บทที่ 2

การประมาณค่า

จากการศึกษาเรื่องการประมาณค่าองประกอบความแปรปรวน กรณีข้อมูลสมดุล ทำให้ทราบว่า ตัวประมาณด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน(ANOVA) เป็นตัวประมาณที่อยู่ในรูปกำลังสองโดยมีคุณสมบัติความไม่เอนเอียง และมีความแปรปรวนต่ำสุดในบรรดาตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง(Minimum variance quadratic unbiased) แต่ถึงแม้ตัวประมาณด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวนจะเป็นตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่มีคุณสมบัติดังกล่าว แต่พบว่าการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีดังกล่าวสามารถมีค่าต่ำกว่า 0 ซึ่งขัดกับคุณสมบัติของพารามิเตอร์(Parameter) ที่จะค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เท่านั้น ซึ่งจากปัญหาดังกล่าว Searle [1] ได้เสนอแนวทางการแก้ปัญหาดังกล่าวไว้อย่างน่าสนใจดังต่อไปนี้

1. ยอมรับตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่มีค่าเป็นลบตัวนั้นว่ามีค่าเป็น 0 แต่เมื่อนำมาประมาณค่าผลรวมองค์ประกอบความแปรปรวนให้ใช้ค่าที่เป็นลบนั้นนำมาคิดส่งผลให้ผลรวมองค์ประกอบความแปรปรวนมีค่าต่ำกว่าตัวประมาณองค์ประกอบแต่ละตัว
2. แทนค่าตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนตัวนั้นว่ามีค่าเป็น 0 ซึ่งจะทำให้คุณสมบัติบางประการของตัวประมาณขาดหายไปโดยเฉพาะคุณสมบัติความไม่เอนเอียง
3. ตัวประมาณที่มีค่าเป็นลบดังกล่าว ถือเป็นตัวบ่งชี้ให้ตัดองค์ประกอบดังกล่าวออกจากตัวแบบ และทำการประมาณตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนภายใต้ตัวแบบใหม่ต่อไป
4. องค์ประกอบความแปรปรวนที่มีค่าเป็นลบ ถือเป็นการบ่งชี้ความผิดพลาดในตัวแบบ และทำการตรวจสอบแหล่งข้อมูลเพื่อหาตัวแบบใหม่
5. ประมาณค่าตัวประมาณดังกล่าวใหม่โดยใช้วิธีอื่นๆ
6. ให้ความหมายว่าตัวประมาณที่เป็นลบดังกล่าวเป็นตัวบ่งชี้ว่าข้อมูลไม่เพียงพอ จึงควรทำการรวบรวมข้อมูลให้มากขึ้นแล้วนำมาวิเคราะห์ หรือใช้ข้อมูลเก่าโดยมีการถ่วงน้ำหนัก(Poole) แต่ถ้ายังคงติดลบอยู่ก็ให้ประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนตัวนั้นว่ามีค่าเป็น 0

งานวิจัยในครั้งนี้เป็นการพัฒนาตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน ของแผนการทดลองสุ่มสมบูรณ์(CRD) ซึ่งได้รับอิทธิพลเชิงสุ่มเฉพาะกรณีข้อมูลสมดุลภายใต้การแก้ปัญหาตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่มีค่าเป็นลบโดยกำหนดให้ตัวประมาณดังกล่าวมีค่าเป็น 0

---

[1] Searle , S.R., Linear models. (New York : John Wiley & Sons,1971), pp.407-408.

ซึ่งในที่นี้ได้แบ่งการศึกษาออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆด้วยกันคือ ส่วนแรกเป็นการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีพื้นฐานที่ได้นำมาศึกษาในครั้งนี้มีทั้งสิ้น 3 วิธี ได้แก่ ตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด(Maximum likelihood : ML) , ตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยน (Invariance quadratic estimator : IQE) และตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัด(Restricted maximum likelihood : REML) นอกจากนี้ในส่วนที่สองเป็นการพัฒนาตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนตัวใหม่ ภายใต้แนวคิดการเฉลี่ยค่าองค์ประกอบความแปรปรวนจากวิธีมาตรฐานที่กล่าวไว้ข้างต้น โดยเป็นการศึกษาถึงวิธีการเฉลี่ยค่าองค์ประกอบที่เหมาะสมเพื่อให้ได้ตัวประมาณที่สามารถนำไปใช้ได้ดีในกรณีศึกษาทั่วไป ซึ่งมีรายละเอียดต่างๆ ดังได้กล่าวไว้ในหัวข้อต่อไป

2.1 **ตัวประมาณด้วยวิธีพื้นฐาน**

ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีพื้นฐานซึ่งคำนวณภายใต้ตัวแบบที่เขียนในรูปเวกเตอร์ดังต่อไปนี้

ตัวแบบ $$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{1}\mu + \mathbf{U}\underset{\sim}{\tau} + \underset{\sim}{e} \qquad (2.1)$$

เมื่อ $\underset{\sim}{y}$ คือเวกเตอร์ มีขนาด $N \times 1$

$\underset{\sim}{1}$ คือเวกเตอร์ มีขนาด $N \times 1$

$\underset{\sim}{e}$ คือเวกเตอร์ มีขนาด $N \times 1$

$\underset{\sim}{\tau}$ คือเวกเตอร์ มีขนาด $a \times 1$

$\mathbf{U}$ คือเมทริกซ์ มีขนาด $N \times a$

μ คือค่า scalar

โดยที่ $$\mathbf{U} = (\mathbf{I}_a \otimes \underset{\sim}{1}_n) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{1}_n & & & \\ & . & 0 & \\ & & . & \\ & 0 & . & \\ & & & \underset{\sim}{1}_n \end{bmatrix}_{naxna}$$

$$\underset{\sim}{\tau} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma_\tau^2 \mathbf{I}_a)$$

และ $$\underset{\sim}{e} \sim N(\underset{\sim}{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_N)$$

ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีพื้นฐานที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้มีทั้งสิ้น 3 วิธีดังนี้

2.1.1 ตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด(Maximum likelihood : ML)

เนื่องจากทราบว่า $\underset{\sim}{y} \sim N\left(\mu \underset{\sim N}{1},\ {}_d\{\sigma_e^2 \mathbf{I}_n + \sigma_\tau^2 \mathbf{J}_n\}\right)$ ซึ่ง Searle, Cassella และ McCalloch[2] ได้แสดงวิธีการหาตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดไว้โดย

กำหนดให้ $\mathbf{V} = {}_d\{\sigma_\tau^2 \mathbf{J}_n + \sigma_e^2 \mathbf{I}_n\}$

เมื่อ d แสดงความเป็นเมทริกซ์เส้นทแยงมุม

$\mathbf{J}_n$ เมตริกซ์จตุรัสขนาด nxn มีสมาชิกทุกตัวเป็น 1

พบว่า y_i อิสระจาก y_j ดังนั้นสามารถเขียนฟังก์ชันความควรจะเป็น(Likelihood function) ได้ดังต่อไปนี้

$$L = L(\mu, \mathbf{V} \mid \underset{\sim}{y}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{y} - \mu \underset{\sim N}{1}\right)' \mathbf{V}^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - \mu \underset{\sim N}{1}\right)\right]}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{V}|^{1/2}}$$

จาก Searle, Cassella และ McCalloch[3] พบว่า $(a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n)^{-1} = \frac{1}{a}\left(\mathbf{I}_n - \frac{b}{a+bn}\mathbf{J}_n\right)$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $a \neq -nb$

และยังพบอีกว่า $|a\mathbf{I}_n + b\mathbf{J}_n| = a^{n-1}(a - nb)$

เนื่องจาก $\mathbf{V} = {}_d\{\sigma_\tau^2 \mathbf{J}_{n_i} + \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n_i}\}$ ซึ่งเป็นการแทนค่า $a = \sigma_e^2$ $b = \sigma_\tau^2$

∴ จะได้ว่า

$$\mathbf{V}^{-1} = {}_d\left\{\frac{1}{\sigma_e^2}\left(\mathbf{I}_{n_i} - \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_e^2 + n_i\sigma_t^2}\mathbf{J}_{n_i}\right)\right\} \tag{2.2}$$

และ

$$|\mathbf{V}| = \prod_{i=1}^{a}\left(\sigma_e^2\right)^{n_i-1}\left(\sigma_e^2 + n_i\sigma_\tau^2\right) = \sigma_e^{2\sum_{i=1}^{a}(n_i-1)} \prod_{i=1}^{a}\left(\sigma_e^2 + n_i\sigma_\tau^2\right) \tag{2.3}$$

---

[2] Searle , S.R., Cassella,G. and McCalloch.E.C. Variance components. (New York : John Wiley & Sons,1992), pp.78-83.

[3] Ibid., p.443.

แทนค่า $\mathbf{V}^{-1}$ และ $|\mathbf{V}|$ ในฟังก์ชันความควรจะเป็น $L(\mu,\mathbf{V}\mid \underset{\sim}{y})$ ได้ดังนี้

$$L(\mu,\mathbf{V}\mid \underset{\sim}{y}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{y}-\mu\underset{\sim N}{1}\right)'_{d}\left\{\frac{1}{\sigma_e^2}\left(\mathbf{I}_{n_i}-\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_e^2+n_i\sigma_\tau^2}\mathbf{J}_{n_i}\right)\right\}\left(\underset{\sim}{y}-\mu\underset{\sim N}{1}\right)\right]}{(2\pi)^{N/2}\left\{\sigma_e^{2\Sigma(n_i-1)}\prod\left(\sigma_e^2+n_i\sigma_\tau^2\right)\right\}^{1/2}}$$

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_i\sum_j(y_{ij}-\mu)^2+\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_i\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_e^2+n_i\sigma_\tau^2}(y_{i.}-n_i\mu)^2\right]}{(2\pi)^{N/2}\,\sigma_e^{2\left\{\frac{1}{2}(N-a)\right\}}\prod_{i=1}^{a}\left(\sigma_e^2+n_i\sigma_\tau^2\right)^{1/2}} \tag{2.4}$$

กรณีข้อมูลสมดุล $n_i = n$ ดังนั้น $N = a*n$ สมการลอการิทึม ของฟังก์ชันความควรจะเป็นได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} l = \log L &= \log\{L(\mu,\mathbf{V}\mid \underset{\sim}{y})\} \\ &= -\frac{1}{2}N\log(2\pi)-\frac{1}{2}(N-a)\log\sigma_e^2-\frac{a}{2}\log\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)- \\ &\quad \frac{\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}+\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_i\frac{\sigma_\tau^2 n^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2}(\bar{y}_{i.}-\mu)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2}N\log(2\pi)\;\;\frac{1}{2}a(n-1)\log\sigma_e^2-\frac{a}{2}\log\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)- \\ &\quad \frac{\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}+\frac{\sigma_\tau^2 n^2}{2\sigma_e^2\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)}\sum_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

