



ทฤษฎีและแนวคิด

ความนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างแบบอีลาสติก - พลาสติก (Elastic - Plastic Analysis) เป็นการวิเคราะห์เพื่อศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างนับจากเริ่มรับน้ำหนักบรรทุกแล้วเพิ่มขึ้นจนกระทั่งเกิดการคลากขึ้นที่บางบริเวณของโครงสร้าง และเมื่อเพิ่มน้ำหนักบรรทุกขึ้นไปอีกจะทำให้เกิดการคลากที่บริเวณอื่น ๆ เพิ่มขึ้น (บุญแสง สิริรัตน์ชูวงศ์ , 2536)

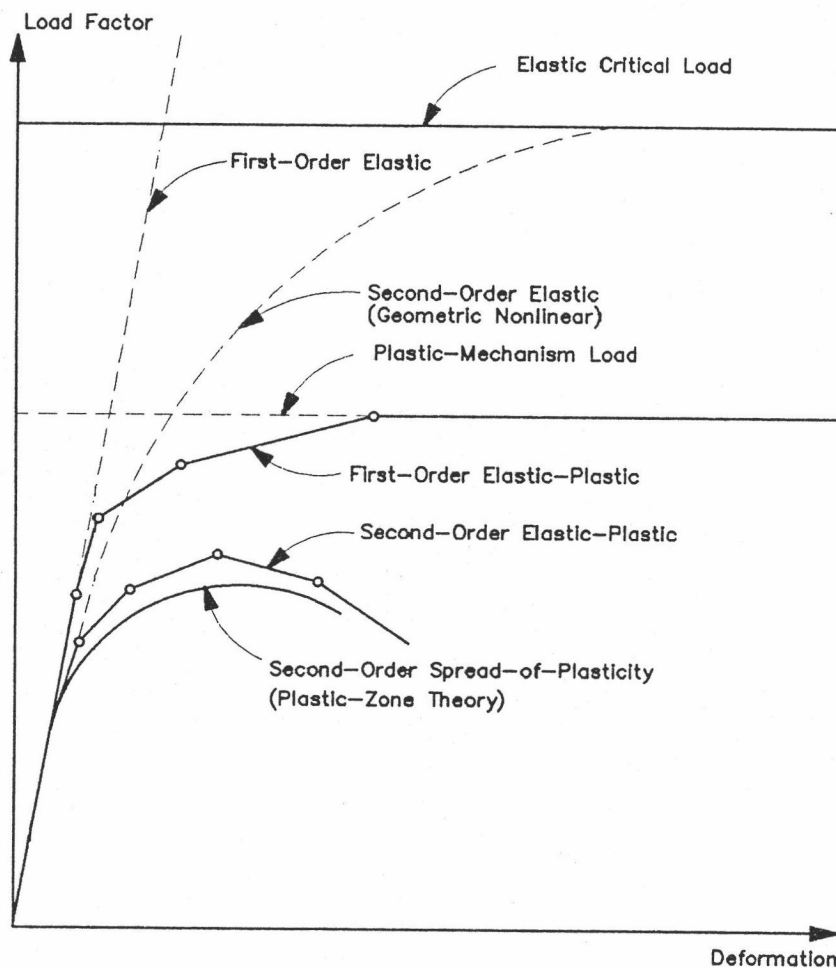
เมื่อโครงสร้างถูกแรงกระทำจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง การวิเคราะห์โครงสร้างในทางวิศวกรรมโยธาจะขึ้นกับสมมุติฐานเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวโดยจะแบ่งการวิเคราะห์ออกได้ดังนี้ (ปณิธาน ลักคุณะประสิทธิ์ , 2533)

- การวิเคราะห์อันดับที่หนึ่ง (First - Order Analysis) เป็นการวิเคราะห์ที่สมมุติว่าการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่าน้อยมาก และเขียนสมการของการสมดุลโดยใช้รูปร่างที่ยังไม่เปลี่ยนแปลง (Undeformed Configuration)

- การวิเคราะห์อันดับที่สอง (Second - Order Analysis) เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่การโก่งตัวมีค่ามาก โดยเขียนสมการของการสมดุล โดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงสร้างจากอิทธิพลของแรงกระทำ ซึ่งจะยังผลให้เกิดการควบคู่ (Coupling) กันของแรงกระทำกับระยะการเปลี่ยนตำแหน่ง หรืออนุพันธ์ของตัวแปรนี้

พฤติกรรมของโครงสร้างเมื่อใช้วิธีการวิเคราะห์แบบต่าง ๆ จะได้ผลของการตอบสนอง
ดังรูป 2.1

การวิเคราะห์หีลาสติก - พลาสติกอันดับที่สอง สำหรับงานวิจัยนี้ จะนำผลการสร้าง สตีฟเนสขององค์อาคารคาน-เสาตามวิธีการของ Goto and Chen, 1989 ซึ่งได้ออกมาเป็น ฟังก์ชันเสถียรภาพ (Stability Functions) ที่เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก และนำมาจัดรูปให้อยู่ในรูปอนุกรมเทเลอร์ เพื่อหลีกเลี่ยงการใช้ฟังก์ชันที่ต่างกันของแรงอัดและ แรงดึง และลดความไม่เสถียรภาพเชิงเลข (Numerical Instability) ในกรณีที่แรงในแนวแกน มีค่าต่ำแล้วจึงนำมารวมกันโดยวิธีรวมสตีฟเนสตรง (Direct Stiffness Method) แก่ระบบ สมการไม่เชิงเส้นหลายตัวแปรโดยใช้การกำจัดแบบเกาซ์และวิธีการทำซ้ำโดยนิวตัน - แรพสัน และเพิ่มน้ำหนักบรรทุกขึ้นเรื่อยๆ (Direct Load Factor Increment) จนถึงระดับของ ตัวประกอบน้ำหนักบรรทุกที่เสถียรภาพของโครงสร้างหมดไป



