ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก

น.ส.นิดาวรรณ ทองไทย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

EFFECTS OF ORGANIZING LEARNING GEOMETRY ACTIVITIES BASED ON REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION APPROACH AND SPATIAL ABILITIES ON MATHEMATICS PROBLEM SOLVING SKILLS IN SMALL SCHOOLS

Miss Nidawan Tongthai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education in Elementary Education
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2019

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก
โดย	น.ส.นิดาวรรณ ทองไทย
สาขาวิชา	ประถมศึกษา
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะครุศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริเดช สุชีวะ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ฉัตรวรรณ์ ลัญฉวรรธนะกร)

นิดาวรรณ ทองไทย : ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก. (EFFECTS OF ORGANIZING LEARNING GEOMETRY ACTIVITIES BASED ON REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION APPROACH AND SPATIAL ABILITIES ON MATHEMATICS PROBLEM SOLVING SKILLS IN SMALL SCHOOLS) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ผศ. ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ 2) เปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ กลุ่มตัวอย่าง คือ ผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็กแห่งหนึ่งในสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี จำนวน 24 คนได้จากการเลือกแบบเจาะจง (Purposive Sampling) เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูล คือ แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียน แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหา และ แบบบันทึกการสัมภาษณ์แนวทางการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สถิติที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูลได้แก่ ค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และการทดสอบค่าที (t-test) ผลการวิจัยพบว่า

1) ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนแตกต่าง จากก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 โดยคะแนนทักษะหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

2) ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แตกต่างจากผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 โดยคะแนนทักษะผู้เรียนกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม

3) ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น

สาขาวิชา	ประถมศึกษา	ลายมือชื่อนิสิต	....
ปีการศึกษา	2562	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....

6083823527 : MAJOR ELEMENTARY EDUCATION
KEYWORD: REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION APPROACH, SPATIAL ABILITIES, MATHEMATICS PROBLEM SOLVING SKILL, SMALL SCHOOL

Nidawan Tongthai : EFFECTS OF ORGANIZING LEARNING GEOMETRY ACTIVITIES BASED ON REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION APPROACH AND SPATIAL ABILITIES ON MATHEMATICS PROBLEM SOLVING SKILLS IN SMALL SCHOOLS. Advisor: Asst. Prof. YURAWAT KLAIMONGKOL, Ph.D.

The purposes of this research were 1) to compare the mathematical problem solving skills of students learning by using an organizing learning activities based on realistic mathematics education approach and spatial abilities between before and after learning and 2) to compare the mathematical problem solving skills of students between experimental group and control group. The subjects were five and six grade students in the first semester of the 2019 academic year at small school in Sing Buri Province. There were 12 students in the experimental group and 12 students in the control group. The instruments for data collection were tests and mathematical problem solving skill tests, behavior observation form for problem solving, and interview recording form for mathematical problem-solving guideline. The data were analyzed by means of finding arithmetic mean, standard deviation and t-test. The results of the study revealed that:

1) the mathematical problem solving skill of students after learning by using the organizing learning activities based on realistic mathematics education approach and spatial abilities was higher than those before learning at a .05 level of significance,

2) the mathematical problem solving skill of students learning by using an organizing learning activities based on realistic mathematics education approach and spatial abilities was higher than those of the students learning by using conventional approach at a .05 level of significance, and

3) the students learning by using the organizing learning activities based on realistic mathematics education approach and spatial abilities had been gradually improved the mathematical problem solving skill when comparing before, during and after being taught.

Field of Study:	Elementary Education	Student's Signature ....
Academic Year:	2019	Advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดีด้วยความเมตตาและความกรุณาอย่างสูงจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ ข้อคิดเห็นต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์ในการทำวิทยานิพนธ์ พร้อมทั้งให้โอกาสในการเรียนรู้ใน หลาย ๆ ด้านตั้งแต่ต้นจนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ผู้วิจัยกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมยศ ชิดมงคล ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร.ฉัตรวรรณ์ ลัญฉวรรธนะกร กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาตรวจสอบและให้ ข้อเสนอแนะเพิ่มเติมที่เป็นประโยชน์ ซึ่งเป็นผลให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่กรุณาเสียสละเวลาตรวจพิจารณาให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการปรับปรุงแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยให้มีความถูกต้องสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์สาขาวิชาประถมศึกษาและคณาจารย์คณะครุศาสตร์ทุกท่านที่ได้ มอบความรู้และทักษะในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ รวมทั้งเจ้าหน้าที่คณะครุศาสตร์ทุกท่านที่คอย ช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในด้านต่าง ๆ อย่างเป็นกัลยาณมิตรเสมอมา

ขอขอบคุณโรงเรียนวัดโพธิ์ศรี อำเภอค่ายบางระจัน จังหวัดสิงห์บุรี ทั้งผู้บริหารโรงเรียน ครู และนักเรียนที่ได้กรุณาให้ความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูลและให้คำแนะนำ ช่วยเหลือเป็น อย่างดี ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณคุณพ่อจำลอง คุณแม่นิตยา น้องสาววรรณิดา ทองไทย และนายศิวณัฐ เล่อยิ้ม ที่คอยให้การสนับสนุนด้านการศึกษา คอยให้กำลังใจอยู่ข้าง ๆ เสมอ ให้คำปรึกษา และให้ความ ช่วยเหลือที่ดีเสมอมา

ท้ายสุดนี้ ขอขอบพระคุณรุ่นพี่นิสิตบัณฑิตศึกษาและเพื่อน ๆ สาขาวิชาประถมศึกษา ทุกท่าน ที่ให้กำลังใจ และให้ความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์มาโดยตลอด และขอขอบพระคุณเพื่อน ๆ พี่ ๆ น้อง ๆ ที่ คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษา คอยช่วยเหลือแก่ผู้วิจัยด้วยดีเสมอมา

นิดาวรรณ ทองไทย

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

การศึกษาเป็นรากฐานที่สำคัญในการพัฒนาและเสริมสร้างศักยภาพบุคคลในชาติ อันนำมาซึ่งการพัฒนาประเทศชาติให้มีความเจริญรุ่งเรือง เนื่องจากการศึกษาเป็นกระบวนการที่ช่วยในการพัฒนาให้ผู้เรียนมีความรู้ ทักษะและความสามารถที่สอดคล้องต่อการเปลี่ยนแปลงในทุกด้าน ทั้งเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และความเจริญก้าวหน้าของวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ให้ผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการดำเนินชีวิตได้อย่างมีคุณภาพและเท่าทันต่อเหตุการณ์ภายใต้กระแสยุคโลกาภิวัตน์ นำมาสู่การยกระดับคุณภาพการศึกษาให้สอดคล้องต่อการเปลี่ยนแปลงของโลกศตวรรษที่ 21 การเตรียมพร้อมทักษะจำเป็นในการดำรงชีวิตจึงเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับผู้เรียน โดยเฉพาะทักษะการเรียนรู้ (Learning skill) การปฏิรูปเพื่อเปลี่ยนแปลงรูปแบบการจัดการเรียนรู้และแนวทางการเตรียมความพร้อมสำหรับผู้เรียนจึงเป็นประเด็นที่ระบบการศึกษาต้องเร่งพัฒนาอย่างต่อเนื่อง กระทรวงศึกษาธิการได้ทำการปรับปรุงหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนาและวัฒนธรรม ตามกรอบและทิศทางของแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 12, ยุทธศาสตร์ชาติ 20 ปี และแผนการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2560 – 2579 เพื่อส่งเสริมและวางรากฐานความรู้ที่สำคัญในการพัฒนาความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การคิดอย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ ความสามารถในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาในชีวิตประจำวัน ตลอดจนการประยุกต์ใช้ความรู้ ความสามารถ ทักษะ กระบวนการในการดำรงชีวิตและการสร้างนวัตกรรมที่เอื้อประโยชน์ต่อการดำรงชีวิต (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

ระบบการศึกษาของประเทศไทยในปัจจุบันมีการส่งเสริมและให้ความสำคัญกับแนวการเรียนรู้สะเต็มศึกษา (STEM Education) ที่เป็นการเรียนรู้เนื้อหาและทักษะด้านวิทยาศาสตร์ (Science) เทคโนโลยี (Technology) วิศวกรรมศาสตร์ (Engineering) และ คณิตศาสตร์ (Mathematics) แต่ละวิชาล้วนส่งเสริมให้ผู้เรียนมีความรู้ความสามารถเพื่อการดำรงชีวิตอย่างมีคุณภาพในโลกศตวรรษที่ 21 อีกทั้งยังมีความสำคัญอย่างมากในการเพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันทางเศรษฐกิจและการพัฒนาคุณภาพชีวิต (รักษพล ธนานุวงศ์, 2556) ในขณะเดียวกัน สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานที่มีการกำหนดให้เน้นพัฒนาและประเมินความสามารถพื้นฐานเบื้องต้นสำคัญที่ใช้ในการเรียนรู้ของนักเรียน 3 ด้าน คือ ความสามารถด้านภาษา (Literacy) ด้านคำนวณ (Numeracy) และด้านเหตุผล (Reasoning ability) ที่ช่วยส่งเสริมทักษะ 3R ซึ่งเป็น

ทักษะจำเป็นต่อการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 อันประกอบด้วย 1) อ่านออก (Reading) 2) เขียนได้ (Writing) 3) คิดเลขเป็น (Arithemetics) (วิจารณ์ พานิช, 2555) ซึ่งหนึ่งในศาสตร์ที่ไม่สามารถปฏิเสธได้ว่าเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการต่อยอดความรู้และการประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันนั้น ได้แก่ วิชาคณิตศาสตร์ เนื่องจากความสามารถด้านคำนวณ (Numeracy) เป็นความสามารถในการใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ทักษะการคิดคำนวณ และความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่สำคัญในการพัฒนาความคิด ทำให้ผู้เรียนมีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์และแก้ปัญหาสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบและเหมาะสม (นฤชล ศรีมหาพรหม, 2549) คณิตศาสตร์จึงถือเป็นพื้นฐานสำคัญในการต่อยอดความรู้และพัฒนาความคิดในการเรียนศาสตร์อื่น ๆ นำไปสู่การสร้างสรรค์นวัตกรรมและเทคโนโลยีเพื่อการอำนวยความสะดวกในการดำเนินชีวิต อย่างไรก็ตามการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยทักษะกระบวนการ ได้แก่ การแก้ปัญหา การแสดงหรืออ้างอิงเหตุผล การสื่อสารหรือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่าง ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ หากผู้เรียนได้รับการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์จะทำให้ผู้เรียนสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ในชีวิตประจำวัน และการศึกษาต่อได้อย่างมีประสิทธิภาพ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551) การพัฒนาความสามารถทางด้านคำนวณหรือความสามารถทางคณิตศาสตร์ ผู้เรียนจำเป็นต้องได้รับการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นสมรรถภาพที่จำเป็นต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2546) ประกอบด้วย 1) การแก้ปัญหา ทำความเข้าใจกับปัญหา ระบุประเด็นปัญหา สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ ตรวจสอบความถูกต้อง และความเป็นไปได้ของการแก้ปัญหา ตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา 2) การให้เหตุผล รวบรวมความรู้ที่เกี่ยวข้องในกระบวนการการแก้ปัญหา เลือกใช้ความรู้เพื่อจัดลำดับขั้นตอน ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผล 3) การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ เลือกรูปแบบของการสื่อสาร การสื่อความหมายและนำเสนอด้วยวิธีการที่เหมาะสม ใช้ข้อความสมการ ศัพท์ที่เป็นสากล บันทึกผลงานทุกขั้นตอน สรุปสาระที่ได้จากการศึกษา เสนอความคิดเห็นที่เหมาะสมกับปัญหา 4) การเชื่อมโยงเปรียบเทียบความรู้ของแต่ละสาระ เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น สรุปสาระสำคัญ และ 5) ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ใช้ความรู้หรือมโนทัศน์เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ สร้างสรรค์ตัวแบบทางคณิตศาสตร์หรือชิ้นงานที่มีประโยชน์ต่อการเรียนรู้

ทักษะกระบวนการที่สำคัญมากในการดำเนินชีวิต ทักษะหนึ่ง คือ ทักษะการแก้ปัญหา อีกทั้งทักษะการแก้ปัญหาถือเป็นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานสำคัญในการปรับใช้ในชีวิตประจำวันและต่อยอดไปสู่ทักษะกระบวนการอื่น ๆ ดังที่ Fisher (1987) กล่าวว่า ทักษะ

การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐานสำหรับการดำเนินชีวิตในแต่ละวัน ส่งเสริมความสามารถในระดับต่าง ๆ ที่จะนำไปสู่การประสบความสำเร็จในชีวิต เป็นทักษะที่ส่งผลต่อทักษะอื่น ๆ ได้แก่ ความคิดสร้างสรรค์ ความคิดอย่างมีวิจารณญาณ การสังเกต การออกแบบ การตัดสินใจ การระดมสมองและเป็นเครื่องมือในการหาคำตอบ ดังนั้นการแก้ปัญหาจึงเป็นสิ่งที่จำเป็นต่อการดำเนินชีวิต และสำคัญอย่างยิ่งในการจัดการศึกษาเพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาให้เกิดแก่ผู้เรียน สอดคล้องกับ Bell (1978) กล่าวว่า การแก้ปัญหามีความสำคัญและเหมาะสมที่จะใช้ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาผู้เรียนให้มีศักยภาพในการวิเคราะห์ปัญหา การคิดอย่างมีเหตุผล มีขั้นตอน และตัดสินใจได้อย่างถูกต้อง โดยกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เป็นที่ยอมรับและใช้กันอย่างแพร่หลาย ได้แก่ กระบวนการแก้ปัญหาตามแนวคิดของ Polya (1957) ประกอบด้วยกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ได้แก่ 1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ผู้เรียนจะต้องพิจารณาส่วนประกอบของปัญหาอย่างถี่ถ้วน เพื่อนำไปสู่การทำความเข้าใจและระบุปัญหาว่ามีตัวไม่ทราบค่า เงื่อนไข และข้อมูลใดบ้าง 2) ขั้นการวางแผนแก้ปัญหา ผู้เรียนจะต้องหาความสัมพันธ์และเชื่อมโยงข้อมูลกับตัวไม่ทราบค่า แล้วใช้ความรู้ ประสบการณ์ในการวางแผนและเลือกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา 3) ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ผู้เรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางหรือแผนที่วางไว้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน ลงมือปฏิบัติจนกระทั่งหาคำตอบได้ และ 4) ขั้นตรวจสอบผล โดยผู้เรียนต้องตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่ใช้ หากผู้เรียนได้รับการพัฒนาการคิดและกระบวนการคิดอย่างเป็นระบบ จะทำให้ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์และแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

อย่างไรก็ตาม จากการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษาที่ผ่านมา ปัญหาที่สำคัญคือ มีผู้เรียนประถมศึกษาจำนวนไม่น้อยที่ไม่สามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ เนื่องจากขาดความเข้าใจในทักษะกระบวนการในการแก้ปัญหา ขาดความสามารถในการเชื่อมโยงปัญหากับวิธีการดำเนินการแก้ปัญหา และไม่สามารถแสดงแนวคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาได้ (กองสิน อ่อนวาด, 2550 ; อรชร ภูบุญเติม, 2550) ทฤษฎีและหลักการทางคณิตศาสตร์มีความเป็นนามธรรมสูง อาจทำให้ผู้เรียนเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการจดจำเทคนิค สูตร หรือวิธีการมากกว่าการแก้ปัญหาโดยใช้ความเข้าใจ ใช้ทักษะกระบวนการ และการประยุกต์เชื่อมโยงความรู้สู่การแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพ จนทำให้ผู้เรียนขาดทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการแก้โจทย์ปัญหาในการทดสอบระดับต่าง ๆ และจากผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2560 พบว่า คะแนนเฉลี่ยระดับประเทศวิชาคณิตศาสตร์เป็นร้อยละ 37.12 ซึ่งน้อยกว่าวิชาวิทยาศาสตร์และภาษาไทย ส่วนปีการศึกษา 2561 พบว่า คะแนนเฉลี่ยระดับประเทศวิชาคณิตศาสตร์ เป็นร้อยละ 37.50 ซึ่งเป็นวิชาที่มีค่าเฉลี่ยคะแนนระดับประเทศที่น้อยที่สุด เมื่อเทียบกับวิชาวิทยาศาสตร์ ภาษาไทยและภาษาอังกฤษ อาจมาจากการขาดทักษะใน

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ อันเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาและต่อยอดทักษะกระบวนการด้านอื่น ๆ และนำไปสู่ปัญหาการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไม่ได้ในอนาคต เมื่อผู้เรียนเรียนในระดับที่สูงขึ้น ดังที่ปรากฏตามผลการทดสอบ Programme for International Student Assessment หรือ PISA ประจำปี ค.ศ. 2015 ที่ประเมินผู้เรียนที่มีอายุ 15 ปี ในส่วนการประเมินการรู้เรื่องคณิตศาสตร์พบว่า คะแนนเฉลี่ยของประเทศไทย คือ 415 คะแนน ซึ่งต่ำว่าคะแนนเฉลี่ยของ The Organization for Economic Co-operation and Development หรือ OECD คือ 490 คะแนน อยู่ในช่วงลำดับที่ 55 จากทั้งหมด 70 ประเทศ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560) นอกจากนี้การขาดทักษะกระบวนการในการแก้ปัญหายังส่งผลต่อการแก้ปัญหาและปรับใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันของผู้เรียน เพราะคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่อยู่รอบตัวผู้เรียนตลอดเวลา เช่น การซื้อขายสินค้า การชั่ง การตวง การวัดสิ่งต่าง ๆ ในชีวิตประจำวัน การคำนวณและการประมาณพื้นที่ การคำนวณสัดส่วนหรืออัตราส่วนในการประกอบอาหาร การอ่านและคำนวณเวลาในชีวิตประจำวัน การคาดคะเนเหตุการณ์โดยอาศัยสถิติและความน่าจะเป็น การแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น ดังนั้นการพัฒนาทักษะกระบวนการแก้ปัญหาของผู้เรียนระดับประถมศึกษาจะช่วยพัฒนาพื้นฐานทางการคิดและพัฒนาการด้านสติปัญญาให้ผู้เรียนสามารถเข้าใจถึงปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยพื้นฐานความรู้ และทักษะกระบวนการจะนำไปสู่การประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการแก้ปัญหาในการดำเนินชีวิตอย่างมีศักยภาพ โดยปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีความเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันและมีความสำคัญมากเรื่องหนึ่ง คือ เรื่องเรขาคณิต ที่จำเป็นต้องใช้ทักษะกระบวนการแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ เนื่องจากเป็นเรื่องที่ต้องอาศัยความรู้ในการเชื่อมโยงเนื้อหาสาระเรขาคณิตกับการระบบความคิดในการแก้ปัญหา แต่ในทางตรงข้ามเรื่องเรขาคณิต มีค่าคะแนนเฉลี่ยผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2561 เมื่อจำแนกตามสาระ เท่ากับ 28.92 (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2561) ซึ่งมีค่าต่ำที่สุดเมื่อเทียบกับสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่น อันได้แก่ จำนวนและการดำเนินการ การวัด พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น ยิ่งไปกว่านั้นจากข้อมูลทางสถิติเกี่ยวกับผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) เมื่อจำแนกผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ตามขนาดโรงเรียนแล้วทำการพิจารณาคะแนนค่าเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ ในปีการศึกษา 2560 มีผู้เรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เข้ารับการทดสอบจำนวน 254,799 คน และในปีการศึกษา 2561 มีผู้เรียนระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เข้ารับการทดสอบจำนวน 249,976 คน ซึ่งผู้เรียนในโรงเรียนขนาดเล็กที่มีจำนวนผู้เข้าสอบมากที่สุด เป็นกลุ่มผู้เรียนที่กระจายตัวอยู่ในทุกภูมิภาค มีคะแนนเฉลี่ยคะแนน 4 วิชา ได้แก่ ภาษาไทย ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ต่ำกว่าค่าเฉลี่ยคะแนนของแต่ละวิชาของโรงเรียนขนาดกลาง ขนาดใหญ่และขนาดใหญ่พิเศษ อีกทั้ง

ยังต่ำกว่าค่าเฉลี่ยคะแนนระดับประเทศ ผู้เรียนในบริบทโรงเรียนขนาดเล็กจึงเป็นทรัพยากรบุคคลของชาติที่ควรได้รับการพัฒนาอย่างเร่งด่วนและต่อเนื่อง

ตามทฤษฎีพัฒนาการทางด้านสติปัญญาของนักจิตวิทยาพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาและพัฒนาการทางความคิด สติปัญญาของผู้เรียนประถมศึกษาตามทฤษฎีของเพียเจต์ (อ้างถึงในสิริมา ภิญโญอนันตพงษ์, 2553) กล่าวว่า มนุษย์มีความสามารถในการปรับตัวที่มนุษย์สร้างความสมดุลระหว่างการรับรู้และประสบการณ์เก่าและใหม่ เป็นกระบวนการคิดที่เกิดขึ้นตลอดเวลาที่เป็นการรับรู้เรื่องใหม่ แล้วนำไปสัมพันธ์เชื่อมโยงกับความรู้เดิม อันนำไปสู่การคิดและแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ โดยอาศัยกระบวนการทำงานของโครงสร้างพัฒนาการทางสติปัญญา โดยแต่ละช่วงวัยจะมีพัฒนาการทางสติปัญญาที่เป็นพื้นฐานในการคิดและแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน ผู้เรียนประถมศึกษาอายุ 7-11 ปี มีพัฒนาการอยู่ในขั้นการใช้ความคิดเชิงรูปธรรม (Concrete Operation) เป็นช่วงวัยที่รู้จักการแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ ที่เป็นรูปธรรมเพราะรับรู้สิ่งที่เป็นรูปธรรมได้ดี เริ่มใช้เหตุผลเบื้องต้นในการตัดสินใจ โดยใช้เหตุผลรอบ ๆ ตัวมาประกอบการคิดและตัดสินใจหรือแก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน สร้างกฎเกณฑ์ในการแบ่งสิ่งแวดล้อมออกเป็นหมวดหมู่ เริ่มมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ เป็นมีความสามารถในการคิดย้อนกลับ และในลำดับขั้นต่อจากนั้นคือขั้นการใช้ความคิดเชิงนามธรรม (Formal Operation) ในผู้เรียนอายุ 11 ปีขึ้นไปหรือในวัยรุ่น ผู้เรียนจะมีความสามารถในการตั้งสมมติฐานและพิสูจน์ได้ สามารถแก้ปัญหาด้วยการคิดวางแผนด้วยตนเองก่อนแก้ปัญหา มีความเข้าใจในสูตรหรือกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ได้ดี (Piajet, 1969 อ้างถึงใน วรรณทิพา รอดแรงค้า, 2540) ในขณะเดียวกันบรูเนอร์ได้แบ่งขั้นพัฒนาการทางด้านสติปัญญาและการคิดออกเป็น 3 ขั้น ได้แก่ ขั้นการเรียนรู้ด้วยการกระทำ ขั้นการเรียนรู้ด้วยภาพและจินตนาการ และขั้นการเรียนรู้ด้วยสัญลักษณ์ (เยาวพา เดชะคุปต์, 2542) จากที่กล่าวมาข้างต้น อาจสรุปได้ว่า พัฒนาการทางด้านสติปัญญาของผู้เรียนจะเป็นพื้นฐานทางการคิด นำไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยตามธรรมชาติของผู้เรียนประถมศึกษาเป็นช่วงวัยที่มีพัฒนาการเชื่อมต่อระหว่างขั้นการใช้ความคิดเชิงรูปธรรม (Concrete Operation) และขั้นการใช้ความคิดเชิงนามธรรม (Formal Operation) ตามทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ ผู้เรียนจำเป็นต้องได้รับการพัฒนาทักษะกระบวนการในการแก้ปัญหาด้วยชุดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมทักษะกระบวนการแก้ปัญหาโดยเริ่มต้นจากการแก้ปัญหาในสิ่งที่เป็นรูปธรรม ผู้เรียนได้เรียนรู้ผ่านการลงมือปฏิบัติเพื่อการแก้ปัญหามีการวางแผนโดยการคิดอย่างเป็นระบบและมีเหตุผลผ่านการตั้งสมมติฐานและการพิสูจน์ เพื่อเกิดความเข้าใจในกฎเกณฑ์หรือที่มาของสูตรคณิตศาสตร์ต่าง ๆ นำไปสู่การมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ เป็นนามธรรมด้วยการเรียนรู้ด้วยภาพและจินตนาการ จนไปถึงการเรียนรู้และการสร้างสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อย่างเข้าใจ และจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องพัฒนาให้ผู้เรียนเกิดทักษะกระบวนการแก้ปัญหา ในการแก้ปัญหาในเรื่องเรขาคณิตให้แก่ผู้เรียนระดับ

ประถมศึกษาที่จะช่วยพัฒนาความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล ทำให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะการสื่อสารและการแก้ปัญหาที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการเรียนและชีวิตประจำวันได้ (อาพันธ์ชนิต เจนจิต, 2546)

การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาจะมีประสิทธิภาพและผู้เรียนจะสามารถนำไปปรับใช้กับสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันได้ตามพัฒนาการและความสามารถของผู้เรียนนั้น ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ควรส่งเสริมให้ผู้เรียนแก้ปัญหาโดยใช้พื้นฐานความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability) เนื่องจากความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จะส่งผลให้มนุษย์เข้าใจถึงมิติอันได้แก่ ขนาด รูปร่าง ความสูงต่ำ ความใกล้ไกล พื้นที่ ปริมาตร เป็นต้น ซึ่งเป็นความสามารถทางสมองซีกขวาที่จะช่วยให้มนุษย์เกิดจินตนาการและการสร้างมโนภาพของส่วนประกอบต่าง ๆ เมื่อแยกออกจากกันและสามารถมองเห็นโครงสร้าง เมื่อนำส่วนต่าง ๆ มาประกอบกันหรือรวมเข้าด้วยกัน ทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจในการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ นำไปสู่การพัฒนาความคิดรวบยอดเกี่ยวกับธรรมชาติของสิ่งต่าง ๆ รูปร่าง ลักษณะและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของผู้เรียน (คันธรส วงศ์ศักดิ์, 2553) นอกจากนี้ยังรวมถึงทิศทางของวัตถุหรือสิ่งของที่เปลี่ยนแปลงไป (ล้วน สายยศ, 2543) สอดคล้องกับ Thurstone (1958) ได้ให้ความหมายของความสัมพันธ์ด้านมิติสัมพันธ์ หมายถึง สมรรถภาพของสมองในด้านการรับรู้เกี่ยวกับทรงเรขาคณิตที่ไม่มีการเคลื่อนที่และการมองเห็นความสัมพันธ์ของรูปภาพ เมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือมุมภาพนั้นไปจากเดิมซึ่งอาจใช้องค์ประกอบทางด้านจินตนาการร่วมด้วย ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จึงเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และดำรงชีวิตอย่างมาก ดังที่พัฒนา ชัชพงศ์ (2550: 33) กล่าวว่า “เพียเจต์ (Piaget) กล่าวไว้ว่า มนุษย์สามารถเรียนรู้โดยการปรับขยายจากประสบการณ์เดิมสู่สิ่งใหม่ ถ้าเขามีทักษะมิติสัมพันธ์ที่ดี จะช่วยให้เขาเรียนรู้อย่างมีศักยภาพที่ดียิ่งขึ้น” เพราะหากผู้เรียนได้รับการส่งเสริมความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไปพร้อมกับทักษะกระบวนการแก้ปัญหา จะทำให้ผู้เรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์และเชื่อมโยงสิ่งต่าง ๆ ในการเรียนรู้ได้อย่างรวดเร็ว ทำให้ผู้เรียนรู้จักคิดวางแผนและมีจินตนาการที่กว้างไกล สามารถจัดกลุ่มรูปแบบต่าง ๆ ในสมองได้ดี (อุดม เพชรสังหาร, 2550) อันจะนำไปสู่การประยุกต์ใช้ความรู้ ความสามารถและทักษะกระบวนการเพื่อการดำเนินชีวิตในโลกศตวรรษที่ 21 ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

แนวทางการจัดการเรียนรู้ที่สามารถช่วยพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และการดำเนินชีวิตด้วยพื้นฐานกระบวนการในการทำความเข้าใจกับปัญหาหรือสถานการณ์ เพื่อนำไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพโดยผู้เรียนเป็นผู้สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองนั้น คือ แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education: RME) เป็นการจัดการเรียนรู้ที่เริ่มต้นด้วยสถานการณ์ปัญหาในชีวิตจริงมุ่งเน้นพัฒนาผู้เรียนทำความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ผ่านการทำงานในบริบทที่มีความหมาย (Dickinson & Hough, 2012) เพื่อเชื่อมโยง

ปัญหาในชีวิตจริงกับคณิตศาสตร์โดยใช้แบบจำลอง ซึ่งผู้เรียนจะเกิดความคิดสร้างสรรค์ แล้วอภิปรายมโนทัศน์ร่วมกันเป็นกลุ่ม จากนั้นให้ผู้เรียนสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ ทำให้ผู้เรียนสามารถปรับใช้รูปแบบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่นได้อย่างเหมาะสม ส่งผลให้ผู้เรียนมีพฤติกรรมการเรียนรู้ดียิ่งขึ้น และช่วยพัฒนา ส่งเสริมทักษะการให้เหตุผลและความคิดสร้างสรรค์ (Fauzen, 2002) โดยแนวทางการออกแบบการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงที่ Gravemeijer (1994, อ้างถึงใน Zulkardi, 2002) เสนอมี 3 หลักการ คือ 1) ผู้เรียนควรได้รับประสบการณ์จากสถานการณ์จริง โดยได้รับคำแนะนำและอำนวยความสะดวกจากครูเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการ ให้โอกาสนักเรียนคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผนมากขึ้น กล่าวคือ ครูควรเน้นกระบวนการมากกว่าผลลัพธ์ที่ได้ 2) การสอนที่ทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน และ 3) เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการพัฒนาแบบจำลองของตนในการแก้ปัญหา ซึ่งแบบจำลองสามารถเปลี่ยนแปลงได้ จากแบบจำลองง่ายๆ ไปสู่แบบจำลองที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ตัวอย่างแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ เป็นต้น ควรส่งเสริมให้ผู้เรียนสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มจากมุมมองของตนเอง นอกจากนี้ Yunita (2013 อ้างถึงใน Daniel, 2014) ได้เสนอแนวทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงไว้ 4 ขั้นตอน คือ 1) การทำความเข้าใจบริบทปัญหา 2) การแสดงวิธีการแก้ปัญหา 3) การเปรียบเทียบหรืออภิปรายคำตอบ และ 4) การสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้

แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงจะเป็นสื่อกลางที่เชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์กับบริบทและสถานการณ์ความเป็นจริง ซึ่งการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ที่เรียนได้ดีขึ้น และผู้เรียนจะเห็นถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ (อัมพร ม้าคนอง, 2546) จากผลการวิจัยของ Dickinson, Eade, Gough & Hough (2010) พบว่า การนำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์แก่ผู้เรียนที่มีสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลางถึงต่ำในโรงเรียนมัธยมศึกษา ประเทศอังกฤษ ช่วยพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของผู้เรียนและพัฒนาความรู้เนื้อหาวิชาให้แก่ผู้เรียน สอดคล้องกับเกศินี เพ็ชรรุ่ง (2556) ได้ทำการพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง และศึกษาความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ของผู้เรียน ผลการวิจัยพบว่า ผู้เรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้โดยใช้ชุดกิจกรรมที่พัฒนาขึ้นมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์หลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองและสูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ หากผู้เรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยงปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตจริงกับคณิตศาสตร์ได้ ผู้เรียนจะสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ ประสบการณ์เดิมในการแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ บนพื้นฐานทักษะการคิดและกระบวนการแก้ปัญหาได้อย่างมีเหตุผลและเป็นระบบ จากแนวการศึกษา

คณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงส่งเสริมการเรียนรู้ที่เชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงที่เน้นให้ผู้เรียนเรียนรู้วิธีการพัฒนาและประยุกต์ใช้ความรู้ ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการแก้ปัญหา เกิดเป็นทักษะกระบวนการแก้ปัญหาที่ต้องอาศัยทักษะพื้นฐานในการสืบค้น การสังเกต การให้เหตุผล ในการสรุปและอภิปรายผล และการประยุกต์ใช้ความรู้ นอกจากผู้เรียนยังสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในสถานการณ์ปัญหาจริงและประยุกต์ใช้ความรู้อย่างสร้างสรรค์ เพื่อประโยชน์แก่ตนเองและส่วนรวม ในการนำความรู้และประยุกต์ทักษะในการแก้ปัญหาเพื่อการดำเนินชีวิตประจำวันของผู้เรียน ยังช่วยเสริมสร้างทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ให้เกิดขึ้นแก่ผู้เรียน ดังเห็นได้จากผลการทดลองของ Demaisip-Hortillosa (2013) ที่ได้ทำการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้แนวคิดการใช้บริบทเป็นฐานที่มุ่งเน้นการประยุกต์ใช้ความรู้คณิตศาสตร์มาแก้ปัญหาที่มีความเกี่ยวข้องกับบริบทต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริงกับผู้เรียนในโรงเรียนสายอาชีวศึกษา ประเทศฟิลิปปินส์ พบว่า เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการใช้บริบทเป็นฐานสูงกว่าผู้เรียนที่เรียนรู้และปกติ

ผู้วิจัยต้องการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของผู้เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Educational: RME) ร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability) โดยพัฒนาให้ผู้เรียนทำความเข้าใจกับปัญหา ระบุประเด็นปัญหา สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ พิสูจน์ ตรวจสอบความเหมาะสมของตัวแบบ ตรวจสอบความถูกต้อง และความเป็นไปได้ของการแก้ปัญหา และการตรวจสอบขั้นตอนการแก้ปัญหา หากผู้เรียนมีกระบวนการคิดและความสามารถในการแก้ปัญหาอย่างมีประสิทธิภาพแล้ว ทักษะกระบวนการด้านอื่น ๆ จะเกิดตามมา ซึ่งได้แก่ ทักษะการให้เหตุผล เนื่องจากก่อนที่ผู้เรียนจะแก้ปัญหาได้ ต้องมีการรวบรวมความรู้ที่เกี่ยวข้องในกระบวนการในการแก้ปัญหา เลือกใช้ความรู้เพื่อจัดลำดับขั้นตอนและการตรวจสอบความถูกต้องสมเหตุสมผล ทักษะการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ สรุปสาระที่ได้จากการศึกษาและเสนอความคิดเห็นที่เหมาะสมกับปัญหา ทักษะการเชื่อมโยงเปรียบเทียบความรู้ที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาในบริบทหรือสถานการณ์จริง และทักษะความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ โดยผู้เรียนใช้ความรู้หรือมโนทัศน์เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่ สร้างสรรค์ตัวแบบทางคณิตศาสตร์หรือชิ้นงานที่มีประโยชน์ต่อการเรียนรู้และต่อการดำเนินชีวิต

ดังที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 ในโรงเรียนขนาดเล็ก เพื่อพัฒนาผู้เรียนประถมศึกษาให้มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานสำคัญในการใช้คณิตศาสตร์แก้ปัญหาในดำเนินชีวิตอย่างมีประสิทธิภาพ

คำถามการวิจัย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีผลต่อการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนหรือไม่อย่างไร

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

2. เพื่อเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

3. เพื่อศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

สมมติฐานการวิจัย

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ดังที่ เพียเจต์ (1971) กล่าวไว้ว่า มนุษย์สามารถเรียนรู้โดยการปรับขยายจากประสบการณ์เดิมสู่สิ่งใหม่ ถ้าเขามีทักษะมิติสัมพันธ์ที่ดี จะช่วยให้เขาเรียนรู้อย่างมีศักยภาพที่ดียิ่งขึ้น ในขณะเดียวกัน Dickinson, Eade, Gough, and Hough (2010) ศึกษาผลของการนำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์แก่ผู้เรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลางถึงต่ำในประเทศอังกฤษ พบว่า แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงช่วยพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของผู้เรียนและพัฒนาความรู้ในเนื้อหาวิชาให้แก่ผู้เรียน ซึ่งสอดคล้องกับจิรนันท์ พึ่งกลั่น (2555) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาโดยมีลักษณะการจัดกิจกรรม คือ ผู้สอนจะทำหน้าที่เป็นผู้ชี้แนะและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ การแก้ปัญหาผ่านการทำงานร่วมกับผู้อื่น และใช้ปัญหาที่มีความสอดคล้องกับชีวิตประจำวันของผู้เรียน ซึ่งผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

จากทฤษฎีพัฒนาการด้านสติปัญญาของเพียเจต์และงานวิจัยข้างต้น ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานไว้ดังนี้

1. คะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

2. คะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรและตัวอย่างในการวิจัย

1.1 ประชากร คือ ผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็ก สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี สังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน ปีการศึกษา 2562

1.2 ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย คือ ผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็กแห่งหนึ่งในสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี จำนวน 24 คน โดยเลือกแบบจำเพาะเจาะจง (Purposive Sampling) แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง จำนวน 12 คน และ กลุ่มควบคุม จำนวน 12 คน โดยใช้วิธีการจับคู่ (Match by Pair) เพื่อให้ได้กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มมีความใกล้เคียงกัน

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เรื่องรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เนื้อหาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 15 แผน ระยะเวลา 15 ชั่วโมง โดยทดลอง 8 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง โดยแบ่งเป็น

2.1 รูปเรขาคณิตสองมิติ ได้แก่

2.1.1. ลักษณะและคุณสมบัติพื้นฐานของรูปเรขาคณิตสองมิติ ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม และรูปหลายเหลี่ยม

2.1.2. ความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน รูปสามเหลี่ยมและรูปวงกลม

2.2 รูปเรขาคณิตสามมิติ ได้แก่

2.2.1. ลักษณะและคุณสมบัติพื้นฐานของรูปเรขาคณิตสามมิติ ได้แก่ ลูกบาศก์ ปริซึม พีระมิด กรวย ทรงกระบอก และทรงกลม

2.2.2. รูปคลี่ พื้นที่ผิว ปริมาตรของลูกบาศก์ ปริซึม และทรงกระบอก

3. ตัวแปรที่ศึกษา

3.1 ตัวแปรต้น ได้แก่

- กิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)
- กิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตรูปแบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)

3.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

- ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.3 ตัวแปรควบคุม ได้แก่

- ระยะเวลาในการทดลอง
- เนื้อหาที่เรียน
- ครูผู้สอน

นิยามศัพท์

1. **แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (Realistic Mathematics Education: RME)** หมายถึง แนวทางการศึกษาคณิตศาสตร์จากการเรียนรู้ โดยการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ปัญหาที่อยู่ในชีวิตประจำวันของผู้เรียน สร้างโอกาสให้ผู้เรียนเกิดกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์และสอดรับบริบท สถานการณ์ปัญหา แล้วนำมาสู่การเน้นให้ผู้เรียนสร้างแบบจำลองทางความคิดในการแก้ปัญหา โดยผู้เรียนได้นำความรู้ ทักษะ และประสบการณ์มาเทียบเคียงกระบวนการทางคณิตศาสตร์และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมา เพื่อนำไปสู่การคิด อธิบาย แก้ปัญหา นำไปสร้างมโนทัศน์ที่เป็นทางการและพิสูจน์ตรวจสอบบริบทปัญหานั้นด้วยพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ จากนั้นผู้เรียนสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ ทำให้ผู้เรียนสามารถปรับใช้รูปแบบการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อื่นได้อย่างเหมาะสม

2. **กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์** หมายถึง กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิตสองมิติและสามมิติสำหรับผู้เรียนประถมศึกษา โดยส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้พื้นฐานความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ในการมองปัญหาและแก้ปัญหาจากปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริง โดยผู้เรียนเริ่มจากการพัฒนาแบบจำลองทางความคิดที่เป็นรูปธรรมไปสู่การสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม การจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ได้แก่

ขั้นตอนที่ 1 การทำความเข้าใจบริบทปัญหา ผู้เรียนเรียนรู้และทำความเข้าใจสถานการณ์ ปัญหา โดยมีครูเป็นผู้ให้สถานการณ์ปัญหาพร้อมข้อเสนอแนะอย่างไม่เป็นทางการ

ขั้นตอนที่ 2 การแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยพื้นฐานความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ผู้เรียนพัฒนาแบบจำลองในการแก้ปัญหาจากมุมมองของตน (รูปธรรม) นำไปสู่การสร้างและพิสูจน์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (นามธรรม) ซึ่งตัวอย่างแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง เป็นต้น ครูมีบทบาทในการให้คำแนะนำ ช่วยเหลือ กระตุ้นกระบวนการเรียนรู้ เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสร้างและใช้กระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง

ขั้นตอนที่ 3 การเปรียบเทียบหรืออภิปรายคำตอบ ผู้เรียนอภิปรายและนำเสนอกระบวนการและคำตอบของปัญหาที่ตนสร้างขึ้น เพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน

ขั้นตอนที่ 4 การสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ (ทั้งคำตอบและกระบวนการ)

3. **ความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability)** หมายถึง ความสามารถในการจินตนาการและการสร้างมโนภาพของเรขาคณิตสองมิติ สามมิติ ที่ส่งผลให้ผู้เรียนเข้าใจถึงมิติอัน ได้แก่ ความยาวด้าน ทิศทาง ขนาด รูปร่าง ความยาวรอบรูปและพื้นที่ ผู้เรียนนำมาใช้ในการทำความเข้าใจในปัญหาคณิตศาสตร์นำไปสู่การพัฒนาแบบรูปหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อการแก้ปัญหาและเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของผู้เรียน โดยแบ่งเป็น 1) มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) เป็นความเข้าใจในภาพ องค์ประกอบของภาพ การจัดการ รหมุน การกลับ การบิดภาพ รวมทั้งการเปลี่ยนทิศทางภายในใจได้ 2) มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) เป็นการเข้าใจถึงการจัดการรูปแบบภาพ การประมาณขนาด การแสดงเครื่องหมายแทนความสัมพันธ์และการแสดงวิธีการหาคำตอบที่เกี่ยวข้องกับมิตินั้น ๆ และ 3) มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) การมองเห็นถึงความสัมพันธ์รูปร่างรูปทรงในมิติหรือตำแหน่งที่เปลี่ยนไป และเป็นการสร้างมโนภาพจากการหมุนวัตถุ 2 มิติ 3 มิติ นำไปสู่ความเข้าใจในความสัมพันธ์

4. **ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์** คือ ความสามารถของผู้เรียนที่ได้รับการพัฒนาด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ที่เกิดจากการนำความรู้ ทักษะ และหลักการต่าง ๆ มาใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในรูปแบบหรือสถานการณ์ปัญหาต่าง ๆ เพื่อให้ได้วิธีการและคำตอบของปัญหานั้น อันประกอบด้วย ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ ซึ่งวัดได้โดยแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา คือ ความสามารถในการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ข้อมูลรายละเอียดของปัญหา แยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้

ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา คือ ความสามารถในการประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา เพื่อนำไปสู่การสร้างแนวทางหาคำตอบ โดยผู้วิจัยแบ่งออกเป็น 3 ทักษะย่อย ได้แก่ 1) ความสามารถในการประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา 2) ความสามารถสามารถในการสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางหาคำตอบได้ และ 3) ความสามารถในการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น และสามารถปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างคล่องแคล่ว

ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ คือ ความสามารถในการตรวจสอบในแต่ละขั้นตอนถึงความบกพร่องของงาน ตรวจสอบคำตอบที่ได้มาจากการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น โดยผู้เรียนต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีมาช่วยในการหาสาเหตุ แก้ปัญหาและเรียนรู้ประโยชน์จากความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาครั้งใหม่ รวมทั้งทราบแนวทางในการนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ

5. **โรงเรียนขนาดเล็ก** หมายถึง โรงเรียนในสังกัดสำนักงานคณะกรรมการศึกษาขั้นพื้นฐานที่มีผู้เรียนไม่เกิน 120 คน โดยการวิจัยครั้งนี้ใช้ผู้เรียนคละชั้น ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 ซึ่งผู้เรียนมีระดับพื้นฐานความรู้ที่ใกล้เคียงกัน

ประโยชน์ที่ได้รับ

1. ได้แนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในเรื่องเรขาคณิตสองมิติและสามมิติสำหรับผู้สอนระดับประถมศึกษา

2. ได้แนวทางในการส่งเสริมและพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

3. ได้แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมพฤติกรรมการเรียนรู้ของผู้เรียน และพัฒนาเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

4. ผลการวิจัยที่ได้เป็นประโยชน์ต่อหน่วยงานที่เกี่ยวข้องใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วม เพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาแก่ผู้เรียน

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

1.1 ความเป็นมาของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

1.2 หลักการของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

1.3 ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

1.4 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

2. ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

2.1 ความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

2.3 องค์ประกอบของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

2.4 แบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

2.5 การจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

3. ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2 องค์ประกอบของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.3 ขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.4 เกณฑ์ในการวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

4. ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต

4.1 ความเป็นมาและพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิต

4.2 ความสำคัญและจุดมุ่งหมายของเรขาคณิต

4.3 ระดับความคิดทางเรขาคณิต

4.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาเรขาคณิต

4.5 สาระการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตระดับประถมศึกษา

5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

6. กรอบแนวคิดในการวิจัย

1. แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

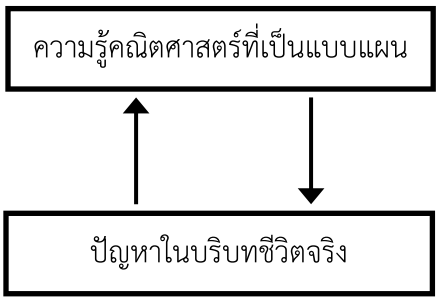
1.1 ความเป็นมาของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

ในช่วงปี ค.ศ. 1970 Freudenthal และคณะทำงานของสถาบัน Freudenthal ประเทศเนเธอร์แลนด์ ได้ศึกษาและพัฒนาแนวคิดคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริง เนื่องจากคณิตศาสตร์ไม่ได้เป็นเพียงวิชาที่ถ่ายทอดเนื้อหาความรู้ที่มีอยู่แล้ว แต่เป็นกิจกรรมหนึ่งของมนุษย์ มีความใกล้ชิดกับประสบการณ์และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์จึงควรตั้งอยู่บนพื้นฐานของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ให้ความสำคัญกับการลงมือปฏิบัติเพื่อเกิดการเรียนรู้จากปัญหาที่อยู่ในชีวิตจริงของผู้เรียน โดยครูชี้แนะและเปิดโอกาสในการสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่มาจากสิ่งที่เป็นรูปธรรมให้เป็นนามธรรม และที่สำคัญครูไม่ควรปิดกั้นหรือจำกัดกรอบความคิดของผู้เรียน จุดเน้นของการศึกษาคณิตศาสตร์จึงไม่ใช่การเรียนรู้และปฏิบัติตามจากองค์ความรู้ที่มีผู้สร้างไว้เพียงอย่างเดียว แต่ควรให้ความสำคัญกับกิจกรรมและกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นจากการเรียนรู้ของผู้เรียนเอง (Marja van den Heuvel-Panjuizen, 2003 อ้างถึงใน ธัญพิมล จันทร์นุ่ม, 2556)

เมื่อเปรียบเทียบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงกับรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบดั้งเดิมจะพบว่า มีความแตกต่างกันที่การประยุกต์ใช้ความรู้และจุดเริ่มต้นของการจัดการเรียนรู้ โดยการเรียนรู้แบบดั้งเดิมจะมีวิธีการประมวลผลข้อมูลความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบ เริ่มจากสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นโดยผู้สอนถ่ายทอดองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์สู่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ตามลักษณะของมโนทัศน์และขั้นตอนวิธีการ จึงกล่าวได้ว่าการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เริ่มต้นจากการเรียนรู้เนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผน จากนั้นเรียนรู้วิธีการในการประยุกต์ใช้ความรู้และทักษะต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาเชิงบริบท แต่ในขณะที่ Gravemeijer (1997) มองว่า กิจกรรมคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงหรือการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็น กิจกรรมในการแก้ปัญหาโดยการมองหาปัญหาและการสร้างเนื้อหาวิชา ผู้เรียนเริ่มต้นจากการมองปัญหา เพื่อสร้างข้อสรุปและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกระบวนการของการศึกษาคณิตศาสตร์มีเหตุผลที่สำคัญ 2 ประการ ได้แก่ ประการแรก การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ถือเป็นกิจกรรมหลักที่สำคัญของนักคณิตศาสตร์ ในขณะเดียวกัน การคิดเชิงคณิตศาสตร์ถือเป็นสิ่งที่ทำให้ผู้เรียนเกิดความคุ้นเคยกับวิธีการทางคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ที่พบในชีวิตประจำวัน ส่วนมากในการจัดการศึกษาจะใช้กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ในการมองหาปัญหา จะทำให้ผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เพราะทำให้ผู้เรียนรู้ถึงความเป็นไปได้และข้อจำกัดของวิธีการทางคณิตศาสตร์ และรู้ว่าสถานการณ์ใดมีความเหมาะสมในการนำวิธีการทางคณิตศาสตร์ไปใช้และสถานการณ์ใดไม่เหมาะสมหรือมีข้อจำกัดในการนำความรู้ไปปรับใช้ จนทำให้ผู้เรียนตระหนักถึงคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์ ประการที่สอง ขั้นสุดท้ายในการคิดค้นคณิตศาสตร์ของนักคณิตศาสตร์คือการสร้าง

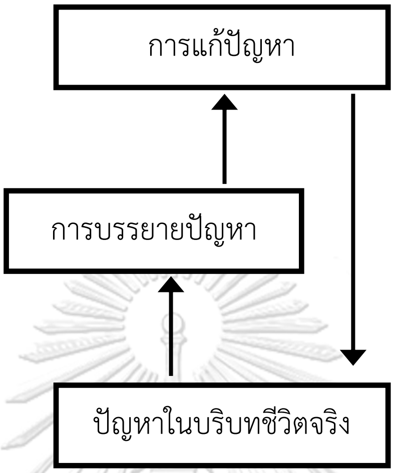
ความเป็นแบบแผนโดยการสร้างสัจพจน์ (axiomatising) ซึ่งขั้นนี้ไม่ควรเป็นจุดเริ่มต้นในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การเริ่มต้นจากสัจพจน์เป็นสิ่งที่สวนทางกับกระบวนการที่นักคณิตศาสตร์ได้มาซึ่งข้อสรุป การจัดการศึกษาคณิตศาสตร์ควรใช้การคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมผ่านการได้รับคำแนะนำ (guided reinvention) สิ่งที่สำคัญคือผู้เรียนจะได้เรียนรู้และได้รับประสบการณ์โดยตรง จึงกล่าวได้ว่าการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมีความแตกต่างจากการสอนแบบดั้งเดิมที่การเรียนการสอนเริ่มต้นจากสิ่งที่เป็นนามธรรมไปสู่การประยุกต์ใช้ที่เป็นรูปธรรม แต่ในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงนั้นมีขั้นตอนตรงข้ามกัน คือเป็นการสอนคณิตศาสตร์เริ่มต้นที่ปัญหาในบริบทชีวิตจริง และพัฒนาไปสู่สัญลักษณ์ที่เป็นแบบแผน การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนเข้ามามีส่วนร่วมในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมาย ก่อนการสร้างความเป็นแบบแผนในการแก้ปัญหา ผู้เรียนจะได้สำรวจและค้นพบคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นแบบแผนมากขึ้นผ่านลำดับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ปัญหาที่พบในบริบทชีวิตจริงของผู้เรียน จึงมีความเชื่อมโยงและใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา

กระบวนการแก้ปัญหาแบบดั้งเดิมที่อาศัยความรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผนเป็นพื้นฐานทางความคิดจะทำให้การแก้ปัญหาเริ่มจากการแปลงปัญหาในบริบทชีวิตจริงเป็นปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ โดยใช้ข้อความหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ จากนั้นจึงแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์โดยนำความรู้คณิตศาสตร์มาใช้ แล้วจึงแปลงคำตอบเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่บริบทชีวิตจริง Gravemeijer (1997) บางครั้งคำตอบในทางคณิตศาสตร์ที่ได้อาจไม่สอดคล้องกับปัญหาในบริบทชีวิตจริง เพราะการใช้แบบแผนหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นจุดเริ่มต้นในการแก้ปัญหา อาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของข้อมูลระหว่างการแปลงปัญหาชีวิตจริงสู่แก้ปัญหาในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ หรือขณะที่แปลงคำตอบเชิงคณิตศาสตร์กลับสู่การแก้ปัญหาและปรับใช้ในชีวิตจริง สิ่งที่กล่าวมาข้างต้นนี้จึงเป็นข้อจำกัดที่อาจเกิดขึ้นได้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการดั้งเดิม



ภาพที่ 1 กระบวนการแก้ปัญหาโดยอาศัยความรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผน (Gravemeijer, 1997)

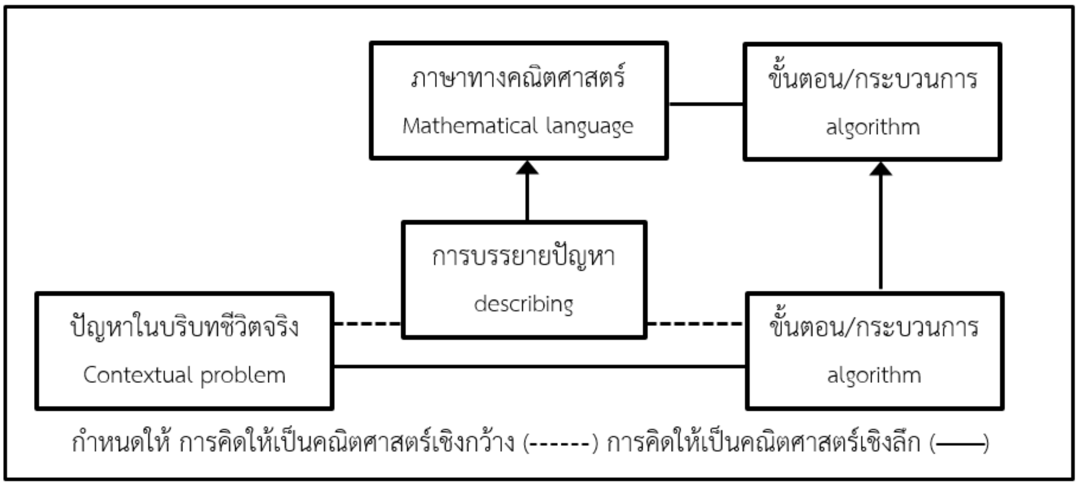
ในขณะที่กระบวนการแก้ปัญหาเชิงบริบทจริงจะยึดปัญหาเป็นหลัก เน้นการทำความเข้าใจปัญหาและเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหา เปิดโอกาสในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาปรับใช้ในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง จนทำให้ผู้เรียนสามารถสรุปข้อค้นพบและนำไปปรับใช้ในการแก้ปัญหาบริบทชีวิตจริงได้ในสถานการณ์ต่าง ๆ



ภาพที่ 2 กระบวนการแก้ปัญหาเชิงจริง (Gravemeijer, 1997)

กระบวนการแก้ปัญหาในบริบทชีวิตจริงเป็นการมองปัญหาเป็นสำคัญโดยเริ่มจากการทำความเข้าใจและบรรยายปัญหาในบริบทชีวิตจริงให้มีความเป็นแบบแผนมากขึ้น ซึ่งการบรรยายปัญหาที่อาจไม่สามารถให้คำตอบได้โดยทันที แต่เป็นการทำปัญหาให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น เพื่อสะท้อนถึงความสัมพันธ์และเน้นสิ่งที่เป็นใจความสำคัญหลักและรองให้เด่นชัดขึ้นด้วยการระบุความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา อาจมีการสร้างสัญลักษณ์ขึ้นเพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่มีความเป็นแบบแผนมากขึ้นในขั้นตอนต่อไปจะเป็นการแปลงคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหากลับไปสู่บริบทชีวิตจริง ซึ่งสามารถแปลงคำตอบกลับไปสู่บริบทชีวิตจริงได้ง่าย เนื่องจากสัญลักษณ์ที่ใช้ในการจำลองปัญหาและแก้ปัญหาเป็นสัญลักษณ์ที่มีความหมายและผู้เรียนสร้างขึ้นเอง เมื่อผู้เรียนได้รับการฝึกฝนอย่างต่อเนื่องจะส่งผลให้ผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้และทักษะในการแก้ปัญหาสถานการณ์ต่าง ๆ ได้ นอกจากนี้ลักษณะของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพื่อการแก้ปัญหาสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ได้แก่ การคิดที่ใช้กลยุทธ์แบบไม่เป็นทางการในการอธิบายและดำเนินการแก้ปัญหาจากสถานการณ์หรือบริบทที่กำหนดให้ เป็นการคิดจากชีวิตจริงไปสู่โลกของสัญลักษณ์พื้นฐาน ที่อาจเรียกได้ว่าเป็น**การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้าง (horizontal mathematization)** อีกลักษณะหนึ่งคือ กระบวนการที่ผู้เรียนใช้กลยุทธ์ที่ไม่เป็นทางการในการแก้ปัญหาโดยใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ หรือ นำกลยุทธ์ที่ไม่เป็นทางการมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ เป็นการเรียนรู้ขั้นตอน วิธีการภายในโลกของสัญลักษณ์ ซึ่งเรียกว่า **การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึก (vertical mathematization)** นอกจากนี้

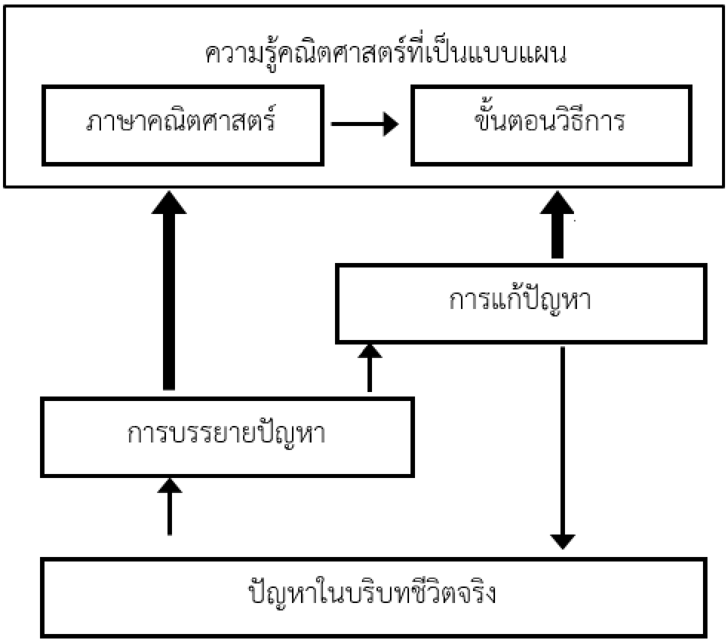
Freudenthal กล่าวเพิ่มเติมว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึกไม่สามารถแยกออกจากกันได้อย่างชัดเจน (Treffers, 1987 อ้างถึงใน Barnes, 2004; Freudenthal, 1991 อ้างถึงใน ธัญพิมล จันทร์นุ่ม, 2556) สอดคล้องกับแผนภาพการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึกที่ Gravemeijer (1994 อ้างถึงใน Barnes, 2004) ได้นำเสนอไว้



ภาพที่ 3 การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึก (Gravemeijer, 1994 อ้างถึงใน Barnes, 2004)

ก่อนแก้ปัญหา ผู้เรียนจำเป็นต้องมองและทำความเข้าใจปัญหาเพื่ออธิบายปัญหา นำไปสู่การหาขั้นตอน กระบวนการในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง ซึ่งเป็นการคิดแบบเชิงกว้าง ในขณะเดียวกัน ผู้เรียนได้ใช้ความรู้และความคิดเชิงลึกเพื่อสร้างภาษาทางคณิตศาสตร์ ในการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึกแบบทางการนี้มีข้อควรคำนึงถึง คือ หากผู้เรียนได้เข้าสู่กระบวนการเรียนรู้โดยที่ไม่ผ่านกระบวนของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้าง อาจทำให้ผู้เรียนไม่ได้นำขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาที่เคยเรียนมาบางขั้นตอนมาใช้ จนทำให้ผู้เรียนขาดความรู้หรือทักษะในการเลือกใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหา (Barnes, 2004) และในการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้าง หากขาดการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึกไป ผู้เรียนอาจไม่เข้าใจในกระบวนการและไม่สามารถนำสิ่งที่ได้เรียนรู้ไปปรับใช้ในบริบทปัญหาอื่นได้ ซึ่งสอดคล้องกับ Freudenthal ที่กล่าวว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึกมีความสัมพันธ์กันจนไม่สามารถแยกออกจากกันได้อย่างชัดเจน ด้วยความเป็นนามธรรมของวิชาคณิตศาสตร์ การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึกเป็นสิ่งที่สำคัญในการแก้ปัญหา อันนำมาสู่กระบวนการเรียนรู้การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ขณะเดียวกัน Gravemeijer (1994 อ้างถึงใน ธัญพิมล จันทร์นุ่ม, 2556) แสดงแผนภาพให้เห็นถึงกระบวนการคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม (process of reinvention) ที่เห็นว่าการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึกสามารถใช้ในการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ให้แก่ผู้เรียนได้ ซึ่งสอดคล้องกับภาพที่ 3 การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึก (Gravemeijer, 1994 อ้างถึงใน Barnes, 2004) ที่กล่าวมาข้างต้น

กระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียนควรเริ่มต้นจากครูนำเสนอบริบทปัญหา โดยใช้การจัดกิจกรรมในแบบการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างที่ผู้เรียนอาจจะใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบไม่เป็นทางการหรือเป็นทางการในการบรรยายปัญหาที่ได้จากการทำความเข้าใจ จากนั้นผู้สอนดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ เช่น ให้ผู้เรียนแก้ปัญหาเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับข้อมูลที่ผู้เรียนนำเสนอร่วมกับการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึก และขั้นตอนสุดท้ายที่สำคัญคือ การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนอธิบายวิธีการแก้ปัญหาหรือกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาเพื่อนำไปใช้ในบริบทปัญหาอื่น ๆ ผลลัพธ์ที่ได้คือผู้เรียนจะได้ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาและเข้าใจในกระบวนการแก้ปัญหาด้วยการประยุกต์ใช้ความรู้ที่ได้เรียนรู้มา และผู้เรียนจะสามารถนำความรู้ไปปรับใช้ได้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ด้วยตนเอง