เนื่องจาก 2 เทอม สุดท้ายในสมการ (2.5) สามารถเขียนใหม่ได้โดย

$$-\frac{\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}+\frac{\sigma_\tau^2 n^2}{2\sigma_e^2\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)}\sum_i(\bar{y}_{i.}-\mu)^2$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2-\frac{n\sigma_\tau^2}{\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)}\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right] \tag{2.6}$$

พิจารณา $\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2=\sum\sum\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}+\bar{y}_{i.}-\mu\right)^2$

$$=\sum\sum\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)^2+\sum\sum\left(\bar{y}_{i.}-\mu\right)^2+2\sum\sum\cancelto{0}{\left(y_{ij}-\bar{y}_{i.}\right)}\left(\bar{y}_{i.}-\mu\right)$$

พิจารณา $\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}+\bar{y}_{..}-\mu)^2$ พบว่า

$$\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}+\bar{y}_{..}-\mu)^2 = \sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2 + \sum n(\bar{y}_{..}-\mu)^2 + \cancelto{0}{2\sum n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})(\bar{y}_{..}-\mu)}$$

แทนค่า $\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2$ และ $\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2$ แทนในสมการ (2.6) ได้ดังนี้

$$-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum\sum(y_{ij}-\mu)^2-\frac{n\sigma_\tau^2}{(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2)}\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[\sum\sum(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum\sum(\bar{y}_{i.}-\mu)^2-\frac{n\sigma_\tau^2}{(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2)}\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\mu)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE+(1-\frac{n\sigma_\tau^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2})(\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}+\bar{y}_{..}-\mu)^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE+\frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2}(\sum_i n(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..})^2+n\sum(\bar{y}_{..}-\mu)^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_e^2}\left[SSE+\frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2}\left[SSTr+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right]\right] \tag{2.7}$$

แทนค่าสมการ (2.7) ในสมการ (2.5) โดย ให้ $\lambda=\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2$

$$l=-\frac{1}{2}N\log(2\pi)-\frac{1}{2}a(n-1)\log\sigma_e^2-\frac{a}{2}\log\lambda-\frac{SSE}{2\sigma_e^2}-\frac{SSTr}{2\lambda}-\frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\lambda}$$

หาอนุพันธ์ย่อย(Partial derivative) สมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ μ,σ_e^2 และ λ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial l}{\partial\mu}=-\frac{2an(\bar{y}_{..}-\mu)(-1)}{2\lambda}=\frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)}{\lambda}=0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma_e^2}=-\frac{a(n-1)}{2\sigma_e^2}+\frac{SSE}{2\sigma_e^4}=-\frac{a(n-1)}{2\sigma_e^4}\left[\sigma_e^2-\frac{SSE}{a(n-1)}\right]=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda}=-\frac{a}{2\lambda}+\frac{SSTr}{2\lambda^2}+\frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\lambda^2}=0 \tag{2.10}$$

จากสมการ (2.8)

$$\frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)}{\lambda} = 0$$

$$an(\bar{y}_{..} - \mu) = 0$$

$$an\bar{y}_{..} = an\mu$$
$$\dot{\mu} = \bar{y}_{..} \tag{2.11}$$

จากสมการ (2.10) และ (2.11)

$$\frac{-a\lambda + SSTr + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\lambda^2} = 0$$

$$a\lambda = SSTr + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2$$

$$\therefore \qquad \dot{\lambda} = \frac{SSTr}{a} + n(\bar{y}_{..} - \bar{y}_{..}) = \frac{SSTr}{a}$$

$$= \left(\frac{a-1}{a}\right) MSTr \tag{2.12}$$

จากสมการ (2.9)

$$-\frac{a(n-1)}{2\sigma_e^4}\left[\sigma_e^2 - \frac{SSE}{a(n-1)}\right] = 0$$

$$\frac{SSE}{2\sigma_e^4} = \frac{a(n-1)}{2\sigma_e^2} \tag{2.13}$$

$$\dot{\sigma}_e^2 = \frac{SSE}{a(n-1)} = MSE$$

เนื่องจากทราบว่า $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2$ $\quad \therefore \sigma_\tau^2 = \dfrac{\lambda - \sigma_e^2}{n}$

ดังนั้นจะได้ว่า
$$\dot{\sigma}_\tau^2 = \frac{\dot{\lambda} - \dot{\sigma}_e^2}{n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) MSTr - MSE}{n} \tag{2.14}$$

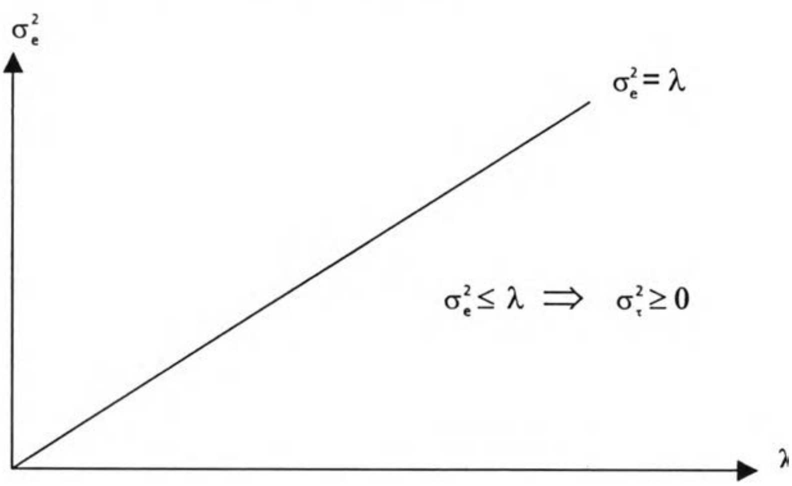
เนื่องจากปริภูมิของพารามิเตอร์ เป็นดังนี้ $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma_e^2 < \infty$ และ $0 \le \sigma_\tau^2 < \infty$

- การประมาณค่า μ พบว่า $\dot{\mu}$ อิสระจาก $\dot{\sigma}_e^2$ และ $\dot{\sigma}_\tau^2$ ดังนั้น $ML(\mu) = \tilde{\mu} = \dot{\mu} = \bar{y}_{..}$

- การประมาณค่า σ_e^2 พบว่า $\dot{\sigma}_e^2$ = MSE เป็นตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด เนื่องจากเป็นค่าประมาณที่ไม่เป็นลบส่วนตัวประมาณ σ_τ^2 คือ $\dot{\sigma}_\tau^2$ ขึ้นอยู่กับ $\dot{\sigma}_e^2$ สามารถมีค่าเป็นลบได้

เนื่องจากตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดจะต้องได้ตัวประมาณ ที่อยู่ภายใต้ปริภูมิของพารามิเตอร์ เนื่องจาก $\dot{\sigma}_\tau^2$ ขึ้นอยู่กับ $\dot{\sigma}_e^2$ ดังนั้นไม่เพียงแต่แน่ใจว่า $\dot{\sigma}_e^2$ อยู่ใน ปริภูมิของพารามิเตอร์ สำหรับ σ_e^2 แต่ตัวประมาณทั้งคู่($\tilde{\sigma}_e^2, \tilde{\sigma}_\tau^2$) ต้องอยู่ใน 2 ปริภูมิ(Space) ที่กำหนดโดย ($\sigma_e^2, \sigma_\tau^2$) นั่นคือต้องหาเงื่อนไขภายใต้ $\dot{\sigma}_e^2$ = MSE ไม่เป็นตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดของ σ_e^2 ดังนั้นจึงพิจารณา $\dot{\sigma}_e^2$ และ λ ซึ่งสามารถแสดงจตุภาค(Quadrant) ที่เป็นบวกดังรูปที่ 2

รูปที่ 2 แสดงจตุภาคที่เป็นบวกสำหรับระนาบ (λ, σ_e^2)



จากรูปที่ 2 พิจารณาที่เส้น $\sigma_e^2 = \lambda$ พบว่าถ้า $\sigma_\tau^2 \ge 0$ มีความหมายว่า $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2 \ge \sigma_e^2$ ซึ่งแสดงได้ในพื้นที่ใต้เส้น $\sigma_e^2 = \lambda$ นั้นคือเมื่อ $(\dot{\lambda}, \dot{\sigma}_e^2)$ อยู่ในพื้นที่ค่าประมาณที่ได้จะเป็นค่าประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด หรืออาจกล่าวได้ว่า เมื่อ $\dot{\sigma}_\tau^2 \ge 0$ $\tilde{\sigma}_\tau^2 = \dot{\sigma}_\tau^2$ และ $\tilde{\sigma}_e^2 = \dot{\sigma}_e^2$ จะไม่เป็นตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด เมื่อ $\dot{\sigma}_\tau^2 < 0$ ซึ่งเป็นเมื่อ $\dot{\lambda} < \dot{\sigma}_e^2$

เนื่องจากกรณี $\dot{\sigma}_\tau^2 < 0$ จะให้ $\tilde{\sigma}_\tau^2 = 0$ ซึ่งทำให้ต้องแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังนี้

<u>กรณี1</u> $\tilde{\sigma}_e^2 < \dot{\sigma}_e^2$

จากสมการ (2.9)

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \sigma_e^2}\right|_{\sigma_e^2=\tilde{\sigma}_e^2} = -\frac{a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4}\left[\tilde{\sigma}_e^2 - \frac{SSE}{a(n-1)}\right] = -\frac{a(n-1)}{2\tilde{\sigma}_e^4}\left(\tilde{\sigma}_e^2 - \dot{\sigma}_e^2\right) > 0$$

<u>กรณี2</u> $\tilde{\sigma}_e^2 \ge \dot{\sigma}_e^2$ เมื่อ $\tilde{\lambda} \ge \tilde{\sigma}_e^2 \ge \dot{\sigma}_e^2 > \dot{\lambda}$

จากสมการ (2.10)

$$\left.\frac{\partial l}{\partial \lambda}\right|_{\substack{\mu=\bar{y}_{..}\\ \lambda=\tilde{\lambda}}} = -\frac{a}{2\tilde{\lambda}^2}\left(\tilde{\lambda}-\frac{SSTr}{a}\right)+\frac{an(\bar{y}_{..}-\bar{y}_{..})^2}{2\tilde{\lambda}^2}$$
$$= -\frac{a}{2\tilde{\lambda}^2}\left(\tilde{\lambda}-\dot{\lambda}\right)<0$$