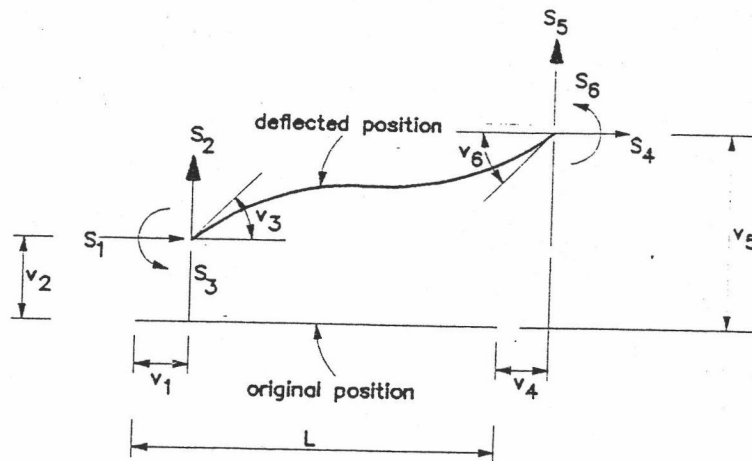
รูปที่ 2.1 แสดงพฤติกรรมของโครงระนาบในรูปของความสัมพันธ์ของน้ำหนักบรรทุก และการเปลี่ยนตำแหน่ง (Chen and Lui, 1991)

สมมุติฐาน

1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของวัสดุเป็นแบบอีลาสติก-พลาสติกสมบูรณ์ (Elastic - Perfectly Plastic Material)
2. แรงกระทำเป็นแรงสถิตย์ และกระทำที่ข้อต่อเท่านั้น
3. ค่าแรงในแนวแกนมีผลต่อค่าโมเมนต์พลาสติก
4. องค์กรรับโมเมนต์มีพฤติกรรมตามสมมุติฐานของเบอร์นูลลี - ออยเลอร์ (Bernoulli - Euler Hypothesis)
5. ความสัมพันธ์ของโมเมนต์กับการโก่งเป็น Bilinear
6. มีการป้องกันการเกิดการโค้งเฉพาะที่ (Local Buckling) , การโค้งงอด้านข้าง (Lateral Buckling) และการบิดงอ (Twist Buckling) อย่างเพียงพอ
7. ไม่คำนึงถึงความไม่เชิงเส้นของสติเฟเนสแนวแกน (Bowing Effect)

สติเฟเนสขององค์กร

พิจารณาองค์กรที่มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ A โมเมนต์ของความเฉื่อยเท่ากับ I และความยาวเท่ากับ L มีแรงกระทำที่ปลาย s_1 ถึง s_6 และ v_1 ถึง v_6 เป็นค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ที่สอดคล้องกับแรงกระทำที่ปลาย s_1 ถึง s_6 ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 องค์กรภายใต้แรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง (Chen and Lui, 1991)

สติฟเนสขององค์อาคารจะอยู่ในรูป (Goto and Chen , 1987)

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2}\Phi_1 & -\frac{6}{L}\Phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\Phi_1 & -\frac{6}{L}\Phi_2 \\ & & 4\Phi_3 & 0 & \frac{6}{L}\Phi_2 & 4\Phi_4 \\ & & & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{12}{L^2}\Phi_1 & \frac{6}{L}\Phi_2 \\ & & & & & 4\Phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

(2.1)

เมื่อ

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 1 - \frac{1}{10}N - \frac{1}{8400}N^2 + \dots \\ \Phi_2 &= 1 - \frac{1}{60}N - \frac{1}{8400}N^2 + \dots \\ \Phi_3 &= 1 - \frac{1}{30}N - \frac{11}{25200}N^2 + \dots \\ \Phi_4 &= 1 + \frac{1}{60}N + \frac{13}{25200}N^2 + \dots \end{aligned}$$

(2.2)

โดยที่ Φ_i = ฟังก์ชันเชอเรียกราฟ ; $i=1 - 4$

$$N = \frac{PL^2}{EI}$$

เมื่อ P = แรงในแนวแกน

E = Modulus of Elasticity



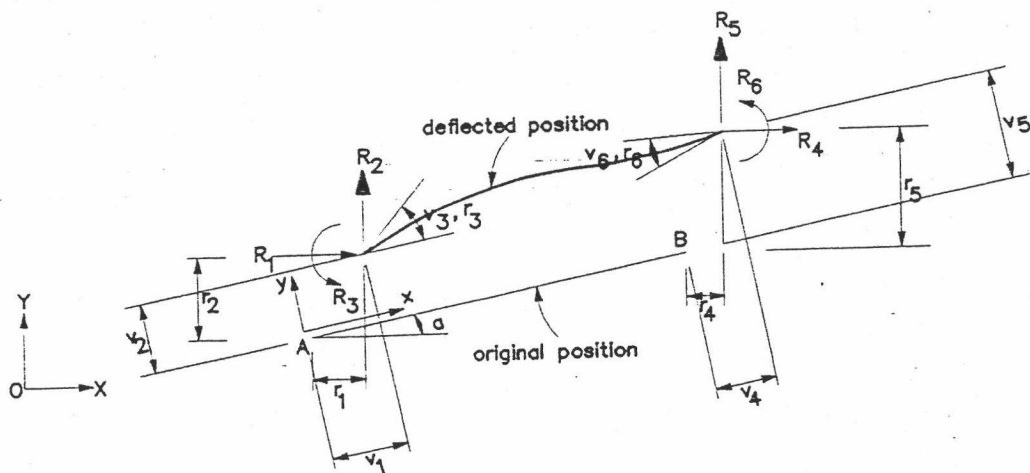
รายละเอียดของการหาความสัมพันธ์ตามสมการ (2.2) แสดงในภาคผนวก ก สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้ขบวนการเทเลอร์ตามสมการ (2.2) จำนวน 3 เทอม (Goto and Chen, 1987) สมการ (2.2) สามารถเขียนในรูปของสัญลักษณ์เมตริกซ์ได้เป็น

