

การแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับซึ่งรักษาการคูณเข้า ลิมิต การหาผลบวกได้ และผลบวก



นาย สุเทพ สวนใต้

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2536

ISBN 974-582-418-6

ลิขสิทธิ์ของบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

018829

๙๗๔๑๙๖๕

MATRIX TRANSFORMATIONS OF SEQUENCE SPACES WHICH PRESERVE
CONVERGENCE, LIMITS, SUMMABILITY AND SUMS



Mr. Suthep Suantai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Doctor of Philosophy

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1993

ISBN 974-582-418-6

Thesis Title Matrix transformations of sequence spaces which
 preserve convergence, limits, summability and sums
By Mr. Suthep Suantai
Department Mathematics
Thesis Advisor Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in
Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of
Philosophy.

.....*Thavorn Vajrabhaya*.....Dean of Graduate School
(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

.....*Virool Boonyasombat*.....Chairman
(Associate Professor Virool Boonyasombat Ph.D.)

.....*Yupaporn Kemprasit*.....Thesis Advisor
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

.....*Sidney S. Mitchell*.....Member
(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

.....*Mark E. Hall*.....Member
(Dr. Mark E. Hall Ph.D.)

.....*Sompong Dhompongsa*.....Member
(Professor Sompong Dhompongsa Ph.D.)



พิมพ์ต้นฉบับยกย่องด้วยวิธีพิมพ์หินในกรอบสี่เหลี่ยมที่พิมพ์แผ่นเดียว

สุเทพ สอนใต้ : การแปลงเมทริกซ์ซึ่งรักษาการลู่เข้า ลิมิต การหาผลบวกได้ และผลบวก (MATRIX TRANSFORMATIONS OF SEQUENCE SPACES WHICH PRESERVE CONVERGENCE, LIMIT, SUMMABILITY AND SUMS) อ.ที่ปรึกษา : รศ.ดร.ยุพการณ์ เข้มประสิทธิ์, 71 หน้า, ISBN 974-582-418-6

ปริภูมิลำดับแบบคลาสสิกทั้งหมด คือ $\ell_\infty, c, c_0, \ell_p, (1 < p < \infty), \ell, cs, bs, bv_0$ และ bv ในบรรดาปริภูมิลำดับเหล่านี้ ℓ_∞ เป็นปริภูมิที่ใหญ่ที่สุด จุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้คือ ให้ลักษณะของการแปลงเมทริกซ์ ซึ่งรักษาการลู่เข้า, การแปลงเมทริกซ์ซึ่งรักษาลิมิต การแปลงเมทริกซ์ซึ่งรักษาการหาผลบวกได้ และการแปลงเมทริกซ์ซึ่งรักษาผลบวก จากปริภูมิลำดับ $\ell_\infty, c, c_0, \ell_p, (1 < p < \infty), \ell, cs, bs, bv_0$ และ bv ไปยัง ℓ_∞

ในการศึกษานี้ เราสามารถให้ลักษณะของเมทริกซ์เช่นนี้ได้ทั้งหมดในเทอมของสมาชิกของเมทริกซ์และควอลชนิดเบตาของบางปริภูมิลำดับ ยกเว้นเพียงสองแบบของเมทริกซ์ต่อไปนี้ : การแปลงเมทริกซ์ซึ่งรักษาการลู่เข้า และการแปลงเมทริกซ์ซึ่งรักษาลิมิตจาก bs ไปยัง ℓ_∞ แต่อย่างไรก็ตามเราให้ลักษณะของเมทริกซ์สองแบบดังกล่าวได้ในคลาสของเมทริกซ์ K_r และคลาสของเมทริกซ์ A ซึ่ง

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk} - A_{n(k+1)}| \text{ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน } n = 1, 2, 3, \dots$$

ในงานวิจัยนี้เราได้ให้ลักษณะของการแปลงเมทริกซ์สี่แบบดังกล่าวข้างต้น จากปริภูมิลำดับมาตรฐานต่อไปนี้ ไปยัง ℓ_∞ ด้วย : ปริภูมิของลำดับทั้งหมด, ปริภูมิของลำดับจำกัดทั้งหมด และปริภูมิลำดับเซซาโร



ภาควิชา.....คณิตศาสตร์
สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา.....2535.....

ลายมือชื่อนิสิต.....
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

C225101 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD: CLASSICAL SEQUENCE SPACES / CESARO SEQUENCE SPACES / MATRIX TRANSFORMATIONS

SUTHEP SUANTAI : MATRIX TRANSFORMATIONS WHICH PRESERVE CONVERGENCE, LIMITS, SUMMABILITY AND SUMS. THESIS ADVISOR : ASSO. PROF. YUPAPORN KEMPRASIT, Ph.D. 71 pp. ISBN 974-582-418-6

All of the classical sequence spaces are l_∞, c, c_0, l_p ($1 < p < \infty$), l, cs, bs, bv_0 and bv . Among these sequence spaces, l_∞ is the largest one. The main objective of this research is to characterize convergence preserving matrix transformations, limit preserving matrix transformations, summability preserving matrix transformations and sum preserving matrix transformations from each of l_∞, c, c_0, l_p ($1 < p < \infty$), l, cs, bs, bv_0 and bv into l_∞ .