เนื่องจากเราทราบว่า $\tilde{\sigma}_\tau^2 \geq 0$ เมื่อ $\sigma_\tau^2 < 0$ ดังนั้น $\tilde{\sigma}_\tau^2 = 0$ ซึ่งสมมูลกับ $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_e^2$ เมื่อ $\dot{\sigma}_\tau^2 < 0$ ดังนั้นในการหาตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุด ของ μ และ σ_e^2 เมื่อ $\tilde{\sigma}_\tau^2 = 0$ ได้มาจากการหาค่าสูงสุดของ สมการ logL ในขอบเขตระนาบ $\sigma_e^2 = \lambda$

$$l(\lambda=\sigma_e^2) = -\frac{1}{2}N\log(2\pi)-\frac{1}{2}a(n-1)\log\sigma_e^2-\frac{a}{2}\log\sigma_e^2-\frac{SSE}{2\sigma_e^2}-\frac{SSTr}{2\sigma_e^2}-\frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}$$
$$= -\frac{1}{2}N\log(2\pi)-\frac{1}{2}N\log\sigma_e^2-\frac{SSTr+SSE}{2\sigma_e^2}-\frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\sigma_e^2}$$

หาอนุพันธ์ย่อยจากสมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็น เทียบกับพารามิเตอร์ μ และ σ_e^2 แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial l(\lambda=\sigma_e^2)}{\partial\mu} = \frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)}{\sigma_e^2}=0 \qquad \therefore \mu=\bar{y}_{..}$$
$$\frac{\partial l(\lambda=\sigma_e^2)}{\partial\sigma_e^2} = -\frac{N}{2\sigma_e^2}+\frac{SSTr+SSE}{2\sigma_e^4}+\frac{an(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\sigma_e^4}=0 \qquad (2.15)$$

แทนค่า $\mu=\bar{y}_{..}$ ในสมการ (2.15)

$$\frac{\partial l(\lambda=\sigma_e^2)}{\sigma_e^2} = -\frac{N\sigma_e^2}{2\sigma_e^4}+\frac{SSTr+SSE}{2\sigma_e^4}+\frac{an(\bar{y}_{..}-\bar{y}_{..})^2}{2\sigma_e^4}=0$$
$$\therefore N\sigma_e^2 = SSTr+SSE$$
$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{SSTr+SSE}{N}=\frac{SST}{an}$$
$$= \frac{(a-1)MSTr+a(n-1)MSE}{an} = \left(1-\frac{1}{n}\right)MSE+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{a}\right)MSTr$$
$$= MSE+\frac{1}{n}\left\{\left(1-\frac{1}{a}\right)MSTr-MSE\right\} = \dot{\sigma}_e^2+\dot{\sigma}_\tau^2 < \dot{\sigma}_e^2$$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า

<u>เงื่อนไข</u>

$\frac{a-1}{a}MSTr \geq MSE$ $\qquad \hat{\sigma}^2_{\tau ML} = \left(\frac{a-1}{a}MSTr - MSE\right)\Big/ n$, $\qquad \hat{\sigma}^2_{eML} = MSE$

$\frac{a-1}{a}MSTr < MSE$ $\qquad \hat{\sigma}^2_{\tau ML} = 0$, $\qquad \hat{\sigma}^2_{eML} = \frac{SST}{an}$

2.1.2 **ตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยน**(Invariance Quadratic Estimator : IQE)

เนื่องจากทราบว่า $\quad \underset{\sim}{y} \sim N(\mu \underset{\sim N}{1}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_N + \sigma_\tau^2 \mathbf{V})$

โดยที่ $\quad \mathbf{V} = \mathbf{UU}'$

Mathew และ Kelly [4] ได้พัฒนาตัวประมาณภายใต้การแปลง ในรูป $\underset{\sim}{u} = \mathbf{Z}'\underset{\sim}{y}$ ซึ่งจากการแจกแจงของ $\underset{\sim}{y}$ ทำให้ทราบว่า $\underset{\sim}{u} \sim N(\underset{\sim q}{0}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_q + \sigma_\tau^2 \mathbf{V_1})$

โดยที่ $\quad \mathbf{V_1} = \mathbf{Z}'\mathbf{UU}'\mathbf{Z}$

ให้ $\quad r = \text{rank}(\underset{\sim}{1}) = 1$

$q = N\text{-}r \quad = N\text{-}1$

การแปลงดังกล่าวจะเกิดขึ้นภายใต้ข้อจำกัดว่า $\mathbf{Z}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $N \times q = N \times N\text{-}1$

โดยที่ $\quad \mathbf{Z}'\underset{\sim}{1} = 0 \quad$ และ $\quad \mathbf{Z}'\mathbf{Z} = \mathbf{I}_q$

กำหนดให้ $\quad s = \text{rank}(\mathbf{V_1})$

เราพิจารณาได้ว่า

$$\mathbf{V_1} = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \mathbf{E}_i \qquad (2.16)$$

เมื่อ g คือจำนวนชุดของ n_i ที่แตกต่างกัน

$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_g$ เป็นค่าไอเก้น(Eigen value) ของ $\mathbf{V_1}$ ที่ไม่เท่ากับ 0 ซึ่งคูณกับ $m_1, m_2, \ldots, m_g$ เมื่อ m_i คือจำนวนระดับของปัจจัยที่มีขนาดตัวอย่าง n_i

โดยทราบว่า $\quad \sum_{i=1}^{g} m_i = s = \text{rank}(\mathbf{V_1})$

$\mathbf{E}_i$ เป็น ภาพฉาย(Projection)

---

[4] Klly,R.J. and Methew,T.,"Improved estimators of variance components with smaller probability of negativity," <u>Journal of the royal statistic Soc. B</u>. 55 (1993) : 897-911.

นอกจากนี้ยังทราบอีกว่า $\mathbf{E}_{g+1} = \mathbf{I} - \sum_{i=1}^{g} \mathbf{E}_i$ โดยที่ rank($\mathbf{E}_{g+1}$) = q – s และ q - s > 0 เนื่องจาก $\mathbf{u}_i$ มีการแจกแจงแบบปกติ(Normal) ดังนั้นจึงให้ความสนใจในรูปกำลังสอง (Quadratic form) $\mathbf{u}'\mathbf{E}_i\mathbf{u}$ (i = 1,2,... , g+1) โดยพบว่า รูปแบบดังกล่าวเป็นชุดของตัวสถิติที่เพียงพอต่ำที่สุด และสมบูรณ์ (Minimal sufficient statistics and complete) ก็ต่อเมื่อ g = 0 หรือ g =1 ซึ่งเป็นไปตามการศึกษาของ Olsen [5]

จากตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน เราสามารถหาค่า ผลรวมกำลังสองของปัจจัย (Treatmant sum square) กำหนดโดย $\sum_{i=1}^{g} \mathbf{u}'\mathbf{E}_i\mathbf{u}$ และผลรวมกำลังสองความเบี่ยงเบน(Error sum square) กำหนดโดย $\mathbf{u}'\mathbf{E}_{g+1}\mathbf{u}$ ดังนั้นจะได้ว่าตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่เกิดจากความผันแปรของปัจจัยด้วยวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนแสดงได้ดังสูตร

$$\hat{\sigma}^2_{\tau AN} = \frac{1}{tr(\mathbf{V}_1)}\left(\sum_{i=1}^{g} \mathbf{u}'\mathbf{E}_i\mathbf{u} - \frac{s}{q-s}\mathbf{u}'\mathbf{E}_{g+1}\mathbf{u}\right) \tag{2.17}$$

ในกรณีจำนวนตัวอย่างในแต่ละระดับของปัจจัยเท่ากัน(Balance data) ทำให้ทราบว่า g = 1 ดังนั้นจากสมการ (2.16) และ (2.17) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$\mathbf{V}_1 = \lambda_1 \mathbf{E}_1$ เมื่อ $\mathbf{E}_1$ เป็นเมทริกซ์นิจพล(Idempotent matrix) มีลำดับชั้น(Rank) = s

$$\hat{\sigma}^2_{\tau AN} = \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{s}\mathbf{u}'\mathbf{E}_1\mathbf{u} - \frac{1}{q-s}\mathbf{u}'\mathbf{E}_2\mathbf{u}\right) \tag{2.18}$$

และทำให้ได้ว่า

$$V(\hat{\sigma}^2_{\tau AN}) = \frac{2\sigma_e^4 q}{\lambda_1^2 s(q-s)} + \frac{2\sigma_\tau^4}{s} + \frac{2\sigma_e^2\sigma_\tau^2}{\lambda_1 s} \tag{2.19}$$

$\hat{\sigma}^2_{\tau AN}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ซึ่งมีความแปรปรวนต่ำสุดสม่ำเสมอ(Uniformly minimum variance unbiased estimator) ของ σ^2_τ แต่เป็นที่ทราบกันดีว่าไม่มีตัวประมาณดังกล่าวสามารถมีค่าเป็นลบ ดังนั้น $\hat{\sigma}^2_{\tau AN}$ จึงไม่เป็นที่ยอมรับจึงได้มีการพัฒนาตัวประมาณที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย(MSE) ของตัวประมาณต่ำกว่าของ $\hat{\sigma}^2_{\tau AN}$

พิจารณาตัวประมาณ

$$\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)} = \frac{c}{\lambda_1}\left(\frac{1}{s}\mathbf{u}'\mathbf{E}_1\mathbf{u} - \frac{h}{q-s}\mathbf{u}'\mathbf{E}_2\mathbf{u}\right) \tag{2.20}$$

เมื่อ c ≥ 0 และ h เป็นจำนวนจริง ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยดังนี้

---

[5] Olsen, A.,Selly, J. and Birkes, D. , “Invariant quadratic estimation for two variance components,” Annuals of Statistics 4 (1976): 880.

$$MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}) = 2\left\{\frac{c^2(\sigma_e^2+\lambda_1\sigma_\tau^2)^2}{\lambda_1^2 s}+\frac{c^2h^2\sigma_e^4}{\lambda_1^2(q-s)}\right\}+\left\{\frac{c}{\lambda_1}(\sigma_e^2+\lambda_1\sigma_\tau^2)-\frac{ch\sigma_e^2}{\lambda_1}-\sigma_\tau^2\right\}^2$$

$$=\sigma_e^4\frac{c^2}{\lambda_1^2}\left\{2\left(\frac{1}{s}+\frac{h^2}{q-s}\right)+(1-h)^2\right\}+\sigma_\tau^4\left\{2\frac{c^2}{s}+(c-1)^2\right\}$$
$$+2\sigma_e^2\sigma_\tau^2\frac{c}{\lambda_1}\left\{2\frac{c}{s}+(1-h)(c-1)\right\} \qquad (2.21)$$