ภาพที่ 4 กระบวนการเรียนรู้การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (Gravemeijer, 1997 อ้างถึงใน Fauzen, 2002)

จากความเป็นมาของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง จะพบว่า จุดเริ่มต้นของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาจากสถาบัน Freudenthal มองว่ากระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนควรเริ่มต้นจากการกิจกรรมในการแก้ปัญหาในชีวิตจริงที่มีความเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการมองปัญหาเชิงรูปธรรม พัฒนาการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้างและเชิงลึก เพื่อให้ผู้เรียนนำพื้นฐานการพัฒนาภาษาทางคณิตศาสตร์ จนนำไปสู่การสร้างข้อสรุปและมโนทัศน์ที่เป็นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม ซึ่งทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และแก้ปัญหาด้วยตนเอง มีโอกาสได้ใช้ความรู้ ประสบการณ์ และศักยภาพในตนเองเพื่อเกิดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ

1.2 หลักการของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงหรือการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Freudenthal คือ กิจกรรมการแก้ปัญหาโดยการมองหาปัญหาและการสร้างเนื้อหาวิชา ซึ่งการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการหลักของการศึกษาคณิตศาสตร์ มีจุดเน้นที่สำคัญ 2 ประการ ได้แก่ **ประการแรก** คณิตศาสตร์ต้องเชื่อมโยงกับชีวิตจริง (mathematics must be connected to reality) สถานการณ์ปัญหาที่เชื่อมโยงและสอดคล้องกับคณิตศาสตร์ไม่เพียงหมายถึงการเชื่อมโยงกับโลกแห่งความเป็นจริงกับคณิตศาสตร์ แต่รวมถึงสถานการณ์ปัญหาจริงตามความรู้สึกของผู้เรียนที่เป็นการทำให้คณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่อยู่ใกล้ชิดกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันของผู้เรียน อีกทั้งสถานการณ์ปัญหาสามารถทำให้มองเห็นถึงการประยุกต์ใช้หรือมองเห็นแบบจำลองในการแก้ปัญหาได้ (De lange, 1996 อ้างถึงใน Zukardi, 2002) ส่วน**ประการที่สอง** คือ คณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมของมนุษย์ (mathematics as human activity) การเรียนคณิตศาสตร์ช่วยนำความคิดของมนุษย์ เกิดการคิดค้นสิ่งที่เป็นนามธรรมโดยได้รับการแนะนำ (guided reinvention) เพื่อช่วยชี้ทิศทางและช่วยให้ผู้เรียนสามารถนำประสบการณ์มาเทียบกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่คล้ายคลึงกันได้ ซึ่งการคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม (reinvention) คือขั้นตอนในกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียน และเป็นแรงบันดาลใจหรือแรงกระตุ้นที่สำคัญที่ทำให้เกิดกระบวนการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการได้ โดยวิธีการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการของผู้เรียนนั้น บางครั้งสามารถนำไปสู่วิธีการแก้ปัญหาที่เป็นทางการมากยิ่งขึ้นได้ จากจุดเน้นที่สำคัญ 2 ประการ ตามแนวคิดของ Freudenthal นำมาสู่หลักการซึ่งจะเป็นแนวทางในการออกแบบการจัดการเรียนรู้ ดังที่ Gravemeijer and Terwel (2000) กล่าวถึง หลักการสำคัญของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงตามแนวคิด ซึ่งประกอบด้วยหลักการสำคัญ 3 ประการ ได้แก่

1. การคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับการแนะนำ (Guided Reinvention) เนื่องจากผู้เรียนควรได้รับประสบการณ์จากกระบวนการคณิตศาสตร์ที่คล้ายคลึงกับสิ่งที่นักคณิตศาสตร์คิดค้นขึ้น การจัดกิจกรรมการเรียนรู้จึงเน้นที่กระบวนการเรียนรู้ที่ผู้เรียนได้รับประสบการณ์จากสถานการณ์จริง แต่มีการได้รับคำแนะนำและอำนวยความสะดวกจากครูผู้สอนเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการ ผู้เรียนควรได้รับโอกาสในการคิดค้นคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นแบบแผนมากขึ้น กระบวนการเรียนรู้ควรเน้นที่กระบวนการมากกว่าผลลัพธ์ของการคิดค้นมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ครูควรศึกษาทฤษฎีหรือหลักการของคณิตศาสตร์ก่อน เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นของแรงบันดาลใจในการเรียนรู้วิธีการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการของผู้เรียน ในขณะที่กระบวนการในการแก้ปัญหาของผู้เรียนจะถูกพัฒนาให้เป็นขั้นตอนที่เป็นแบบแผนมากขึ้น จึงจำเป็นต้องใช้ปัญหาในบริบทชีวิตจริงที่มีความเหมาะสมและมีขั้นตอนการแก้ปัญหาที่หลากหลายวิธี และที่สำคัญคือคำแนะนำจากครูผู้ส่วนมีความสำคัญต่อการเรียนรู้อย่างมีทิศทางและถูกต้องของผู้เรียน

2. การสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน (Didactical Phenomenology) ดังที่ Freudenthal (1991) ได้กล่าวถึงความหมายของการสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียนว่าเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์กับการเรียนรู้ที่นำไปสู่มโนทัศน์นั้น ๆ สิ่งที่สำคัญคือการตีความเชิงคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ในการให้เหตุผลและการคิดคำนวณ การแก้สถานการณ์ที่มีหัวข้อเรื่องทางคณิตศาสตร์ซ่อนอยู่ จะช่วยให้ค้นพบการประยุกต์ใช้ความรู้ให้มีความเหมาะสมต่อสถานการณ์ อันจะนำมาซึ่งการพัฒนาการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ โดยจุดมุ่งหมายของหลักการข้อนี้ คือ การหาสถานการณ์ปัญหาที่มีความเฉพาะเจาะจงที่สามารถนำมาใช้ในการสรุปนัยทั่วไปได้ และหาสถานการณ์ที่สามารถนำไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพื้นฐานของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึก หลักการสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน ผู้สอนต้องให้แนวทางและกิจกรรมการเรียนรู้ที่สนับสนุนกิจกรรมรายบุคคลและการอภิปรายทั้งชั้นเรียน ในการเรียนคณิตศาสตร์ ผู้ออกแบบการสอนต้องเสนอสถานการณ์ปัญหาจากบริบทชีวิตจริงที่มีความหมายแก่ผู้เรียน เพราะปัญหาจากบริบทชีวิตจริงจะช่วยสร้างและกระตุ้นกระบวนการเรียนรู้

3. แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นโดยผู้เรียนเอง (Self-developed Model) จุดมุ่งหมายเบื้องต้นของการใช้แบบจำลองคือการส่งเสริมผู้เรียนให้สร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์โดยเริ่มต้นจากมุมมองของตนเองไม่ใช่จากมุมมองของผู้เชี่ยวชาญ เนื่องจากบทบาทของแบบจำลองที่สร้างขึ้นเองจะทำหน้าที่เป็นตัวเชื่อมระหว่างความรู้ที่ไม่เป็นทางการและคณิตศาสตร์ที่เป็นทางการ การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ใช้และพัฒนาแบบจำลองด้วยตนเองในการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งแบบจำลองที่สร้างขึ้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้ ในช่วงแรกผู้เรียนจะพัฒนาแบบจำลองของสถานการณ์ขึ้นตามความคุ้นเคย หลังจากนั้นกระบวนการสร้างแบบแผน แบบจำลองที่ผู้เรียนได้เรียนรู้จะถูกพัฒนาให้มีความซับซ้อนหรือเป็นแบบแผนมากขึ้น ซึ่งเรียกว่าเป็นการเปลี่ยนจาก model of เป็น model for ตัวอย่างของแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตารางสมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

การพัฒนาแบบจำลองตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง เกิดขึ้นจากการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการของผู้เรียนในช่วงต้น โดยแบบจำลองถูกสร้างขึ้นเพื่อส่งเสริมวิธีการแก้ปัญหาที่สอดคล้องกับวิธีการแก้ปัญหาในสถานการณ์เฉพาะ จากนั้นเมื่อผู้เรียนได้รับประสบการณ์ที่คล้ายคลึงกับกระบวนการแก้ปัญหา การเลือกวิธีแก้ปัญหาของผู้เรียนจะได้รับอิทธิพลจากลักษณะเฉพาะทางคณิตศาสตร์ของสถานการณ์ปัญหา ซึ่งบทบาทของแบบจำลองจะมีการเปลี่ยนแปลงไป เนื่องจากแบบจำลองจะมีลักษณะทั่วไปมากขึ้น และท้ายที่สุดแบบจำลองกลายเป็นแบบจำลองที่มีความเป็นเอกลักษณ์ในตัวเองหลังจากที่ผ่านกระบวนการทำให้เป็นรูปธรรมแล้ว ความสำคัญของแบบจำลองมีมากขึ้นในฐานะของการเป็นพื้นฐานในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์

มากกว่าเป็นการนำเสนอปัญหาในบริบทชีวิตจริง จากการศึกษาหลักการสำคัญของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า หลักการสำคัญของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ประกอบด้วยหลักการสำคัญ 3 ประการ คือ 1) การคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับการแนะนำ 2) การสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน 3) แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นโดยผู้เรียนเอง

นอกจากนี้ การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงสามารถสะท้อนมุมมองให้เห็นว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นรายวิชาหนึ่งที่ผู้เรียนจะสามารถเรียนรู้ถึงความหมาย ความสำคัญ วิธีการนำไปใช้ในชีวิตประจำวันของคณิตศาสตร์ว่าเป็นไปอย่างไร และผู้สอนควรสอนคณิตศาสตร์อย่างไร (Marja van den Heuvel-Panhuizen, 2000) มุมมองเหล่านี้สามารถสะท้อนออกมาในลักษณะของหลักการสำคัญได้ 6 ประการ ดังต่อไปนี้

1. หลักการของการจัดกิจกรรม (activity principle) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงจะอาศัยแนวการคิดของกระบวนการเรียนรู้จากการปฏิบัติ เนื่องจาก ผู้เรียนจะสามารถเรียนรู้ได้ดีที่สุดเมื่อผู้เรียนได้ลงมือทำด้วยตนเอง หรือมีส่วนร่วมในการพัฒนาวิธีการขั้นตอนทางคณิตศาสตร์และทำความเข้าใจด้วยตัวผู้เรียนเอง

2. หลักการของชีวิตจริง (reality principle) มุ่งเน้นให้ผู้เรียนเรียนรูปและประยุกต์ใช้ความรู้คณิตศาสตร์ให้ตรงตามวัตถุประสงค์ เมื่อผู้เรียนพบเป็นปัญหาในบริบทที่อยู่ในชีวิตจริง ผู้เรียนจะสามารถพัฒนาวิธีการขั้นตอนทางคณิตศาสตร์และทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น ส่งผลให้ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจของตนเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่อยู่ในชีวิตประจำวัน

3. หลักการของระดับ (level principle) โดยธรรมชาติของผู้เรียนแต่ละคนมีระดับความสามารถที่แตกต่างกัน เช่นเดียวกันกับพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่อาจมีระดับความรู้ความเข้าใจในระดับที่แตกต่างกัน ตั้งแต่วิธีการหาความสัมพันธ์ของบริบทปัญหา การสร้างระดับตัวแปร การเข้าใจในหลักการและความสัมพันธ์ ซึ่งความรู้ความสามารถของผู้เรียนในระดับต่าง ๆ จะสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการดำเนินงานและการทำกิจกรรมร่วมกัน โครงสร้างเหล่านี้จะเป็นสิ่งที่เชื่อมโยงข้อมูล บริบทที่เกี่ยวข้องทางคณิตศาสตร์ และรูปแบบอย่างเป็นทางการของคณิตศาสตร์ โดยในอันดับแรกผู้เรียนจะต้องพัฒนากลยุทธ์ในการเชื่อมโยงบริบทอย่างใกล้ชิดจนกระทั่งสถานการณ์บริบทนั้นกลายเป็นสถานการณ์ทั่วไป เพื่อให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาอื่น ๆ ได้ และผู้เรียนได้ความรู้ทางคณิตศาสตร์แบบทางการมากยิ่งขึ้น จะเห็นได้ว่า จุดเน้นของหลักการจะเน้นให้ผู้เรียนทำความเข้าใจทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงหลักสูตรต่าง ๆ ให้ต่อเนื่องกัน โดยที่การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงนั้นจะเน้นไปที่ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่ได้เรียนรู้ก่อนหน้าและสิ่งที่จะเรียนรู้ต่อมา

4. หลักการบูรณาการ (inter-twinement principle) การจัดการศึกษาในโรงเรียนไม่สามารถแยกการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงออกจากการเรียนรู้แบบปกติได้ หากพิจารณาในเชิงลึก จะพบว่า การแก้ปัญหาในบริบทต่าง ๆ อาจจะต้องใช้วิธีการขั้นตอนและความรู้ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย สิ่งที่สำคัญคือการเชื่อมโยงกันระหว่างหลักสูตรและเนื้อหา หลักการนี้ไม่เพียงแต่ต้องอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างบทที่แตกต่างกันของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ แต่ยังต้องอาศัยความแตกต่างกันของเนื้อหาเรื่องอื่น ๆ ที่ครูผู้สอนต้องศึกษาและเตรียมการสำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้แก่ผู้เรียนด้วย

5. หลักการปฏิสัมพันธ์ (interaction principle) การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงถือว่าเป็นกิจกรรมทางสังคมที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้แลกเปลี่ยนแบ่งปันกลยุทธ์และผลงานของผู้เรียนกับเพื่อนคนอื่น ๆ โดยการฟังและพูดในสิ่งที่ตนเองคิด เพื่อปรับปรุงวิธีการในการแก้ปัญหาของตนเอง นอกจากนี้ยังทำให้เกิดการสะท้อนความคิด เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจและเห็นความสำคัญของการทำงานมากยิ่งขึ้น ดังนั้นจึงเห็นได้ว่าการเรียนการสอนในชั้นเรียนมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะสามารถวิเคราะห์ พิจารณาวิธีการแก้ปัญหาได้ด้วยวิถีของตน ยิ่งไปกว่านั้น แนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงต้องการให้ผู้เรียนทำงานร่วมกัน รู้จักปรับตัวให้เข้ากับผู้อื่นที่มีระดับความสามารถแตกต่างกัน ผู้เรียนสามารถหาวิธีการแก้ปัญหาในรูปแบบที่ตนเองสามารถทำได้อันสะท้อนให้เห็นถึงความแตกต่างของความสามารถและความรู้ความเข้าใจในผู้เรียนแต่ละคน

6. หลักการแนะแนวทาง (guidance principle) สิ่งที่สำคัญในกิจกรรมการเรียนรู้คือการสร้างความรู้และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวผู้เรียนเอง ในขณะที่ครูมีบทบาทสำคัญต่อกระบวนการที่ผู้เรียนจะได้รับความรู้ด้วยการแนะนำและส่งเสริมกระบวนการทางความคิด สนับสนุนให้เกิดการเรียนรู้ด้วยการสร้างสถานการณ์และสิ่งแวดล้อมที่เอื้อต่อกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียน ซึ่งสถานการณ์ที่ครูสร้างจะเป็นตัวแปรสำคัญในการให้ผู้เรียนได้สร้างความคิด การสะท้อนมุมมองวิธีการแก้ปัญหาของผู้เรียน ให้ผู้เรียนมีโอกาสในการคิดค้นวิธีการแก้ปัญหาใหม่ๆ ด้วยตนเอง

จากการศึกษาหลักการของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงพบว่ามีนักคณิตศาสตร์เสนอแนวคิดเกี่ยวกับหลักการการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงในหลายรูปแบบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของครูที่จะนำไปใช้ในการออกแบบการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนได้ค้นหาวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเอง อันจะนำไปสู่ประโยชน์สูงสุดแก่ผู้เรียนต่อไป

1.3 ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

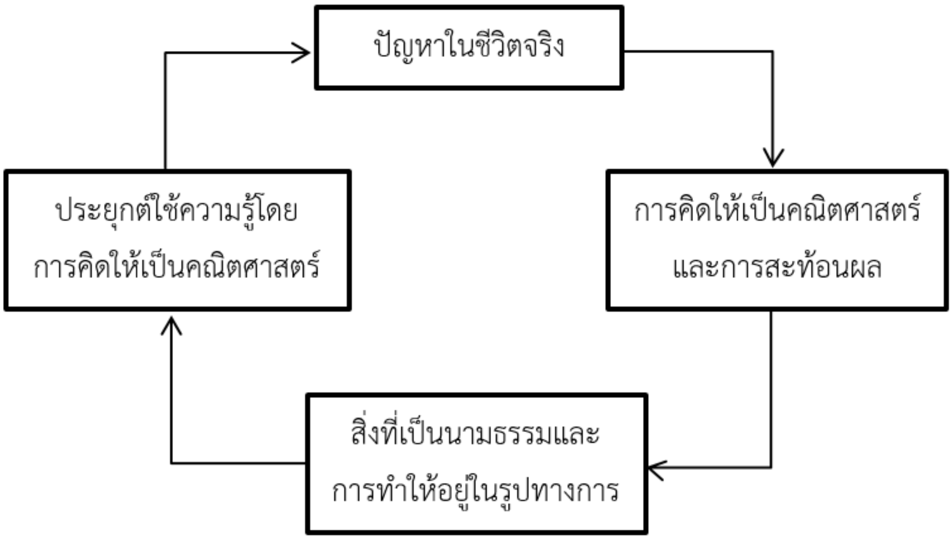
De Lange (1987 อ้างถึงใน Zulkardi, 2002) และ Gravemeijer (1994 อ้างถึงใน Fauzan, 2002) กล่าวว่า ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมีความสัมพันธ์กับระดับการเรียนรู้ของ Van Hiele การสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียนของ Freudenthal และการพัฒนาการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของ Treffer ตามระดับการเรียนรู้ของ Van Hiele มี 3 ระดับ (De Lange, 1996) คือ ระดับที่ 1 ผู้เรียนสามารถปรับใช้ความรู้ในรูปแบบที่ผู้เรียนคุ้นเคยได้ ระดับที่ 2 ผู้เรียนสามารถหาความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ และระดับที่ 3 ผู้เรียนสามารถนำความสัมพันธ์ที่แท้จริงไปใช้ประโยชน์ได้

การสอนโดยทั่วไปหรือแบบเดิมจะเริ่มต้นในระดับที่ 2 หรือระดับที่ 3 ในขณะที่การสอนที่สอดคล้องกับชีวิตจริงจะเริ่มต้นจากระดับที่ 1 คือการที่เริ่มต้นให้ผู้เรียนเรียนรู้และปรับใช้ความรู้ในสิ่งที่ผู้เรียนคุ้นเคย เพราะการเรียนรู้ควรเริ่มต้นบทเรียนที่มีความหมายสำหรับผู้เรียนจะเน้นการเชื่อมโยงระหว่างมโนทัศน์กับการเรียนรู้ที่นำไปสู่มโนทัศน์นั้น ๆ โดยครูใช้สถานการณ์ที่ใกล้ตัวผู้เรียน เนื่องจากสถานการณ์นั้น ๆ จะนำไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาที่เป็นพื้นฐานของการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึก ส่งเสริมกระบวนการเรียนรู้ของการคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับการแนะนำ (guided reinvention) และการพัฒนาการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (progressive mathematization) ซึ่งผู้เรียนจะสามารถพัฒนาจากระดับการเรียนรู้ระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งได้ สอดคล้องกับแนวคิดการพัฒนาระดับการเรียนรู้ควรใช้การพัฒนาการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ของ Treffer ที่ประกอบด้วย 2 ลักษณะ คือ 1) การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้าง เป็นกระบวนการที่ผู้เรียนใช้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการจัดการและแก้ปัญหาในสถานการณ์ชีวิตจริง และ 2) การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงลึก เป็นกระบวนการสร้างความรู้ (reorganization) ภายในระบบคณิตศาสตร์

จากการผสมผสานกันระหว่างระดับการเรียนรู้ของ Van Hiele (the three Van Hiele's levels of learning mathematics) การสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน (didactical phenomenology) ของ Freudenthal และการพัฒนาการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (progressive mathematization) ของ Treffer ทำให้ได้ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ที่ผู้สอนสามารถใช้เป็นแนวทางในการออกแบบสื่อการสอนและกระบวนการจัดการเรียนรู้ในชั้นเรียน ประกอบด้วย 5 ลักษณะ ดังนี้

1. การสำรวจสถานการณ์หรือบริบทในชีวิตจริง (phenomenological exploration or the use of contexts) เพื่อนำไปสู่การเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมเป็นจุดเริ่มต้นของการสอนคณิตศาสตร์ในแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงที่สร้างจากประสบการณ์ในชีวิตจริงของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในสถานการณ์ตามบริบท ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่ผู้เรียนคุ้นเคยในชีวิตจริง และควรเริ่มต้นด้วยแบบที่ไม่เป็นทางการ โดยที่ผู้เรียนจะได้พัฒนากระบวนการคิดจาก

สิ่งที่เป็นรูปธรรมไปสู่การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (conceptual mathematization) โดยผู้เรียนจะได้ลงมือสำรวจสถานการณ์ ค้นหาและระบุสิ่งที่เกี่ยวข้องทางคณิตศาสตร์ เพื่อให้เห็นภาพรวมของปัญหาและนำมาใช้เป็นแนวทางการพัฒนาเป็นแบบจำลองของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ ดังแสดงแผนภาพมโนทัศน์และการประยุกต์ใช้โดยการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ ในภาพที่ 5



ภาพที่ 5 มโนทัศน์และการประยุกต์ใช้โดยการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์
(De Lange, 1996 อ้างถึงใน Zulkardi, 2002)

2. การเชื่อมโยงปัญหาในบริบทชีวิตจริงและคณิตศาสตร์โดยใช้แบบจำลอง (the use of models or bridging by vertical instruments) เป็นการสร้างแบบจำลองของสถานการณ์ที่เชื่อมโยงสถานการณ์กับคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจในรูปของภาษา สัญลักษณ์ แบบรูป วิธีการแก้ปัญหาที่ถูกพัฒนาขึ้นโดยผู้เรียนเอง แบบจำลองที่ผู้เรียนสร้างขึ้นในรูปแบบที่ผู้เรียนคุ้นเคยในสถานการณ์นั้น ๆ เป็นตัวเชื่อมระหว่างความรู้แบบไม่เป็นทางการกับความรู้ที่เป็นทางการ และด้วยกระบวนการจะทำให้ผู้เรียนเห็นถึงลักษณะทั่วไปและเป็นแบบแผนมากยิ่งขึ้น แบบจำลองที่มีลักษณะเฉพาะที่ผู้เรียนได้เรียนรู้เองจะกลายเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จำลองขึ้นสำหรับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

3. การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแสดงความคิดผ่านการสร้างผลงานของผู้เรียน (the use of students own productions and constructions or contribution) ความอิสระทางความคิดของผู้เรียนทั้งในการสร้างแบบจำลอง ภาษา สัญลักษณ์หรือผลงานอื่น ๆ จะสะท้อนถึงกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียนตามที่ Streefland (อ้างถึงใน Zulkardi, 2002) ได้กล่าวไว้ว่า ผู้เรียนแสดงความคิดริเริ่มมากขึ้น เมื่อผู้เรียนได้รับการส่งเสริมให้สร้างวิธีการแก้ปัญหาและผลเฉลยด้วยตนเอง ซึ่งการสร้างสรรค์ผลงานอย่างอิสระ (free production) ที่ให้อิสระทางความคิดของผู้เรียน สามารถนำมา

เป็นส่วนสำคัญหนึ่งของการประเมินได้ ตัวอย่างเช่น ผู้เรียนเขียนเรียงความ ทำการทดลอง เก็บข้อมูล และเขียนข้อสรุป ออกแบบแบบฝึกหัดที่สามารถนำไปใช้ในการทดสอบได้ หรือออกแบบข้อสอบสำหรับผู้เรียนคนอื่นในห้องเรียน

4. การมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างการทำกิจกรรม (the interactive character of the teaching process or interactivity) ปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียนกับครู และผู้เรียนด้วยกันเองในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ นับว่าเป็นส่วนสำคัญในกระบวนการจัดการเรียนรู้ทั้งการอภิปราย การโต้แย้ง การมีส่วนร่วม การเรียนรู้แบบร่วมมือ การทำงานร่วมกันและการประเมินผล เป็นองค์ประกอบที่สำคัญในกระบวนการเรียนรู้แบบคอนสตรัคทีฟ (in a constructive learning process) ซึ่งการปฏิสัมพันธ์รูปแบบต่าง ๆ เช่น การอธิบาย การสนับสนุน การตัดสิน การแสดงการเห็นด้วยและการไม่เห็นด้วย การตั้งคำถามหลากหลายรูปแบบ และการสะท้อนความคิด เป็นเสมือนเครื่องมือสำคัญในกระบวนการเรียนรู้เพื่อการพัฒนาความรู้ที่ไม่เป็นทางการของนักเรียนนำไปสู่ความรู้ที่เป็นทางการ

5. การบูรณาการสาระการเรียนรู้อื่นหรือหน่วยการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (the intertwining of various learning strands or units) เนื่องจากการนำสาระการเรียนรู้หรือหน่วยการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่น ๆ มาสอดแทรกในกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง เนื่องจากการผสมผสานกันของสาระการเรียนรู้หรือหน่วยการเรียนรู้ หรือแนวคิดแบบองค์รวม (holistic approach) เป็นสิ่งสำคัญต่อการเรียนรู้ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง กล่าวคือ สาระการเรียนรู้ไม่ควรสอนแยกออกจากกันเป็นส่วน ๆ แต่ควรผสมผสานระหว่างสาระการเรียนรู้ซึ่งเป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาในชีวิตจริง ควรสอนให้เห็นความสัมพันธ์และความเชื่อมโยงระหว่างสาระการเรียนรู้หรือหน่วยการเรียนรู้ เนื่องจากการบูรณาการระหว่างสาระการเรียนรู้จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการแก้ปัญหา อีกทั้งหากสอนเพียงเชิงลึกอย่างเดียวจะทำให้ผู้เรียนประยุกต์ใช้ได้ยากเพราะเหตุผลหนึ่งที่ทำให้นักเรียนประยุกต์คณิตศาสตร์ได้ยากนั้นเพราะผู้เรียนคิดแบบโดยตรง ไม่เชื่อมโยงไปยังสาระการเรียนรู้อื่น ๆ แต่ในทางปฏิบัติการประยุกต์ใช้ความรู้ ผู้เรียนจำเป็นต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์หลายแขนงมาผสมผสานกันในการแก้ปัญหา ดังที่ Romberg (อ้างถึงใน Zulkardi, 2002: 30) ได้กล่าวไว้ว่า การสอนโดยใช้บริบทชีวิตจริงเพื่อนำไปสู่การเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม ครูควรให้โอกาสผู้เรียนในการพัฒนาความคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่ไม่เป็นทางการไปสู่คณิตศาสตร์ที่เป็นทางการ ใช้การเสนอตัวแทนความคิดจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนด การเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จากชีวิตจริงนั้นทำให้เกิดการพัฒนามโนทัศน์ ซึ่งการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมจากสถานการณ์รูปธรรม เรียกว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงมโนทัศน์ กระบวนการนี้ทำให้ผู้เรียนได้สำรวจสถานการณ์ ค้นหาและพิสูจน์ความสัมพันธ์ขององค์ประกอบทางคณิตศาสตร์ การเขียนแผนผังและมิติสัมพันธ์เพื่อที่จะค้นพบแบบ

แผนและพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ การสะท้อนความคิดและการลงความคิดเห็นทำให้ผู้เรียนจะพัฒนามโนทัศน์ที่สมบูรณ์มากขึ้น ซึ่งคาดหวังว่าผู้เรียนจะนำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ในเรื่องอื่น ๆ ในชีวิตจริงของนักเรียนเพื่อเป็นการเสริมสร้างและเพิ่มประสิทธิภาพของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ กระบวนการนี้ เรียกว่า การคิดให้เป็นคณิตศาสตร์แบบประยุกต์

จากการศึกษาแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงผู้วิจัยพบลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเมื่อพิจารณาตามระดับการเรียนรู้ของ Van Hiele (อ้างถึงใน De Lange, 1996) ครูผู้สอนสามารถนำแนวทางไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วย 5 ลักษณะ คือ 1) การสำรวจสถานการณ์หรือบริบทในชีวิตจริง 2) การเชื่อมโยงปัญหาในบริบทชีวิตจริงและคณิตศาสตร์โดยใช้แบบจำลอง 3) การเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแสดงความคิดผ่านผลงานและการสร้างของผู้เรียน 4) การมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างการทำกิจกรรม และ5) การบูรณาการสาระการเรียนรู้อื่นหรือหน่วยการเรียนรู้คณิตศาสตร์อื่นในการทำกิจกรรมการเรียนรู้

1.4 แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

1.4.1 หลักการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

นักการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์มีการนำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงไปปรับใช้ในการจัดการเรียนการสอนและนำเสนอหลักการที่หลากหลาย อย่างเช่น Treffers (1991) ได้เสนอหลักการเรียนรู้และการสอนคณิตศาสตร์ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงไว้ 4 ประการ ประการแรก คือ **หลักการสร้างและการทำให้เป็นรูปธรรม** (Constructing and Concretizing: phenomenological exploration by means of contexts) เพราะการเรียนคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมในการสร้างความรู้ ไม่ใช่เป็นการรับรู้ที่ถูกนำเสนอหรือถ่ายทอดจากครูผู้สอนเพียงฝ่ายเดียว การเรียนการสอนควรเริ่มต้นจากพื้นฐานที่เป็นรูปธรรมที่ครูผู้สอนมีหน้าที่ในการกระตุ้นกระบวนการเรียนรู้โดยการสร้างความรู้ด้วยผู้เรียนเอง แนวทางการจัดการเรียนรู้ประการแรกนี้จึงถือเป็นจุดเริ่มต้นในการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ประการที่สอง **หลักของการลำดับขั้นและโมเดล** (Levels and Models: bridging by vertical instrument) กระบวนการเรียนรู้ที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์หรือทักษะทางคณิตศาสตร์ในระยะยาว จะต้องมีกระบวนการที่สร้างสิ่งที่เป็นรูปธรรมให้แปลงไปสู่ความเป็นนามธรรมในระดับต่าง ๆ ประการต่อมา คือ **หลักการคิดสะท้อนและการให้งานพิเศษ** (Reflection and Special Assignment: pupils’own constructions and productions) การเพิ่มขึ้นระดับของกระบวนการเรียนรู้มักได้รับจากการส่งเสริมการเรียนรู้ผ่านการสะท้อนคิด ดังนั้นครูจำเป็นต้องให้ความสำคัญกับการสร้างสรรค์และผลิตผลงานของผู้เรียน เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้มีอิสระทางความคิด และกระตุ้นการเรียนรู้ของผู้เรียนในช่วงเวลาที่สำคัญและเหมาะสม เพื่อให้ผู้เรียนนำความรู้ไปปรับใช้ใน