In this study, all such matrices can be completely characterized in terms of their entries and the β -duals of some sequence space with the exception of the following two types of matrices : convergence preserving matrix transformations and limit preserving matrix transformations from bs into l_∞ . However, these two types of matrices are characterized in the class of K_r -matrices and the class of infinite matrices A for which

$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{nk} - A_{n(k+1)}|$ converges uniformly on $n = 1, 2, 3, \dots$.

Included in this research, characterizations of the above four types of matrix transformations from each of the following standard sequence spaces into l_∞ are also given : the space of all sequences, the space of all finite sequences and the Cesaro sequence spaces.



ภาควิชา.....คณิตศาสตร์

สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา..... 2535

ลายมือชื่อนิติศ..... *Titit Smit*

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..... *ยพพพร เพ็ญใจ*

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Asso. Prof. Dr.Yupaporn Kemprasit, my supervisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my dissertation. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my parents and my wife for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS



	page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	v
ACKNOWLEDGEMENT	vi
INTRODUCTION	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES	4
II SOME USEFUL PROPERTIES OF SEQUENCE SPACES AND MATRIX TRANSFORMATIONS	17
III THE SPACE OF ALL SEQUENCES AND THE SPACE OF ALL FINITE SEQUENCES	21
IV THE CLASSICAL SEQUENCE SPACES	28
V THE CESARO SEQUENCE SPACES	64
REFERENCES	69
VITA	71

INTRODUCTION



The theory of sequence spaces and infinite matrices has long been studied. The problem of when an infinite matrix becomes a matrix transformation between two certain sequence spaces has been widely studied in this area. The study of this problem has been done by many mathematicians in the case that the domain or codomain is a classical sequence space (l_∞ , c , c_0 , l_p ($1 < p < \infty$), l , bv_0 , bv , cs or bs). See, for example, [1]-[6],[9] and [10]. Kojima [6] gave a characterization of lower-semi matrices A such that $A : c \rightarrow c$ which was then extended to general matrices by Schur [11]. A characterization of an infinite matrix A such that $A : cs \rightarrow cs$ can be seen in [10]. Silverman [12] gave a sufficient condition for a lower semi-matrix to map c into c and A preserve limits. Toeplitz [13] generalized Silverman's result by giving necessary and sufficient conditions guaranteeing that a row-finite matrix will be a limit preserving matrix transformation from c to c . Finally, the solution of this problem was published in full generality by Schur [11] for a general infinite matrix A . A limit preserving matrix $A : bv \rightarrow c$ was characterized by Khan and Riazuddin in [5]. A characterization of an infinite matrix $A : cs \rightarrow cs$ such that A preserves sums can be seen in [10].

We are interested in the known characterizations of the following four types of infinite matrices A :

- (1) $A : c \rightarrow c$,
- (2) $A : c \rightarrow c$ and A preserves limits ,
- (3) $A : cs \rightarrow cs$ and
- (4) $A : cs \rightarrow cs$ and A preserves sums.

These results motivate us to study the following matrices A where X and Y are any two of the classical sequence spaces :

- (1)' $A : X \rightarrow Y$ and A preserves convergence ,
- (2)' $A : X \rightarrow Y$ and A preserves limits ,
- (3)' $A : X \rightarrow Y$ and A preserves summability and
- (4)' $A : X \rightarrow Y$ and A preserves sums.

The characterizations of (1) - (4) are certainly important starting points for those of (1)' - (4)', respectively. We know that among the classical sequence spaces, ℓ_∞ is the largest one, so the characterizations of (1)' - (4)' for the case that $Y = \ell_\infty$ should make it much easier to study (1)' - (4)' in general. Our main purpose is to characterize matrices (1)' - (4)' with $Y = \ell_\infty$. This study is in Chapter IV.

The space of all sequences and the space of all finite sequences are standard sequence spaces and the Cesaro sequence spaces are very well-known in the area of sequence spaces. Included in this research characterizations of convergence preserving matrix transformations, limit preserving matrix transformations, summability preserving matrix transformations and sum preserving matrix transformations which have these sequence spaces as their domains and ℓ_∞ as their codomains are given. This study is in Chapter III and Chapter V.

The preliminaries and notation used for this work are given in Chapter I. Some general properties of sequence spaces and matrix transformations which are useful for our study are introduced in Chapter II.