ภายใต้เงื่อนไข $MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}) \le MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau AN})$ แยกพิจารณาเป็น 3 อสมการดังนี้

$$\frac{c^2}{\lambda_1^2}\left\{2\left(\frac{1}{s}+\frac{h^2}{q-s}\right)+(1-h)^2\right\}\le\frac{2q}{\lambda_1^2 s(q-s)} \qquad (2.22)$$

$$2\frac{c^2}{s}+(c-1)^2\le\frac{2}{s} \qquad (2.23)$$

$$2\frac{c^2}{\lambda_1 s}+\frac{c}{\lambda_1}(1-h)(c-1)\le\frac{2}{\lambda_1 s} \qquad (2.24)$$

จากอสมการ (2.22) – (2.24) สามารถทำให้กำหนดได้ว่า

$$c_0=\max\left\{0,\frac{s-2}{s+2}\right\} \qquad (2.25)$$

จากอสมการ (2.23) ทำให้ได้ว่า $c_0 \le c \le 1$ (2.26)

พบว่า - ถ้า $s = 1$ หรือ $s = 2$, $c_0 = 0$ และอสมการ (2.22) - (2.24) จะให้ $c = 0$ สำหรับทุก h

- ถ้า $c > 0$ อสมการ (2.22) จะสมมูลกับ

$$h^2-h\frac{2(q-s)}{q-s+2}+\frac{(s+2)(q-s)}{s(q-s+2)}-\frac{2q}{c^2s(q-s+2)}\le 0 \qquad (2.27)$$

สำหรับ $c > 0$ และอยู่ภายใต้ช่วงที่กำหนดไว้ดังอสมการ (2.26) สามารถหาค่า h ซึ่งเป็นค่ารากที่2 ที่เป็นบวกจากอสมการ (2.27) ทำให้ทราบว่า $h_{0c} \le h \le h_{1c}$ โดยที่

$$h_{0c}=\frac{q-s}{q-s+2}\left[1-\left\{\frac{2q(q-s+2)}{c^2s(q-s)^2}-2\frac{(q+2)}{s(q-s)}\right\}^{1/2}\right]$$

$$h_{1c}=\frac{q-s}{q-s+2}\left[1+\left\{\frac{2q(q-s+2)}{c^2s(q-s)^2}-2\frac{(q+2)}{s(q-s)}\right\}^{1/2}\right]$$

จากเงื่อนไขอสมการ (2.24) เมื่อ $c_0 \le c \le 1$ สำหรับ $h \le 1$ ดังนั้นถ้า $c > 0$ นั่นคือ $h_{0c} \le h \le \min\{1, h_{1c}\}$ ทำให้เงื่อนไขในอสมการ (2.22) - (2.24) ยังคงอยู่

เมื่อ $s = 1$ หรือ $s = 2$ และ $c_0 = 0$ พบว่า h_{0c} ไม่ได้ให้ค่าต่ำสุดแต่ สำหรับ $s \ge 3$, $c_0 > 0$ h_{0c} มีค่าต่ำสุดเมื่อ $c = c_0$ ซึ่งจะได้ค่าต่ำสุดคือ h_0

$$h_0 = \frac{q-s}{q-s+2}\left\{1-\left\{\frac{2q(q-s+2)(s+2)^2}{(s-2)^2 s(q-s)^2}-\frac{2(q+2)}{s(q-s)}\right\}^{1/2}\right\} \tag{2.28}$$

ทำให้ได้ผลสรุปเป็นไปตามทฤษฎี 1 ดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 1</u>

ให้ c_0, h_0, h_{0c} และ h_{1c} ดังสมการข้างต้น

1) ถ้า $s = 1$ หรือ $s = 2$ ตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}$ จะมีรูปแบบที่แน่นนอนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยน้อยกว่า $\hat{\sigma}^2_{\tau AN}$ ถ้า $c = 0$ หรือถ้า $h \le \min\{1, h_{1c}\}$ สำหรับทุก c เมื่อ $0 \le c \le 1$

2) ถ้า $s \ge 3$ ตัวประมาณ $\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}$ จะมีรูปแบบที่แน่นนอนที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยน้อยกว่า $\hat{\sigma}^2_{\tau AN}$ ถ้า $h_{0c} \le h \le \min\{1, h_{1c}\}$ สำหรับทุก c เมื่อ $c_0 \le c \le 1$

การหาตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยน(IQE) ซึ่งไม่เป็นลบ โดยให้ค่า $MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}) \le MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau AN})$ สามารถหาได้ตามเงื่อนไข ถ้า $s = 1$ หรือ $s = 2$ สำหรับ $0 \le c \le 1$ และ $h \le 0$ ถ้า $s \ge 3$ จะเป็นไปตามเงื่อนไขใน บทแทรก 1

<u>บทแทรก 1</u>

สำหรับ $s \ge 3$ มีตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยน(IQE) ซึ่งไม่เป็นลบที่ให้ค่า MSE ต่ำกว่าก็ต่อเมื่อ $(s-2)^2(q-s) \le 2q(s+2)$ ตามเงื่อนไข $h_0 \le 0$ และตัวประมาณยังคงคุณสมบัติตราบเมื่อ $h_0 \le h \le 0$ และ $c_0 \le c \le \min\{1, [2q/(q-s)(s+2)]^{1/2}\}$

พิสูจน์

สำหรับ $s \ge 3$ ค่าของ $\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)} \ge 0$ ก็ต่อเมื่อ $h \le 0$ ดังนั้นจากทฤษฎี 1 ข้อ(2) ตัวประมาณที่ให้ค่า MSE ต่ำกว่า $\hat{\sigma}^2_{\tau AN}$ ก็ต่อเมื่อ $h_0 \le 0$ ดังนั้นจากอสมการ (2.28) $h_0 \le 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{2q(q-s+2)(s+2)^2}{(s-2)^2 s(q-s)^2} - \frac{2(q+2)}{s(q-s)} \geq 1 \qquad (2.29)$$

อสมการ (2.29) สมมูลกับเงื่อนไข $(s-2)^2(q-s) \leq 2q(s+2)$

ถ้า $(s-2)^2(q-s) \leq 2q(s+2)$ ดังนั้น

$$\frac{2q(q-s+2)(s+2)^2}{(s-2)^2 s(q-s)^2} - \frac{2(q+2)}{s(q-s)} \geq \frac{2q(q-s+2)(s+2)^2}{2qs(q-s)(s+2)} - \frac{2(q+2)}{s(q-s)}$$

$$= \frac{(q-s+2)(s+2)}{s(q-s)} - 2\frac{q+2}{s(q-s)} = 1$$

สำหรับ $c > 0$, $h_{0c} \leq 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{2q(q-s+2)}{c^2 s(q-s)^2} - \frac{2(q+2)}{s(q-s)} \geq 1$$

ทำให้ง่ายขึ้นได้ในรูป $c^2(q-s)(s+2)(q-s+2) \leq 2q(q-s+2)$ ซึ่งเป็นไปตามสมการ (2.25) เมื่อ c อยู่ในช่วง $c_0 \leq c \leq \min\{1, [2q/(q-s)(s+2)]^{1/2}\}$ ที่ให้ $MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}) \leq MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau AN})$ ขณะที่ $h_{0c} \leq h \leq h_{1c}$ ซึ่ง $\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)} \geq 0$ ตราบเมื่อ $h_{0c} \leq h \leq 0$ จึงเป็นการพิสูจน์บทแทรก 1

ค่าของ c แทนโดย c* เป็นตัวทำให้สัมประสิทธิ์หน้า σ^4_τ ของ $MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)})$ มีค่าต่ำ และค่าของ h แทนด้วย h* เป็นตัวทำให้สัมประสิทธิ์หน้า σ^4_e ของ $MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)})$ มีค่าต่ำ โดยที่ $c_0 < c^* < 1$ และ $h_{0c} < h^* < h_{1c}$ ทุก $c > 0$ ที่ทำให้ $MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau(c,h)}) \leq MSE(\hat{\sigma}^2_{\tau AN})$ ดังนั้นจึงกำหนดให้

$$c^* = \frac{s}{s+2} \qquad \text{และ} \qquad h^* = \frac{q-s}{q-s+2}$$

แทนค่าในสมการ (2.20)

$$\hat{\sigma}^2_{\tau IQE} = \frac{s}{(s+2)\lambda_1}\left(\frac{1}{s}\mathbf{u'E_1u} - \frac{q-s}{(q-s+2)(q-s)}\mathbf{u'E_2u}\right) \qquad (2.30)$$

พบว่า c* และ h* ยังคงอยู่ในช่วงตามทฤษฎี 1 แต่ตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยนที่ได้จากสมการ (2.30) สามารถมีค่าเป็นลบได้ จึงกำหนดเงื่อนไขของตัวประมาณที่คำนวณได้ค่าเป็นลบให้มีค่าเป็น 0

ตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยนของ σ_e^2 สามารถหาตัวประมาณดังกล่าวได้โดยสอดคล้องกับเงื่อนไขของอสมการ (2.22) - (2.25) ซึ่งตัวประมาณกำลังสองไม่แปรเปลี่ยนของ σ_e^2 สามารถหาได้จากอสมการ (2.22) ซึ่งเป็นเงื่อนไขให้สัมประสิทธิ์ค่าเฉลี่ยความ คลาดเคลื่อนกำลังสอง(MSE) หน้า σ_e^4 ของ $\hat{\sigma}_{eAN}^2$ มากกว่า $\hat{\sigma}_{\tau(c,h)}^2$ ซึ่งพบว่า

$$\hat{\sigma}_{eAN}^2 = \frac{1}{q-s}\mathbf{u'E_2u}$$

$$\hat{\sigma}_{e(c,h)}^2 = \frac{h}{q-s}\mathbf{u'E_2u} \tag{2.31}$$

ดังนั้นการหาค่า $\hat{\sigma}_{e(c,h)}^2$ ซึ่งเป็นตัวประมาณกำลังสองไม่แปรเปลี่ยนสามารถหาได้ภายใต้การกำหนด h ที่เหมาะสม และพบอีกว่า $\hat{\sigma}_{e(c,h)}^2$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอเพราะฉะนั้นจึงเลือก $h^* = \dfrac{q-s}{q-s+2}$ เป็นตัวประมาณค่าตัวประมาณกำลังสองไม่แปรเปลี่ยนเพื่อประมาณ σ_e^2 ซึ่งตัวประมาณที่ได้ดังกล่าวสอดคล้องกับการศึกษาของ Mathew , Sinha and Sutradhar [6] ดังนี้

$$\hat{\sigma}_{eIQE}^2 = \frac{q-s}{q-s+2}\left(\frac{1}{q-s}\mathbf{u'E_2u}\right) \tag{2.32}$$