$$[k(v)]\{v\} = \{s\} \tag{2.3}$$

เมื่อ	$[k(v)]$	เป็นเมตริกซ์สตีเฟนสขององค์อาคาร
	$\{v\}$	เป็นเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง
	$\{s\}$	เป็นเวกเตอร์ของแรงกระทำ

การรวมสตีเฟนส

ในกรณีที่องค์อาคารไม่ได้วางอยู่ในแกนราบหรือโคออดิเนตประจำตัว (Local Coordinate) ไม่ได้วางแกนอยู่ตรงกับแกนของโคออดิเนตไกลบอล (Global Coordinate) จำเป็นต้องมีการหมุนเพื่อเปลี่ยนตำแหน่งและแรงกระทำที่กำหนด ซึ่งอยู่ในโคออดิเนตประจำตัวให้อยู่ในโคออดิเนตไกลบอลเสียก่อน การหมุนโคออดิเนตกระทำได้โดยการพิจารณาองค์อาคาร i อยู่ในระนาบ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 องค์อาคารวางในระบบโคออดิเนตไกลบอล(Chen and Lui , 1991)

จากรูปโคออดิเนตโกลบอลเป็น XY และโคออดิเนตประจำตัวเป็น xy ถ้าพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งของจุด A ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอล กับโคออดิเนตประจำตัวเป็น

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

เมื่อ v_i เป็นเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตประจำตัว
 r_i เป็นเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอล
 α เป็นมุมระหว่างแกนแนวราบในโคออดิเนตประจำตัวกับแกนแนวราบในโคออดิเนตโกลบอล

หรือเขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\{v\} = [a]\{r\} \quad (2.5)$$

สมการ (2.5) เป็นความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตประจำตัวกับการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอล ดังนั้นจะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำในโคออดิเนตประจำตัวกับแรงกระทำในโคออดิเนตโกลบอลได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T \{s\} \quad (2.6)$$

เมื่อ $\{s\}$ เป็นเวกเตอร์ของแรงในโคออดิเนตประจำตัว
 $\{R\}$ เป็นเวกเตอร์ของแรงในโคออดิเนตโกลบอล

ดังนั้นจะสามารถหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำกับการเปลี่ยนตำแหน่งในโคออดิเนตโกลบอลขององค์อาคาร i ได้เป็น

$$\{R\} = [a]^T [k(v)] [a] \{r\}$$

หรือ $\{R\} = [K_i]^i \{r\}$ (2.7)

เมื่อ $[K_i]^i$ เป็นเมตริกซ์สติเฟเนสขององค์อาคาร i ในโคออดิเนตโกลบอล

ถ้าพิจารณาองค์อาคารทั้งหมด n ชั้นส่วนในโครงสร้างจะได้

$$\{R\} = \left(\sum_{i=1}^n [K_i]^i \right) \{r\}$$

ให้ $[K] = \left(\sum_{i=1}^n [K_i]^i \right)$

เมื่อ $[K]$ เป็นเมตริกซ์สติเฟเนสของโครงสร้าง

จะได้ $\{R\} = [K]\{r\}$ (2.8)

เมตริกซ์ $[K]$ ในสมการ (2.8) จะเป็นซิงกูลาร์(Singular Matrix) เนื่องจากมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง (Rigid Body Motion) อยู่ จำเป็นต้องใส่เงื่อนไขขอบเขต(Boundary Conditions) เพียงพอที่จะไม่เกิดการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็งจะได้เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ (Non - Singular Matrix) สามารถแก้สมการได้โดยการกำจัดแบบเกาซ์ (Gauss Elimination)

วิธีวิเคราะห์อันดับที่สองโดยวิธีนิวตัน - แรพสัน

จากสมการ (2.3) และ (2.8) จะเห็นว่าความสัมพันธ์ของแรงกระทำ และการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งจะไม่ใช่เชิงเส้นทั้งองค์อาคารในโคออดิเนตประจำตัวตามสมการ (2.3) และในโกลบอลโคออดิเนตในตามสมการ (2.8) การแก้ระบบสมการลักษณะนี้ จำเป็นต้องใช้วิธีทำซ้ำ วิธีการนิวตัน - แรพสัน เป็นวิธีการหนึ่งในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น วิธีการจะกระทำได้ดังต่อไปนี้

ทำซ้ำ วิธีการนิวตัน - แรพสัน เป็นวิธีการหนึ่งในการหาคำตอบของสมการไม่เชิงเส้น วิธีการจะกระทำได้ดังต่อไปนี้

