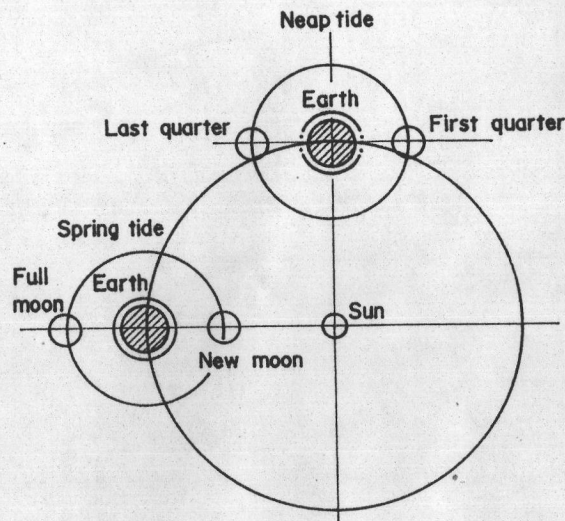
จาก : Ippen (1966)

รูปที่ 2-3 ผิวน้ำสมดุลย์ในระบบโลกและดวงจันทร์



จาก : อัปสรลลิตา (2524)

รูปที่ 2-4 การหมุนของโลกรอบตัวเองและการหมุนของดวงจันทร์รอบโลก



จาก : Kiyoshi (1978)

รูปที่ 2-5 การเกิดน้ำตาย (neap tide) และน้ำเกิด (spring tide)

มากที่สุด เรียกว่าน้ำเกิด (spring tide) การเกิดน้ำเกิดและน้ำตายนี้ ก็เป็นองค์ประกอบหนึ่งที่ต้องพิจารณา เรียกว่า องค์ประกอบรายปักษ์ทางจันทร์คติ (lunar fortnightly constituents) ซึ่งมีคาบ (period) 13 วัน 15 ชั่วโมง 52 นาที

2.3.2 ทฤษฎีการวิเคราะห์ฮาร์โมนิก น้ำขึ้นน้ำลง (Tide Harmonic Analysis) จากการศึกษาที่ผ่านมามพบว่า การเกิดน้ำขึ้นน้ำลงนั้น เกิดจาก การรวมอิทธิพลของแรงและการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กันระหว่างโลก และดวงจันทร์ หรือดวงอาทิตย์ โดยที่แต่ละอิทธิพล เราเรียกว่า องค์ประกอบ (constituent) ซึ่งแต่ละองค์ประกอบ จะมีคาบการเกิดที่คงที่ และก่อให้เกิดระดับน้ำขึ้นลง หรือแอมพลิจูด (amplitude) และมุมเฟส (phase) ที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนผิวโลก แตกต่างกันไป นอกจากนี้ ค่าแอมพลิจูด และมุมเฟส ยังมีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจาก ลักษณะของชายฝั่งและลักษณะทางกายภาพของท้องทะเล ในแต่ละตำแหน่งด้วย ดังนั้น ถ้าเรารู้ค่าแอมพลิจูด และมุมเฟสขององค์ประกอบต่าง ๆ ก็จะสามารถคำนวณค่าระดับน้ำที่ตำแหน่งนั้น ๆ ได้ ซึ่งการหาค่า แอมพลิจูด และมุมเฟส สามารถใช้ การวิเคราะห์ด้วยวิธีฮาร์โมนิก โดยมีสมมติฐาน ดังนี้ คือ

1) ผลของน้ำขึ้นน้ำลงที่แต่ละตำแหน่ง จะมีองค์ประกอบจำนวนจำกัด ในแต่ละองค์ประกอบจะมีคาบ มุมเฟส และแอมพลิจูดของตัวเอง องค์ประกอบที่มีความสำคัญมากที่สุดสำหรับอ่าวไทยตอนบนได้แก่ องค์ประกอบ M_2 , S_2 , O_1 และ K_1 ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

2) ส่วนประกอบต่าง ๆ เป็นฮาร์โมนิกอย่างง่าย (simple harmonic) ในแต่ละเวลา และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

สมการฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลงเขียนดังต่อไปนี้

$$\eta = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \sin \left(\frac{2\pi t}{T_i} + \delta_i \right) \quad \text{----- (51)}$$

เมื่อ η = ระดับน้ำขึ้นน้ำลง

a_0 = ระยะขจัด (displacement) จากระดับน้ำเฉลี่ย ถึงระดับน้ำทะเลปานกลาง

t = เวลา

N = จำนวนองค์ประกอบ

a_i, δ_i = แอมพลิจูด (amplitude), มุมเฟส (phase angle) ขององค์ประกอบที่ i ตามลำดับ

T_i = คาบ (period) ขององค์ประกอบที่ i

การวิเคราะห์ฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลง แบ่งได้ 2 ส่วน คือ