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ศึกษาเฉพาะกรณีข้อมูลสมดุล จึงทำให้ทราบว่า s = a –1 , q = a*n-1 , $\lambda = n$ และจากสมการที่ (2.30) - (2.32) สรุปสูตรตัวประมาณค่าตัวประมาณกำลังสองไม่แปรเปลี่ยนในการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวนได้ดังนี้

<u>เงื่อนไข</u>

$MSTr \geq \dfrac{a(n-1)}{a(n-1)+2}MSE$ $\quad \hat{\sigma}_{\tau IQE}^2 = \dfrac{a-1}{(a+1)n}\left(MSTr - \dfrac{a(n-1)}{a(n-1)+2}MSE\right)$, $\quad \hat{\sigma}_{eIQE}^2 = \dfrac{SSE}{a(n-1)+2}$

$MSTr < \dfrac{a(n-1)}{a(n-1)+2}MSE$ $\quad \hat{\sigma}_{\tau IQE}^2 = 0$, $\quad \hat{\sigma}_{eIQE}^2 = \dfrac{SSE}{a(n-1)+2}$

---

[6] Mathew, T. ,Sinha,B.K. and Sutradhar,B.C. Nonnegative Estimation of Variance Components in Unbalanced Mixed Models with Two Variance Components . <u>Journal of Multivariate Analysis</u>. 42 (1992) : 90.

2.1.3 ตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัด(Restricted maximum likelihood : REML)

การหาตัวประมาณตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัดมี ที่มาจากสมการฟังก์ชันภาวะความควรจะเป็นดังสมการ (2.4) เช่นเดียวกับการหาตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดซึ่งในที่นี้เป็นกรณีข้อมูลสมดุลจึงสามารถเขียนสมการ (2.4) ใหม่ได้ดังนี้

$$L(\mu,\sigma_e^2,\sigma_\tau^2|\underset{\sim}{y}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_i\sum_j(y_{ij}-\mu)^2 + \frac{1}{2\sigma_e^2}\sum_i\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2}(y_{i.}-n\mu)^2\right]}{(2\pi)^{an/2}\sigma_e^{2\left\{\frac{1}{2}a(n-1)\right\}}\prod_{i=1}^{a}\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)^{1/2}} \qquad (2.33)$$

Searle, Cassella and McCalloch[7] ได้แสดงวิธีการหาตัวประมาณดังกล่าวโดยการแทนค่าสมการ (2.7) ในสมการ (2.33) ได้สมการฟังก์ชันความควรจะเป็นดังต่อไปนี้

$$\therefore L(\mu,\sigma_e^2,\sigma_\tau^2|\underset{\sim}{y}) = \frac{\exp\left[\frac{-1}{2\sigma_e^2}\left\{SSE+\frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2}\left(SSTr+an(\bar{y}_{..}-\mu)^2\right)\right\}\right]}{(2\pi)^{an/2}\sigma_e^{2\left\{\frac{1}{2}a(n-1)\right\}}\prod_{i=1}^{a}\left(\sigma_e^2+n\sigma_\tau^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\exp\left[\frac{-1}{2}\left\{\frac{SSE}{\sigma_e^2}+\frac{SSTr}{\lambda}+\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{\frac{\lambda}{an}}\right\}\right]}{(2\pi)^{an/2}\sigma_e^{2\left\{\frac{1}{2}a(n-1)\right\}}\lambda^{a/2}} \qquad (2.34)$$

เมื่อ $\lambda = \sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2$

เนื่องจาก $\bar{y}_{..}$ อิสระจากทั้ง SSE และ SSTr จึงสามารถเขียนฟังก์ชันความควรจะใหม่ได้ดังนี้

$$L(\mu,\sigma_e^2,\sigma_\tau^2|\underset{\sim}{y}) = L(\mu|\bar{y}_{..}) * L(\sigma_e^2,\sigma_\tau^2|SSE,SSTr)$$

โดยที่

$$L(\mu|\bar{y}_{..}) = \frac{\exp\left[-\frac{(\bar{y}_{..}-\mu)^2}{2\lambda/an}\right]}{(2\pi)^{1/2}\left\{\frac{\lambda}{an}\right\}^{1/2}} \qquad (2.35)$$

---

[7] Searle , S.R., Cassella,G. and McCalloch,E.C. Variance components. (New York : John Wiley & Sons,1992), pp.90-92.

$$L(\sigma_e^2, \sigma_\tau^2 | SSE, SSTr) = \frac{\exp\left[\frac{-1}{2}\left\{\frac{SSE}{\sigma_e^2} + \frac{SSTr}{\lambda}\right\}\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(an-1)} \sigma_e^{2\left\{\frac{1}{2}a(n-1)\right\}} \lambda^{\frac{1}{2}(a-1)} (an)^{1/2}} \qquad (2.36)$$

ขั้นต่อไปเป็นการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันความควรจะเป็นจากสมการ (2.36) ภายใต้ข้อจำกัดให้พารามิเตอร์อยู่ในปริภูมิของพารามิเตอร์ ที่ต้องการคือ $\sigma_e^2 > 0$, $\sigma_\tau^2 \geq 0$ ซึ่งเมื่อแปลงเป็นสมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็น(logL) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} l_R &= \log L(\sigma_e^2, \sigma_\tau^2 | SSE, SSTr) \\ &= -\frac{1}{2}(an-1)\log 2\pi - \frac{1}{2}\log an - \frac{1}{2}a(n-1)\log \sigma_e^2 - \frac{1}{2}(a-1)\log \lambda - \frac{SSE}{2\sigma_e^2} - \frac{SSTr}{2\lambda} \qquad (2.37) \end{aligned}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ย่อยจากสมการลอการิทึมของฟังก์ชันความควรจะเป็น เทียบกับพารามิเตอร์ทั้ง 2 ตัวคือ σ_e^2 และ λ แล้วกำหนดให้เท่ากับ 0 จากนั้นทำการแก้สมการหาตัวประมาณได้ดังนี้

$$\frac{\partial l_R}{\partial \sigma_e^2} = -\frac{a(n-1)}{2\sigma_e^2} + \frac{SSE}{2\sigma_e^4} = 0$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2_{eREML} = \frac{SSE}{a(n-1)} = MSE$$

$$\frac{\partial l_R}{\partial \lambda} = -\frac{(a-1)}{2\lambda} + \frac{SSTr}{2\lambda^2} = 0$$

แทนค่า $\lambda = n\sigma_\tau^2 + \sigma_e^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{SSTr}{a-1} = n\sigma_\tau^2 + MSE$$

$$\therefore \hat{\sigma}^2_{\tau REML} = \frac{1}{n}(MSTr - MSE)$$

เนื่องจาก $\hat{\sigma}^2_{\tau REML}$ สามารถมีค่าที่เป็นลบได้ แต่ปริภูมิของพารามิเตอร์ ที่กำหนดไว้ต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ดังนั้นเราสามารถใช้วิธีเดียวกับวิธีตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุด มาจากการหาค่าสูงสุดของ l_R ในสมการ (2.37) ในขอบเขตระนาบ $\sigma_e^2 = \lambda$ โดยหาตัวประมาณที่เหมาะสมของ $\tilde{\sigma}^2_{eREML}$ ในกรณีที่ $\hat{\sigma}^2_{\tau REML} < 0$ โดย จะทำให้ $\tilde{\sigma}^2_{\tau REML} = 0$ ทำให้ตัวประมาณที่ได้คือ

<u>เงื่อนไข</u>

$MSTr \geq MSE$	$\hat{\sigma}^2_{\tau REML} = (MSTr - MSE)/n$,	$\hat{\sigma}^2_{eREML} = MSE$
$MSTr < MSE$	$\hat{\sigma}^2_{\tau REML} = 0$,	$\hat{\sigma}^2_{eREML} = \dfrac{SST}{an-1}$

2.2 ตัวประมาณด้วยวิธีการเฉลี่ยค่าองค์ประกอบความแปรปรวน

การสร้างตัวประมาณ องค์ประกอบความแปรปรวนโดยการนำตัวประมาณด้วยวิธีพื้นฐานมาเฉลี่ย (Average) ซึ่งทำให้ได้ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนตัวใหม่ที่ได้จะอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\hat{\sigma}^2_{\tau A} = W_1\hat{\sigma}^2_{\tau 1} + W_2\hat{\sigma}^2_{\tau 2} + \ldots \quad \ldots + W_m\hat{\sigma}^2_{\tau m} \tag{2.38}$$

$$\hat{\sigma}^2_{eA} = V_1\hat{\sigma}^2_{e1} + V_2\hat{\sigma}^2_{e2} + \ldots \quad \ldots + V_3\hat{\sigma}^2_{em} \tag{2.39}$$

โดยที่ $$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \tag{2.40}$$

และ $$\sum_{i=1}^{m} v_i = 1 \tag{2.41}$$

โดยที่ m คือจำนวนตัวประมาณที่นำมาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก

ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่เกิดจากการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักที่ดีภายใต้ข้อจำกัดดังกล่าวนั้นจะเกิดขึ้นได้จากการเลือก W_i และ V_i ที่เหมาะสม ซึ่งสามารถแยกเป็นวิธีใหญ่ๆ ได้ 2 วิธีดังนี้

2.2.1 วิธีหาค่า a_i และ b_i ที่เหมาะสม

จากข้อจำกัดในการหาค่า W_i และ V_i ที่กำหนดไว้ในสมการ (2.40) และ (2.41) การหาค่า W_i และ V_i ที่เหมาสมนั้นสามารถหาได้จาก a_i และ b_i ที่เหมาะสม โดยอาศัยความสัมพันธ์จากสูตรดังต่อไปนี้

$$W_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \tag{2.42}$$

$$V_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{m} b_i} \tag{2.43}$$

โดยที่ $i = 1,2,3\ldots \quad \ldots,m$

ค่า a_i และ b_i ที่ดีคือค่าที่สามารถบ่งบอกถึงความเหมาะสมของตัวประมาณด้วยวิธีพื้นฐานแต่ละวิธีในกรณีต่างๆนั่นหมายความว่าในแต่ละกรณี ถ้าตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนด้วยวิธีพื้นฐานตัวใดมีความเหมาะสมจะส่งผลให้ค่า a_i และ b_i มีค่ามากตามไปด้วย ดังนั้นในการประมาณค่าเฉลี่ยองค์ประกอบความแปรปรวนที่เหมาะสมจึงได้รวบรวมวิธีการหาค่า a_i และ b_i ที่น่าสนใจ ไว้ดังต่อไปนี้