พิจารณาสมการ (2.8) สมมติให้ $\{\Psi\}$ เป็นเวกเตอร์เหลือจากการทำซ้ำ ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวกเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced Force Vector, $\{Q\}$) หลักการก็คือ กำหนด $\{\Psi\}$ ให้มีค่าเข้าใกล้ $\{0\}$ เพื่อกำจัดค่าแรงคงค้างให้เหลือน้อยที่สุด ซึ่งจะได้

$$\Psi(a_{n+1}^{i+1}) \cong \Psi(a_{n+1}^i) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial a} \right)_{n+1}^i = 0 \quad (2.9)$$

เมื่อ a ตัวแปรอิสระของฟังก์ชัน $f(a)$ ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง, $\{r\}$

$f(a)$ ฟังก์ชันของ a ในการวิเคราะห์โครงสร้างจะหมายถึงเวกเตอร์ของแรง, $\{R\}$

เมื่อการทำซ้ำเริ่มที่รอบที่ 1 สมการการทำซ้ำรอบที่ 1 จะเป็น

$$a_{n+1}^1 = a_n \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial a} = K_T = K \quad (2.11)$$

เมื่อ K_T เป็นความชันของฟังก์ชัน $f(a)$

ถ้าเขียนในรูปการทำซ้ำหลายๆ ครั้งจะได้

$$K_T^i da_n^i = -\Psi_{n+1}^i \quad (2.12)$$

$$da_n^i = -(K_T)^{-1} \{\Psi\}_{n+1}^i \quad (2.13)$$

$$a_{n+1}^{i+1} = a_n + \Delta a_n^i = a_{n+1}^i + da_n^i \quad (2.14)$$

$$\Delta a_n^i = \sum_{k=1}^i da_n^k \quad (2.15)$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{i+1,j} & \cdot & & \\ & & l_{i+2,j} & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \cdot \\ & & l_{m,j} & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

หรือ $[K] = LS$ (2.20)

เนื่องจากเมตริกซ์ $[K]$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร ดังนั้น

$$S = [D]L^T \quad (2.21)$$

เมื่อ $[D]$ เป็นเมตริกซ์ที่มีเฉพาะสมาชิกในแนวทแยงที่ไม่เป็นศูนย์ (Diagonal Matrix)

สมการ (2.20) เขียนใหม่ได้เป็น

$$[K] = L[D]L^T \quad (2.22)$$

สมมติให้ $[D]L^T\{r\} = \{V\}$ (2.23)

แทนค่าสมการ (2.22) และสมการ (2.23) ลงในสมการ (2.8) จะได้

$$L\{V\} = \{R\} \quad (2.24)$$

หาค่าของ $\{R\}$ ในรูปของ $\{V\}$ ตามสมการ (2.24) ซึ่งเรียกว่าขั้นตอน Forward Reduction (Bathe and Wilson, 1976)

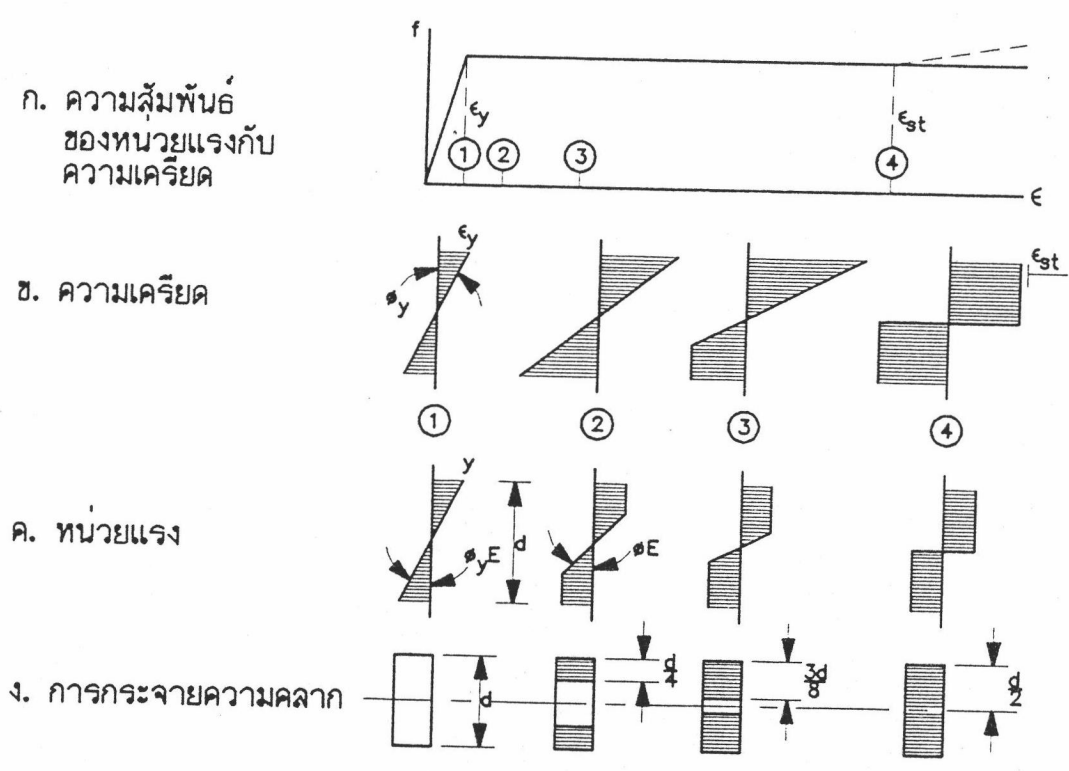
$$\{V\} = L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\dots L_2^{-1}L_1^{-1}\{R\} \quad (2.25)$$