ก) จากข้อมูลระดับน้ำที่วัดจริง สามารถวิเคราะห์หามุมเฟส และแอมพลิจูดของแต่ละองค์ประกอบที่ตำแหน่งที่ต้องการหา

ข) การวิเคราะห์ฮาร์โมนิกนี้ สามารถทำนายระดับน้ำขึ้นน้ำลงในอนาคตได้ จากสมการที่ (51) กระจายเทอมได้ดังนี้

$$\eta = a_0 + \sum_{i=1}^N [a_i \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \cos \delta_i + a_i \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \sin \delta_i] \quad \text{----- (52)}$$

คูณสมการที่ (52) ด้วย $\sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)$ แล้วอินทิเกรต (integrate) ในช่วงเวลา 0 ถึง Δt และหารด้วย Δt จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_0^{\Delta t} a_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt \right. \\ &+ \sum_{i=1}^N a_i \cos \delta_i \int_0^{\Delta t} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt \\ &+ \left. \sum_{i=1}^N a_i \sin \delta_i \int_0^{\Delta t} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt \right\} \quad \text{---- (53)} \end{aligned}$$

อินทิเกรตสมการที่ (53) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{a_0}{2\pi T_j} (1 - \cos\left(\frac{2\pi \Delta t}{T_j}\right)) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^N a_i \cos \delta_i \left\{ \frac{\sin\left[2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)\right]}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)} - \frac{\sin\left[2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)\right]}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)} \right\} \\ &+ \left. \sum_{i=1}^N a_i \sin \delta_i \left\{ \frac{1 - \cos\left[2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)\right]}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)} + \frac{1 - \cos\left[2\pi \Delta t \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)\right]}{4\pi \left(\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j}\right)} \right\} \right] \quad \text{----- (54)} \end{aligned}$$

เมื่อ $T_i = T_j$ สมการที่ (54) จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt = \frac{a_i}{2} \cos \delta_i \quad \text{----- (55)}$$

ในการทำงานเดียวกัน ถ้าคูณสมการที่ (52) ด้วย $\cos\left(\frac{2\pi t}{T_j}\right)$ แล้วอินทิเกรตในช่วงเวลา 0 ถึง Δt และหารด้วย Δt พิจารณาเมื่อ $T_j = T_i$ จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt = \frac{a_i}{2} \sin \delta_i \quad \text{----- (56)}$$

ค่าคงที่ a_o หาได้จาก

$$a_o = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta(t) dt \quad \text{----- (57)}$$

จากสมการที่ (55) และ (56) สามารถหาค่า a_i และ δ_i ได้ดังนี้

$$a_i = 2 \left\{ \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{---- (58)}$$

$$\delta_i = \tan^{-1} \left[\frac{\int_0^{\Delta t} \eta \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt}{\int_0^{\Delta t} \eta \sin\left(\frac{2\pi t}{T_i}\right) dt} \right] \quad \text{----- (59)}$$

ค่า a_o , a_i และ δ_i ที่ได้สามารถนำไปทำนายระดับน้ำได้ โดยใช้สมการที่ (51)

2.3.3 ชนิดของน้ำขึ้นน้ำลง

ชนิดของน้ำขึ้นน้ำลง สามารถแบ่งได้จากการพิจารณาองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของน้ำคือ M_2 และ S_2 และองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของน้ำเดี่ยว คือ K_1 และ O_1 ดังนี้

- 1) การศึกษาน้ำขึ้นน้ำลงของฝรั่งเศส (Dronker, 1964) พบว่าชนิดของน้ำขึ้นน้ำลงขึ้นอยู่กับอัตราส่วนแอมพลิจูดขององค์ประกอบ ดังนี้

$$\text{อัตราส่วนแอมพลิจูด} = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2}$$

ถ้า น้อยกว่า 0.25 เป็นน้ำคู่ (Semi-diurnal tide)

0.25 ถึง 1.25 เป็นน้ำผสม (Mixed tide)

มากกว่า 1.25 เป็นน้ำเดี่ยว (Diurnal tide)

- 2) Publications of the U.S. Coast and Geodetic Survey (Dronker)

ได้แบ่งชนิดของน้ำขึ้นน้ำลงตามอัตราส่วนแอมพลิจูดขององค์ประกอบ ดังนี้

$$\text{อัตราส่วนแอมพลิจูด} = \frac{K_1 + O_1}{M_2}$$

ถ้า น้อยกว่า 0.5 เป็นน้ำคู่ (Semi-diurnal tide)

0.5 ถึง 2.0 เป็นน้ำผสม (Mixed tide)

มากกว่า 2.0 เป็นน้ำเดี่ยว (Diurnal tide)