2.2.1.1 วิธีการถ่วงน้ำหนักที่เท่ากัน

วิธีนี้เป็นการให้น้ำหนักวิธีที่ต้องการนำมาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักที่เท่ากันนั่นคือกำหนดให้

$$a_i = b_i = 1$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, m$

โดยที่ m คือจำนวนตัวประมาณที่นำมาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก

2.2.1.2 วิธีการถ่วงน้ำหนักโดยอาศัยค่าประมาณความแปรปรวนของ $\bar{y}_{..}$

ในการหาตัวประมาณของค่าพารามิเตอร์ μ ใน ตัวแบบซึ่งเป็นค่าคาดหวังตัวแปร y จากการประมาณค่า μ โดยพบว่าวิธีกำลังสองน้อยสุดนัยทั่วไป(Generlized least square estimator : GLSE) ให้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ μ ตัวเดียวกันคือ $\bar{y}_{..}$ โดยได้กล่าวรายละเอียดไว้ในภาคผนวก ข

$$\mathrm{GLSE}(\hat{\mu}) = \bar{y}_{..}$$

โดยสามารถหาความแปรปรวนของ $\bar{y}_{..}$ ซึ่งเป็นไปตาม Searle, Cassella and McCalloch [8] ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\bar{y}_{..}) &= \mathrm{Var}(\mu + \bar{\tau}_{.} + \bar{e}_{..}) \\
&= \mathrm{Var}(\bar{\tau}_{.}) + \mathrm{Var}(\bar{e}_{..}) + 2\mathrm{Cov}(\bar{\tau}_{.}, \bar{e}_{..}) \\
&= \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{a}\tau_i}{a}\right) + \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\frac{e_{ij}}{an}\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\frac{\sum_{i=1}^{a}\tau_i}{a}, \sum\sum\frac{e_{ij}}{an}\right)
\end{aligned}$$

[8] Searle , S.R., Cassella,G. and McCalloch.E.C. Variance components. (New York : John Wiley & Sons,1992), pp.53-54.

เนื่องจาก $Cov(\tau_i, e_{ij}) = 0$

$Cov(\tau_i, \tau_{i'}) = 0$

และ $Cov(e_{ij}, e_{i'j'}) = 0$

เมื่อ $i \neq i'$ และ $j \neq j'$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$Var(\bar{y}_{..}) = \frac{1}{a^2}\sum_i Var(\tau_i) + \frac{1}{a^2n^2}\sum_i\sum_j Var(e_{ij}) \quad (2.44)$$

จากสมการ (2.44) เมื่อต้องการประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_{..}$ สามารถทำได้เช่นกันดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{Var}(\bar{y}_{..}) &= \frac{1}{a^2}\sum_i \hat{Var}(\tau_i) + \frac{1}{a^2n^2}\sum_i\sum_j \hat{Var}(e_{ij}) \\
&= \frac{1}{a^2}\sum_i \hat{\sigma}_\tau^2 + \frac{1}{a^2n^2}\sum_i\sum_j \hat{\sigma}_e^2 \\
&= \frac{\hat{\sigma}_\tau^2}{a} + \frac{\hat{\sigma}_e^2}{an} = \frac{n\hat{\sigma}_\tau^2 + \hat{\sigma}_e^2}{an} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

ตัวประมาณที่ดีคือตัวประมาณที่มีค่า $\hat{Var}(\bar{y}_{..})$ น้อย ดังนั้นจึงกำหนดให้ a_i และ b_i เป็นค่าผกผันกับค่าการประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณ $\bar{y}_{..}$ โดยการแทนค่า $\hat{\sigma}_\tau^2$ และ $\hat{\sigma}_e^2$ ตามวิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่ต้องการนำมาถ่วงน้ำหนัก

ดังนั้นจึงกำหนดให้ $a_i = b_i = \dfrac{an}{n\hat{\sigma}_{\tau i}{}^2 + \hat{\sigma}_{ei}{}^2}$ (2.46)

เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots \ldots, m$

2.2.1.3 วิธีการถ่วงน้ำหนักโดยอาศัยค่าประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน (ประกอบด้วย σ_τ^2 และ σ_e^2)

ปัจจัยหนึ่งที่สามารถเป็นตัวบ่งบอกถึงความเหมาะสม ของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนในกรณีต่างๆนั่นก็คือ ความแปรปรวนของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนทั้ง σ_τ^2 และ σ_e^2 แต่เป็นที่ทราบกันดีว่าตัวประมาณด้วยวิธีพื้นฐานที่นำมาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ σ_τ^2 จะถูกกำหนดเป็น 0 ในกรณีที่ค่าประมาณที่ได้มีค่าติดลบ ภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวจึงส่งผลให้ตัวประมาณ σ_e^2 มีค่าแตกต่างกันในวิธีการประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีการประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัด

ด้วยเหตุดังกล่าวจึงส่งผลให้ การคำนวณค่าความแปรวนของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนมีความยุ่งยากจะเห็นได้จากสูตรการคำนวณดังนี้

$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_\tau^2) = E\left[(\hat{\sigma}_\tau^2)^2\right] + \left[E(\hat{\sigma}_\tau^2)\right]^2$$
$$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}_e^2) = E\left[(\hat{\sigma}_e^2)^2\right] + \left[E(\hat{\sigma}_e^2)\right]^2$$

เนื่องจาก $E\left[(\hat{\sigma}^2)^2\right]$ และ $\left[E(\hat{\sigma}^2)\right]^2$ สามารถคำนวณจากการอินทิเกรตภายใต้เงื่อนไขซึ่งจากการศึกษาของ Yu , Searle และ McCulloch พบว่าการคำนวณดังกล่าวมีความยุ่งยากและซับซ้อนมาก

เพื่อขจัดปัญหาดังกล่าว จึงพิจารณาเฉพาะความแปรปรวนของตัวประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน ภายใต้เงื่อนไข $\hat{\sigma}_\tau^2 \geq 0$ ซึ่งจาก Searle [9] ทำให้ทราบว่าเมื่อตัวประมาณอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงเส้นของค่าเฉลี่ยกำลังสอง ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของรูปแบบกำลังสอง (Quadratic forms) ในกรณีข้อมูลสมดุล ภายใต้ข้อกำหนดว่าข้อมูลมีการแจกแจงปกติ(Normality assumption) ทำให้ทราบว่า

$$\frac{SS}{E(MS)} \sim \chi_f^2$$

ดังนั้นจึงทำให้ทราบว่า

$$\mathrm{Var}\left(\frac{SS}{E(MS)}\right) = 2f$$
$$\mathrm{Var}(SS) = 2f\{E(MS)\}^2$$
$$\therefore \mathrm{Var}(MS) = \frac{2\{E(MS)\}^2}{f} \qquad (2.47)$$

พบว่า ถ้า $\hat{\sigma}^2 = \sum_j k_j MS_j$ และ $\mathrm{Cov}(MS_j, MS_{j'}) = 0$ โดยที่ $j \neq j'$

ดังนั้นจาก (2.47) $$\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sum_j k_j^2 [E(MS_j)]^2}{f_j} \qquad (2.48)$$

เมื่อ j คือ จำนวนค่ากำลังสองเฉลี่ยที่นำมาคำนวณค่าตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน

[9] Searle , S.R.. Linear models. (New York : John Wiley & Sons, 1971), pp.416-417.

k_j คือ ค่าคงที่ที่นำมาคูณกับค่ากำลังสองเฉลี่ยตัวที่ j

MS_j คือ ค่ากำลังสองเฉลี่ย

ขั้นต่อไปเป็นการแสดงการประมาณค่าความแปรปรวน ของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน ทั้ง 2 ตัว โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

จากนิยามพบว่า

$$Var(MS) = E(MS)^2 - [E(MS)]^2 \tag{2.49}$$

แทนค่าสมการ (2.47) ในสมการ (2.49)

$$E(MS^2) = \frac{2[E(MS)]^2}{f} + [E(MS)]^2$$

$$= \left[\frac{2+f}{f}\right][E(MS)]^2$$

$$\therefore \quad \frac{[E(MS)]^2}{f} = \frac{E(MS^2)}{2+f}$$

ดังนั้น $\frac{MS^2}{2+f}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $\frac{[E(MS)]^2}{f}$

จากสมการ (2.47) จึงทำให้ทราบว่า

$$\therefore \hat{Var}(MS) = \frac{2MS^2}{2+f} \tag{2.50}$$

จากสมการ(2.48)

$$\hat{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sum_j k_j^2 (MS_j)^2}{f_j + 2} \tag{2.51}$$

ดังนั้นจึงสามารถประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน จำแนกตามวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน ภายใต้เงื่อนไข $\hat{\sigma}_\tau^2 \geq 0$ ด้วยวิธีพื้นฐาน ทั้ง 3 วิธี ดังต่อไปนี้

1) ตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุด(Maximum likelihood : ML)

a) $\hat{\sigma}^2_{eML}$ = MSE (2.52)

จากสมการ (2.47) จะได้ว่า $Var\{MSE\} = \frac{2[E(MSE)]^2}{a(n-1)} = \frac{2\sigma_e^4}{a(n-1)}$

จากสมการ (2.50) จะได้ว่า

$$\therefore \hat{Var}(\hat{\sigma}^2_{eML}) = \hat{Var}(MSE) = \frac{2MSE^2}{2+a(n-1)}$$
$$= \frac{2\hat{\sigma}^4_{eML}}{2+a(n-1)} \qquad (2.53)$$

b) $\hat{\sigma}^2_{\tau ML} = \left(\frac{a-1}{a}MSTr - MSE\right)\Big/ n$ (2.54)

จากสมการ (2.47) จะได้ว่า

$$Var\left\{\left(\frac{a-1}{a}MSTr - MSE\right)\Big/ n\right\} = \frac{1}{n^2}\left\{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 Var(MSTr) + Var(MSE)\right\}$$
$$= \frac{1}{n^2}\left\{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2\left[\frac{2(\sigma^2_e + n\sigma^2_\tau)^2}{a-1}\right] + \frac{2\sigma^4_e}{a(n-1)}\right\}$$
$$= \frac{2}{n^2}\left\{\left(\frac{a-1}{a^2}\right)\left[(\sigma^2_e + n\sigma^2_\tau)^2\right] + \frac{\sigma^4_e}{a(n-1)}\right\}$$