แทนค่า{V} ลงในสมการ (2.23) ตามสมการ (2.26) ซึ่งเรียกว่าขั้นตอน Back Substitution (Bathe and Wilson, 1976) จะได้

$$L^T\{r\} = [D]^{-1}\{V\} \quad (2.26)$$

จากสมการ (2.26) จะสามารถหาเวกเตอร์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง {r} ได้

การเกิดจุดหมุนพลาสติก



รูปที่ 2.5 การกระจายของหน่วยแรงและการเกิดจุดหมุนพลาสติก (ทักษิณ เทพชาตรี, 2529)

เมื่อคานรับน้ำหนักหน้าตัดคานจะเกิดการโก่งตัว และที่หน้าตัดคานตำแหน่งใด ๆ จะมีการกระจายของหน่วยแรง ดังรูป 2.5 (ค (1)) เมื่อเพิ่มน้ำหนักขึ้นไปเรื่อย ๆ ที่ผิวบน และล่างสุดจะถึงจุดคลาก ดังรูป 2.5 (ค (2)) เมื่อเพิ่มน้ำหนักขึ้นไปอีกลักษณะการกระจายของหน่วยแรงจะเปลี่ยนไปเป็นรูป 2.5 (ค (3)) ซึ่งตลอดหน้าตัดมีการคลากของหน้าตัดบางส่วนเรียกว่า Partial Yielded ถ้าเพิ่มน้ำหนักขึ้นไปอีก จนถึงรูป 2.5 (ค (4)) ตลอดหน้าตัดคานจะคลากทั้งหน้าตัด เรียกว่า Fully Yielded

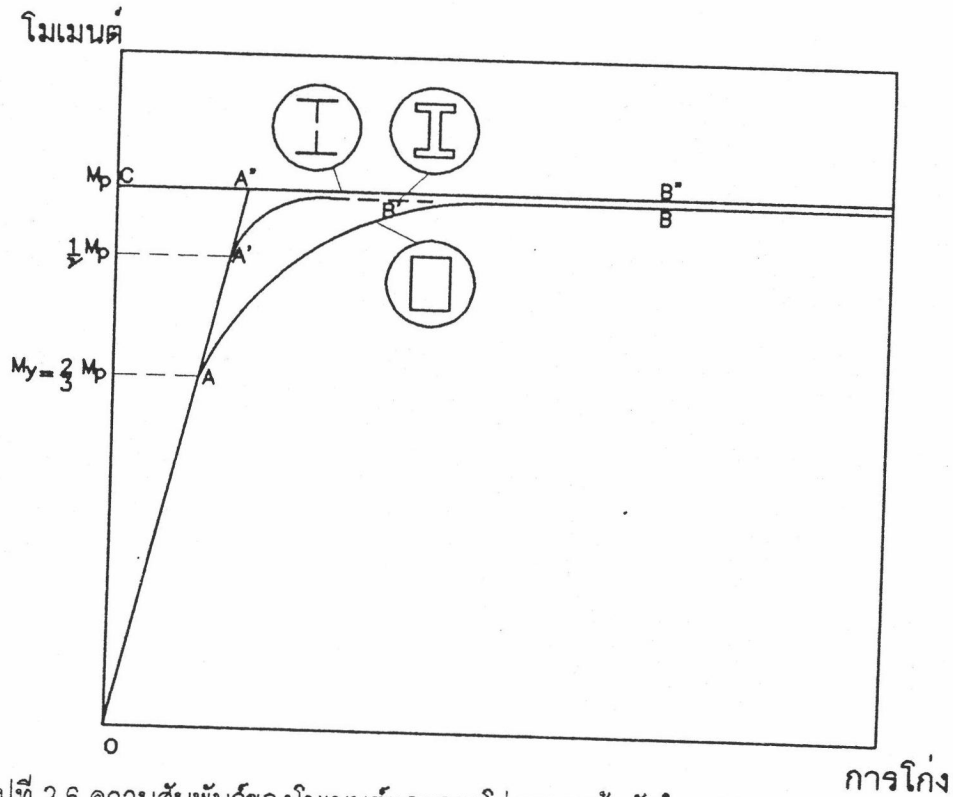
ความสามารถในการรับโมเมนต์ที่คานเริ่มคลาก เรียกว่า Yielded Moment (M_y) ตามรูป 2.5 (2) ความสามารถในการรับโมเมนต์ที่คานคลากอย่างสมบูรณ์ เรียกว่า โมเมนต์พลาสติก (M_p) อัตราส่วนของโมเมนต์นี้เรียกว่าตัวประกอบหน้าตัด (Shape Factor , SF)

$$SF = \frac{M_p}{M_y} \tag{ 2.27 }$$

สำหรับหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมี $SF = 1.50$

สำหรับงานวิจัยเบื้องต้นอาคารที่มีหน้าตัดรูป I หรือ WF ซึ่งจะมี SF ประมาณ 1.10 - 1.12

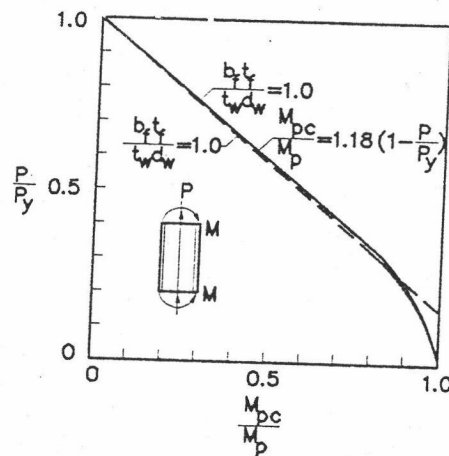
พิจารณาความสัมพันธ์ของโมเมนต์ - การโก่ง ตามรูปที่ 2.6 ในการเปลี่ยนแปลงของกราฟช่วงที่หน้าตัดเป็น Partial Yielded ความสัมพันธ์ที่เป็นเส้นโค้งขึ้นกับรูปร่างของหน้าตัด อย่างไรก็ตาม งานวิจัยนี้จะสมมุติให้ ความสัมพันธ์ของ โมเมนต์ และการโก่งเป็นไปตามเส้น 0 - A'' - B'' ซึ่งมีลักษณะเป็น Bilinear