ชีวิตประจำวัน ทั้งนี้ผู้เรียนควรได้รับการฝึกฝนและพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ประการสุดท้าย **หลักบริบทและปฏิสัมพันธ์ทางสังคม** (Social Context and Interaction: interactive instruction) การเรียนรู้เป็นกิจกรรมทางสังคมอย่างหนึ่ง เนื่องจากการถูกชี้นำและได้รับการกระตุ้นจากบริบททางสังคมวัฒนธรรมทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ซึ่งกันและกัน เช่น ในการทำงานกลุ่ม ส่งผลให้ผู้เรียนมีโอกาสได้แลกเปลี่ยนความคิดและข้อโต้แย้งเพื่อเรียนรู้จากกันและกัน ดังนั้นการศึกษาคณิตศาสตร์จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องมีการปฏิสัมพันธ์กันอย่างเป็นธรรมชาติของผู้เรียน

ในขณะเดียวกัน Van den Hervel-Panhuizen (2001) ได้นำเสนอหลักการในการจัดการเรียนรู้และการสอนคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกัน 6 ประการ ดังนี้ 1) **หลักการจัดกิจกรรม** (Activity Principle) ควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนเรียนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ผ่านการปฏิบัติกิจกรรม การเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาและแก้ปัญหานั้นด้วยตนเองด้วยวิธีที่ไม่เป็นทางการจะทำให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ 2) **หลักการสอดคล้องกับชีวิตจริง** (Reality Principle) ครูผู้สอนควรนำบริบทชีวิตจริงมาใช้ในการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เพราะความเป็นจริงเป็นแหล่งที่มาของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ดังนั้นการเลือกสถานการณ์ปัญหาในบริบทชีวิตจริงที่เหมาะสมเป็นสื่อหรือแหล่งการเรียนรู้ที่ดีให้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างเต็มศักยภาพและตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ 3) **หลักการตามลำดับขั้น** (Level Principle) ในการเรียนคณิตศาสตร์ ผู้เรียนต้องผ่านลำดับขั้นของความเข้าใจในระดับต่าง ๆ ตั้งแต่ความสามารถในการคิดค้นสถานการณ์ปัญหาในบริบทที่ไม่เป็นทางการ ไปจนถึงการสร้างวิธีลัดและการสร้างแบบแผน เพื่อให้ผู้เรียนรู้จักหลักการสำคัญและความสัมพันธ์ที่กว้างออกไป การผ่านไปสู่ลำดับขั้นต่าง ๆ เป็นความสามารถในการสะท้อนคิดในกิจกรรมครูที่จัดขึ้น 4) **หลักการเชื่อมโยงหรือบูรณาการ** (Inter-twinement Principle) ในการแก้ปัญหาในบริบทต่าง ๆ ต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายมาช่วยในการแก้ปัญหาเพราะความรู้คณิตศาสตร์ไม่ได้อยู่อย่างแยกส่วนกัน แต่เนื้อหาสาระในวิชาคณิตศาสตร์กลับมีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกัน ดังนั้นครูควรบูรณาการสาระการเรียนรู้ เพื่อให้ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงและปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย 5) **หลักการมีปฏิสัมพันธ์** (Interaction Principle) หลักการนี้สอดคล้องกับ Treffers ดังที่ได้ให้ความสำคัญข้างต้นว่าการเรียนคณิตศาสตร์เป็นกิจกรรมทางสังคม ดังนั้นในการจัดการเรียนรู้ควรให้ผู้เรียนได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนแนวคิดและวิธีการซึ่งกันและกัน ซึ่งจะนำไปสู่การพัฒนาระดับความรู้ความเข้าใจที่สูงขึ้น อีกทั้งยังเป็นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้และช่วยกันตรวจสอบสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ 6) **หลักการแนะนำ** (Guidance Principle) ครูให้ผู้เรียนได้มีโอกาสคิดค้นคณิตศาสตร์ โดยครูจัดสิ่งแวดล้อมและบรรยากาศในการเรียนรู้ให้เอื้อต่อกระบวนการสร้างความรู้ของผู้เรียน และแนะนำในสิ่งที่จำเป็นสำหรับการนำความรู้ไปปรับใช้ในการแก้ปัญหาของผู้เรียน

1.4.2 ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

การอำนวยความสะดวก จัดเตรียม ชี้แนะและประเมินผลการเรียนรู้เป็นบทบาทสำคัญตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงของครูผู้สอน โดย De Lange (1996) และ Gravemeijer (1997) ได้นำเสนอบทบาทของครูและผู้เรียนในกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่อยู่บนพื้นฐานของการจัดการศึกษาที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (realistic approach) ในแต่ละขั้นตอน เริ่มจาก 1) ครูยกตัวอย่างบริบทปัญหาที่เกี่ยวข้องเพื่อให้ผู้เรียนทำความเข้าใจกับปัญหาโดยการเชื่อมโยงความรู้และประสบการณ์ที่มี 2) ในระหว่างการทำกิจกรรม ครูอาจให้ผู้เรียนเขียนแนวทางในการแก้ปัญหาโดยอาจอยู่ในรูปของการวาดตารางบนกระดานหรือรูปแบบอื่น ๆ ซึ่งครูสามารถให้คำแนะนำผู้เรียนเป็นรายบุคคลหรือกลุ่มเล็ก ๆ ได้ตามความเหมาะสมและจำเป็น 3) ครูกระตุ้นให้ผู้เรียนอภิปรายเพื่อเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาของผู้เรียนแต่ละคน มุ่งเน้นให้ผู้เรียนหาวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสมและมีประสิทธิภาพจากวิธีการที่หลากหลาย 4) ครูให้ผู้เรียนหาวิธีการแก้ปัญหาด้วยตัวผู้เรียนตามระดับความสามารถของตนเอง ขึ้นอยู่กับความรู้และประสบการณ์ วิธีการที่ได้อาจมีรูปแบบเฉพาะของผู้เรียนแต่ละคน และ 5) ครูให้สถานการณ์ปัญหาในบริบทที่คล้ายคลึงกับปัญหาก่อนหน้า เพื่อให้ผู้เรียนนำสิ่งที่ได้เรียนรู้ไปปรับใช้ในการแก้ปัญหา

การพัฒนาบทเรียนตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงของ Streefland (1991) ที่ออกแบบบนพื้นฐานของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงในระดับห้องเรียน (classroom level) มุ่งเน้นการสร้างองค์ความรู้ผ่านกระบวนการคิดให้เป็นคณิตศาสตร์เชิงกว้าง โดยมีลักษณะคือใช้สื่อการเรียนรู้แบบเปิดที่เป็นสถานการณ์สำหรับการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสและเอื้อให้ผู้เรียนสร้างสรรค์ผลงานอย่างอิสระ หลังจากนั้นนำลักษณะของแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาประยุกต์เข้าไปในบทเรียน ตามขั้นตอนต่อไปนี้ 1) ครูใช้สื่อการเรียนรู้ (material) ที่เป็นสถานการณ์ในชีวิตจริงที่สะท้อนถึงแหล่งที่มาและบริบทของการประยุกต์ใช้ของตัวเนื้อหา โดยเริ่มต้นจากบริบทที่มีความหมาย ซึ่งทำให้เกิดการสร้างสื่อการเรียนรู้ (material) ทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีศักยภาพ 2) การบูรณาการระหว่างสาระการเรียนรู้อื่น ๆ เพื่อส่งเสริมการเชื่อมโยงเนื้อหาสาระและองค์ความรู้ที่จะเกิดขึ้นกับผู้เรียน 3) การสร้างเครื่องมือ (tools) ที่ใช้ในการแก้ปัญหา อาจจะเป็นในรูปของสัญลักษณ์ แผนภูมิ ตาราง และการสร้างแบบจำลองของสถานการณ์หรือบริบทที่กำหนดให้ โดยกระบวนการเรียนรู้จะเกิดขึ้นผ่านการทำงานร่วมกัน และ 4) การเรียนรู้โดยผ่านการสร้าง (constructions) ซึ่งได้มาจากการปรับปรุงจากการทำกิจกรรมของผู้เรียน โดยผู้เรียนจะได้มีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียนคนอื่น ๆ ผ่านกระบวนการอภิปราย ปรึกษาหารือ และทำงานร่วมกัน โดยสิ่งเหล่านี้เป็นการประยุกต์ใช้หลักการทางการศึกษาในด้านของการมีปฏิสัมพันธ์และผู้เรียนจะได้รับการสนับสนุนให้เรียนรู้ด้วยวิธีการของตัวเอง และได้รับการส่งเสริมในการทำกิจกรรมที่นำไปสู่การสร้างสรรค์ผลงานอย่างอิสระ (free productions)

ในขณะที่ Zulkardi (2002) ได้นำลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเข้าไปอยู่ในแผนการสอน โดยมีขั้นตอนในการสอนที่สอดคล้องกับ De Lange และ Streefland ดังนี้ 1) ครูให้บริบทปัญหาที่สัมพันธ์กับหัวข้อที่จะเรียนแก่ผู้เรียน 2) ครูเดินดูการทำงานของผู้เรียนเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่ม เพื่อดูความรู้หรือกลยุทธ์การแก้ปัญหาที่ผู้เรียนวางแผนไว้ ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะเป็นข้อมูลที่สำคัญในการอภิปรายในชั้นเรียน 3) ครูกระตุ้นให้ผู้เรียนเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาของผู้เรียนกับเพื่อน 4) ครูให้ผู้เรียนนำเสนอคำตอบและกระบวนการเรียนรู้หน้าชั้นเรียนเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน 5) ครูชี้แนะและส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน 6) ครูให้บริบทปัญหาอื่นที่คล้ายกับบริบทก่อนหน้า

จากลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงทั้ง 5 ประการของ Treffer ผู้เรียนจะเป็นผู้ทำกิจกรรมในชั้นเรียนเป็นหลัก ครูจะเป็นผู้ที่นำทางและชี้แนะให้ผู้เรียนร่วมกันอภิปรายสรุปบทเรียน (Daniel, 2014) ซึ่ง Yunita (2013 อ้างถึงใน Daniel, 2014) ได้วิเคราะห์บทบาทครูและผู้เรียน จำแนกตามลักษณะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง โดยขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมีดังนี้

ตารางที่ 1 *ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (Yunita, 2013 อ้างถึงใน Daniel, 2014)*

ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**บทบาทของครูผู้สอน**	**บทบาทของผู้เรียน**
ขั้นที่ 1 การทำความเข้าใจบริบทปัญหา (understanding contextual problem)		
ลักษณะที่ 1 การใช้บริบทปัญหา (use of context)	ครูปรับสภาพแวดล้อมในห้องเรียนให้เอื้อต่อการเรียนรู้และเกิดแรงจูงใจในการเรียนของผู้เรียน จากนั้นบอกวัตถุประสงค์และประโยชน์ที่จะได้รับ	ผู้เรียนเตรียมความพร้อมในการเรียนรู้ โดยจะต้องทราบข้อกำหนดเบื้องต้น รวมทั้งรับฟังคำอธิบายจุดประสงค์และประโยชน์ที่ได้จากการเรียนรู้
	ครูให้บริบทปัญหากับผู้เรียนและให้ผู้เรียนทำความเข้าใจ	ผู้เรียนจะต้องยอมรับและทำความเข้าใจบริบทปัญหา
	ครูอำนวยความสะดวกผู้เรียนและให้ความช่วยเหลือผู้เรียนในการทำความเข้าใจบริบทปัญหา	ผู้เรียนสังเกตการช่วยเหลือของครูเพื่อให้สามารถเข้าใจปัญหามากยิ่งขึ้น

ตารางที่ 1(ต่อ) ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (Yunita, 2013 อ้างถึงใน Daniel, 2014)

ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**บทบาทของครูผู้สอน**	**บทบาทของผู้เรียน**
ขั้นที่ 2 การแสดงวิธีการแก้ปัญหา (solving contextual problem)		
ลักษณะที่ 2 การใช้แบบจำลองในการพัฒนาความคิดให้เป็นคณิตศาสตร์ (use of model for progressive mathematization)	ครูช่วยเหลือและสนับสนุนให้ผู้เรียนบอกคำตอบมากยิ่งขึ้น โดยถามคำถาม เพื่อให้ผู้เรียนสร้างความรู้เกี่ยวกับแบบจำลองที่เหมาะสมในการแก้ปัญหาเท่าที่เป็นไปได้	ผู้เรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มและสร้างแบบจำลองของบริบทปัญหา
ขั้นที่ 3 การเปรียบเทียบหรือการอภิปรายคำตอบ (comparing or discussing answer)		
ลักษณะที่ 3 การสร้างผลงานด้วยตัวผู้เรียนเอง (students'contribution) ลักษณะที่ 4 การมีปฏิสัมพันธ์ (interactivity)	ครูเดินดูการทำงานของผู้เรียนและมีปฏิสัมพันธ์กับผู้เรียนเพื่อสังเกตและกระตุ้นการแก้ปัญหา	ผู้เรียนมีการอภิปรายและเปรียบเทียบคำตอบที่ได้ภายในกลุ่ม
	ครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอแบบจำลองและแนวทางในการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน	ผู้เรียนนำเสนอแบบจำลองและวิธีการแก้ปัญหาหน้าชั้นเรียน
	ครูเปิดโอกาสให้ผู้เรียนกลุ่มอื่น ๆ นำเสนอแบบจำลองที่แตกต่างกับเพื่อนที่นำเสนอ	ผู้เรียนนาเสนอแบบจำลองอื่น ๆ ที่แตกต่างกัน
	ครูเปิดโอกาสให้ผู้เรียนแสดงความคิดเห็นและเลือกแบบจำลองที่ถูกต้องและเหมาะสม	ผู้เรียนมีการแสดงความคิดเกี่ยวกับคำตอบของเพื่อนที่นำเสนอบนกระดาน และร่วมกันอภิปรายคำตอบที่ได้
	ครูกระตุ้นให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการสะท้อนคิดและประเมินผลเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์ที่เป็นทางการมากยิ่งขึ้น	ผู้เรียนรับฟังและร่วมแสดงความคิดเห็นในสิ่งที่ครูได้อธิบาย

ตารางที่ 1 (ต่อ) แนวทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง (Yunita, 2013 อ้างถึงใน Daniel, 2014)

ลักษณะเฉพาะของแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**บทบาทของครูผู้สอน**	**บทบาทของผู้เรียน**
ขั้นที่ 4 การสรุป (concluding)		
ลักษณะที่ 5 การบูรณาการ (intertwinement)	ครูให้ผู้เรียนสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้เรียนรู้จากสื่อการเรียนรู้ ให้ผู้เรียนประเมินจุดเด่นและจุดด้อยที่เกิดขึ้นของตนเอง และหาแนวทางการแก้ปัญหาเพื่อลดหรือกำจัดจุดด้อยของผู้เรียน เพื่อนำสิ่งที่เรียนรู้ไปปรับใช้ในปัญหาอื่น ๆ หรือในวิชาอื่น ๆ	ผู้เรียนสร้างข้อสรุปและสะท้อนสิ่งที่ได้เรียนรู้จากสื่อการเรียนรู้ มีการประเมินจุดเด่นและจุดด้อยที่เกิดขึ้นของตนเอง หาแนวทางการแก้ปัญหาและแนวทางในการนำความรู้ไปปรับใช้ในปัญหาอื่น ๆ หรือวิชาอื่น ๆ

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาถึงความเป็นมา หลักการ และแนวทางในทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง โดยวิเคราะห์แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงตามหลักการของ Gravemeijer และขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ของ Yunita สู่แนวทางในการออกแบบการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย ดังสรุปในตาราง 2

ตารางที่ 2 แนวทางในทางการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของ Yunita	**แนวทางในการออกแบบการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย**	**สอดคล้องกับหลักการของ Gravemeijer**
ขั้นตอนที่ 1 การทำความเข้าใจบริบทปัญหา	- **ครู**ให้สถานการณ์ปัญหาพร้อมข้อเสนอแนะอย่างไม่เป็นทางการ - **ผู้เรียน**เรียนรู้และทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา	**การสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน** (Didactical Phenomenology)
ขั้นตอนที่ 2 การแสดงวิธีการแก้ปัญหา	- **ครู**ใช้สถานการณ์ปัญหาจากบริบทชีวิตจริงกระตุ้นกระบวนการเรียนรู้ เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสร้างและใช้กระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยครูให้คำแนะนำ ช่วยเหลือ - **ผู้เรียน**พัฒนาแบบจำลองในการแก้ปัญหาจากมุมมองของตน (รูปธรรม) นำไปสู่การสร้างและพิสูจน์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (นามธรรม) ** ตัวอย่างแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง เป็นต้น*	**แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นโดยนักเรียนเอง** (Self-developed model)
ขั้นตอนที่ 3 การเปรียบเทียบหรืออภิปรายคำตอบ	- **ครู**ให้คำแนะนำผู้เรียนในการสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ ส่งเสริมการอภิปราย - **ผู้เรียน**ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันโดยการอภิปรายการเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหากับความรู้ ประสบการณเดิม สร้างกระบวนการในการแก้ปัญหา เพื่อสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ - **ครูและผู้เรียนร่วมกัน** ตรวจสอบสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ (ทั้งคำตอบและกระบวนการ)	**การคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับคำแนะนำ** (Guided Reinvention)

2. ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ระดับการรับรู้และกระบวนการเฉพาะทางความคิดอย่างหนึ่งที่สำคัญสำหรับมนุษย์เกี่ยวกับวัตถุที่ต้องมีการเชื่อมโยงสัมพันธ์ทางความคิดที่ไม่ใช่เพียงความคิดด้านใดด้านหนึ่งเพียงมิติเดียว คือ การรับรู้เชิงมิติสัมพันธ์ (Spatial cognition) ซึ่งการรับรู้ด้านมิติสัมพันธ์นั้นรวมไปถึงความจำ ความสามารถในการหมุน หรือการนำชิ้นส่วนต่าง ๆ ของวัตถุหนึ่งมารวมเป็นภาพใหญ่ (Rauscher & Zupan, 2000) ผู้ที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ดีจะมีความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ อย่างเชื่อมโยง สามารถเรียนรู้และวางแผนแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว หากมองในทางสรีระวิทยา สมองมนุษย์ประกอบด้วยเซลล์จำนวนมากที่เชื่อมโยงกันเป็นเครือข่ายร่างแห ทำหน้าที่ส่งสัญญาณเชื่อมต่อกับเซลล์สมองอื่น ๆ เป็นวงจร ซึ่งแต่ละวงจรเปรียบเสมือนการรับรู้ข้อมูลแต่ละส่วนในสมอง จึงอาจเรียกได้ว่าเป็นวงจรแห่งการเรียนรู้ เช่น การเรียนรู้จากการรับรู้ การคิด ความจำ การเรียนรู้จะเริ่มจากระดับง่ายจนถึงระดับที่ซับซ้อนที่มีเงื่อนไขในกระบวนการเรียนรู้ รวมถึงการทำความเข้าใจเชื่อมโยงเหตุการณ์ การใช้เหตุผล การสร้างความคิดนามธรรม และการพัฒนาทักษะต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการเคลื่อนไหว ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ถือเป็นกระบวนการเชื่อมโยงของวงจรเซลล์ประสาทที่เป็นกลไกทางสมองทั้งสองซีกเชื่อมโยงประสานกันที่มีต่อการเรียนรู้ในทุกศาสตร์ โดยใช้กระบวนการมองเห็น การรับรู้ตำแหน่งมิติของวัตถุต่าง ๆ การจินตนาการเชื่อมโยงระหว่างพื้นที่ ซึ่งผู้ที่มีทักษะด้านมิติสัมพันธ์มักจะเห็นภาพโดยรวมได้อย่างชัดเจน โดยมนุษย์สามารถพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ได้ ดังที่ Baenninger and Newcombe (1995) กล่าวว่า ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ได้รับการพิจารณาว่าเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับการทำงานในชีวิตประจำวัน และการเรียนในหลายวิชาที่ต้องใช้ กราฟ ตัวเลข ภาพร่าง และความเข้าใจสิ่งเร้าทางการมองเห็น (Visual Stimuli) และยังกล่าวอีกว่า ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สามารถที่จะพัฒนาได้ด้วยการฝึก

2.1 ความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

นักการศึกษาและนักวิจัยได้ให้คำนิยามของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไว้หลายท่าน เริ่มต้นด้วย Thurstone (1958) ที่ได้ให้ความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ หมายถึง ความสามารถทางสมองด้านการรับรู้เกี่ยวกับรูปทรงเรขาคณิตที่ไม่มีการเคลื่อนที่ และการมองเห็นความสัมพันธ์ของรูปภาพเมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือหมุนภาพนั้นไปจากเดิม ส่วน Bennett, Seashore and Wesman (1967) ได้ให้ความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ว่า ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ หมายถึง ความเข้าใจของมนุษย์เกี่ยวกับมิติ ซึ่งเป็นความสามารถทางสมองที่จะช่วยให้มนุษย์เกิดจินตนาการและนึกเห็นภาพส่วนประกอบต่าง ๆ เมื่อแยกออกจากกัน สามารถมองเห็นเค้าโครง หรือ โครงสร้าง เมื่อเอาส่วนประกอบต่าง ๆ มาประกอบเข้าด้วยกัน รวมทั้ง

ทิศทางของสิ่งของต่าง ๆ รูปทรงของสิ่งของต่าง ๆ ที่เปลี่ยนแปลงไป สอดคล้องกับ Kali and Orion (1996) ที่กล่าวไว้ สรุปได้ว่า ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นความสามารถในการรู้เกี่ยวกับรูปร่าง ขนาด ทิศทางการเคลื่อนที่ การแยกออกจากกัน การซ้อนกันของสิ่งต่าง ๆ ผ่านการมองเห็นความสัมพันธ์ในมิติต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็น 2 มิติหรือ 3 มิติ ในขณะที่ Anastasi (1982) มองว่าความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ประกอบไปด้วย 2 องค์ประกอบที่แตกต่างกัน คือ การรับรู้มิติสัมพันธ์หรือ ความสัมพันธ์ของรูปทรงเรขาคณิต และการมองเห็นเมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่ง

ส่วนนักการศึกษาไทย ได้ให้ความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ไว้หลายท่าน ดังนี้

ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ หมายถึง ความสามารถในการสร้างมโนภาพ ทำให้เกิดจินตนาการเกี่ยวกับส่วนประกอบต่าง ๆ เมื่อแยกสิ่งเหล่านี้ออกจากกัน และเห็นเค้าโครงเมื่อนำสิ่งเหล่านั้นมาประกอบกัน ส่งผลให้มนุษย์เข้าใจถึงมิติต่าง ๆ ได้แก่ ขนาด รูปร่าง ความสูง–ต่ำ ใกล้–ไกล พื้นที่ ปริมาตร ซึ่งมีคุณค่ามากทางวิชาเรขาคณิต วาดเขียน แผนที่ และการฝีมือ ผู้ที่มีสมรรถภาพด้านนี้สูงเหมาะที่จะมีอาชีพเป็นสถาปนิก นักวางผังเมือง นักออกแบบ นักขับรถวิศวกรและงานตกแต่งต่าง ๆ (ทองหล่อ วิภาวิน, 2523) ในขณะเดียวกันความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นความสามารถในการจินตนาการหรือการมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปภาพในมิติต่าง ๆ มาประกอบเข้าด้วยกันและมองเห็นภาพที่เกิดจากการหมุน การเคลื่อนย้าย การบิด หรือ การพลิกรูปในลักษณะต่าง ๆ ได้ (ณัชชา กมล, 2542) และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ตามความหมายของนักการศึกษาอีกท่านหนึ่งหมายถึงความสามารถในการสร้างมโนภาพ มีความเข้าใจเกี่ยวกับรูปร่าง ขนาด ความสูงต่ำ พื้นที่ปริมาตร และมิติต่าง ๆ มองเห็นเค้าโครงเมื่อนำส่วนต่าง ๆ มาประกอบเข้าด้วยกัน รวมทั้งมองเห็นความสัมพันธ์ที่เกิดจากการซ้อนทับ หรือซ่อนอยู่ภายใน (สุจิรา มุสิกะเจริญ, 2542)

ขณะที่วิชัย วงษ์ใหญ่ (2542) ได้กล่าวถึง ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ว่าหมายถึงความสามารถในการสร้างภาพ 3 มิติ ที่มองเห็นรอบ ๆ ตัวให้เกิดขึ้นในใจของตนเองรับรู้เกี่ยวกับสี เส้น พื้นที่ รูปร่าง เนื้อที่ หรือความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ตลอดจนความสามารถที่จะมองเห็นและการแสดงออกในสิ่งที่ได้เห็น (วิชัย วงษ์ใหญ่, 2542) สอดคล้องกับความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มองเห็นการเป็นเหตุเป็นผลในมิติของสิ่งที่อยู่ในธรรมชาติเชื่อมโยงกับ ตัวเลข สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ มองเห็นถึงความสัมพันธ์ของสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น มองเห็นความสัมพันธ์ของการหาพื้นที่ที่นำความกว้างคูณความยาวที่ไม่ใช่สูตรสำเร็จแห่งการแทนค่า แต่มีมิติแห่งรูปทรงซ่อนอยู่นี่จะส่งผลถึงความฉลาดทางคณิตศาสตร์ที่เพิ่มขึ้นด้วย (อุดม เพชรสังหาร, 2550)

ดังนั้น ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial Ability) เป็นความสามารถในการมองเห็นความเชื่อมโยงสิ่งต่าง ๆ และสามารถจินตนาการมโนภาพที่มีความเชื่อมโยงกันให้เกิดขึ้นภายในใจได้พร้อมทั้งสามารถที่จะถ่ายทอดออกมาให้คนอื่นรับรู้ได้อย่างเป็นรูปธรรม (อุดม เพชรสังหาร, 2549) ความสามารถมิติสัมพันธ์นี้เป็นความสามารถด้านหนึ่งของสมองที่มีความสำคัญต่อการพัฒนา

ทรัพยากรของประเทศ จากการคาดคะเนของสำนักการบริการด้านการงานในสหรัฐอเมริกาพบว่าอาชีพที่ต้องการความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูงมีอยู่ 84 อาชีพ ถ้าหากสามารถพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์นี้ได้มากขึ้นจะเป็นผลดีต่อการพัฒนาของประเทศได้ส่วนหนึ่ง (ล้วน สายยศ, 2543) ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์นี้เป็นความสามารถที่จะส่งผลให้มนุษย์เข้าใจถึงมิติซึ่งทำให้มนุษย์เกิดจินตนาการจากการรับรู้ขนาด รูปร่าง ความสูง-ต่ำ ความใกล้-ไกล พื้นที่ และปริมาตรของวัตถุ ซึ่งความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สามารถพัฒนาได้ตั้งแต่ระดับปฐมวัย โดยจัดกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้เด็กได้ใช้สิ่งของต่าง ๆ อย่างชำนาญ การมีความคิดพื้นฐานเกี่ยวกับการเลื่อนและการหมุนวัตถุหรือสิ่งของนั้น คือพื้นฐานของการสำรวจมิติสัมพันธ์ของเด็ก ซึ่งการรับรู้เกี่ยวกับมิติสัมพันธ์นั้น สามารถพัฒนาได้ตั้งแต่ระดับปฐมวัย ดังที่วิชัย วงษ์ใหญ่ (2542) กล่าวว่าความสามารถทางมิติสัมพันธ์นี้เริ่มด้วยการที่ประสาทสัมผัสทั้ง 5 ด้าน สามารถรับรู้สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวเรา โดยเฉพาะอย่างยิ่งการรับรู้ด้านการเห็นปรับภาพการรับรู้โลกรอบตัวให้แหลมคมยิ่งขึ้น ตาจะทำหน้าที่แยกแยะสีรูปร่าง พื้นผิว ความลึก มิติ และความเกี่ยวพัน เมื่อความสามารถด้านนี้เริ่มพัฒนา ความประสานสอดคล้องของตา มือ และการควบคุมกล้ามเนื้อจะช่วยทำให้คนเราสามารถนำรูปร่างและสีที่เห็นนั้น มาจำลองหรือสร้างสรรค์ผลงานชิ้นใหม่ในรูปของสื่อต่าง ๆ ซึ่งความสามารถทางมิติสัมพันธ์นี้ สามารถเสริมสร้างและพัฒนาได้โดยการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ที่กระตุ้นจินตนาการ การสร้างสรรค์ และการใช้ความคิดอย่างอิสระ ให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ผ่านประสบการณ์ตรงและตามความถนัดของตน

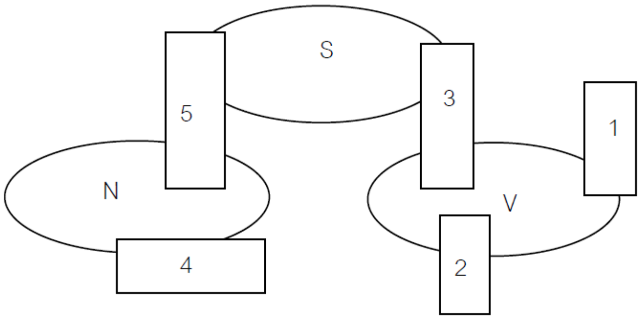
จากความหมายของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สามารถสรุปได้ว่าความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นความสามารถในการจินตนาการหรือการมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปภาพในมิติต่าง ๆ ทำให้เกิดความเข้าใจในเรื่องของมิติ อันได้แก่ ขนาด รูปร่าง รูปทรง ตำแหน่ง ทิศทาง สี พื้นผิว และปริมาตร

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

เนื่องจากความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นความสามารถในการรับรู้ด้านหนึ่ง ซึ่งเป็นความสามารถที่สืบเนื่องมาจากสมองของมนุษย์ในการจินตนาการถึงความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ การศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีความสามารถทางสมองที่นักจิตวิทยาได้ทำการศึกษาค้นคว้าจนเป็นที่ยอมรับและแพร่หลายที่มีด้วยกันหลายทฤษฎี ดังสรุปได้ต่อไปนี้

ทฤษฎีแรก คือ **ทฤษฎีหลายองค์ประกอบ** (Multiple – Factor Theory) ที่เป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางกันของนักจิตวิทยาชาวอเมริกัน เมื่อปี ค.ศ.1933 เธอร์สโตน (Thurstone) ได้ทำการศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับโครงสร้างทางสมอง โดยใช้หลักการสมัยใหม่ในขณะนั้นที่เรียกว่าการวิเคราะห์องค์ประกอบ (Factor analysis) มาใช้ในการแยกแยะความสามารถทางสมองของ