จากสมการ (2.52) และ (2.54) จะได้ว่า $MSTr = \left(\frac{a}{a-1}\right)(\hat{\sigma}^2_{eML} + n\hat{\sigma}^2_{\tau ML})$

จากสมการ (2.51) พบว่า

$$\hat{Var}\{\hat{\sigma}^2_{\tau ML}\} = \frac{1}{n^2}\left\{\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \frac{2\left\{\frac{a}{a-1}\right\}^2(\hat{\sigma}^2_{eML} + n\hat{\sigma}^2_{\tau ML})^2}{a+1} + \frac{2\hat{\sigma}^4_{eML}}{a(n-1)+2}\right\}$$
$$= \frac{2}{n^2}\left\{\frac{(\hat{\sigma}^2_{eML} + n\hat{\sigma}^2_{\tau ML})^2}{a+1} + \frac{\hat{\sigma}^4_{eML}}{a(n-1)+2}\right\} \qquad (2.55)$$

2) **ตัวประมาณแบบกำลังสองไม่แปรเปลี่ยน**(Invariance quadratic estimator : IQE)

a) $\hat{\sigma}^2_{eIQE} = h^*MSE$ (2.56)

เมื่อ $c^* = \frac{a-1}{a+1}$

$h^* = \frac{N-a}{N-a+2}$

จากสมการ (2.47) จะได้ว่า $\therefore Var\{h^*MSE\} = \frac{2h^{*2}[E(MSE)]^2}{a(n-1)} = \frac{2h^{*2}\sigma^4_e}{a(n-1)}$

จากสมการ (2.50) จะได้ว่า

$$\therefore \hat{Var}\left(\hat{\sigma}^2_{eIQE}\right) = \hat{Var}\left(h^* MSE\right) = h^{*2}\hat{Var}(MSE)$$

$$= h^{*2}\frac{2\left(\frac{\hat{\sigma}^2_{eIQE}}{h^*}\right)^2}{2 + a(n-1)}$$

$$= \frac{2\hat{\sigma}^4_{eIQE}}{2 + a(n-1)} \tag{2.57}$$

b) $$\hat{\sigma}^2_{\tau IQE} = \frac{c^*}{n}\left(MSTr - h^* MSE\right) \tag{2.58}$$

จากสมการ (2.47) จะได้ว่า

$$\therefore Var\left\{\frac{c^*}{n}\left(MSTr - h^* MSE\right)\right\} = \frac{c^{*2}}{n^2}\left\{Var\left(MSTr\right) + h^{*2}Var\left(MSE\right)\right\}$$

$$= \frac{c^{*2}}{n^2}\left\{\left[\frac{2\left(\sigma^2_e + n\sigma^2_\tau\right)^2}{a-1}\right] + \frac{2h^{*2}\sigma^4_e}{a\left(n-1\right)}\right\}$$

$$= \frac{2c^{*2}}{n^2}\left\{\left[\frac{\left(\sigma^2_e + n\sigma^2_\tau\right)^2}{a-1}\right] + \frac{h^{*2}\sigma^4_e}{a\left(n-1\right)}\right\}$$

จากสมการ (2.56) และ (2.58) จะได้ว่า $MSTr = \frac{n}{c^*}\hat{\sigma}^2_{\tau IQE} + \hat{\sigma}^2_{eIQE}$

จากสมการ (2.51) พบว่า

$$\hat{Var}\left\{\hat{\sigma}^2_{\tau IQE}\right\} = \frac{c^{*2}}{n^2}\left\{\frac{2\left(\hat{\sigma}^2_{eIQE} + \frac{n}{c^*}\hat{\sigma}^2_{\tau IQE}\right)^2}{a+1} + \frac{2\hat{\sigma}^4_{eIQE}}{a(n-1)+2}\right\}$$

$$= \frac{2c^{*2}}{n^2}\left\{\frac{\left(\hat{\sigma}^2_{eIQE} + \frac{n}{c^*}\hat{\sigma}^2_{\tau IQE}\right)^2}{a+1} + \frac{\hat{\sigma}^4_{eIQE}}{a(n-1)+2}\right\} \tag{2.59}$$

3) ตัวประมาณแบบความควรจะเป็นสูงสุดแบบมีข้อจำกัด(Restricted maximum likelihood : REML)

a) $\hat{\sigma}^2_{eREML} = MSE$ (2.60)

จากสมการ (2.47) จะได้ว่า $Var\{MSE\} = \frac{2[E(MSE)]^2}{a(n-1)} = \frac{2\sigma_e^4}{a(n-1)}$

จากสมการ (2.50) จะได้ว่า

$$\therefore \hat{Var}(\hat{\sigma}^2_{eREML}) = \hat{Var}(MSE) = \frac{2MSE^2}{2+a(n-1)}$$

$$= \frac{2\hat{\sigma}^4_{eREML}}{2+a(n-1)} \quad (2.61)$$

b) $\hat{\sigma}^2_{\tau REML} = (MSTr - MSE)/n$ (2.62)

จากสมการ (2.47) จะได้ว่า

$$\therefore \quad Var\{(MSTr-MSE)/n\} = \frac{1}{n^2}\{Var(MSTr) + Var(MSE)\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\left[\frac{2(\sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2)^2}{a-1}\right] + \frac{2\sigma_e^4}{a(n-1)}\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left\{\left[\frac{(\sigma_e^2 + n\sigma_\tau^2)^2}{a-1}\right] + \frac{\sigma_e^4}{a(n-1)}\right\}$$

จากสมการ (2.60) และ (2.62) จะได้ว่า $MSTr = \hat{\sigma}^2_{eREML} + n\hat{\sigma}^2_{\tau REML}$

จากสมการ (2.51) พบว่า

$$\hat{Var}\{\hat{\sigma}^2_{\tau REML}\} = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{2(\hat{\sigma}^2_{eREML} + n\hat{\sigma}^2_{\tau REML})^2}{a+1} + \frac{2\hat{\sigma}^4_{eREML}}{a(n-1)+2}\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left\{\frac{(\hat{\sigma}^2_{eREML} + n\hat{\sigma}^2_{\tau REML})^2}{a+1} + \frac{\hat{\sigma}^4_{eREML}}{a(n-1)+2}\right\} \quad (2.63)$$

ดังนั้นจึงกำหนด ให้

$$a_i = \left[\hat{Var}(\hat{\sigma}^2_{\tau i})\right]^{-1}$$

$$b_i = \left[\hat{Var}(\hat{\sigma}^2_{ei})\right]^{-1}$$

โดยที่สามารถสรุปหาสูตร $\hat{Var}\ (\hat{\sigma}^2_\tau)$ และ $\hat{Var}\ (\hat{\sigma}^2_e)$ ได้ดังต่อไปนี้

วิธีการประมาณ

ML $$\hat{Var}(\hat{\sigma}_{\tau}^{2}) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{(\hat{\sigma}_{eML}^{2} + n\hat{\sigma}_{\tau ML}^{2})^2}{a+1} + \frac{\hat{\sigma}_{eML}^{4}}{a(n-1)+2}\right] , \quad \hat{Var}(\hat{\sigma}_{e}^{2}) = \frac{2\hat{\sigma}_{eML}^{4}}{a(n-1)+2}$$

IQE $$\hat{Var}(\hat{\sigma}_{\tau}^{2}) = \frac{2c^{*2}}{n^2}\left[\frac{\left(\hat{\sigma}_{eIQE}^{2} + \frac{n}{c^{*}}\hat{\sigma}_{\tau IQE}^{2}\right)^2}{a+1} + \frac{\hat{\sigma}_{eIQE}^{4}}{a(n-1)+2}\right] , \quad \hat{Var}(\hat{\sigma}_{e}^{2}) = \frac{2\hat{\sigma}_{eIQE}^{4}}{a(n-1)+2}$$

REML $$\hat{Var}(\hat{\sigma}_{\tau}^{2}) = \frac{2}{n^2}\left[\frac{(\hat{\sigma}_{eREML}^{2} + n\hat{\sigma}_{\tau REML}^{2})^2}{a+1} + \frac{\hat{\sigma}_{eREML}^{4}}{a(n-1)+2}\right] , \quad \hat{Var}(\hat{\sigma}_{e}^{2}) = \frac{2\hat{\sigma}_{eREML}^{4}}{a(n-1)+2}$$

2.2.2 วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด(Least absolute value method)

วิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุดเป็นวิธีการหาค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสม โดยอาศัยเทคนิคสมการเชิงเส้น(Linear programming technique) แก้ปัญหาสมการเป้าหมายที่ทำให้ผลรวมค่าสัมบูรณ์ของค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด

วิธีนี้เป็นการหาค่าต่ำสุด (minimize) $\sum_{k=1}|\varepsilon_k|$

เมื่อ $$\varepsilon_k = \frac{C_{A(k)} - C_{P(k)}}{C_{A(k)}}$$

โดยที่ $C_{A(k)}$ คือ ค่าที่แท้จริงจากการจำลองข้อมูลในรอบที่ k

$C_{P(k)}$ คือ ค่าพยากรณ์จากการจำลองข้อมูลในรอบที่ k

เนื่องจาก ε_k ไม่มีข้อจำกัดด้านเครื่องหมาย จะได้ว่า

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{+} - \varepsilon_k^{-}$$

เมื่อ $$\varepsilon_k^{+} = \begin{cases} \varepsilon_k & \varepsilon_k \geq 0 \\ 0 & \varepsilon_k < 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_k^{-} = \begin{cases} 0 & \varepsilon_k \geq 0 \\ -\varepsilon_k & \varepsilon_k < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ จะได้ว่า $\varepsilon_k^{+} \times \varepsilon_k^{-} = 0$

นั่นคืออย่างน้อย 1 ตัวแปรใน ε_k^+ และ ε_k^- เท่ากับ 0 เสมอ ดังนั้น $|\varepsilon_k| = \varepsilon_k^+ + \varepsilon_k^-$

โดยให้ $\eta_k = \varepsilon_k^+$ และ $\psi_k = \varepsilon_k^-$ ดังนั้นสมการเป้าหมาย คือ

หาค่าต่ำสุดของ $$\sum_{k=1}(\eta_k + \psi_k)$$

โดยมีเงื่อนไข

$$\frac{\sigma_\tau^2 - \sum_{i=1}^{m} W_i \hat{\sigma}_{\tau ik}^2}{\sigma_\tau^2} = \eta_k - \psi_k$$

$$\sum_{i=1}^{m} W_i = 1$$

$$W_i, \eta_k, \psi_k \geq 0$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots \ldots, m$

m คือ จำนวนตัวประมาณที่นำมาหาค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก

k คือ จำนวนรอบที่ทำการจำลองข้อมูลเพื่อหาค่า $\hat{\sigma}_{\tau ik}^2$ ตามวิธีทั้ง m วิธี