รูปที่ 2.6 ความสัมพันธ์ของโมเมนต์และการโก่งของหน้าตัดใดๆ (Horne, 1979)

ผลของแรงในแนวแกนต่อค่าโมเมนต์พลาสติก (M_p) และการย้อนกลับของโมเมนต์

ในกรณีที่แรงในแนวแกนภายในองค์อาคารมีค่าสูงจะมีผลทำให้ค่าความสามารถในการรับโมเมนต์พลาสติก (Plastic Moment Capacity , M_{pc}) มีค่าเปลี่ยนแปลงไปดังแสดงในรูปที่ 2.7 AISC ได้สร้างสมการความสัมพันธ์สำหรับความสามารถในการรับโมเมนต์พลาสติกกับแรงในแนวแกนโดยประมาณสำหรับหน้าตัดรูปต่าง ๆ ตามสมการ (2.28) , (2.29) และ (2.30)



รูปที่ 2.7 ความสัมพันธ์ของความสามารถในการรับโมเมนต์พลาสติกกับแรงในแนวแกน สำหรับหน้าตัดรูปตัว I รอบแกนเอก (ทักซิณ เทพชาติวี, 2529)

$$\begin{aligned}
 M_{pc} &= M_p & ; 0 \leq P/P_y \leq 0.15 \\
 M_{pc} &= 1.18 \left(1 - \frac{P}{P_y} \right) M_p & ; 0.15 \leq P/P_y \leq 1.0
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

สำหรับหน้าตัดรูปตัว I รอบแกนโท

$$\begin{aligned}
 M_{pc} &= M_p & ; 0 \leq P/P_y \leq 0.40 \\
 M_{pc} &= 1.19 \left(1 - \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 \right) M_p & ; 0.40 \leq P/P_y \leq 1.0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$



สำหรับหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$M_{pc} = \left(1 - \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 \right) M_p \quad (2.30)$$

เมื่อ $P_y = A f_y$ ซึ่งเป็นแรงคลากของหน้าตัด

การเปลี่ยนแปลงเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วน เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติก

เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นที่ส่วนใด ๆ ในโครงสร้าง จะทำให้ความสามารถในการรับแรงของชิ้นส่วนเปลี่ยนไป นั่นคือ จะมีการเปลี่ยนแปลงค่าเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนที่เกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นตามเงื่อนไขการเกิดจุดหมุนพลาสติกตามสมการ (2.28) ซึ่งจะสามารถพิจารณาได้ดังนี้

จากสมการ (2.8) ถ้าเขียนในรูปของการเพิ่มของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่ง (Incremental Form) เพื่อให้สอดคล้องกับวิธีการเชิงเลขที่ใช้ในการวิเคราะห์ สามารถเขียนได้เป็น

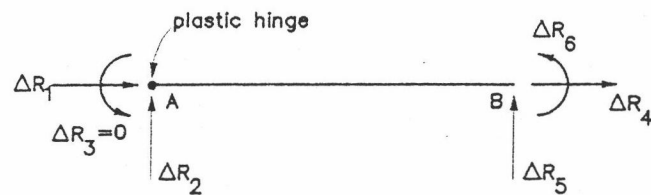
$$[K] \Delta \{r\} = \Delta \{R\} \quad (2.31)$$

หรือเขียนเป็นรูปขยายได้เป็น

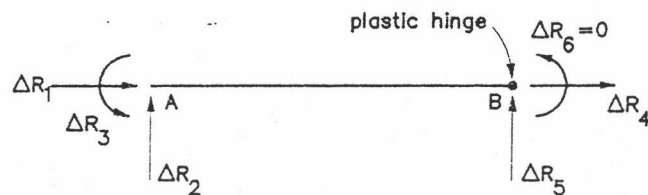
$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & \text{sym} & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

เมื่อ $K_{ij} (i=1-6, j=1-6)$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์สติฟเนส

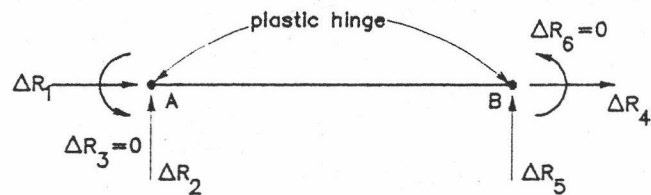
(ก) องค์อาคารเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกเฉพาะปลาย A



(ข) องค์อาคารเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกเฉพาะปลาย B



(ค) องค์อาคารเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลาย



รูปที่ 2.8 องค์อาคารเมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกที่ปลาย (Chen and Lui , 1991)

พิจารณารูปที่ 2.8 เมื่อเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นด้านปลาย A ตามรูป 2.8 (ก) จะได้ $\Delta R_3 = 0$

$$\Delta r_3 = \frac{1}{K_{33}} (-K_{31}\Delta r_1 - K_{32}\Delta r_2 - K_{34}\Delta r_4 - K_{35}\Delta r_5 - K_{36}\Delta r_6) \quad (2.33)$$

แทนค่าลงในแบบขยาย

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ 0 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} - \frac{K_{13}^2}{K_{33}} & K_{12} - \frac{K_{13}K_{32}}{K_{33}} & 0 & K_{14} - \frac{K_{13}K_{34}}{K_{33}} & K_{15} - \frac{K_{13}K_{35}}{K_{33}} & K_{16} - \frac{K_{13}K_{36}}{K_{33}} \\ & K_{22} - \frac{K_{23}^2}{K_{33}} & 0 & K_{24} - \frac{K_{23}K_{34}}{K_{33}} & K_{25} - \frac{K_{23}K_{35}}{K_{33}} & K_{26} - \frac{K_{23}K_{36}}{K_{33}} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{44} - \frac{K_{43}^2}{K_{33}} & K_{45} - \frac{K_{43}K_{35}}{K_{33}} & K_{46} - \frac{K_{43}K_{36}}{K_{33}} \\ & \text{sym} & & & K_{55} - \frac{K_{53}^2}{K_{33}} & K_{56} - \frac{K_{53}K_{36}}{K_{33}} \\ & & & & & K_{66} - \frac{K_{63}^2}{K_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix}$$

กรณีเกิดจุดหมุนพลาสติกขึ้นด้านปลาย B ตามรูป 2.8 (ข) จะได้ $\Delta R_6 = 0$

$$\Delta r_6 = \frac{1}{K_{66}} (-K_{61}\Delta r_1 - K_{62}\Delta r_2 - K_{63}\Delta r_3 - K_{64}\Delta r_4 - K_{65}\Delta r_5) \quad (2.35)$$

แทนค่าลงในแบบขยาย

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} - \frac{K_{16}^2}{K_{66}} & K_{12} - \frac{K_{16}K_{62}}{K_{66}} & K_{13} - \frac{K_{16}K_{63}}{K_{66}} & K_{14} - \frac{K_{16}K_{64}}{K_{66}} & K_{15} - \frac{K_{16}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & K_{22} - \frac{K_{26}^2}{K_{66}} & K_{23} - \frac{K_{26}K_{63}}{K_{66}} & K_{24} - \frac{K_{26}K_{64}}{K_{66}} & K_{25} - \frac{K_{26}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & & K_{33} - \frac{K_{36}^2}{K_{66}} & K_{34} - \frac{K_{36}K_{64}}{K_{66}} & K_{35} - \frac{K_{36}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & & & K_{44} - \frac{K_{46}^2}{K_{66}} & K_{45} - \frac{K_{46}K_{65}}{K_{66}} & 0 \\ & \text{sym} & & & K_{55} - \frac{K_{56}^2}{K_{66}} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix}$$

กรณีเกิดจุดหมุนพลาสติกทั้งสองปลายตามรูปที่ 2.8 (ค) จัดรูปของเมตริกซ์สติฟเนส
ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_4 \\ \Delta R_5 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{15} & K_{13} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{24} & K_{25} & K_{23} & K_{26} \\ & & K_{34} & K_{35} & K_{33} & K_{36} \\ & & & K_{45} & K_{43} & K_{46} \\ \text{sym} & & & & K_{53} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_4 \\ \Delta r_5 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_6 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta R_3 = \Delta R_6 = 0 \quad (2.37)$$

หรือจัดอยู่ในรูปเมตริกซ์ย่อยได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} \Delta \{R\}_a \\ \Delta \{R\}_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{aa} & [K]_{ab} \\ [K]_{ba} & [K]_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \{r\}_a \\ \Delta \{r\}_b \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

เมื่อ $\Delta \{R\}_a$ เวกเตอร์ของแรงกระทำที่ไม่เป็นศูนย์

$\Delta \{R\}_b$ เวกเตอร์ของแรงกระทำที่เป็นศูนย์ได้แก่ ΔR_3 และ ΔR_6

$$\Delta \{R\}_b = 0$$

$$\Delta \{R\}_b = [K]_{ba} \Delta \{r\}_a + [K]_{bb} \Delta \{r\}_b = 0 \quad (2.39)$$

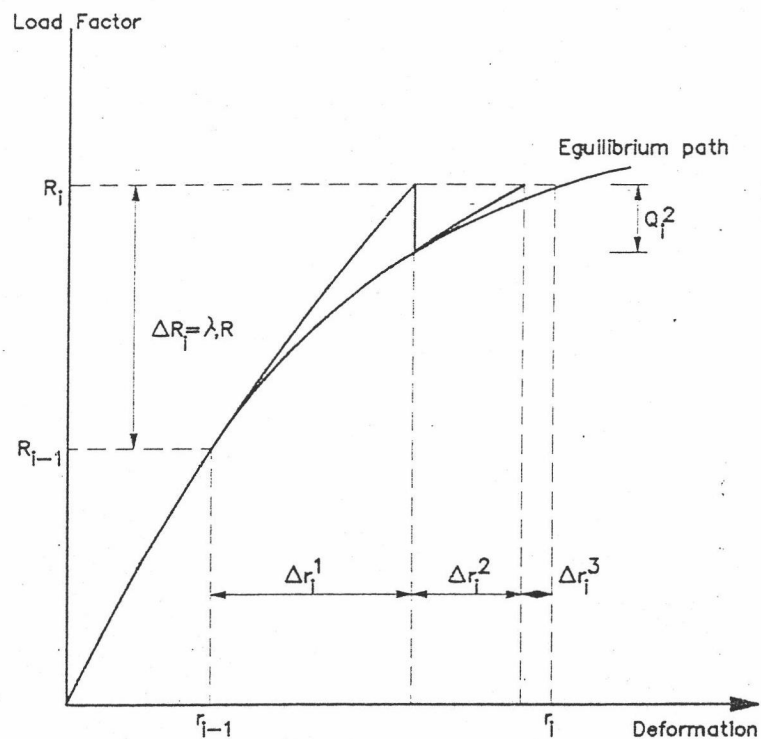
$$\begin{aligned} \Delta \{r\}_b &= -[K]_{bb}^{-1} ([K]_{ba} \Delta \{r\}_a) \\ \Delta \{R\}_a &= ([K]_{aa} - [K]_{ab} [K]_{bb}^{-1} [K]_{ba}) \Delta \{r\}_a \end{aligned} \quad (2.40)$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\Delta \{R\}_a = -[K] \Delta \{r\}_a \quad (2.41)$$