โดยจำนวนรอบที่ต้องจำลองข้อมูลเป็นตัวกำหนดจำนวนสมการเงื่อนไข ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้เท่ากับจำนวนตัวประมาณ ที่นำมาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก เพื่อให้สามารถใช้เทคนิคสมการเชิงเส้นเพื่อหา W_i ที่เหมาะสมได้ ซึ่งในการจำลองข้อมูล 1 รอบจะสามารถหาตัวประมาณ σ_τ^2 ได้ m ตัว

ตัวอย่างปัญหาในการหาค่า W_i ด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด กรณีเฉลี่ยตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนจาก 3 วิธีซึ่งกำหนดตามค่า i ได้ดังนี้

$$\text{โดยที่} \quad i = \begin{cases} 1 & \text{ตัวประมาณจากวิธี ML} \\ 2 & \text{ตัวประมาณจากวิธี IQE} \\ 3 & \text{ตัวประมาณจากวิธี REML} \end{cases}$$

หาค่าต่ำสุดของ $z_\tau = \eta_{\tau 1} + \psi_{\tau 1} + \eta_{\tau 2} + \psi_{\tau 2} + \eta_{\tau 3} + \psi_{\tau 3}$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\frac{W_1\hat{\sigma}_{\tau 11}^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{W_2\hat{\sigma}_{\tau 21}^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{W_3\hat{\sigma}_{\tau 31}^2}{\sigma_\tau^2} + \eta_{\tau 1} - \psi_{\tau 1} = 1$$

$$\frac{W_1\hat{\sigma}_{\tau 12}^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{W_2\hat{\sigma}_{\tau 22}^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{W_3\hat{\sigma}_{\tau 32}^2}{\sigma_\tau^2} + \eta_{\tau 2} - \psi_{\tau 2} = 1$$

$$\frac{W_1\hat{\sigma}^2_{\tau 13}}{\sigma^2_\tau} + \frac{W_2\hat{\sigma}^2_{\tau 23}}{\sigma^2_\tau} + \frac{W_3\hat{\sigma}^2_{\tau 33}}{\sigma^2_\tau} + \eta_{\tau 3} - \psi_{\tau 3} = 1$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = 1$$

$$W_i, \eta_{\tau k}, \psi_{\tau k} \geq 0$$

โดยที่ $$\frac{\sigma^2_\tau - \sum_{i=1}^{3} W_i\hat{\sigma}^2_{\tau ik}}{\sigma^2_\tau} = \eta_{\tau k} - \psi_{\tau k}$$

ในที่นี้กำหนดให้มีการจำลองข้อมูลซ้ำ 3 ครั้ง (k = 1, 2, 3) และจำนวนตัวประมาณที่นำมาเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักมีทั้งสิ้น 3 ตัว (i = 1, 2, 3) เพื่อแทนค่า $\hat{\sigma}^2_{\tau ik}$ ได้ทั้งสิ้น 9 ตัว แล้วนำมาแทนค่าในสมการเงื่อนไขข้างต้นจากนั้นใช้เทคนิคสมการเชิงเส้น เพื่อหาค่า W_i ที่เหมาะสม 1 ชุด

สำหรับการหาค่า V_i ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกันโดยใช้ข้อมูลชุดเดียวกับที่ใช้ในการประมาณค่าหา W_i แต่นำมาคำนวณเพื่อหาค่า $\hat{\sigma}^2_{eik}$ แล้วใช้เทคนิคสมการเชิง หาค่า V_i ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ $z_e = \eta_{e1} + \psi_{e1} + \eta_{e2} + \psi_{e2} + \eta_{e3} + \psi_{e3}$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\frac{V_1\hat{\sigma}^2_{e11}}{\sigma^2_e} + \frac{V_2\hat{\sigma}^2_{e21}}{\sigma^2_e} + \frac{V_3\hat{\sigma}^2_{e31}}{\sigma^2_e} + \eta_{e1} - \psi_{e1} = 1$$

$$\frac{V_1\hat{\sigma}^2_{e12}}{\sigma^2_e} + \frac{V_2\hat{\sigma}^2_{e22}}{\sigma^2_e} + \frac{V_3\hat{\sigma}^2_{e32}}{\sigma^2_e} + \eta_{e2} - \psi_{e2} = 1$$

$$\frac{V_1\hat{\sigma}^2_{e13}}{\sigma^2_e} + \frac{V_2\hat{\sigma}^2_{e23}}{\sigma^2_e} + \frac{V_3\hat{\sigma}^2_{e33}}{\sigma^2_e} + \eta_{e3} - \psi_{e3} = 1$$

$$V_1 + V_2 + V_3 = 1$$

$$V_i, \eta_{ek}, \psi_{ek} \geq 0$$

โดยที่ $$\frac{\sigma^2_e - \sum_{i=1}^{3} V_i\hat{\sigma}^2_{eik}}{\sigma^2_e} = \eta_{ek} - \psi_{ek}$$

เมื่อได้ W_i และ V_i ที่เหมาะสมในชุดแรกแล้ว ทำซ้ำเพื่อให้สามารถหาค่า W_i และ V_i ชุดใหม่ ทำซ้ำเช่นนี้ต่อไปจนกระทั่งได้จำนวนชุดของ W_i และ V_i ตามต้องการ

คำนวณหาค่า $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ ซึ่งเป็น ค่าเฉลี่ยของค่าถ่วงน้ำหนักของตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนตัวที่ i โดยให้เป็นค่าคงที่ที่นำมาใช้เป็นค่าถ่วงน้ำหนักในกรณีเฉลี่ยตัวประมาณองค์

ประกอบความแปรปรวน m ตัว ที่มีจำนวนระดับของปัจจัยที่ใช้ในการทดลอง = a และจำนวนค่าสังเกตในแต่ละระดับของปัจจัย = n โดย $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\overline{W}_i = \sum_{j=1}^{n'} W_{ij} \tag{2.64}$$

$$\overline{V}_i = \sum_{j=1}^{n'} V_{ij} \tag{2.65}$$

เมื่อ j คือจำนวนชุดของ W_i และ V_i ที่นำมาเฉลี่ยหา $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ มีทั้งสิ้น n′ ชุด

เนื่องจาก $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ มีค่าระหว่าง [0,1] ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นค่าสัดส่วน(p) โดยการประมาณค่าสัดส่วนที่ดีนั้นเกิดขึ้นภายใต้ขนาดตัวอย่างที่เหมาะสม จึงทำให้ทราบว่า

$$n' = \frac{Z^2_{1-\alpha/2}\hat{p}\hat{q}}{E^2} \tag{2.66}$$

เมื่อ E คือ ค่าความผิดพลาดสูงสุด

α คือ ระดับนัยสำคัญ

การศึกษาในครั้งนี้กำหนดให้ E = 0.01 , α = 0.1, $Z_{1-0.05}$ =1.645 และ $\hat{p} = 0.5$ (เนื่องจากไม่ทราบค่า $\hat{p}$ ดังนั้นเพื่อให้ครอบคลุมกรณีทั่วๆไป จึงกำหนดให้ $\hat{p} = 0.5$ เพราะจะทำให้ $\hat{p}\hat{q}$ มีค่าสูงสุด) แทนค่าในสมการ (2.66)

$$n' = \frac{1.645^2(0.5)(0.5)}{(0.01)^2} = 6765.06 \cong 6765$$

ดังนั้นเมื่อจำนวนระดับของปัจจัยที่ใช้ในการทดลอง(a) และจำนวนค่าสังเกตในแต่ละระดับของปัจจัย(n) การหาค่า $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ ต้องเกิดจากการเฉลี่ย W_i และ V_i อย่างละ 6765 ชุด แต่เนื่องจากกรณีจำนวนระดับของปัจจัยที่ใช้ในการทดลอง = a และจำนวนค่าสังเกตในแต่ละระดับของปัจจัย = n แบ่งออกเป็นอีก 5 กรณีย่อยตามค่า k (มีค่า 0.1, 0.5, 1, 4, 9) ดังนั้นจึงแบ่งค่า n′ ออกเป็น 5 ส่วน ทำให้ได้ว่า

$$n'' = \frac{n'}{5} = \frac{6765}{5} = 1353$$

การหาค่า $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ จากสมการ (2.64) และ (2.65) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\overline{W}_i = \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{1353}\frac{W_{ikj}}{1353} \tag{2.67}$$

$$\overline{V}_i = \sum_{k=1}^{5}\sum_{j=1}^{1353}\frac{V_{ikj}}{1353} \tag{2.68}$$

แทนค่า W_i และ V_i ในสมการ (2.38) และ (2.39) ด้วย $\overline{W}_i$ และ $\overline{V}_i$ จากสมการ (2.67) และ (2.68) ตามลำดับ เพื่อให้ได้ตัวประมาณองค์ประกอบความแปรปรวนที่เกิดจากการเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วยวิธีค่าสัมบูรณ์ต่ำสุด

2.3 เกณฑ์การเปรียบเทียบวิธีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าองค์ประกอบความแปรปรวน โดยใช้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย(Mean square error : MSE) ของตัวประมาณ ซึ่งแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังสูตรต่อไปนี้

2.3.1 กรณีการประมาณพารามิเตอร์ σ_τ^2

$$MSE(\hat{\sigma}_{\tau i}^2) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left(\hat{\sigma}_{\tau is}^2 - \sigma_\tau^2\right)^2 \tag{2.69}$$

เมื่อ s คือ รอบที่ทำการจำลองข้อมูลซ้ำซึ่งมีทั้งสิ้น S รอบ

i คือ วิธีที่ใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ σ_τ^2 (ทั้งวิธีพื้นฐาน และวิธีการเฉลี่ยค่าองค์ประกอบความแปรปรวน)

2.3.2 กรณีการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน

$$MSE(\hat{\sigma}_{\tau i}^2 + \hat{\sigma}_{ei}^2) = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\left[\left(\hat{\sigma}_{\tau is}^2 - \sigma_\tau^2\right)^2 + \left(\hat{\sigma}_{eis}^2 - \sigma_e^2\right)^2\right] \tag{2.70}$$

เมื่อ s คือ รอบที่ทำการจำลองข้อมูลซ้ำซึ่งมีทั้งสิ้น S รอบ

i คือ วิธีที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบความแปรปรวน (ทั้งวิธีพื้นฐาน และวิธีการเฉลี่ยค่าองค์ประกอบความแปรปรวน)