การวิเคราะห์อีลาสติก - พลาสติกอันดับที่สอง

จากวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างตามหัวข้อที่กล่าวผ่านมาเป็นการวิเคราะห์อีลาสติกอันดับที่สอง หากจะทำการปรับปรุงเพื่อให้วิเคราะห์โครงสร้าง จนถึงช่วงพลาสติกก็จำเป็นที่จะมีการปรับปรุง โดยรวบรวมขั้นตอนการตรวจสอบการเกิดจุดหมุนพลาสติก และการทำการวิเคราะห์อันดับที่สองเข้าด้วยกัน แสดงได้ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การวิเคราะห์อีลาสติกพลาสติกอันดับที่สอง (Chen and Lui ,1991)

ขั้นตอนการวิเคราะห์จะกระทำดังนี้

1. ที่ขั้นตอนใด ๆ ที่ตัวประกอบน้ำหนักมีค่าเป็น λ_i หาแรงภายในของชิ้นส่วนทุกชิ้นส่วน ที่ละชิ้นส่วน
2. นำผลของแรงภายในที่ได้ไปปรับปรุงค่าสตีเฟเนสของชิ้นส่วน
3. ทำการสร้างเมตริกซ์สตีเฟเนสสัมพัทธ์ของโครงสร้างโดยวิธีการรวมสตีเฟเนสโดยตรง

4. เพิ่มน้ำหนักบรรทุกทุกชั้นเป็น λ_{i+1}
5. ทำการวิเคราะห์ด้วยโดยการกำจัดแบบเกาซ์เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงภายใน แล้วหาผลต่างระหว่างแรงภายในชั้นตอนที่ i และ ชั้นตอนที่ $i+1$ ได้เวกเตอร์ของแรงคงค้างในการทำซ้ำรอบแรก
6. คำนวณค่ายูคลีเดียมนอร์มของเวกเตอร์ของแรงคงค้าง (Unbalanced Force Vector) โดยคำนวณได้จากสมการ (Bathe and Wilson, 1976)

$$\|Q\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n q_i^2} \quad (2.42)$$

เมื่อ $\|Q\|_e$ = ยูคลีเดียมนอร์มของเวกเตอร์ $\{Q\}$

q_i = สมาชิกของเวกเตอร์ $\{Q\}$

n = จำนวนของดีกรีของความอิสระ

7. เปรียบเทียบค่ายูคลีเดียมนอร์มของแรงคงค้างกับยูคลีเดียมนอร์มของแรงเริ่มต้น โดยงานวิจัยนี้ใช้เงื่อนไขการลู่เข้าหาคำตอบดังนี้ (Zienkiewics and Taylor, 1991)

$$\|Q\|_e \leq \frac{0.1}{100} \|\Delta R\|_e \quad (2.43)$$

หากค่ายูคลีเดียมนอร์มของแรงคงค้างเป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.43) ก็จะทำในชั้นตอนที่ 8 ต่อไป แต่ถ้าหากค่ายูคลีเดียมนอร์มไม่เป็นไปตามเงื่อนไขสมการ (2.43) จะต้องกระทำในชั้นตอนที่ 1 ถึง 7 ใหม่โดยให้เวกเตอร์ของแรงกระทำคือเวกเตอร์ของแรงคงค้าง

8. ตรวจสอบแรงภายในว่ามีจุดที่เกิดค่าความสามารถในการรับพลาสติกโมเมนต์ของหน้าตัดหรือไม่หลังจากที่ตรวจสอบว่าลู่เข้าหาคำตอบแล้ว ตามสมการความสัมพันธ์ของแรงในแนวแกนกับความสามารถในการรับพลาสติกโมเมนต์ของ AISC ตามสมการ (2.28) ถ้ามีก็ทำการปรับค่าสตีเฟนสขององค์อาคารนั้น ๆ แล้วก็ทำการเพิ่มน้ำหนักบรรทุกทุกเป็น λ_{i+2} เป็นชั้นตอนถัดไป

9. หลังจากการกำจัดแบบเกาซ์ของส่วนเมตริกซ์สตีเฟนสของโครงสร้างทุกครั้งจะต้องทำการตรวจสอบเสถียรภาพของโครงสร้างโดยการตรวจสอบค่าของสมาชิกแต่ละตัว

ตามแนวทแยง (Diagonal Elements) ของเมตริกซ์สติฟเฟิสของโครงสร้าง ถ้าโครงสร้างมีเสถียรภาพค่าของสมาชิกตามแนวทแยงของเมตริกซ์สติฟเฟิสทุกตัวจะมีค่ามากกว่าศูนย์ แต่ถ้าหากสมาชิกตามแนวทแยงของเมตริกซ์สติฟเฟิสตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวมีค่าเปลี่ยนเป็นค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โครงสร้างจะมีการเคลื่อนที่แบบวัตถุแข็ง (Rigid Body Motion) เสถียรภาพของโครงสร้างจะหมดไป