มนุษย์ออกเป็นส่วนย่อย ๆ ทำให้มีความเชื่อว่า ความสามารถทางสมองประกอบด้วยองค์ประกอบเป็นกลุ่มๆ หลายกลุ่มที่มีหน้าที่โดยเฉพาะ หรืออาจจะทำงานร่วมกันบางส่วน ซึ่ง Thurstone ได้วิเคราะห์ความสามารถทางสมองของมนุษย์ได้หลายอย่าง แต่ที่เห็นได้ชัดเจน และสำคัญๆ มีอยู่ 7 ด้าน คือ 1) องค์ประกอบด้านภาษา (Verbal Factor ใช้อักษรย่อว่า V) องค์ประกอบส่วนนี้ของสมองจะส่งผลให้รู้ถึงความสามารถด้านความเข้าใจในภาษาและการสื่อสารทั่ว ๆ ไป ผู้ที่มีองค์ประกอบด้านนี้สูง จะมีความสามารถในการอ่าน การทำความเข้าใจ การแปลความหมาย รู้ความสัมพันธ์ของคำและความหมายของคำได้เป็นอย่างดี 2) องค์ประกอบด้านความคล่องแคล่วในการใช้คำ (Word Fluency factor ใช้อักษรย่อว่า W) เป็นความสามารถที่จะใช้คำได้มากในเวลาที่จำกัด เช่น ให้หาคำที่ขึ้นต้นด้วยตัวอักษรที่กำหนดมาให้มากที่สุดในเวลาจำกัด เป็นต้น ความสามารถด้านนี้จะส่งผลให้มีความสามารถในการเจรจาโต้ตอบ และการประพันธ์ทั้งร้อยแก้วและร้อยกรองตอบโต้ทันทีทันใด ซึ่งต่างจากความสามารถข้อแรกที่มองความสามารถด้านภาษาในทางความคิดความเข้าใจทางภาษา ส่วนข้อนี้มองผลในด้านเจรจาเป็นสำคัญ 3) องค์ประกอบด้านจำนวน (Number Factor ใช้อักษรย่อว่า N) องค์ประกอบนี้ส่งผลให้มีมีความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ได้ดี สามารถมองเห็นความสัมพันธ์และความหมายของจำนวนได้อย่างแม่นยำ สามารถหาคำตอบจากการบวก ลบ คูณ หาร ได้อย่างคล่องแคล่ว 4) องค์ประกอบด้านมิติสัมพันธ์ (Space Factor ใช้อักษรย่อว่า S) ความสามารถด้านนี้จะส่งผลให้คนเข้าใจถึงขนาดและมิติต่าง ๆ อันได้แก่ ความสั้น-ความยาว ไกล-ใกล้ พื้นที่หรือทรวงทรงที่มีขนาดและปริมาตรแตกต่างกัน โดยเป็นความสามารถในการสร้างจินตนาการได้ โดยเห็นส่วนย่อยและส่วนผสมของวัตถุต่าง ๆ เมื่อนำมาซ้อนทับกัน สามารถสร้างความสัมพันธ์ของรูปทรงเรขาคณิตเมื่อมีการปรับหรือเปลี่ยนแปลงที่ตั้ง 5) องค์ประกอบด้านความจำ (Memory Factor ใช้อักษรย่อว่า M) เป็นความสามารถด้านความทรงจำเรื่องราว และมีสติระลึกรู้จนสามารถถ่ายทอดได้ ซึ่งอาจจะเป็นความจำในรูปแบบท่องจำหรือจำโดยอาศัยความสัมพันธ์ก็ตาม 6) องค์ประกอบด้านการรับรู้ (Perceptual factor ใช้อักษรย่อว่า P) องค์ประกอบของสมองด้านนี้ได้แก่ ความสามารถด้านเห็นรายละเอียด ความคล้ายคลึง หรือความแตกต่างระหว่างสิ่งของต่าง ๆ อย่างรวดเร็วและถูกต้อง 7) องค์ประกอบด้านเหตุผล (Reasoning Factor ใช้อักษรย่อว่า R) บางครั้งใช้คำว่า Induction หรือ General Reasoning องค์ประกอบนี้แสดงถึงความสามารถด้านวิจารณญาณในการหาเหตุหาผล ค้นคว้าหาความสำคัญ ความสัมพันธ์ และหลักการหลายที่สร้างกฎหรือทฤษฎี จากองค์ประกอบย่อยทั้ง 7 องค์ประกอบที่เทอร์สโตนจำแนกไว้ ถึงแม้ว่าแต่ละองค์ประกอบจะมีหน้าที่เด่นชัดในตัวเองอย่างไรก็ตามแต่ละองค์ประกอบมีการทำหน้าที่ที่เกี่ยวพันกันบ้าง ดังแสดงในตัวอย่างความสัมพันธ์ภายในของแบบทดสอบ 5 ชุด ที่ขึ้นอยู่กับ 3 องค์ประกอบ คือ V (Verbal) , N (Number) และ S (Spatial) ของทฤษฎีหลายองค์ประกอบ



ภาพที่ 6 แสดงความสัมพันธ์ภายในของแบบทดสอบ 5 ชุด ที่ขึ้นอยู่กับ 3 องค์ประกอบ
(Anne Anastasi, 1982: 367 อ้างถึงในล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ, 2541: 45)

จากภาพแสดงให้เห็นถึงความเชื่อมโยงกันของแบบทดสอบทั้ง 5 ชุดที่มีองค์ประกอบด้านภาษา องค์ประกอบด้านจำนวน และองค์ประกอบด้านมิติสัมพันธ์ที่ทำหน้าที่ในการเชื่อมโยง กล่าวคือ แบบทดสอบ 1, 2 และ 3 โดยมีองค์ประกอบด้านภาษา (Verbal Factor หรือ V) เป็นองค์ประกอบร่วม ในทำนองเดียวกัน สหสัมพันธ์ระหว่างแบบทดสอบสอบ 3 และ 5 มีองค์ประกอบด้านมิติสัมพันธ์ (Spatial หรือ S) เป็นองค์ประกอบร่วม และความสัมพันธ์ระหว่างแบบทดสอบ 4 และ 5 มีองค์ประกอบด้านตัวเลข (Number หรือ N) เป็นองค์ประกอบร่วม สิ่งที่น่าสนใจ คือ แบบทดสอบ 3 และ 5 มีองค์ประกอบซ้อนขึ้นมา คือ องค์ประกอบด้านมิติสัมพันธ์ ที่เชื่อมโยงระหว่างแบบทดสอบ 3 กับแบบทดสอบ 5 (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ, 2541)

ทฤษฎีต่อมา คือ **ทฤษฎีลำดับขั้นของสติปัญญา** (Hicrachical Theory) ที่มีเวอร์นอน (Vernon) ทอมสัน (Thomson) และเบิร์ด (Burt) กลุ่มนักจิตวิทยาชาวอังกฤษทำการวิจัยค้นคว้าต่อจากทฤษฎีสององค์ประกอบของสเปียร์แมนในปี ค.ศ. 1960 โดยได้แบ่งความสามารถหรือสติปัญญาทั่วไปเป็น 2 องค์ประกอบ คือ 1) ความสามารถทางการศึกษาและทางภาษา (Verbal – Education หรือ V:ed) เป็นองค์ประกอบด้านความสามารถในการใช้ภาษาและด้านการเรียน และสามารถแบ่งในระดับย่อย ได้แก่ ความสามารถด้านภาษา ความสามารถด้านตัวเลข และอาจแบ่งย่อยออกเป็นความสามารถเฉพาะเพิ่มเติมได้อีก 2) ความสามารถทางปฏิบัติทั่วไป (Practioal หรือ K : m) เป็นองค์ประกอบของความสามารถทางด้านการปฏิบัติและวิชาชีพ ได้แก่ การทำงานฝีมือ ความสามารถด้านเครื่องมือ การมองเห็นและเข้าใจความสัมพันธ์ของสิ่งของต่าง ๆ ที่เรียกว่า ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ความสามารถที่กล่าวมาเป็นความสามารถในกลุ่มย่อย ซึ่งแต่ละกลุ่มสามารถแบ่งออกเป็นความสามารถเฉพาะต่อไป สำหรับการสร้างแบบทดสอบตามทฤษฎีลำดับขั้นตอนสติปัญญา ผู้สร้างจึงควรเลือกระดับขั้นขององค์ประกอบตามจุดมุ่งหมายของแบบทดสอบ เนื่องจากแบบทดสอบบางชุดควรจะเลือกจะใช้หลายระดับขององค์ประกอบ (ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ, 2541)

อีกทฤษฎีที่สำคัญและเป็นที่แพร่หลายอย่างมาก คือ **ทฤษฎีพหุปัญญาของการ์ดเนอร์** (Theory of Multiple Intelligence) ของ Gardner (1983) (มัลลิกา พงศ์ปริตร, 2544) การ์ดเนอร์ได้ให้คำนิยามเชาว์ปัญญาว่าเป็นความสามารถในการแก้ปัญหาหรือสร้างผลงานที่มีค่าในกลุ่มวัฒนธรรมต่าง ๆ ในช่วงแรกเชาวน์ปัญญา แบ่งออกเป็น 7 ด้าน แต่หลังจากใช้เกณฑ์การตัดสินจำนวนมากจึงเพิ่มเติมอีก 2 ด้าน รวมทั้งหมด 9 ด้าน คือ 1) ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และจินตภาพ (Visual/Spatial Intelligence) คือ ความสามารถเข้าใจโลกซึ่งเราเห็นอยู่อย่างถูกต้อง ผู้มีความสามารถด้านนี้จะนำเสนอข้อมูลด้านมิติให้ออกมาเป็นภาพได้และมีพรสวรรค์อันเฉียบคมในการดึงภาพจากความคิดฝันมาทำให้ปรากฏ ศิลปินและนักออกแบบจะมีทักษะนี้ เพราะสามารถที่จะตอบสนองต่อภาพและมิติ สามารถนำสิ่งเหล่านั้นมาสร้างเป็นชิ้นงานศิลปะและการสร้างสรรค์สิ่งอำนวยความสะดวกในชีวิตประจำวัน 2) ความสามารถด้านวาจา/ภาษา (Verbal/Linguistic Intelligence) ความสามารถด้านนี้จะเกี่ยวข้องกับการใช้ภาษา บุคคลผู้มีความสามารถด้านนี้จะอ่อนไหวมากกับความหมายของคำและมีทักษะความสามารถในการใช้และเล่นกับคำ ในระดับโสตประสาท ผู้มีความสามารถด้านภาษาในขั้นสูง จะสามารถสื่อสารด้วยการฟัง พูด อ่าน เขียน และเชื่อมโยงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้ยังตระหนักถึงหน้าที่อันหลากหลายของภาษา โดยผู้อ่านหรือผู้ฟังรับรู้ถึงอำนาจของภาษาในการกระตุ้นอารมณ์ ความรู้สึกผ่านการประพันธ์ ซึ่งนักเขียน นักข่าว นักพูด ทนายความ พิธีกรและนักการเมืองจะมีความสามารถด้านนี้ 3) ความสามารถด้านตรรกะ/คณิตศาสตร์ (Logical/Mathematical Intelligence) ความสามารถด้านตรรกะ/คณิตศาสตร์จะรวมถึงความสามารถทั้งด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ นักคณิตศาสตร์มีความสนใจที่จะค้นคว้าและทำงานกับสิ่งที่เป็นนามธรรม สนุกกับการแก้ปัญหาที่ต้องสรรหาเหตุผลมาประกอบเพื่อสนับสนุนหลักการในการแก้ปัญหา ส่วนนักวิทยาศาสตร์จะได้แรงจูงใจจากความต้องการที่จะอธิบายทุกสิ่งให้เป็นรูปธรรม ผู้มีทักษะด้านตรรกะ/คณิตศาสตร์ในระดับสูง ได้แก่ กลุ่มวิศวกร นักฟิสิกส์ นักดาราศาสตร์ คอมพิวเตอร์โปรแกรมเมอร์ และนักวิจัย 4) ความสามารถด้านร่างกาย/การเคลื่อนไหว (Bodily/Kinesthetic Intelligence) ความสามารถด้านนี้จะขึ้นอยู่กับพรสวรรค์ของบุคคลในการควบคุมการเคลื่อนไหวทางร่างกายและความสามารถในการพลิกแพลงหยิบจับวัตถุต่าง ๆ ด้วยความคล่องแคล่ว สองสิ่งนี้อาจอยู่แยกกัน แต่คนส่วนใหญ่จะมีทั้งคู่นักประดิษฐ์และนักแสดงมักจะมีความสามารถทางด้านร่างกาย/การเคลื่อนไหวในระดับสูง เพราะร่างกายมีบทบาทสำคัญยิ่งต่ออาชีพ นอกจากนี้ยังรวมไปถึงนักเต้นรำ นักกีฬาและนักเล่นกายกรรม 5) ความสามารถด้านดนตรี/จังหวะ (Musical/Rhythmic Intelligence) Gardner มีมุมมองที่ว่า ผู้มีแววทางดนตรีนั้นมีระดับความสามารถที่แตกต่างกันและเป็นบุคคลที่แตกต่างกัน คือตั้งแต่คีตกวีผู้เชี่ยวชาญในการคิดทำนองดนตรีใหม่ ไปจนถึงนักฟังเพลงไร้ประสบการณ์ที่พยายามจะฟังเพลงกล่อมเด็กให้เข้าใจเราทุกคนล้วนมีความสามารถด้านดนตรีในระดับหนึ่ง ข้อแตกต่างคือบางคนมีทักษะนี้มากกว่าผู้อื่น หากไม่คำนึงถึง

ความสามารถขั้นสูงแล้ว ทุกคนมีความสามารถพอเพียงที่จะสนุกไปกับเสียงดนตรีอันประกอบไปด้วยระดับเสียง จังหวะ และลักษณะของเสียงดนตรีที่ผิดแผกกัน บุคคลผู้มีความสามารถด้านดนตรีสูงได้แก่ นักร้อง นักแต่งเพลง นักดนตรี วิทยากร และผู้เข้าใจลึกซึ้งและชื่นชอบในเสียงดนตรี 6) ความสามารถด้านการรู้จักตนเอง (Intrapersonal Intelligence) หัวใจของความสามารถประเภทนี้คือการเข้าใจความรู้สึกของตนเอง คนเหล่านี้จะเข้าใจระดับอารมณ์ของตนเองได้โดยสัญชาตญาณ สามารถระบุอารมณ์และใช้เป็นเครื่องมือควบคุมพฤติกรรมของตน Gardner มองว่าความสามารถชนิดนี้เป็นความสามารถที่นอกจากจะแยกแยะความรู้สึกที่ดีออกจากความรู้สึกเจ็บปวดได้แล้วยังสามารถใช้ในการตัดสินใจได้ว่าควรเข้าไปเกี่ยวข้องหรือควรถอนตัวออกจากสถานการณ์นั้น ตัวอย่างบุคคลในกลุ่มนี้ได้แก่ นักเขียนนวนิยาย ช่างคิด ผู้เชี่ยวชาญทางภูมิปัญญา นักจิตวิทยา หรือนักบำบัด บุคคลเหล่านี้ล้วนแล้วแต่เป็นผู้เข้าใจความรู้สึกของตนเองได้อย่างลุ่มลึก 7) ความสามารถด้านความสัมพันธ์กับผู้อื่น (Interpersonal Intelligence) ความสามารถนี้ต่างจากด้านการรู้จักตนเองซึ่งต้องมองลึกเข้าสู่ภายใน เนื่องจากในการรู้จักผู้อื่น เราจะต้องมองไปที่บุคคลที่อยู่ในสภาพแวดล้อมภายนอก ความสามารถพื้นฐานของคนกลุ่มนี้คือความสามารถในการเข้าใจผู้อื่น มีพรสวรรค์ในการสังเกตและเห็นความแตกต่างในหมู่คน สามารถเข้าใจร่วงรู้ถึงอารมณ์ ความรู้สึก แรงจูงใจและความตั้งใจของคนเหล่านั้น ตัวอย่างเช่น ในระดับธรรมดา ๆ เด็กเล็กจะรู้จักสังเกตและไวต่ออารมณ์ความรู้สึกของผู้ใหญ่รอบข้าง ถ้าเป็นระดับสูงที่ซับซ้อนขึ้นมา ผู้ใหญ่ที่มีทักษะนี้ จะสามารถอ่านใจผู้อื่นได้ว่าที่จริงแล้วต้องการอะไร แม้ผู้นั้นจะพยายามปกปิดก็ตาม บุคคลในกลุ่มนี้ ได้แก่ ผู้นำทางศาสนาและการเมือง พ่อแม่ ครู นักบำบัด และเจ้าหน้าที่แนะแนว 8) ความสามารถด้านธรรมชาติ (Naturalistic Intelligence) การปรับตัวเพื่อความอยู่รอดในสภาพแวดล้อมคือกุญแจสำคัญของความสามารถด้านนี้ เพราะเป็นการศึกษาทางวิทยาศาสตร์วิธีหนึ่ง ผู้มีความสามารถด้านธรรมชาติจะรู้จักและจำแนกชนิดของสัตว์และพืช รวมไปถึงการแยกแยะความแตกต่าง และจัดหมวดหมู่สิ่งต่าง ๆ ในธรรมชาติได้ดี (Gardner, 1995) บุคคลในกลุ่มนี้ได้แก่ นักเดินเท้าท่องเที่ยว นักพฤกษาศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ สัตวแพทย์ และเจ้าหน้าที่พิทักษ์อุทยานแห่งชาติ 9) ความสามารถด้านอัตภาวนิยม/จิตนิยม (Existential Intelligence) เป็นความสามารถในการเชื่อมโยงสิ่งต่าง ๆ เข้ากับภาพใหญ่หรือระดับมหภาค จนเห็นความงดงามของสรรพสิ่งต่าง ๆ ในโลก เชื่อมโยงการดำรงชีวิตของตนเองกับสิ่งที่ใหญ่กว่า สามารถรวบรวมสรุปรายละเอียด แล้วทำความเข้าใจถึง สิ่งที่ใหญ่กว่า เห็นถึงคุณค่าของการเกิดเป็นมนุษย์ เห็นถึงความงดงามของศิลปะ ใส่ใจกับการค้นหาความหมายในชีวิต พยายามมองหาความเชื่อมโยงระหว่างการเรียนรู้สิ่งย่อย ๆ เข้าเป็นภาพใหญ่ สนใจและชื่นชมกับวรรณคดี เรื่องเล่า อัตประวัติของคนต่างวัฒนธรรม รู้สึกเป็นอันหนึ่งอันเดียวกับครอบครัว เพื่อน ชุมชน รวมไปถึงชุมชนโลก ชอบเข้าไปเกี่ยวข้องกับประเด็นทางสังคมและการเมือง อาจเชื่อมโยงไปถึงปัญญาญาณในศาสนาพุทธและการพัฒนาด้านจิตวิญญาณอื่น ๆ (จันทร์เพ็ญ ชูประภาวรรณ, 2541)

นอกจากนี้ ทฤษฎีที่แสดงถึงระดับการรับรู้ด้านมิติสัมพันธ์ที่สำคัญ คือ **ทฤษฎีพัฒนาการด้านมิติสัมพันธ์** ของ Piaget and Inhelder (1896 อ้างถึงใน พรรณปพร จตุวีรพงษ์, 2555) ที่ได้แบ่งการรับรู้ทางด้านมิติสัมพันธ์ ออกเป็น 2 ระดับ ได้แก่ ระดับการรับรู้จากประสาทสัมผัส (Perceptual Level) และระดับการรับรู้จากการคิดมโนภาพ (Level of thinking or representation) ความสามารถดังกล่าวข้างต้น ถือว่าเป็นความสามารถพื้นฐานของการพัฒนาทางด้านมิติสัมพันธ์ เนื่องจากการที่มนุษย์จะเข้าใจในมิติได้ มนุษย์จะต้องเชื่อมโยงและเข้าใจความสัมพันธ์ของวัตถุก่อน ซึ่งการจะเข้าใจได้นั้นจำเป็นต้องลงมือปฏิบัติและใช้ประสาทสัมผัสในการรับรู้ เพื่อนำไปสู่การเชื่อมโยงการรับรู้กับการคิดมโนภาพ จนสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตนเองกับวัตถุได้อย่างลึกซึ้งมากขึ้น (พรรณปพร จตุวีรพงษ์, 2555; ประพิมพ์พักตร์ พละพงศ์, 2550) นอกจากนี้ระดับความสามารถในการรับรู้ทางด้านมิติสัมพันธ์ตามพัฒนาการของวัยเด็ก 3 ระดับ ดังต่อไปนี้ 1) ระดับพื้นฐานที่เรียกว่า Topological โดยเป็นพื้นฐานความสามารถในการรับรู้วัตถุที่อยู่ในตำแหน่งที่คงที่ เช่น การเรียงลำดับ การรับรู้รูปปิด การรับรู้วัตถุอยู่ข้าง ๆ กัน การรับรู้ความต่อเนื่อง และการรับรู้ถึงความเหมือนหรือความแตกต่างกันของวัตถุ 2) ระดับ Projective ซึ่งเป็นพัฒนาการในการคิดจินตนาการภาพภายในจิตใจโดยการพิจารณาจากความสัมพันธ์ที่มองเห็นได้ และ 3) ระดับที่สามารถถ่ายทอดความเข้าใจจากการมองวัตถุภายในสิ่งแวดล้อมรอบตัวที่มีอยู่จริง กำหนดเป็นระบบการคิดเพื่อการนำไปปรับใช้ หรือเรียกว่าระดับ Euclidean ที่เป็นความสามารถในการนำมโนภาพภายในใจต่าง ๆ มาเชื่อมโยงกับการเปลี่ยนแปลงของวัตถุ ทั้งการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง ทิศทาง และระยะทาง (พรรณปพร จตุวีรพงษ์, 2555)

ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีบทบาทที่สำคัญในการเรียนบทบาทหนึ่งที่มีมาตั้งแต่ช่วงคริสต์ศักราชที่ 1920 จนถึงปัจจุบัน ซึ่งจากที่ Hill, Corbett, and St Rose (2010) กล่าวว่า “ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไม่ใช่ความสามารถที่มีมาตั้งแต่กำเนิดแต่สามารถพัฒนาได้เช่นเดียวกับความสามารถด้านอื่น ๆ เช่น ความสามารถด้านกีฬา ความสามารถด้านภาษา ความสามารถด้านดนตรี” ดังนั้น ในการพัฒนาจำเป็นจะต้องพัฒนาโดยผ่านการฝึกฝนและความพยายาม ซึ่งการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ สามารถเริ่มพัฒนาได้ตั้งแต่อายุ 2 ปี และสามารถพัฒนาไปได้เรื่อย ๆ โดยการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ถูกแบ่งออกเป็น 3 ระดับ (Sorby & Wysocki, 2003) ได้แก่ **ระดับแรก**เป็นการพัฒนาในช่วงอายุ 2 ถึง 7 ปี ซึ่งเกี่ยวข้องกับทักษะเชิงมิติของภาพ 2 มิติที่มีการพิจารณาเพียงรูปร่างรูปทรง เพื่อให้ตระหนักได้ถึงรูปร่างใน 2 มิติของรูปเรขาคณิต และสามารถจัดการโดยการหมุน หรือปรับเปลี่ยนทิศทางของรูปร่าง 2 มิติในมิติต่าง ๆ ช่วงอายุ 7 ถึง 12 ปี เป็นการพัฒนาเข้าสู่**ระดับที่สอง**ที่ต้องอาศัยทักษะในการรับรู้เพื่อเข้าใจวัตถุ 3 มิติ รวมทั้งเกิดการจินตนาการถึงวัตถุสามมิติที่ถูกหมุนในลักษณะมิติที่เปลี่ยนไป และ**ระดับที่สาม**ของการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์พัฒนาได้ตั้งแต่อายุ 13 ปี โดยระดับนี้คือการรวบรวมและประยุกต์

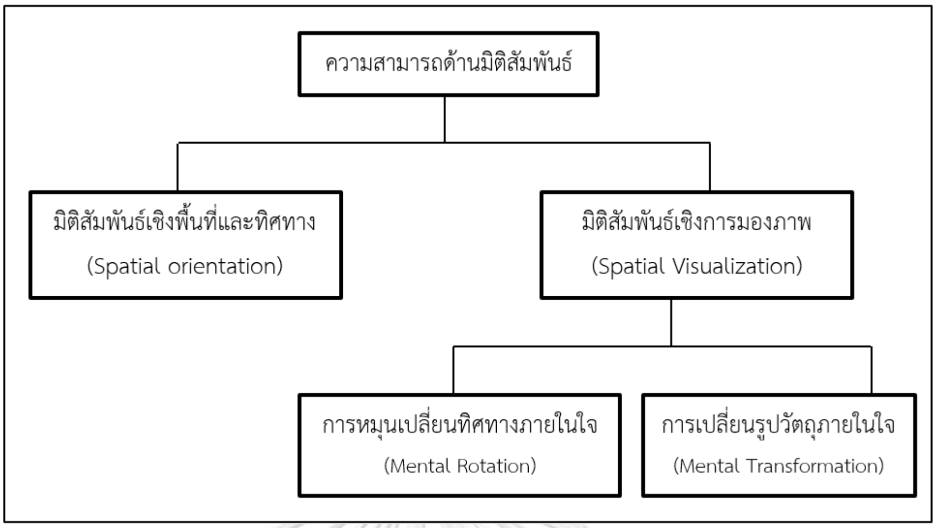
ความรู้ที่มีในระดับที่หนึ่งและระดับที่สองแล้ววางแผนได้ก่อนการลงมือทำ (Piaget & Cook, 1952) ซึ่งมีผู้คนจำนวนไม่น้อยที่ไม่สามารถพัฒนาไปถึงระดับที่ 3 ได้ เช่นเดียวกันกับที่ผู้คนจำนวนมากไม่สามารถพัฒนาตนเองไปจนถึงขั้นสุดท้ายของความสามารถในแต่ละด้านได้ ครูผู้สอนจึงมีส่วนช่วยในการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยการออกแบบการจัดการเรียนการสอน การฝึกฝนและส่งเสริมด้วยวิธีการต่าง ๆ ตามความเหมาะสม เพื่อนำไปสู่การพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ซึ่งส่งผลให้ผู้เรียนสามารถรับรู้ภาพและการเปลี่ยนแปลงได้เป็นอย่างดี เมื่อรูปทรงเปลี่ยนแปลงไป เข้าใจถึงขนาดและมิติต่าง ๆ สามารถสร้างความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิต เพื่อนำไปปรับใช้ในการแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่รอบตัวในชีวิตประจำวันได้ อาจสรุปได้ว่า ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นพื้นฐานที่สำคัญอีกด้านหนึ่งที่ผู้เรียนระดับประถมศึกษาควรได้รับการพัฒนาให้เป็นไปตามพัฒนาการ

2.3 องค์ประกอบของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ในช่วงคริสต์ศักราชที่ 1920 ถึง 1930 ได้มีนักวิจัยหลายท่านได้จัดประเภทของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีรูปแบบหลากหลายแต่คล้ายคลึงกัน อย่างเช่น Guilford and Lacey (1947) ได้แบ่งองค์ประกอบของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ออกเป็น 2 ด้าน ได้แก่ ความสามารถในการรับรู้และจินตนาการภาพวัตถุที่มีการเคลื่อนที่ หรือ Spatial Visualization และความสามารถในการเข้าใจภาพที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบภายใน หรือที่เรียกว่า Spatial Orientation ต่อมา Lohman (1979, อ้างถึงใน พรรณปพร จตุวีรพงษ์, 2555) ได้แบ่งความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ออกเป็น 3 องค์ประกอบโดยสรุป ซึ่งประกอบด้วย **1) Spatial Relations** เป็นความสามารถในการจินตนาการเพื่อนำไปสู่การสร้างมโนภาพเรื่องการหมุนวัตถุสองมิติและวัตถุสามมิติ **2) Spatial Orientation** เป็นความสามารถในการจินตนาการภาพวัตถุที่มีการเปลี่ยนแปลงมุมมอง ทิศทาง หรือตำแหน่งที่ต่างจากเดิม และ **3) Visualizations** เป็นความสามารถในขั้นที่มีความซับซ้อนกว่า 2 องค์ประกอบแรก เนื่องจากเป็นความสามารถเกี่ยวกับการเคลื่อนที่หรือการแทนที่ของวัตถุที่มีความซับซ้อน

ในขณะที่ Tartre (1990, อ้างถึงใน Sorby, 1999) ได้เสนอแบบแผนการจัดแบ่งประเภทของทักษะองค์ประกอบ ซึ่งมีรากฐานมาจากกระบวนการทางสมองที่แบ่งเป็น 2 ประเภทหลัก ได้แก่ มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) และ มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) ซึ่งมิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) เป็นความสามารถในการจัดการ หมุน กลับ หรือบิดรูปภาพได้ภายในใจ ในขณะที่มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) เป็นความเข้าใจในการจัดการประเด็นที่อยู่ภายในรูปแบบของภาพที่เห็น และความถนัดในการจัดการรูปภาพที่ถูกนำเสนออย่างไม่สับสน ซึ่งมิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) ยังถูกแบ่งออกเป็น 2 ทาง คือ การมองภาพที่หมุนเปลี่ยนทิศทางได้ภายในใจ (Mental Rotation) ที่เป็นการหมุนวัตถุภายในใจ และการเปลี่ยนรูปวัตถุภายในใจ (Mental

Transformation) เป็นการปรับเปลี่ยนทิศทางของวัตถุในบางทิศทาง (Brinkmann, 1966; Connor & Serbin, 1985) ดังสรุปโครงสร้างความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ในภาพที่ 7



ภาพที่ 7 โครงสร้างของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (Tarte, 1990 อ้างถึงใน Sorby, 1999)

นอกจากนี้ Tartre (1990อ้างถึงใน Sorby, 1999) กล่าวถึงมิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทางจะถูกนำมาใช้ เมื่อต้องการระบุวิธีการ หาคำตอบของโจทย์คณิตศาสตร์ รวมถึงความแม่นยำในการประมาณขนาดของรูปภาพ, การแสดงเครื่องหมายความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์, ความเข้าใจขนาด รูปร่างรูปทรงของชิ้นส่วนของรูปภาพ, การหาคำตอบที่ถูกต้องโดยปราศจากการใช้กรอบความคิดในการนำทางในขณะที่มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพต้องการ, ความซับซ้อนในการหมุนภาพภาพในใจ เช่น วัตถุมีมุมที่ถูกพับซ่อนอยู่ และการจัดวางชิ้นส่วนใหม่ของวัตถุลงในวัตถุทั้งหมด

ในการแบ่งองค์ประกอบความสามารถมิติสัมพันธ์ของ Carroll (1993, อ้างถึงใน Harle & Towns, 2011) กล่าวว่าความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ประกอบด้วย 5 องค์ประกอบหลัก ดังต่อไปนี้ 1) ความสามารถในการมโนภาพ (Visualization) เป็นความสามารถในการนึกภาพวัตถุสองมิติและสามมิติขณะที่มีการเคลื่อนที่หรือมีการปรับเปลี่ยนตำแหน่งของวัตถุนั้น ๆ 2) ความสามารถเชิงความสัมพันธ์ (Spatial Relations) เป็นความสามารถในการรับรู้และเข้าใจความสัมพันธ์ของวัตถุที่มีรูปร่างและมีตำแหน่งที่แตกต่างกันไป รวมทั้งเข้าใจในความสัมพันธ์ของวัตถุ 3) ความสามารถในภาพที่ซับซ้อน (Closure Flexibility) เป็นความสามารถในการมอง แยกแยะ เพื่อค้นหารูปที่ถูกซ่อนอยู่ภายในภาพที่มีความซับซ้อน 4) ความสามารถในการมองภาพซ่อน (Closure Speed) เป็นความสามารถในการรับรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของวัตถุจนสามารถบอกถึงภาพที่ถูกปิดบังหรือภาพที่ไม่สมบูรณ์ และ 5) ความสามารถรับรู้ภาพอย่างรวดเร็ว (Perceptual Speed) เป็นความสามารถในการรับรู้ภาพอย่างคล่องแคล่วรวดเร็ว โดยใช้วิธีการค้นหาหรือเปรียบเทียบรูปภาพจนสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของวัตถุและเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว

จากการศึกษาองค์ประกอบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ผู้วิจัยจึงสรุปความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่ประกอบด้วยส่วนประกอบหลัก 3 ส่วน โดยใน 2 ส่วนแรกมาจากรากฐานกระบวนการทางสมองที่ Tartre (1990, อ้างถึงใน Sorby, 1999) ได้กล่าวไว้สอดคล้องกับ Lohman (1979, อ้างถึงใน พรรณปพร จตุวีรพงษ์, 2555) คือ 1) มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) เป็นความเข้าใจในภาพ องค์ประกอบของภาพ การจัดการ รหมุน การกลับ การบิดภาพ รวมทั้งการเปลี่ยนทิศทางภายในใจได้ 2) มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) การเข้าใจถึงการจัดการรูปแบบภาพ การประมาณขนาด การแสดงเครื่องหมายแทนความสัมพันธ์และการแสดงวิธีการหาคำตอบที่เกี่ยวข้องกับมิตินั้น ๆ และมีอีกหนึ่งส่วนที่เพิ่มเติมขึ้นจากองค์ประกอบของนักวิจัยท่านอื่น ๆ คือ มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) ซึ่งเป็นการมองเห็นถึงความสัมพันธ์รูปร่างรูปทรงในมิติหรือตำแหน่งที่เปลี่ยนไป และเป็นการสร้างมโนภาพจากการหมุนวัตถุ 2 มิติ 3 มิติ จนนำไปสู่ความเข้าใจในความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้น

2.4 แบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

แบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่นิยมใช้ในวงการการศึกษาได้มีการนำมาใช้ตั้งแต่ช่วงแรกของการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ เช่น **แบบทดสอบ Multiple aptitude test (MAT)** เป็นแบบทดสอบที่นำมาใช้เพื่อให้ผู้เรียนได้รู้จักตนเองมากยิ่งขึ้น รู้ว่าตนเองมีความถนัดและสนใจในสายอาชีพใด โดยนำมาใช้กับเด็กเกรด 7-13 ซึ่งแบบทดสอบความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ประกอบด้วย 3 รูปแบบ คือ แบบวิทยาศาสตร์และเครื่องจักรกล แบบประกอบภาพ 2 มิติ และแบบประกอบภาพใน 3 มิติ (Segal and Raskin, 1959 อ้างถึงใน อารีย์ เมฆวิลัย, 2552) ต่อมามีการใช้ **แบบทดสอบ Primary Mental Ability (PMA) ของ Thurstone** วัดความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์โดยใช้แบบทดสอบหมุนภาพ 2 มิติบนพื้นราบแบบทดสอบ 3 มิติแบบเล็งทิศทาง แบบตัดกระดาษ แบบนับลูกบาศก์ (Cronbach, 1970) จากนั้นแบบวัดเริ่มมีการพัฒนาหลากหลายมากขึ้นอย่าง Ben, Lappan and Houang (1988) ได้แบ่งรูปแบบของ**แบบทดสอบวัดความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ ของ Ben, Lappan and Houang** ออกเป็น 3 รูปแบบ คือ แบบรูปประนาบ 2 มิติ (Two dimension Flat View) แบบรูปทรง 3 มิติ (Three dimensions Comer View) และแบบรูปแปรน (Map plan) ซึ่งทั้ง 3 รูปแบบสามารถแยกย่อยออกได้อีก 10 ชนิด ได้แก่ แบบทดสอบบ่งชี้สภาพเมื่อกำหนดด้าน 3 ด้าน ให้แบบทดสอบหาด้านข้างจากรูปแปลน แบบทดสอบมองรูปสามมิติ แบบทดสอบหาด้านจากรูปทรงสามมิติ แบบทดสอบนับลูกบาศก์ แบบทดสอบหารูปแปลน แบบทดสอบหาด้านตรงข้ามจากรูปลูกบาศก์ แบบทดสอบหารูปทรงเมื่อบ่งชี้ลูกบาศก์ที่ถูกดึงออก แบบทดสอบรวมองค์ประกอบ และแบบทดสอบจำแนกรูปบล็อก (ปิยะรัตน์ โพธิบัติ, 2549)

ในประเทศอังกฤษ **สำนักทดสอบ (The nation Foundation For Education Research หรือ NFER)** ได้เสนอรูปแบบของแบบทดสอบวัดความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ต่าง ๆ เช่น แบบซ่อนภาพ แบบมองวัตถุจากด้านบน แบบหารูปที่คล้ายคลึงกัน แบบประกอบภาพเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แบบรูปแบบการเรียนรู้ แบบประกอบลูกบาศก์ แบบวาดภาพ แบบลอกภาพ แบบประกอบภาพ แบบวาดภาพกลับจากที่กำหนดให้ แบบจัดภาพลงกระดาน และ แบบตัดส่วนของวัตถุ เป็นต้น (ปิยะรัตน์ โพธิบัติ, 2549)

ส่วนแบบทดสอบที่นิยมใช้ในกันปัจจุบัน คือ **แบบทดสอบ Mechanicel Aptitude and Spatial Relations Tests** ประกอบด้วยแบบทดสอบทางด้านมิติสัมพันธ์ แบบทดสอบการให้เหตุผลโดยการใช้สัญลักษณ์ และแบบทดสอบวัดความถนัดทางด้านเครื่องจักร (Levy and Levy, 2001) ซึ่งรูปแบบของแบบทดสอบวัดความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ในต่างประเทศที่นิยมใช้ในปัจจุบัน ได้แก่ แบบซ่อนภาพ แบบจับคู่ชิ้นส่วนกับรูป แบบทรงสามมิติ แบบการนับลูกบาศก์ แบบพับกระดาษแบบหมุนภาพ ทักษะในการใช้แผนที่ แบบการประสานสัมพันธ์ของการมอง

ในประเทศไทยได้มีการพัฒนาแบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยเริ่มทองห่อ วิภาวิน (2523) ได้พัฒนาแบบทดสอบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่คล้ายคลึงกันแบ่งเป็น 8 รูปแบบ คือ แบบทดสอบหมุนภาพ แบบทดสอบประกอบภาพ แบบทดสอบแยกภาพ แบบทดสอบการนับลูกบาศก์ แบบทดสอบซ้อนภาพ แบบทดสอบซ่อนภาพ แบบทดสอบพับรูป และแบบทดสอบพับกระดาษ ต่อมาในปีพุทธศักราช 2541 ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2541) ได้กล่าวถึงแบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไว้ 10 รูปแบบ คือ แบบทดสอบซ่อนภาพซึ่งแยกเป็นแบบซ่อนเดี่ยวกับแบบตัวซ่อนคงที่ แบบทดสอบซ้อนภาพ แบบทดสอบแยกภาพ แบบทดสอบต่อภาพ แบบทดสอบหมุนภาพแบบทดสอบประกอบภาพสามมิติ แบบกระดาษการนับลูกบาศก์ แบบทดสอบหาด้านตรงข้ามลูกบาศก์ แบบทดสอบภาพตัดกระดาษ แบบทดสอบประกอบส่วนย่อย

ลักษณะของแบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ตามทั้ง 4 แบบ (อารีย์ เมฆวิลัย, 2552) จากรูปแบบของแบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่ใช้อย่างแพร่หลายในปัจจุบันมีรูปแบบที่หลากหลาย ตามแนวคิดของ Levy and Levy (2001) มีดังนี้

1) แบบซ่อนภาพ ใช้วัดความสามารถในการมองภาพที่มีสิ่งกีดขวาง กีดกั้นหรือเส้นทับ จนมองเห็นรูปไม่ถนัด ผู้สอบจะสามารถบอกได้ว่า รูปที่กำหนดให้ซ่อนอยู่ในนั้น โดยมีรูปแบบ ดังนี้

1.1 ซ่อนภาพเหมือน จะกำหนดสถานการณ์มา เช่น ต้นไม้ ป่าไม้ บ้าน ซึ่งมีลายเส้นมากมาย ที่จะสามารถแทรกสัตว์ สิ่งของ หรือรูปทรงต่าง ๆ ให้อยู่สถานการณ์นั้น สิ่งที่ซ่อนอยู่จะมีเส้นอื่น ๆ ทับอยู่ ผู้ตอบหาคำตอบว่ามีอะไร จำนวนเท่าไร

1.2 ซ่อนภาพทรงเรขาคณิต เป็นการกำหนดภาพทรงเรขาคณิตรูปใด ๆ ไว้ แล้วสร้างกรอบของการซ่อน ซึ่งใหญ่กว่าภาพที่กำหนด เพื่อใส่ภาพที่ต้องการซ่อน แล้วจะขีดเส้นผ่านภาพ

หรือเลื่อนภาพลงมา ซ้ายขวา เพื่อจะทำให้รูปไม่อยู่คงที่ แบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบภาพซ่อนเดี่ยว หาภาพที่ซ่อนไว้จะมีเพียงภาพเดียวที่ซ่อนอยู่ในข้อที่กำหนดให้ โดยแบ่งเป็นซ่อนภาพเดี่ยวทิศทางเดิม ขนาดเท่าเดิมที่จะกำหนดภาพมาให้ เงื่อนไข คือ ภาพที่ซ่อนต้องมีขนาดเท่าเดิม ทิศทางเหมือนเดิม คำชี้แจงในการทำข้อสอบต้องชัดเจน และซ่อนภาพเดี่ยวทิศทางเปลี่ยนแปลง ภาพที่กำหนดให้ซ่อนไม่อยู่ในทิศทางเดิม โดยอาจหมุนทำมุม 30 องศา 45 องศา 90 องศา หรือ 180 องศา ตามความต้องการ และอีกแบบคือ แบบตัวซ่อนคงที่ ลักษณะของข้อสอบจะกำหนดตัวแบบที่จะซ่อนคงที่ 5 ตัว หรือ 4 ตัว แล้วเขียนข้อสอบเป็นชุด ๆ

2) แบบการอ่านแผนที่ ใช้วัดความสามารถในการอ่านแผนที่ของผู้เรียน โดยกำหนดตำแหน่งของสิ่งต่าง ๆ มาให้ แล้วจะถามถึงว่าสิ่งที่กำหนดว่าอยู่ทางทิศใดหรือเป็นการหาระยะทาง

3) แบบหมุนภาพ ลักษณะของแบบวัดจะกำหนดภาพให้ทางซ้ายมือ แล้วสร้างเงื่อนไขว่าจะหมุนภาพไปทางใดซึ่งจะบอกไว้ให้ชัดเจน เช่น บอกว่าหมุนภาพที่กำหนดให้ไปตามแนวการหมุนของนาฬิกา หรือหมุนทวนเข็มนาฬิกา

4) แบบการหาด้านตรงข้ามจากลูกบาศก์ ลักษณะของแบบวัดจะต้องอาศัยเหตุผลเข้าช่วยในการพิจารณาว่า ลูกบาศก์ที่ให้ไว้แต่ละหน้าจะมีสัญลักษณ์อะไร

ในขณะที่แบบวัดความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ตามแนวคิดองค์ประกอบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของ Carroll (1993) มีลักษณะของแบบวัดในแต่ละองค์ประกอบ ได้ดังนี้ 1) แบบประกอบภาพเป็นแบบวัดที่มีลักษณะวัดความสามารถในการมองภาพและการแยกส่วนประกอบของภาพ 2) แบบประกอบภาพสามมิติ เป็นแบบวัดที่ให้ผู้เรียนจับคู่ด้านที่ตรงกับภาพที่กำหนดโดยพิจารณาภาพในลักษณะสามมิติเพื่อจินตนาการภาพว่าด้านที่เห็นนี้อยู่ในด้านใดของวัตถุสามมิติ 3) แบบการหาด้านตรงข้ามจากลูกบาศก์ ผู้เรียนจะได้ค้นหาและฝึกการมโนภาพในใจว่าภาพที่อยู่ในด้านตรงข้ามของลูกบาศก์ตรงกับภาพใดที่กำหนดให้ 4) แบบซ่อนภาพ เป็นแบบวัดที่ผู้เรียนอาจเห็นภาพได้เพียงบางส่วนหรือไม่สามารถมองเห็นเนื่องจากมีสิ่งใดสิ่งหนึ่งมาปิดกั้น โดยแบบวัดจะให้ผู้เรียนค้นหาภาพที่ซ่อนอยู่ 5) แบบระบุภาพที่ปิดบังบางส่วน แบบวัดนี้ผู้เรียนจะต้องอธิบายภาพที่ถูกปิดบังว่าเป็นภาพอะไร และ 6) แบบหาภาพที่เหมือนกัน เป็นแบบวัดที่กำหนดภาพให้ผู้เรียนค้นหาภาพวัตถุที่ลักษณะหรือขนาดเหมือนกัน

2.5 การจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

การจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จำเป็นต้องส่งเสริมและสร้างกลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ให้แก่ผู้เรียน เพื่อเป็นพื้นฐานและแนวทางในการคิด มีนักวิจัยหลายท่านพยายามที่จะระบุความแตกต่างของกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาของแต่ละบุคคลในการแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ ซึ่งกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์เป็นกระบวนการคิดในการแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ของแต่ละบุคคล กระบวนการแก้ปัญหาของแต่ละบุคคลจะเกิดความแตกต่างกัน ซึ่งเกิดจากความแตกต่างของแต่ละบุคคล (Individual difference) เนื่องมาจากปัจจัยแวดล้อมต่าง ๆ (Dhillon, 1998; Jansen et al., 2016; Kyllonen et al., 1984)

การใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหานั้นมีปัจจัย 3 ปัจจัยที่ทำให้เกิดความแตกต่างกันในกระบวนการแก้ปัญหา ได้แก่ อายุ ประสบการณ์ และความแตกต่างทางเพศ (Liben, 1981; McGee, 1979; Sorby, 2009) กล่าวคือ เมื่ออายุและประสบการณ์เพิ่มมากขึ้น ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ก็จะเพิ่มมากขึ้นตามอายุ เนื่องจากมีประสบการณ์ที่เพิ่มมากขึ้น นอกจากนี้ประสบการณ์ หรือการใช้ชีวิตในปัจจุบันยังส่งผลต่อความสามารถด้านนี้เช่นกัน อีกหนึ่งปัจจัยคือ ความแตกต่างทางเพศ เนื่องจากการดำรงชีวิตของผู้หญิงและผู้ชายมีประสบการณ์ที่แตกต่างกัน เช่น ผู้ชายชอบเล่นหุ่นยนต์ ชอบการประกอบ ชอบเล่นกีฬา แต่ในขณะเดียวกันผู้หญิงชอบใช้จินตนาการในการเล่าเรื่อง ชอบการพิจารณา รายละเอียดของงานต่าง ๆ เป็นต้น จากปัจจัยข้างต้นจะมีเพียงปัจจัยหลัก 2 ปัจจัยที่ส่งผลโดยตรงที่นำไปสู่การใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน คือ ประสบการณ์ และความแตกต่างทางเพศ นอกจากนี้จากการศึกษาพบว่า ผู้ชายสามารถทำกิจกรรมที่ต้องอาศัยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ได้ดีกว่าผู้หญิง เนื่องจากผู้ชายชอบทำกิจกรรมต่าง ๆ เหล่านี้มากกว่าผู้หญิง ตัวอย่างเช่น การเล่นกีฬาต่าง ๆ เป็นต้น (Lord & Garrison, 1998) จึงสามารถแบ่งกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาได้ออกเป็น 2 ส่วนได้แก่ กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบองค์รวม (Holistic Strategy) และ กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบการวิเคราะห์ (Analytic Strategy) ทั้ง 2 กลยุทธ์ดังกล่าวนี้ไม่ได้แยกกันอย่างสิ้นเชิง แต่ยังมีส่วนที่เชื่อมกันอยู่ซึ่งเรียกว่า กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบระหว่างกลาง (Intermediate Strategy) (Hsi, Linn, & Bell, 1997; Linn & Petersen, 1985) ซึ่งมีรายละเอียดของแต่ละกลยุทธ์การแก้ปัญหาดังนี้

1) **กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาแบบองค์รวม (Holistic Strategy)** เป็นกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาที่ใช้สมองซีกขวาเป็นหลัก เพื่อจินตนาการและสามารถสร้างสรรค์สิ่งต่าง ๆ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการมองภาพสามมิติที่หมุนเปลี่ยนทิศทางได้ภายในใจ (Mental Rotation) หรือการจัดการภาพสามมิติได้ภายในใจ ซึ่งการแก้ปัญหาเป็นแบบการมองเห็นในภาพใหญ่ (Gluck & Fitting, 2003; Hsi et al., 1997) จึงเป็นการเรียนรู้จากความเข้าใจในบริบทของเรื่องราวต่าง ๆ ที่เชื่อมโยงเกี่ยวข้องกัน บุคคลที่แก้ปัญหาโดยใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบองค์รวม จะมีลักษณะการแก้ปัญหาคือสามารถรับข้อมูลได้อย่างรวดเร็วและมีปริมาณมาก แต่แก้ปัญหาอย่างไม่เป็นขั้นเป็นตอน บุคคลที่ใช้

การแก้ปัญหาแบบองค์รวมในด้านมิติสัมพันธ์จะมีจินตนาการและสามารถใช้ประโยชน์จากความรู้ด้านรูปแบบและรูปทรงเรขาคณิตเพื่อคิดสร้างสรรค์สิ่งต่าง ๆ บุคคลที่มีการแก้ปัญหาแบบองค์รวมจะไม่สามารถวิเคราะห์รายละเอียดในแต่ละส่วนได้อย่างเป็นระบบ ใช้เวลาในการแก้ปัญหาน้อย เนื่องจากผู้แก้ปัญหาแบบองค์รวมจะมองข้ามไปทีละหลายๆ จุด เนื่องจากสามารถมองเห็นภาพใหญ่ของรูปวัตถุได้ในทันที กล่าวคือ เป็นการมองภาพรวมของวัตถุทั้งก้อนได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำ ในทางกลับกันกรณีที่ต้องเจอกับรูปวัตถุที่มีรายละเอียดมากและซับซ้อน กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบดังกล่าวอาจไม่เพียงพอที่จะแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ (Cooper & Mumaw, 1985) เนื่องจากการแก้ปัญหารูปวัตถุที่มีรายละเอียดมาก และซับซ้อนนั้นต้องการข้อมูลเพิ่มเติมในการแก้ปัญหาจึงจะต้องละกลยุทธ์ที่ใช้ชั่วคราว เพื่อพิจารณารายละเอียดที่มากขึ้นของวัตถุ (Hsi et al., 1997) กล่าวได้ว่าสำหรับปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ที่ไม่ซับซ้อน หรือรายละเอียดของวัตถุไม่มาก การแก้ปัญหาโดยใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาแบบองค์รวมสามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว (Gluck & Fitting, 2003; Marunic & Glazar, 2013) ในทางกลับกันเมื่อรายละเอียดของวัตถุหรือเหตุการณ์ที่ซับซ้อนกลยุทธ์ดังกล่าวนี้อาจไม่เพียงพอต่อการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2) กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาแบบวิเคราะห์ (Analytic Strategy) กลยุทธ์ในการแก้ปัญหานี้จะใช้สมองซีกซ้ายเป็นหลัก เพื่อนำข้อมูลที่ได้รับไปวิเคราะห์ โดยจะทำการจัดการข้อมูลหรือพิจารณาข้อมูลโดยการมองข้อมูลจากส่วนย่อยไปหาส่วนใหญ่ กล่าวคือ จะมองข้อมูลให้เล็กที่สุดเพื่อหารายละเอียดของข้อมูลอย่างเป็นขั้นตอนโดยละเอียด แล้วนำไปวิเคราะห์อย่างเป็นเหตุเป็นผล (Burin, Delgado, & Prieto, 2000; Caldera et al., 1999; Eme & Marquer, 1999; Gluck & Fitting, 2003; Deno, 1995) ลักษณะการแก้ปัญหาแบบการวิเคราะห์ของบุคคลที่ใช้การแก้ปัญหาแบบการวิเคราะห์ในด้านมิติสัมพันธ์จะใช้เวลาในการแก้ปัญหามากกว่าและความถูกต้องในการแก้ปัญหานั้นน้อยกว่าบุคคลที่ใช้การแก้ปัญหาแบบการองค์รวมเมื่อใช้เวลาเท่ากัน เนื่องจากการแก้ปัญหาโดยการวิเคราะห์จะใช้เวลามากในการพิจารณารายละเอียดในแต่ละส่วนของวัตถุ แล้วคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลว่าส่วนไหนเป็นส่วนเริ่มต้น แล้วควรต่อด้วยอะไร โดยจะวางแผนการดำเนินการแก้ปัญหาก่อน นอกจากนี้การแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์โดยใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาแบบ วิเคราะห์ ไม่สามารถรับข้อมูลได้ทีละมาก ๆ ใน 1 ครั้ง เนื่องจากการจดจำรายละเอียดทั้งหมดของวัตถุใน 1 ครั้งเป็นเรื่องที่ยาก ซึ่งอาจจะทำให้เกิดการตกหล่นของข้อมูล และเกิดเป็นข้อผิดพลาดในการแก้ปัญหา นอกจากนี้การแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์โดยใช้กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาแบบวิเคราะห์ยังสามารถเกิดปัญหาได้อีกด้านหนึ่งคือ ไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นการแก้ปัญหาอย่างไร ไม่รู้ว่าจุดใดเป็นจุดสำคัญในขั้นตอนถัดไป ซึ่งเป็นที่มาของความไม่เข้าใจในด้านมิติสัมพันธ์

อย่างไรก็ตามกลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบระหว่างกลางเป็นกลยุทธ์ที่เกิดขึ้นจากส่วนที่สัมพันธ์กันระหว่างกลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบองค์รวมและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาแบบวิเคราะห์ โดย**กลยุทธ์**

ในการแก้ปัญหาแบบระหว่างกลาง (Intermediate Strategy) บุคคลที่แก้ปัญหาโดยวิธีนี้จะต้องทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของมิติสัมพันธ์เพื่อการแก้ปัญหาที่รวดเร็ว (Gitimu & Workman, 2007) เนื่องจากบุคคลที่แก้ปัญหาแบบระหว่างกลางเมื่อเจอปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ที่ไม่ซับซ้อนจะใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบองค์รวม แต่ถ้าเจอปัญหาด้านมิติสัมพันธ์ที่ซับซ้อน บุคคลที่ใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบระหว่างกลางจะใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบองค์รวมเพื่อมองภาพรวมของปัญหาก่อน เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในการแก้ปัญหา และใช้กลยุทธ์การแก้ปัญหาแบบการวิเคราะห์มาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาเพื่อหารายละเอียดเพิ่มเติมในการแก้ปัญหา

กลยุทธ์แบบต่าง ๆ มีวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันตามลักษณะเฉพาะ ผู้เรียนควรได้รับการพัฒนาพื้นฐานมิติสัมพันธ์และฝึกฝนอย่างต่อเนื่อง เมื่อกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์เป็นหนึ่งในปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ความสามารถในการแก้ปัญหาของแต่ละบุคคลจะมีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น (Baron, 1978) ซึ่งการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่สอดแทรกกลยุทธ์ในการแก้ปัญหา จำเป็นต้องใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยในการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เพื่อเพิ่มความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ อันจะเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาการดำเนินชีวิตประจำวัน โดย Sorby (2009) ได้เสนอกิจกรรมที่ต้องใช้การประสานงานระหว่างตากับมือเป็นกิจกรรมในการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ได้อย่างดี โดยมีตัวอย่างกิจกรรม เช่น การเล่นวิดีโอเกม การเล่นดนตรี การสร้างสรรค์งานศิลปะ การเล่นของเล่นบางประเภท เช่น ตัวต่อเลโก้ ตัวต่อบล๊อค ต่อประกอบชิ้นส่วนของ เล่นจิ๊กซอว์ เป็นต้น (Sorby, 2009)

กิจกรรมที่ส่งเสริมการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่พัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จะต้องมีการปรับทัศนคติของผู้เข้ารับการพัฒนาจากครอบครัว คุณครู และผู้เชี่ยวชาญ (Hill et al., 2010) ดังนี้

1) ต้องอธิบายให้ผู้เข้ารับการพัฒนาเข้าใจว่าความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไม่ใช่ความสามารถที่มีมาแต่กำเนิด แต่สามารถพัฒนาได้เช่นเดียวกับความสามารถด้านอื่น ๆ

2) ส่งเสริมให้มีการทำกิจกรรมที่ต้องใช้การประสานงานกันระหว่างตากับมือ เช่น การหัดสเก๊ตซ์ภาพวัตถุ เป็นต้น

3) การใช้อุปกรณ์แบบถือมือ (Hand held model) เพื่อช่วยในการมองสิ่งที่มองไม่เห็นแค่ในกระดาษ ซึ่งจากที่กล่าวมานั้นกิจกรรมต่าง ๆ เหล่านั้นจะพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ได้ ต้องได้รับการฝึกฝน อบรม และการเรียนอย่างต่อเนื่อง (Baenninger & Newcombe, 1989; Sorby, 2009) เพื่อให้ผู้เข้ารับการพัฒนาได้เก็บเกี่ยวประสบการณ์ในแต่ละกิจกรรมต่าง ๆ และนำมาประยุกต์ใช้ให้เหมาะสมกับกิจกรรมต่าง ๆ ที่พบเจอในชีวิตประจำวัน

ผู้ที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ดีจะมีความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ อย่างเชื่อมโยง สามารถเรียนรู้และวางแผนแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว ส่งผลให้

สามารถทำความเข้าใจเชื่อมโยงเหตุการณ์ ใช้เหตุผล สร้างความคิดนามธรรม และพัฒนาทักษะต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการรับรู้ตำแหน่งมิติของวัตถุต่าง ๆ การจินตนาการเชื่อมโยงระหว่างพื้นที่ ซึ่งผู้ที่มีทักษะด้านมิติสัมพันธ์มักจะเห็นภาพโดยรวมได้อย่างชัดเจน การพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จึงเป็นพื้นฐานทางความคิดและการจินตนาการภาพที่ครูผู้สอนควรส่งเสริมให้เกิดแก่ผู้เรียนระดับประถมศึกษา

3. ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะความสามารถในการคิดแก้ปัญหาของเพียเจต์พบว่า เริ่มตั้งแต่เด็กอายุ 7-11 ปี ผู้เรียนในวัยนี้เริ่มมีความคิดในการแก้ปัญหาแบบง่าย ๆ ภายในขอบเขตจำกัด เมื่อผู้เรียนอายุ 12-15 ปีจะมีความสามารถคิดหาเหตุผลดีขึ้นและสามารถคิดแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ ซึ่งการคิดแก้ปัญหาว่าเป็นรูปแบบของการเรียนรู้อย่างหนึ่งที่ต้องอาศัยการเรียนรู้ประเภทหลักการที่มีความเกี่ยวข้องกันตั้งแต่สองประเภทขึ้นไป โดยการเรียนรู้ประเภทหลักต้องอาศัยความสามารถในการมองเห็นลักษณะร่วมกันของสิ่งเร้า และใช้หลักการนั้นผสมผสานจนเป็นความสามารถชนิดใหม่ที่เรียกว่าความสามารถทางการคิดแก้ปัญหา อีกทั้งยังต้องใช้ความสามารถในการใช้ประสบการณ์เดิมจากประสบการณ์ทางตรงและทางอ้อม เพราะการแก้ปัญหาถือเป็นกระบวนการที่บุคคลจะใช้ประสบการณ์ ทักษะ ความรู้ที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้า โดยนำมาจัดเรียงลำดับใหม่ เพื่อหาข้อสรุปที่ได้มาจากการพิจารณาอย่างถี่ถ้วน และผู้เรียนจะต้องวิเคราะห์ได้ว่าจะนำความรู้ที่ได้เรียนมาใช้ในการแก้ปัญหาสถานการณ์ใหม่ได้อย่างไร เพื่อนำมาสู่การแก้ปัญหาตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการของแต่ละบุคคล ในขณะที่กู๊ด (Good, 1973) มองว่าการคิดแก้ปัญหาเป็นแบบแผนหรือวิธีดำเนินการซึ่งอยู่ในสภาวะยากลำบากที่ต้องพยายามตรวจข้อมูล มีการตั้งสมมติฐาน ตรวจสอบสมมติฐานภายใต้การควบคุมมีการรวบรวมเก็บข้อมูลจากการทดลอง เพื่อหาความสัมพันธ์ที่ทดแทนสมมติฐานนั้นว่าเป็นจริงหรือไม่ ซึ่งเป็นกระบวนการที่มีขั้นตอนหลากหลาย (Piaget, 1969; Gagne, 1970)

นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นคำถามหรือสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวนและตัวเลขหรือไม่เกี่ยวข้องก็ได้ แต่ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะเป็นปัญหาที่ผู้เรียนต้องค้นหาข้อเท็จจริงหรือสรุปสิ่งใหม่เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ โดยอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ หรือความสามารถในการแก้ปัญหาและใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เรียนมา เพื่อช่วยในการแก้ปัญหา (ยุพิน พิพิธกุล, 2542; กรมวิชาการ, 2544) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จึงเป็นการหาวิธีการและคำตอบของปัญหา โดยในการแก้ปัญหา ต้องใช้ความรู้ ความคิด และประสบการณ์เดิมมาเชื่อมโยงกับสถานการณ์ใหม่เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาที่พบ

(ปรีชา เนาว์เย็นผล, 2537; สมเดช บุญประจักษ์, 2544) ในขณะเดียวกันมุมมองของนักการศึกษาไทยในปัจจุบันมีความเห็นสอดคล้องกับความหมายเดิมที่มองว่าการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นความสามารถในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอนหรือกระบวนการแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ (กนิษฐา ศรีวชิโรทัย, 2554; วัชรี กาญจน์กีรติ, 2554) และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้เสนอว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถประยุกต์ความรู้ ขั้นตอน หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ กลวิธีและกลยุทธ์วิธีการแก้ปัญหา และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์มักเป็นปัญหาที่ผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อน และต้องใช้การคิดที่หลากหลาย เพื่อหาแนวทางหรือวิธีการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด (สสวท., 2557)

สรุปได้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนต้องนำความรู้ ทักษะ และหลักการต่าง ๆ เชื่อมโยงประสบการณ์เดิมกับสถานการณ์ใหม่ เพื่อสร้างแนวทางในการดำเนินการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในรูปแบบหรือสถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหานั้น

3.2 องค์ประกอบของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้ปัญหาต้องอาศัยองค์ประกอบหลายอย่างที่จะช่วยให้การแก้ปัญหาบรรลุได้ตามจุดมุ่งหมายที่ต้องการ นักการศึกษาได้กล่าวไว้หลายท่านดังนี้

จอห์นสัน และไรซิง (Johnson and Rising, 1969 อ้างถึงใน สุดารัตน์ ไชยเลิศ, 2553) ให้ความเห็นว่ากระบวนการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ซึ่งมีองค์ประกอบ คือ 1) การมองเห็นภาพ (Visualizing) 2) การจินตนาการ (imagining) 3) การจัดทำอย่างมีทักษะ (manipulation) 4) การวิเคราะห์ (analyzing) 5) การสรุปในเชิงนามธรรม (abstracting) 6) การเชื่อมโยงความคิด (assosiation ideals)

ในขณะที่ Ausubel (1968) กล่าวว่าองค์ประกอบที่ทำให้บุคคลแตกต่างกันในการแก้ปัญหาแบ่งออกได้ 3 ประการ คือ

1) ความรู้ในเนื้อหาวิชาและความเคยชินในการคิดเกี่ยวกับเรื่องนั้น

2) การใช้แบบความคิดที่ไวต่อการแก้ปัญหา และความรู้ทั่ว ๆ ไปเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพ

3) คุณลักษณะทางบุคลิกภาพ เช่น แรงขับ ความมั่นคงในอารมณ์ ความวิตกกังวล

Baroody and Coslick (1993) กล่าวถึงองค์ประกอบในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนไว้ 3 ประการ คือ

1) ด้านความรู้ ประกอบด้วย ความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ และวิธีการแก้ปัญหา

2) ด้านความรู้สึก จะเป็นแรงขับในการแก้ปัญหา และแรงขับนี้มาจากความสนใจ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความพยายาม และความเชื่อของผู้เรียน

3) ด้านการสังเคราะห์ความคิด เป็นความสามารถในการสังเคราะห์การคิดของตนเองในการแก้ปัญหา ซึ่งจะสามารถทราบได้ว่าสิ่งใดบ้างที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหา

กมลรัตน์ หล้าสุวงษ์ (2528 อ้างถึงใน สายพิณ ล้ำเลิศ, 2558) กล่าวว่า ในการแก้ปัญหาแต่ละครั้งจะสำเร็จหรือได้ผลดีขึ้นอยู่กับองค์ประกอบต่อไปนี้

1) ระดับความสามารถทางเชาวน์ปัญญา ผู้มีระดับเชาวน์ปัญญาสูงย่อมสามารถแก้ปัญหาได้ดีกว่าผู้มีระดับเชาวน์ปัญญาต่ำ

2) การเรียนรู้การแก้ปัญหาได้สำเร็จอย่างรวดเร็ว เกิดจากการที่ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริงสามารถจัดการเรียนรู้ต่าง ๆ ได้อย่างถ่องแท้ เมื่อประสบปัญหาที่คล้ายคลึงกันจะแก้ปัญหาได้รวดเร็วถูกต้อง

3) การรู้จักคิดอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งอาศัยสิ่งต่าง ๆ คือ ข้อเท็จจริงและความรู้จากประสบการณ์เดิมจุดมุ่งหมายในการคิดแก้ปัญหาและระยะเวลา

รสอุบล ธรรมพานิชวงศ์ (2545) กล่าวถึงองค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้แก่ ความรู้ในเรื่องคำศัพท์ สัญลักษณ์ และความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ ความสามารถในการอ่าน ความสามารถในการจัดกระทำข้อมูลที่กำหนดมาให้แล้วค้นหาในสิ่งที่โจทย์ต้องการ ความสามารถในการเปลี่ยนข้อความจากนามธรรมให้กลายเป็นรูปธรรม ความสามารถในการคำนวณ และการรู้จักคาดคะเนคำตอบ ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะเป็นแนวทางให้ผู้เรียนสามารถมองปัญหาได้อย่างชัดเจน แล้วสามารถสร้างกระบวนการในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ส่วนอรวรรณ ตันสุวรรณรัตน์ (2552) กล่าวถึง องค์ประกอบที่สำคัญสำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ ความสามารถทางความคิดและสติปัญญา ความสามารถในการวิเคราะห์ สังเคราะห์ และประสบการณ์ในการเรียนรู้ของผู้แก้ปัญหา เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และวิธีการสอนของผู้สอน อย่างไรก็ตามผู้เรียนจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดีนั้นจะต้องมีองค์ประกอบ 2 ด้าน คือ 1) วิธีสอน เทคนิคการสอน ซึ่งเป็นส่วนสำคัญในการฝึกแก้ปัญหาตามขั้นตอน 2) ผู้เรียน ซึ่งต้องมีความสามารถในด้านการอ่าน เข้าใจ รู้จักวิเคราะห์โจทย์ มีทักษะ มีกระบวนการในการคิดคำนวณ รู้จัก ตรวจสอบคำตอบและสิ่งสำคัญ คือ มีใจรัก มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ (บุสญา อิ่มแก้ว, 2557)

สรุปได้ว่า สิ่งสำคัญที่ผู้เรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาในระดับที่แตกต่างกันนำมาใช้ในการคิดแก้ปัญหา คือ พื้นฐานความรู้ วุฒิภาวะ ประสบการณ์ ทัศนคติ คุณลักษณะทางบุคลิกภาพของผู้เรียน และวิธีการสอนของครู

3.3 ขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แนวคิดที่เกี่ยวกับความสามารถในการคิดแก้ปัญหาที่สำคัญ เริ่มต้นจากเพียร์สันและจอห์น ดิวอี้ (Pearson-John Dewey อ้างถึงใน สุวิทย์ มูลคำ, 2547) ได้เสนอขั้นตอนของกระบวนการคิดแก้ปัญหาดังนี้

1) การกำหนดปัญหา

2) การตั้งสมมติฐาน

3) การค้นหาหลักฐานเพื่อทดสอบสมมติฐาน

4) การประเมินความถูกต้องของสมมติฐาน

5) การปรับปรุงแก้ไขสมมติฐาน (ถ้าจำเป็น)

6) การนำข้อสรุปไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่คล้ายคลึงกัน

กิลฟอร์ด (Guilford, 1971) เห็นว่า กระบวนการคิดแก้ปัญหาประกอบด้วย 5 ขั้นตอนดังนี้

1) การเตรียมการ (preparation) หมายถึง ขั้นที่เริ่มต้นโดยการตั้งคำถามเกี่ยวกับเหตุการณ์นั้นว่าคืออะไร

2) การวิเคราะห์ปัญหา (analysis) หมายถึง ขั้นที่ต้องพิจารณาสาเหตุที่ทำให้เกิดปัญหา ทั้งที่เป็นเหตุปัจจัยที่สำคัญและที่ไม่สำคัญ

3) การเสนอแนวทางแก้ปัญหา (production) หมายถึง การคิดและออกแบบวิธีแก้ปัญหาตามที่ได้วิเคราะห์สาเหตุ

4) การตรวจสอบผล (verification) หมายถึง ขั้นกำหนดเกณฑ์ในการตรวจสอบผลการแก้ปัญหา เพื่อค้นหาวิธีการที่มีประสิทธิภาพที่สุด

5) การนำไปประยุกต์ใช้ (re-application) หมายถึง การนำวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้องไปใช้ในเหตุการณ์ที่อาจเกิดขึ้นในอนาคตที่มีความใกล้เคียงกับปัญหาที่ได้มีโอกาสคิดวิธีการแก้ปัญหา โดยขั้นตอนการคิดแก้ปัญหาของกิลฟอร์ดมีผู้ให้ความสนใจอย่างกว้างขวางและนักการศึกษาก็นำเอาขั้นตอนนี้ไปดัดแปลง เพื่อใช้ในการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องการคิดแก้ปัญหา แต่การดัดแปลงและปรับปรุงนั้นยังมีเค้าโครงส่วนใหญ่เหมือนเดิม

เวียร์ (Weir, 1974) ได้เสนอลำดับขั้นตอนในการคิดแก้ปัญหาไว้ 4 ขั้นตอน คือ

1) ขั้นตั้งปัญหาหรือวิเคราะห์ประโยคที่เป็นปัญหา

2) ขั้นนิยามสาเหตุของปัญหาโดยแยกแยะจากลักษณะที่สำคัญ

3) ขั้นค้นหาแนวทางแก้ปัญหาและตั้งสมมติฐาน

4) ขั้นพิสูจน์คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหา

นอกจากนี้เวียร์ได้ให้หลักการแก้ปัญหา (Perception for Solution) 6 ประการ ซึ่งจะสามารถช่วยในการแก้ไขปัญหาได้ ดังนี้

หลักการข้อที่ 1 เริ่มต้นการวิเคราะห์ว่าคืออะไร ทบทวนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับปัญหา จนกระทั่งได้รูปแบบที่ครอบคลุมเรื่องทั้งหมด ต่อไปคือการแยกแยะปัญหาที่แท้จริงจากสิ่งที่เห็นได้ง่าย จากนั้นให้โยงปัญหาที่ใกล้ตัวเข้ากับปัญหาทั้งหมดซึ่งบางครั้งอาจเป็นเพียงส่วนหนึ่งเท่านั้นที่แฝงอยู่ในปัญหา กล่าวโดยสรุปหลักการข้อนี้ก็คือการหาความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ย่อย ๆ ต่าง ๆ และความเหมาะสมในกลุ่มของเหตุการณ์นั้น ๆ

หลักการข้อที่ 2 การตัดสินนิยามปัญหา หลักการข้อนี้จะคลี่คลายข้อสงสัยที่มีลักษณะของปัญหาส่วนใหญ่คือ เรื่องการให้ความหมายของคำเป็นการให้ความหมายที่คำนึงถึงความเหมาะสมของข้อความมากกว่าความเป็นจริง หลีกเลี่ยงได้โดยระมัดระวังการนิยามความหมายของคำศัพท์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา

หลักการข้อที่ 3 การเรียบเรียงเหตุการณ์ต่าง ๆ ของปัญหา

หลักการข้อที่ 4 ถ้าพบว่าไม่มีทางหาคำตอบจากวิธีการเดิมให้หาวิธีหารใหม่

หลักการข้อที่ 5 หยุดเมื่อติดขัดหรือพบอุปสรรค

หลักการข้อที่ 6 ปรึกษาปัญหากับผู้อื่น ซึ่งจะทำให้เกิดแง่คิดต่าง ๆ

พาเนส (Parnes, 1977 อ้างถึงใน มานพ เถี้ยมแก้ว, 2545) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้คือ

1) การเก็บข้อมูล (face finding) ได้แก่ การเก็บข้อมูลไว้สำหรับเตรียมการพิจารณาว่าอะไรคือปัญหา

2) การวิเคราะห์ปัญหา (problem finding) ได้แก่ การวิเคราะห์สถานการณ์สิ่งแวดล้อมข้อมูลต่าง ๆ ที่ให้ไว้ในขั้นแรก เพื่อจะได้ชี้ขาดว่าอะไรคือ ตัวปัญหาอันแท้จริง

3) การระดมความคิด (idea finding) ได้แก่ การช่วยกันพิจารณาทุกแง่ทุกมุม เพื่อค้นหาว่ามีวิธีการ หรือความคิดอ่านอันใดที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

4) การทดสอบ (solution finding) ได้แก่ การพิจารณาค้นหาดูว่าจะใช้หนทางหรือวิธีการแก้ไข (Potential Solution) อันใดมาใช้แก้ปัญหาได้ อาศัยหลักเกณฑ์ในการประเมินผลการพิสูจน์และการทดสอบ

5) การยอมรับข้อเสนอ (acceptance finding) ได้แก่ การยอมรับข้อเสนอแนะและการวางแผนเพื่อนำข้อเสนอมาปฏิบัติจริง

สุวิทย์ มูลคำ (2547) ได้สรุปขั้นตอนของกระบวนการคิดแก้ปัญหาเป็น 6 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดปัญหา เป็นการทบทวนปัญหาที่พบเพื่อทำความเข้าใจให้ถ่องแท้ในประเด็นต่าง ๆ รวมทั้งการกำหนดขอบเขตของปัญหา

ขั้นที่ 2 ตั้งสมมติฐานหรือหาสาเหตุของปัญหา เป็นการคาดคะเนคำตอบของปัญหาโดยใช้ความรู้และประสบการณ์ช่วยในการคาดคะเน รวมทั้งการพิจารณาสาเหตุของปัญหาว่ามาจากสาเหตุอะไร หรือจะมีวิธีการแก้ปัญหาได้โดยวิธีใดบ้าง ซึ่งควรจะตั้งสมมติฐานไว้หลายๆอย่าง

ขั้นที่ 3 วางแผนแก้ปัญหา เป็นการคิดหาวิธีการ เทคนิคเพื่อแก้ปัญหาและกำหนดขั้นตอนย่อยของการแก้ปัญหาไว้อย่างเหมาะสม

ขั้นที่ 4 เก็บรวบรวมข้อมูล เป็นการค้นคว้าหาความรู้จากแหล่งต่าง ๆ ตามแผนที่วางไว้ซึ่งขั้นนี้จะเป็นขั้นของการทดลองและลงมือแก้ปัญหา

ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ข้อมูลและทดสอบสมมติฐาน เป็นการนำข้อมูลที่รวบรวมได้มาทำการวิเคราะห์ วินิจฉัยว่ามีความถูกต้อง เที่ยงตรงและเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใด และทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

ขั้นที่ 6 สรุปผล เป็นการประเมินผลวิธีการแก้ปัญหาหรือการตัดสินใจเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ผลดีที่สุด โดยอาจสรุปในรูปของหลักการที่จะนำไปอธิบายเป็นคำตอบตลอดจนนำความรู้ไปใช้

Krulik และ Rundnick (1988) ได้นำเสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

ขั้นการอ่านปัญหา (Read) ผู้เรียนสามารถอ่านปัญหา และทำความเข้าใจกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ชัดเจน โดยสามารถระบุคำสำคัญ (keyword) ที่จำเป็นต่อการแก้ปัญหาได้

ขั้นการสำรวจปัญหา (Explore) ผู้เรียนสามารถระบุรายละเอียดของปัญหา และสามารถจัดข้อมูลของปัญหา ซึ่งอาจใช้การวาดรูป การสร้างแผนภาพ หรือตาราง เพื่อให้เข้าใจง่ายยิ่งขึ้น

ขั้นการเลือกกลวิธี (Select a Strategy) ผู้เรียนสามารถเลือกกลยุทธ์ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้โดยอาศัยข้อมูลก่อนหน้า

ขั้นการลงมือปฏิบัติ (Solve) ผู้เรียนสามารถนากลยุทธ์มาดำเนินการประยุกต์ใช้กับปัญหาได้อย่างเหมาะสม

ขั้นการตรวจสอบและขยายผล (Review and Extend) ผู้เรียนมีความสามารถในการตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้เหมาะสม และหากระบวนการในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

กระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เริ่มต้นจากการที่ผู้เรียนได้เผชิญหน้ากับปัญหาและตัดสินใจแก้ปัญหา โดยพิจารณาคำตอบที่ได้รับและพิจารณาเงื่อนไขเบื้องต้นของปัญหาอย่างรอบคอบ จากนั้นผู้เรียนต้องสังเคราะห์ ว่าสิ่งใดที่ได้รับจากการเรียนรู้ พร้อมทั้งสามารถนำไปปรับประยุกต์ใช้ได้กับสถานการณ์ใหม่ๆ และสถานการณ์ที่มีความแตกต่างจากเดิม (Krulik and Rudnick, 1988)

Polya (1985, อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2553) ได้นำเสนอกระบวนการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) เป็นขั้นตอนการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ข้อมูลรายละเอียดของปัญหา โดยผู้เรียนต้องระบุประเภทของปัญหา และแยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบ และส่วนที่กำหนดให้

ขั้นที่ 2 วางแผนงาน (Devising a plan) เป็นขั้นตอนการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา หากไม่สัมพันธ์ผู้เรียนอาจมีการประยุกต์ใช้ความรู้หรือประสบการณ์ที่ตนเองมีเข้ามาช่วยเพื่อนำไปสู่การสร้างแนวทางในการหาคำตอบ

ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน (Carrying out the plan) เป็นขั้นตอนปฏิบัติลงมือ ทำตามแนวทางที่สร้างขึ้น และมีการตรวจสอบในแต่ละขั้นตอนถึงความบกพร่องของงาน วิธีการที่นำไปสู่คำตอบของปัญหา ผู้เรียนต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีมาช่วยในการแก้ปัญหา พร้อมทั้งมีเหตุผลและข้อสรุปเป็นของตนเองได้ บางครั้งอาจไม่สามารถแก้ปัญหาให้สำเร็จได้ ผู้เรียนต้องหาสาเหตุและประโยชน์จากความผิดพลาด เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาครั้งใหม่

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล (Looking back) เป็นขั้นตอนการตรวจสอบคำตอบที่ได้มาจากการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น ว่ามีความสอดคล้อง เหมาะสม สมเหตุสมผลกับข้อมูลและเงื่อนไขที่ได้ระบุไว้ในปัญหาหรือไม่

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2557) กล่าวถึง กระบวนการการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1) **ขั้นทำความเข้าใจปัญหา** ผู้เรียนจะต้องวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหาประเด็นต่าง ๆ เช่น คำถามของปัญหาคืออะไร ข้อมูลที่กำหนดให้มีอะไรบ้าง

2) **ขั้นการวางแผนการแก้ปัญหา** เป็นการคิดวางแผนและออกแบบวิธีการแก้ปัญหา โดยนำข้อมูลที่ได้ผ่านการวิเคราะห์มาปรับกับความรู้และประสบการณ์เพื่อการแก้ปัญหา

3) **ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา** เป็นการลงมือแก้ปัญหาตามแนวทางที่ได้กำหนดไว้ และมีการตรวจสอบผลที่ได้ว่ามีความความถูกต้องและสมเหตุสมผลหรือไม่

4) **ขั้นตรวจสอบการแก้ปัญหา** เป็นการประเมินผลของการแก้ปัญหา ทั้งด้านผลลัพธ์และกระบวนการ รวมทั้งการนำไปประยุกต์ใช้และขยายผลสู่การสถานการณ์ปัญหาอื่น ๆ

สรุปได้ว่า ขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไปจะเริ่มต้นจากการทำความเข้าใจเพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ถึงที่มาและบริบทปัญหา นำไปสู่การวางแผนและการดำเนินการแก้ปัญหา และสุดท้ายคือการตรวจสอบผลที่ได้ว่ามีข้อบกพร่องหรือข้อดีอย่างไร เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้วิธีการและนำไปปรับใช้ในปัญหาอื่น ๆ ซึ่งกระบวนการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ Polya ถือเป็นที่ใช้กันอย่างแพร่หลายตั้งแต่อดีตจนปัจจุบัน

3.4 เกณฑ์ในการวัดทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การแก้ปัญหาเป็นความสามารถเฉพาะตัวของบุคคลที่จะแก้ปัญหาได้ตามความสามารถของตนเอง ดังนั้นการวัดทักษะในการคิดแก้ปัญหาเป็นเครื่องมือในการช่วยตรวจสอบได้ว่า ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับใด และ ผู้เรียนมีความบกพร่องทางด้านใด ผู้สอนสามารถนามาใช้ในการพัฒนาผู้เรียนได้ตรงจุด และ ส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนให้ดียิ่งขึ้น โดยแบบวัดจำเป็นต้องมีวิธีการที่ดีเพื่อให้ได้ผลที่ใกล้ความเป็นจริงมากที่สุด ซึ่งการวัดความสามารถในการคิดแก้ปัญหานั้นจะเน้นให้ผู้เรียนรู้จักปัญหา สามารถนำมาวิเคราะห์หาสาเหตุและดำเนินการแก้ปัญหาต่อไป ซึ่งนักการศึกษาได้ทำการพัฒนาแบบวัดทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ อย่าง Polya (1957 อ้างถึงในสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551) กล่าวถึง การวัดความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์วัดตาม 4 ขั้นตอน อันประกอบด้วย **ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา** เป็นขั้นเริ่มต้นโดยผู้ที่ต้องการแก้ปัญหาต้องทำการวิเคราะห์และทำความเข้าใจให้ได้ว่า ปัญหานั้นกำหนดสิ่งใดให้บ้างและต้องการให้หาอะไร สิ่งที่กำหนดให้จาก ปัญหากับสิ่งที่โจทย์ถามเกี่ยวข้องหรือมีความสัมพันธ์กันอย่างไร **ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา** ผู้ที่ต้องการแก้ปัญหาหรือผู้เรียนต้องเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้กับสิ่งที่ต้องการหา จะดำเนินการหาคำตอบของปัญหานั้นได้อย่างไร โดยเลือกกลยุทธ์ที่จะนำมาใช้แก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนลงมือปฏิบัติการแก้ปัญหาตามแนวทาง หรือกลยุทธ์ที่ได้เลือกไว้นำไปสู่การหาคำตอบของปัญหานั้นได้ อาจให้ผู้ที่ต้องการแก้ปัญหา หรือผู้เรียนหากลยุทธ์แก้ปัญหาใหม่ที่แตกต่างจากวิธีนี้อีกหลายๆ วิธี เพื่อเป็นการพัฒนาแนวคิดในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายต่อไป และ **ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบ** เป็นการนำคำตอบที่หาได้ไปตรวจสอบความถูกต้องโดยการทำย้อนกลับจากคำตอบไปสู่สิ่งที่กำหนดให้ ว่ามีความสมเหตุสมผลหรือไม่

ในด้านของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathematics : NCTM) กล่าวถึง การวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน มีดังนี้ 1) สามารถสร้างความรู้ใหม่ๆ ทางคณิตศาสตร์ ผ่านการแก้ปัญหาได้ 2) สามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นได้ และสามารถแก้ไขสถานการณ์หรือบริบทอื่น ๆ ที่มีความเกี่ยวข้องกันได้ 3) สามารถประยุกต์ความหลากหลายของวิธีการมาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และ 4) สามารถตรวจสอบและสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

ส่วนในประเทศไทย อัมพร ม้าคนอง (2553) กล่าวถึง การวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ สามารถประเมินได้หลากหลายตามความสามารถดังต่อไปนี้ 1) การแก้ปัญหาได้เป็นความสามารถของผู้เรียนในการหาผลลัพธ์ แนวทางจัดการกับปัญหา 2) การสร้างโจทย์หรือประเด็นปัญหา เป็นความสามารถในการเชื่อมโยงข้อมูลที่มีอยู่ เพื่อหาความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้ อันจะนำไปสู่การสร้างโจทย์ ปัญหา สถานการณ์ หรือคำถาม 3) การใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลายเป็นความสามารถแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการที่แตกต่างกันหลายวิธี 4) การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ เป็นความสามารถในการพิจารณา คำตอบหรือการแก้ปัญหาที่ได้ว่าเหมาะสม สอดคล้อง และสมเหตุสมผลเพียงใด และ5) การขยายความคิดจากผลการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการนำผลจากการแก้ปัญหาไปคิดต่อ

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถวัดได้จากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสิ่งสำคัญที่จะกล่าวได้ว่าผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้มากน้อยเพียงใดจะขึ้นอยู่กับเกณฑ์ที่ผู้สอนเป็นผู้สร้างขึ้น เพื่อใช้ในการตรวจสอบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน โดยนักการศึกษาได้ทำการออกแบบเกณฑ์การวัดไว้อย่างมากมาย ดังนี้

นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552) กล่าวถึง เกณฑ์คะแนนที่ใช้ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สามารถแบ่งได้ดังนี้

ตารางที่ 3 เกณฑ์คะแนนที่ใช้ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อย่อย	คะแนนเต็ม	ระดับคะแนน	ระดับพฤติกรรมที่แสดงออกถึงทักษะในการแก้ปัญหา
1. ทำความเข้าใจปัญหา หรือวิเคราะห์ปัญหา	1	0	ผู้เรียนไม่บอกสิ่งที่กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถาม หรือบอกได้ไม่ถูกต้อง
		0.5	ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถาม ได้ถูกต้องบางส่วน หรือไม่ครบถ้วน
		1	ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และบอกสิ่งที่โจทย์ถาม ได้ถูกต้องและครบถ้วน
2. วางแผนแก้ปัญหา	2	0	ผู้เรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่ทำเลย
		1	ผู้เรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาซึ่งอาจนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้อง แต่มีบางส่วนผิดโดยอาจแสดงลำดับการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือเขียนในรูป วิธีการทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง
		2	ผู้เรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาได้เหมาะสม เช่น แสดงขั้นตอนการดำเนินการแก้ปัญหาตามลำดับก่อนหลัง หรือเขียนในรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ถูกต้อง
3. ดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ	2	0	ผู้เรียนแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง/ไม่มีร่องรอยการแก้ปัญหา
		0.5	ผู้เรียนแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วนแต่ไม่สำเร็จ
		1	ผู้เรียนดำเนินการแก้ปัญหาถูกต้องบางส่วนแต่ไม่สำเร็จ
		1.5	ผู้เรียนดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนหรือคิดคำนวณได้ถูกต้อง แต่สรุปคำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ครบถ้วน
		2	ผู้เรียนแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้หรือคิดคำนวณได้อย่างถูกต้อง พร้อมทั้งสรุปคำตอบได้ถูกต้องและครบถ้วน

ตารางที่ 3 (ต่อ) เกณฑ์คะแนนที่ใช้ในการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อย่อย	คะแนนเต็ม	ระดับคะแนน	ระดับพฤติกรรมที่แสดงออกถึงทักษะในการแก้ปัญหา
4. ตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบ	1	0	ผู้เรียนตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบไม่ถูกต้อง ไม่ครบถ้วน หรือไม่มีการตรวจสอบเลย
		0.5	ผู้เรียนแสดงการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา และคำตอบได้ถูกต้อง และสมเหตุสมผลแต่ไม่ครบถ้วน
		1	ผู้เรียนแสดงการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา และคำตอบได้ถูกต้อง สมเหตุสมผล และครบถ้วน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546) เสนอแนวคิดว่าครูผู้สอนและผู้เรียนอาจร่วมกันประเมินผลการแก้ปัญหาได้ตามแนวทางการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มีขั้นตอนในการดำเนินการ 4 ขั้นตอน คือ 1) การทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นเริ่มต้นของปัญหา นักเรียนต้องวิเคราะห์ให้ได้ว่า ปัญหากำหนดสิ่งใดให้ ต้องการหาอะไร และหาความสัมพันธ์ของสิ่งที่ปัญหากำหนดกับสิ่งที่ปัญหาต้องการ 2) การวางแผน เป็นขั้นเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่กำหนดให้กับสิ่งที่ต้องการหาแล้วหาวิธีการ กลยุทธ์ที่จะนำมาใช้แก้ปัญหา 3) การดำเนินการแก้ปัญหา เป็นขั้นลงมือปฏิบัติการแก้ปัญหาตามแนวทางหรือกลยุทธ์ที่เลือกไว้นำมาใช้แก้ปัญหาจนได้มาซึ่งคำตอบ และ 4) การตรวจความถูกต้อง เป็นขั้นทำย้อนกลับจากคำตอบไปสู่สิ่งที่กำหนดให้เพื่อดูความสมเหตุสมผล

การประเมินผลตามรายการประเมินดังกล่าว ครูจะต้องกำหนดเกณฑ์การให้คะแนนที่มีรายละเอียดไม่มากจนเป็นการสร้างแรงกดดันให้กับผู้เรียน แต่ครูควรมีการบันทึกเพิ่มเติมในกรณีที่ผู้เรียนมีหลักฐาน เพื่อปรับปรุงแก้ไขวิธีแก้ปัญหาให้มีความเหมาะสม

ในเวลาต่อมาสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2557) กล่าวถึงเกณฑ์การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นเกณฑ์การประเมินผลแบบ Analytic Scoring ที่พิจารณาได้จากประเด็นดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4 ตัวอย่างเกณฑ์การประเมินผลแบบ Analytic Scoring สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2557)

รายการประเมิน	**ระดับคุณภาพ**	**เกณฑ์การพิจารณา**
ความเข้าใจปัญหา	3 (ดี) 2 (พอใช้) 1 (ต้องปรับปรุง)	- เข้าใจปัญหาได้ถูกต้องชัดเจน - เข้าใจปัญหาได้ถูกต้องเป็นบางส่วน - ไม่เข้าใจปัญหา
การเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา	3 (ดี) 2 (พอใช้) 1 (ต้องปรับปรุง)	- เลือกวิธีการแก้ปัญหาถูกต้องและเหมาะสมกับปัญหา - เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องแต่ยังไม่เหมาะสมหรือไม่ครอบคลุมประเด็นปัญหา - เลือกวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้องหรือไม่สามารถเลือกได้
การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา	3 (ดี) 2 (พอใช้) 1 (ต้องปรับปรุง)	- นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้อย่างถูกต้องและแสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหาได้ชัดเจน - ใช้วิธีการแก้ปัญหาถูกต้องแต่ลำดับขั้นตอนไม่ชัดเจน - นำวิธีการไปใช้ไม่ถูกต้อง/ไม่แสดงลำดับขั้นตอน
การสรุปคำตอบ	3 (ดี) 2 (พอใช้) 1 (ต้องปรับปรุง)	- สรุปคำตอบได้ถูกต้องสมบูรณ์ - สรุปคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน/ไม่ครบถ้วน - สรุปคำตอบได้ไม่ถูกต้อง หรือ ไม่มีการสรุปคำตอบ

ส่วนกรมวิชาการ (2546) ได้นำเสนอเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยเทียบกับเกณฑ์ระดับคะแนน ดังนี้

ตารางที่ 5 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกรมวิชาการ

คะแนน	**ความหมาย**	**ทักษะในการแก้ปัญหา**
4	ดีมาก	สามารถใช้วิธีการแก้ปัญหาสำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ อธิบายเหตุผลการใช้วิธีแก้ปัญหาได้อย่างชัดเจน
3	ดี	สามารถใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ แต่น่าจะอธิบายเหตุผลในการใช้วิธีดังกล่าวได้ดีกว่านี้
2	พอใช้	มียุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จเพียงบางส่วน อธิบายเหตุผลในการใช้วิธีดังกล่าวได้บางส่วน
1	ต้องปรับปรุง	มีร่องรอยการแก้ปัญหาบางส่วน เริ่มคิดว่าทำไมต้องใช้วิธีการนั้น แล้วหยุด อธิบายต่อไม่ได้ แก้ปัญหาไม่สำเร็จ
0	ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ข้างต้นหรือไม่มีร่องรอยการแก้ปัญหา

สุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552) ได้สร้างเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบบวิธี (Analytical Method) ดังนี้

ตารางที่ 6 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบบวิธีของ สุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552)

ทักษะในการทำความเข้าใจปัญหาหรือวิเคราะห์ปัญหา	**คะแนน**
(1) วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้	
- บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องและครบถ้วน	1
- บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องเพียงบางส่วน	0.5
- บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ถูกต้องหรือไม่สามารถระบุได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรให้	0
(2) วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์ถาม	
- บอกสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องและครบถ้วน	1
- บอกสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้องเพียงบางส่วน	0.5
- บอกสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้องหรือไม่สามารถระบุได้เลยว่าโจทย์กำหนดอะไรให้	0
ทักษะในการวางแผนแก้ปัญหา	**คะแนน**
- แสดงการวางแผนแก้ปัญหาและเขียนในรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง	4
- แสดงขั้นตอนการวางแผนแก้ปัญหาได้เพียงบางส่วน แต่เขียนในรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง	3
- แสดงขั้นตอนวางแผนแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง แต่เขียนวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง/แสดงขั้นตอนการวางแผนได้ถูกต้อง แต่เขียนวิธีการทางคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง	2
- แสดงขั้นตอนวางแผนแก้ปัญหาได้บางส่วนแต่เขียนวิธีการทางคณิตศาสตร์ไม่ได้	1
- แสดงขั้นตอนการวางแผนแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงเลย	0
ทักษะในการดำเนินการแก้ปัญหาและหาคำตอบ	**คะแนน**
(1) การดำเนินการแก้ปัญหา	
- ดำเนินการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้ หรือคิดคำตอบได้ถูกต้อง	4
- ดำเนินการแก้ปัญหาได้ถูกต้องเพียงบางส่วน แต่ไม่สำเร็จ	2
- ดำเนินการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหา	0
(2) การสรุปคำตอบ	
- สรุปคำตอบได้ถูกต้องและครบถ้วน	2
- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง แต่ไม่ครบถ้วน	1
- สรุปคำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่สรุปคำตอบ	0

ตารางที่ 6 (ต่อ) เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แบบวิธีของสุพัตรา จอมคำสิงห์ (2552)

ทักษะในการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและหาคำตอบ	คะแนน
- ตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา คำตอบมีความสมเหตุสมผลและถูกต้องสมบูรณ์	3
- ตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา คำตอบมีความสมเหตุสมผล ถูกต้องแต่ไม่สมบูรณ์	1.5
- ตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหา และคำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่มีการตรวจสอบเลย	0

อัมพร ม้าคนอง (2546) กล่าวถึง เกณฑ์การประเมินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สำหรับแบบทดสอบที่มีลักษณะเป็นข้อเขียน อาจทำได้หลากหลายวิธี โดยวิธี Analytic Scoring เป็นการให้คะแนนแต่ละขั้นตอนของการแก้ปัญหา ผู้สอนจะต้องกำหนดไว้ล่วงหน้า ถึงขั้นตอนที่จะมอบหมายให้กับผู้เรียนและทราบว่าการให้คะแนนในแต่ละขั้นตอนมีลักษณะ อย่างไร ตัวอย่างการให้คะแนนในลักษณะดังกล่าว มีดังต่อไปนี้

ตารางที่ 7 การให้คะแนนโดยใช้ Analytic Scoring ของอัมพร ม้าคนอง (2546)

ขั้นทำความเข้าใจปัญหา	0: ไม่เข้าใจปัญหาใด ๆ เลย 1: เข้าใจปัญหาเป็นบางส่วน 2: เข้าใจปัญหาทั้งหมด
ขั้นวางแผนแก้ปัญหา	0: แผนการแก้ปัญหาไม่มีความเหมาะสม 1: ใช้ข้อมูลจากปัญหาวางแผนการแก้ปัญหาถูกต้องเป็นบางส่วน 2: คำตอบถูกต้องสมบูรณ์
ขั้นหาคำตอบ	0: ไม่ได้คำตอบหรือคำตอบผิด 1: ได้คำตอบผิดจากการคำนวณผิดแต่มีบางส่วนถูกต้อง 2: คำตอบมีความถูกต้องสมบูรณ์

จากข้างต้นจะเห็นว่าเกณฑ์ในการให้คะแนนของแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีหลากหลาย ผู้สอนจะเลือกใช้เกณฑ์ในการให้คะแนนต้องขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์และความเหมาะสม ผู้วิจัยจึงสร้างเกณฑ์การวัดทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงที่ได้จากการสังเคราะห์วิธีการวัดทักษะการแก้ปัญหาของนักการศึกษาหลาย ๆ ท่าน ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 8 เกณฑ์คะแนนที่ใช้ในการวัดทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะ	คะแนนเต็ม	ระดับคะแนน	ระดับพฤติกรรมที่แสดงออกถึงทักษะในการแก้ปัญหา
1. ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา	2	0	ผู้เรียนไม่สามารถระบุรายละเอียดของปัญหาที่ต้องการแก้ได้
		1	ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหาถูกต้องบางส่วนและสามารถบอกส่วนที่ต้องการหาคำตอบหรือส่วนที่กำหนดให้ได้ถูกต้องเพียงบางส่วน
		2	ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหาถูกต้องและครบถ้วน และสามารถแยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้ได้ถูกต้องและครบถ้วน
2. ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา			
2.1 ทักษะการเชื่อมโยงความรู้	2	0	ผู้เรียนแก้ปัญหาทันทีโดยไม่มีการวางแผนหรือเชื่อมโยงความรู้กับปัญหาในการแก้ปัญหา
		1	ผู้เรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาโดยมีการเชื่อมโยงข้อมูลกับปัญหาและประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการแก้ปัญหาแต่มีวิธีการบางส่วนที่ไม่ถูกต้องหรือเขียนวิธีการทางคณิตศาสตร์บางส่วนไม่ถูกต้อง
		2	ผู้เรียนมีการวางแผนแก้ปัญหาโดยมีการเชื่อมโยงข้อมูลกับปัญหาและประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ถูกต้องและครบถ้วนสมบูรณ์ หรือเขียนรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง

ตารางที่ 8 (ต่อ) เกณฑ์คะแนนที่ใช้ในการวัดทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะ	คะแนนเต็ม	ระดับคะแนน	ระดับพฤติกรรมที่แสดงออกถึงทักษะในการแก้ปัญหา
2.2 ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด	2	0	ผู้เรียนแก้ปัญหาโดยไม่มีการสร้างแบบจำลองทางความคิด
		1	ผู้เรียนมีการสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหา แต่แบบจำลองทางความคิดยังไม่ถูกต้องและเหมาะสม
		2	ผู้เรียนสามารถสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางหาคำตอบได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง
2.3 ทักษะในการปฏิบัติ	2	0	ผู้เรียนดำเนินการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง เมื่อเกิดข้อผิดพลาดผู้เรียนไม่สามารถประยุกต์ใช้ความรู้ในการลงมือแก้ปัญหาจนได้คำตอบที่ถูกต้องได้
		1	ผู้เรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่วางไว้บางส่วน เมื่อเกิดข้อผิดพลาดผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ในการลงมือแก้ปัญหาได้บางส่วน
		2	ผู้เรียนสามารถลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น มีการตรวจสอบความถูกต้องและข้อบกพร่องและสามารถปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างคล่องแคล่วจนสามารถแก้ปัญหาหรือคิดคำนวณได้อย่างถูกต้อง
3. ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้	2	0	ผู้เรียนไม่สามารถสามารถสรุปคำตอบได้ ไม่มีการตรวจสอบกระบวนการและคำตอบที่ได้ และไม่สามารถบอกแนวทางนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ
		1	ผู้เรียนสามารถสรุปคำตอบได้ถูกต้อง แสดงการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบถูกต้องบางส่วน สามารถเรียนรู้และปรับแก้ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นได้บางส่วน
		2	ผู้เรียนสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน มีการแสดงการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบที่ถูกต้องได้อย่างสมเหตุสมผลและครบถ้วน สามารถเรียนรู้และปรับแก้ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นและบอกแนวทางการนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ

4. ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต

4.1 ความเป็นมาและพัฒนาการความคิดทางเรขาคณิต

เรขาคณิต (Geometry) มาจากภาษากรีกโบราณสองคำ คือ Geo ซึ่งแปลว่า โลก (Earth) และคำว่า Metron ที่แปลว่า การวัด (Measurement) โดยเรขาคณิตเป็นองค์ความรู้ที่เกิดขึ้นอย่างอิสระจากการปฏิบัติ แพร่หลายช่วงต้นศตวรรษที่ 6 ก่อนคริสตกาล เป็นแขนงความรู้ทางคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่ศึกษาเกี่ยวกับรูปร่าง ขนาด ตำแหน่ง คุณสมบัติเชิงมิติ ความยาว พื้นที่และปริมาตร (Turner, Blackledge, & Andrews, 1998) โดยความคิดทางเรขาคณิตตั้งแต่อดีตถึงปัจจุบันมีการเปลี่ยนแปลงดังต่อไปนี้ (สมพร เรืองโชติวิทย์, 2523 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545)

เรขาคณิตสมัยแรกเริ่ม ที่เริ่มต้นจากการสังเกตและประสบการณ์ในการทำความเข้าใจรูปทรงต่าง ๆ ที่อยู่ในธรรมชาติ เช่น วงกลมมาจากพระอาทิตย์ พระจันทร์ เส้นโค้งจากดอกไม้ ใบไม้ไปจนถึงการสังเกตการก่อสร้างที่พักอาศัย ความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ทำให้มนุษย์กำหนดมาตรฐานการวัดเพื่อใช้อำนวยความสะดวก เช่น การวัดความยาวและระยะทางอาศัยการเปรียบเทียบความยาวของส่วนต่าง ๆ ของร่างกาย ดังปรากฏในแผ่นจารึกที่ทำด้วยดินเหนียวเผาไฟของบาบิโลเนีย ที่ทำให้มนุษย์รุ่นหลังทราบว่าประมาณ 4000 ก่อนคริสตกาล ชาวบาบิโลนสามารถวัดพื้นที่ต่าง ๆ และมีวิธีหาพื้นที่รูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย ๆ ได้ เช่น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รวมทั้งวงกลม โดยที่เขาสมมติว่าสวรรค์หมุนรอบแผ่นดินในเวลา 360 วันหรือ 1 ปี ด้วยเหตุนี้เขาจึงแบ่งวงกลมออกเป็น 360 ส่วน ซึ่งต่อมาได้กลายเป็นระบบองศาในการวัดมุมในสมัยปัจจุบันและประมาณ 2900 ก่อนคริสตกาลในเวลาต่อมา เป็นสมัยของอียิปต์มีความเจริญทางเรขาคณิตซึ่งสังเกตได้จากการสร้างพีระมิด การหาพื้นที่ของรูปทรงต่าง ๆ โดยอียิปต์มีความรู้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว 3 4 และ 5 หน่วย เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เขาได้ ใช้เชือกผูกเป็นปม ความยาวระหว่างปมมีความเท่ากัน ทำให้สามารถสร้างมุมฉากขึ้นได้ จากหลักฐานต่าง ๆ ที่แสดงถึงความเจริญของบาบิโลเนียและอียิปต์ที่เป็นเรขาคณิตเชิงวิทยาศาสตร์ แต่ยังไม่มีการพิสูจน์ใด ๆ ที่เป็นหลักฐานชัดเจน (สมพร เรืองโชติวิทย์, 2523 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545)

เรขาคณิตของชาวกรีกสมัยแรก เริ่มเมื่อประมาณ 600-700 ก่อนคริสตกาล นักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกได้เดินทางมาศึกษาวิชาการต่าง ๆ ที่อียิปต์ โดยผู้ที่มีชื่อเสียงเด่นทางเรขาคณิต คือ ทาเลสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus, 640 – 550 ก่อนคริสตกาล) มีความเป็นอัจฉริยะหลายอย่าง เช่น ความสามารถในการวัดความสูงของพีระมิดได้ โดยใช้หลักรูปสามเหลี่ยมคล้าย วิชาเรขาคณิตจึงได้มีความแพร่หลายไปยังกรีก และนำไปสู่การประยุกต์ในการให้เหตุผลตามหลักตรรกวิทยาเพื่อใช้พิสูจน์เรขาคณิต ทำให้เรขาคณิตเปลี่ยนมาเป็นเรขาคณิตอย่างมีระบบ (systematic geometry) มากยิ่งขึ้น ในขณะนั้นมีนักเรขาคณิตที่สำคัญอีกบุคคลหนึ่ง คือ ปีธากอรัส (Pythagoras, 572 – 500 ก่อนคริสตกาล) ซึ่งเป็นลูกศิษย์ของทาเลส ได้จัดตั้งโรงเรียนที่มีชื่อเสียงที่เมืองโครโตนา

ทางใต้ของอิตาลี เพื่อทำการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ปรัชญา และวิทยาศาสตร์ธรรมชาติ ทำให้เกิดความรู้ใหม่ ๆ ในวิชาเรขาคณิตหลายประการ เช่น คุณสมบัติของเส้นขนาน สัดส่วนของรูปเหลี่ยมคล้าย พื้นที่รูปต่าง ๆ และรูปทรงสามมิติ และที่สำคัญคือทฤษฎีปีธากอเรียน (Pythagorean Theorem) ที่มีชื่อเสียงมาจนปัจจุบัน ในเวลาต่อมาประมาณ 470 ก่อนคริสตกาล ฮิปโปเครเตส (Hippocrates of Chios) แห่งเมืองชิออสได้เขียนตำราเรขาคณิตเล่มแรกขึ้น พลาโต (Plato) เกิดความสนใจ จึงค้นหาหลักเกณฑ์การให้เหตุผลในเชิงตรรกวิทยาสำหรับพิสูจน์เรขาคณิต ต่อมาอริสโตเติล (Aristotle, 384 – 322 B.C.) ศิษย์ของพลาโต ได้เขียนหนังสือเกี่ยวกับเรขาคณิตและฟิสิกส์ และหลังจากสมัยของอริสโตเติลแล้ว มหาวิทยาลัยอเล็กซานเดรีย (Alexandria) ของอียิปต์มีความเจริญทางเรขาคณิต จึงทำให้ความเจริญทางเรขาคณิตได้ย้อนกลับไปสู่อียิปต์อีกครั้งหนึ่ง (สมพร เรืองโชติวิทย์, 2523 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545)

สมัยต่อมาเป็น**สมัยของยูคลิดและอาคิมิดิส (Euclid and Archimedes)** นักคณิตศาสตร์ผู้ยิ่งใหญ่ ในช่วง 330 - 275 ก่อนคริสตกาล เขียนตำรามีชื่อเสียง คือ หนังสือเอลิเมนส์ (Elements) เป็นตำราเกี่ยวกับเรขาคณิตและพีชคณิต โดยอาคิมิดิส (287 - 212 B.C.) เป็นนักวิทยาศาสตร์และนักประดิษฐ์ที่เขียนตำราต่าง ๆ ไว้มากทั้งวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ รวมทั้งมีผลงานเด่น ๆ ทางเรขาคณิตหลายชิ้น เช่น การเป็นผู้ริเริ่มคำนวณค่า π ว่าอยู่ระหว่าง $\frac{223}{71}$ กับ $\frac{22}{7}$ ซึ่งวิธีการคำนวณค่า π ยังมีผู้ทำอยู่เสมอ ใน ค.ศ. 1961 มีผู้หาค่า π ได้ถึงทศนิยม 100,265 ตำแหน่ง นอกจากนี้อาคิมิดิสยังได้คิดสูตรพื้นที่รูปสามเหลี่ยม และได้คำนวณหาพื้นที่ปริมาตรของรูปทรงเรขาคณิตต่าง ๆ ต่อมาเอราโตสเทเนส (Eratosthenes, 276 – 194 B.C.) เพื่อนของอาคิมิดิส สามารถคำนวณหาเส้นรอบวงและเส้นผ่านศูนย์กลางของโลกได้คือได้เส้นรอบวง 24,662 ไมล์ ซึ่งผิดไปเพียง 2 เปอร์เซ็นต์ หลังจากยุคของยูคลิดและอาคิมิดิส มีนักคณิตศาสตร์ที่สำคัญ คือ อโปโลนิอุส แห่งเมืองเปอร์กา (Apollonius of Perga, 262 – 200 B.C.) เขาได้พัฒนาเรขาคณิตขั้นสูง เขียนตำราเกี่ยวกับเส้นโค้งและภาคตัดกรวย หลังจากนั้นปัปปุส (Pappus, - 300 A.D.) ได้พัฒนาเรขาคณิตขั้นสูงและภาคตัดกรวย เขาได้ค้นพบทฤษฎีที่ใกล้เคียงกับรากฐานของแคลคูลัส (ยุวรรณดา พรหมนิวาส, 2553)

ในระหว่างสมัยเสื่อมของจักรวรรดิโรมัน (ศตวรรษที่ 5 – 11) และเป็นยุคมืด (Dark Ages) ของยุโรปเป็นยุคของ**เรขาคณิตท่ามกลางพวกอาหรับและฮินดู** ที่ศิลปวิทยาการต่าง ๆ หยุดชะงักเพราะขัดกับแนวความคิดทางศาสนาในขณะนั้น โดยพวกอาหรับได้เรียนรู้เรขาคณิต ตรีโกณมิติ และดาราศาสตร์ จากพวกกรีก ส่วนความรู้ทางเลขคณิต และพีชคณิต (algebra) ชาวอาหรับได้เรียนรู้จากชาวฮินดู นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียชื่ออารยภัต (Aryabhata, 476 A.D.) ได้เขียนตำราเกี่ยวกับเรขาคณิตที่นำไปประยุกต์กับวิชาดาราศาสตร์ จากนั้นชาวอาหรับและฮินดูได้แปลและคัดลอกตำราทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์เพื่อใช้เรียนกันอย่างแพร่หลาย

ในปลายศตวรรษที่ 11 เป็นช่วง**เรขาคณิตในสมัยกลาง (Middle Ages)** มีผู้นำวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของกรีกมาเผยแพร่ในยุโรป และในศตวรรษที่ 12 ได้มีการแปลหนังสือจากภาษาอาหรับเป็นภาษาละตินกว่า 90 ฉบับ ในยุโรปจึงได้เริ่มใช้ระบบตัวเลขของฮินดูอาราบิก จนต่อมาศตวรรษที่ 13 มีมหาวิทยาลัยต่าง ๆ เกิดขึ้น เช่น มหาวิทยาลัยปารีส ออกซฟอร์ด แคมบริดจ์ ปาดัว และเนเปิล เป็นต้น มีการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัย จนศตวรรษที่ 15 เป็นสมัยเริ่มฟื้นฟูศิลปวิทยาการของยุโรป พวกเติร์กลี้ภัยมาอยู่อิตาลีจำนวนมาก ได้นำเอาวัฒนธรรม วิชาการของกรีกมาเผยแพร่ จึงได้มีการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งเลขคณิต พีชคณิต และเรขาคณิตในโรงเรียนทั่วไป (ยุวรรณดา พรหมนิวาส, 2553)

ช่วงพัฒนาการแนวใหม่ของเรขาคณิต เจราด์ เดสาร์ก (Geard Desargues, 1593 – 1662) วิศวกรและสถาปนิกชาวฝรั่งเศสได้พัฒนาแนวคิดของยูคลิดเกี่ยวกับระบบตรรกวิทยาของเรขาคณิต ทำให้ค้นพบเรขาคณิตแบบใหม่ที่เรียกว่า เรขาคณิตโปรเจกตีฟ (Projective Geometry) และมีนักคณิตศาสตร์รุ่นต่อมาได้ขยายความรู้ในวิชานี้ให้กว้างขวางขึ้น ได้แก่ แบลซ์ ปาสคาล (Blaise Pascal) และจองวิกเตอร์ปองเซเล (Jean-Victor Poncelet) ต่อมากาสปาด์ มองเย (Gaspard Monge) ได้พัฒนาวิชานี้ไปสู่เรขาคณิตอีกแบบหนึ่งเรียกว่า เรขาคณิตเดสคริปตีฟ (Descriptive Geometry) (ยุวรรณดา พรหมนิวาส, 2553)

แนวคิดเกี่ยวกับเรขาคณิตตั้งแต่สมัยแรกเริ่มจนถึงปัจจุบันนี้ได้พัฒนาไปอย่างกว้างขวาง ต่อมาในการศึกษาเรขาคณิตก่อนศตวรรษที่ 17 เป็นการศึกษาคุณสมบัติเมตริก (metric properties) ซึ่งเป็นการศึกษาเกี่ยวกับระยะทาง ระบบการวัดต่าง ๆ เช่น ความยาวของส่วนของเส้นตรง พื้นที่และขนาดของมุม ปริมาตรของรูปทรงต่าง ๆ ในช่วงนั้นนักคณิตศาสตร์ได้เพิ่มความสนใจในการศึกษาคุณสมบัตินอนเมตริก (nonmetric properties) ของรูปทรงต่าง ๆ ทำให้เกิดเรขาคณิตแบบนอนเมตริกขึ้น ได้แก่ เรขาคณิตโปรเจกทีฟ เรขาคณิตแอฟไฟน์ (Affine geometry) และโทโพโลยี (ยุวรรณดา พรหมนิวาส, 2553)

สรุปได้ว่า เรขาคณิตเกิดขึ้นและเป็นที่แพร่หลายในอียิปต์โบราณเมื่อประมาณ 600 - 700 ปีก่อนคริสต์ศักราช ชาวอียิปต์และชาวบาบิโลนต่างสนใจเรขาคณิตในแง่การนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์แก่การดำรงชีวิต เช่น การวัดพื้นที่ การสร้างที่อยู่อาศัย เป็นต้น ซึ่งเป็นความรู้ที่ได้เฉพาะจากการใช้สัญชาตญาณ การทดลอง และการคาดคะเนเท่านั้น จึงทำให้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตจำกัดอยู่ในวงแคบ ๆ ต่อมาชาวกรีกได้ให้ความสนใจเรขาคณิต และศึกษาเรื่องราวปรากฏการณ์ธรรมชาติ แสวงหาวิธีการความจริงซึ่งอยู่ในรูปของการให้เหตุผล นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกผู้มีชื่อเสียงอย่างยูคลิด (Euclid) ได้รวบรวมเขียนตำราที่เป็นการวางพื้นฐานการเรียนเรขาคณิตที่ใช้ในการพิสูจน์อย่างมีเหตุผลจากสัจพจน์ (axiom หรือ postulate) จากนั้นเรขาคณิตจึงมีวิวัฒนาการต่อมาเรื่อย ๆ จนปัจจุบัน ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตมีบทบาทสำคัญในการดำเนินชีวิตของมนุษย์ เนื่องจากมนุษย์ปรับใช้พื้นฐานความรู้

ทางเรขาคณิตเพื่ออำนวยความสะดวกในชีวิต เช่น การสร้างผังเมือง สร้างถนน และการพัฒนาอุปกรณ์ เครื่องมือต่าง ๆ นอกจากนี้เรขาคณิตช่วยพัฒนาทักษะที่สำคัญหลายประการ เช่น การคิด การให้เหตุผล การคิดสร้างสรรค์ ตลอดจนทักษะเชิงมิติสัมพันธ์ โดยในระดับประถมศึกษา ผู้เรียนจะได้เรียนรู้เรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง และเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ในระดับสูงขึ้น โดยเริ่มจากเนื้อหาที่ผู้เรียนสามารถเรียนรู้หลักการทางเรขาคณิตได้จากประสบการณ์ หรือจากการทดลองกับสิ่งที่เป็นรูปธรรมหลาย ๆ กรณี เพื่อนำไปสู่การสรุปหลักการที่สำคัญ มีการบอกหรืออธิบายเหตุผล แต่ยังไม่ถึงขั้นการพิสูจน์ ลักษณะเนื้อหาดังกล่าวอาจเรียกว่า Informal Geometry เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิต สามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ ผู้เรียนจะต้องลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ที่ท้าทาย ผู้เรียนจะต้องทำการสืบค้น ทดลอง และสำรวจสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น ฝึกการมองภาพ วาดภาพ เปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ กัน กิจกรรมดังกล่าวนี้จะช่วยพัฒนาความสามารถทางมิติสัมพันธ์ (สสวท., 2556)

4.2 ความสำคัญและจุดมุ่งหมายของเรขาคณิต

4.2.1 ความสำคัญของเรขาคณิต

นักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตไว้อย่างเช่นเรวิลลี (Ravielli, 1957) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตว่า เรขาคณิตเป็นเครื่องมือที่จำเป็นอย่างมากสำหรับมนุษยชาติ เรขาคณิตเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ เนื่องจากมีการนำเรขาคณิตไปใช้ประโยชน์มากมาย เช่น ในการก่อสร้าง ในด้านวิศวกรรม ในการสำรวจ ในด้านดาราศาสตร์ เป็นต้น เช่นเดียวกับเสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์ (2519 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตสรุปได้ว่า เรขาคณิตมีความสำคัญมากตั้งแต่สมัยอดีต ความเจริญของอียิปต์และบาบิโลเนียล้วนแต่ต้องอาศัยเรขาคณิต ดังจะสังเกตจากปิรามิดของอียิปต์ การใช้เรขาคณิตของชาวบาบิโลนในการวัดพื้นที่ ในขณะที่ปานทอง กุลนาถศิริ (2541) ได้กล่าวถึงความสำคัญของเรขาคณิตว่า เรขาคณิตเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในทุกระดับ เรขาคณิตเป็นศาสตร์ที่มีความหมาย มีคุณค่า มีประโยชน์ และมีความผูกพันกับชีวิตมนุษย์มานับเป็นเวลานานจากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าเรขาคณิตมีความสำคัญอย่างมากต่อมนุษย์ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน เรขาคณิตสามารถนำมาประยุกต์ใช้ให้เป็นประโยชน์ได้อย่างมากมาย

นอกจากนี้ ความสามารถทางเรขาคณิตจะนำไปสู่การพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของมนุษย์ ดังที่ National Research Council (2001) กล่าวว่า เรขาคณิตเป็นเส้นทางที่จะนำไปสู่พัฒนาการความเข้าใจทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ เพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมสำหรับหลักสูตรคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ในอนาคต ผู้เรียนทุกคนควรจะได้เรียนรู้รูปทรงทางเรขาคณิตและ

ความสัมพันธ์เชิงมิติสัมพันธ์ ใช้หลักการมองเห็น ใช้การให้เหตุผลเชิงมิติสัมพันธ์ และใช้แบบจำลองในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต สอดคล้องกับ Ontario Ministry of Education (2005 อ้างถึงในศรีสมัย ดวงมณี, 2558) กล่าวว่า ความรู้สึกเชิงมิติสัมพันธ์ (Spatial Sense) เป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับความเข้าใจและเห็นคุณค่าในแง่มุมต่าง ๆ ทางเรขาคณิตบนโลก ข้อมูลเชิงลึกและสัญชาตญาณเกี่ยวกับคุณลักษณะของรูปทรง 2 มิติ และ 3 มิติ ความสัมพันธ์ของรูปทรงและผลของการเปลี่ยนแปลงรูปทรง มีความสำคัญต่อความรู้สึกเชิงมิติสัมพันธ์ เรขาคณิตและความรู้สึกเชิงมิติสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์สำหรับเด็กที่มีความอยากรู้อยากเห็นเกี่ยวกับโลก ประสบการณ์การเรียนรู้ในห้องเรียนสามารถสร้างให้ผู้เรียนเข้าใจเกี่ยวกับเรขาคณิตได้ดี ดังนี้ คือ 1) รับรู้และเห็นคุณค่าของเรขาคณิตบนโลก 2) พัฒนาทักษะการใช้เหตุผลและการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับความคิดทางเรขาคณิต 3) ปรับใช้ความคิดทางเรขาคณิตในศาสตร์อื่น ๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น การวัดความยาว ปริมณฑลและพื้นที่ของรูปทรง เป็นต้น และ 4) ปรับใช้ความคิดทางเรขาคณิตในวิชาหรือศาสตร์อื่น ๆ เช่น สร้างสรรค์ผลงาน 2 มิติ และ 3 มิติ ในงานศิลปะการพัฒนาทักษะทางสังคมศึกษา โครงสร้างในด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี เป็นต้น

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องสามารถที่จะสรุปได้ว่าเรขาคณิตเป็นสิ่งที่สำคัญต่อชีวิตประจำวัน เป็นเส้นทางที่จะนำไปสู่พัฒนาความเข้าใจมิติทั้ง 2 มิติ และ 3 มิติ เพื่อเป็นการเตรียมความพร้อมพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ในอนาคตให้แก่ผู้เรียน อีกทั้งยังเป็นการพัฒนาความสัมพันธ์เชิงมิติสัมพันธ์ ใช้หลักการมองเห็น ใช้การให้เหตุผลเชิงมิติสัมพันธ์ และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิตในการแก้ปัญหา เพื่อผู้เรียนสามารถนำพื้นฐานความรู้ไปปรับใช้ในการดำเนินชีวิตได้

4.2.2 จุดมุ่งหมายของเรขาคณิต

หากกล่าวถึงจุดมุ่งหมายที่สำคัญของการสอนเรขาคณิตให้แก่ผู้เรียน จะพบว่ามีนักการศึกษาได้นำเสนอประเด็นเหล่านี้ไว้เช่นมานะ เอกจริยวงศ์ (2537) ได้กล่าวถึงจุดมุ่งหมายของการสอนเรขาคณิตในโรงเรียนว่าเรขาคณิตเป็นวิชาที่เรียนรู้ผ่านทางการมองเห็น หรือที่เรียกว่า Visual Subject การสอนเรขาคณิตควรมีจุดมุ่งหมาย คือ 1) เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความตระหนักถึงคุณค่าและประโยชน์ของเรขาคณิตต่อการดำเนินชีวิตประจำวัน 2) เพื่อเป็นการพัฒนาและท้าทายความคิดทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังช่วยปลูกฝังความสามารถเชิงปริภูมิให้แก่ผู้เรียน ในส่วนที่เป็นการใช้ภาพ และความสามารถในการคิดเชิงนามธรรม จะต้องอาศัยองค์ประกอบด้านภาษาเพื่อการใช้เหตุผล 3) เพื่อพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ และผู้เรียนเห็นความสำคัญของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และ 4) เพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางเรขาคณิตกับคณิตศาสตร์แขนงอื่น ๆ อันเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา ซึ่งโกมล ไพศาล (2540) ได้เสนอแนะว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตควรดำเนินการดังนี้ กำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ ทบทวนความรู้ที่เป็นพื้นฐานของสิ่งที่จะเรียนต่อไป

จากนั้นจัดกิจกรรมที่นักเรียนต้องศึกษาโดยการสังเกต และการสำรวจ เพื่อให้เห็นแนวทางในการสรุปมโนมติหรือแก้ปัญหาโจทย์ และสุดท้ายคือสอนบทนิยาม ทฤษฎีบทที่ให้ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในแต่ละขั้นตอนจนกระทั่งได้ข้อสรุปที่ต้องการ โดยวรรณวิภา สุทธเกียรติ (2542) ได้กล่าวถึงการเรียนการสอนเรขาคณิตเพิ่มเติมว่า ต้องอาศัยบทบาทของครูในการกำหนดกิจกรรม การวางขั้นตอนที่เหมาะสม รวมทั้งบทบาทในการกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความต้องการที่จะเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และให้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเองเพื่อค้นพบสิ่งใหม่ ๆ ซึ่งเป็นสิ่งท้าทายความสามารถ ความอยากรู้อยากเห็นตามลักษณะของวัยของนักเรียน เพื่อทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น และยังส่งผลให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีจินตนาการพร้อมที่จะแก้ปัญหาต่าง ๆ และเพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิตสามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ สมเดช บุญประจักษ์ (2544) กล่าวว่าผู้เรียนจะต้องได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่ท้าทาย ผู้เรียนจะต้องทำการสืบค้น ทดลองและสำรวจสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น ฝึกการมองภาพสร้างภาพ และเปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ กัน

4.3 ระดับความคิดทางเรขาคณิต

ปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ (Pierre van Hiele & Dina van Hiele) ได้แบ่งระดับความคิดทางเรขาคณิตจากระดับต่ำสุดไปสู่ระดับสูงสุดเป็น 5 ระดับ (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545) มีรายละเอียดในแต่ละระดับดังนี้

ระดับ 0 : ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก หรือ Visualization เป็นระดับที่ผู้เรียนเรียนรู้รูปร่าง รูปทรงที่เป็นรูปธรรมจากการมองเห็น โดยเรียนรู้จากรูปร่างภายนอก จากนั้นเรียนรู้คำศัพท์ที่ใช้เรียกรูปเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ และระดับความคิดในระดับนี้ยังรวมถึงการจำแนกรูปร่างจำลองและวาดภาพรูปเรขาคณิตได้ แต่ยังไม่สามารถบอกคุณสมบัติของรูปเรขาคณิตได้

ระดับ 1 : ระดับการวิเคราะห์ หรือ Analysis เป็นระดับการวิเคราะห์ความคิดรวบยอดโดยผ่านการสังเกตและการทดลอง มีการพัฒนาความคิดที่มากกว่าลักษณะภายนอก แต่เริ่มมองเห็นคุณลักษณะ สมบัติของรูป เมื่อผู้เรียนได้รับตัวอย่างที่หลากหลาย ผู้เรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของรูปเรขาคณิตและจำแนกกลุ่มของรูปต่าง ๆ ได้ตามคุณสมบัติได้

ระดับ 2 : ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน หรือ Informal Deduction ในระดับนี้ผู้เรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของสมบัติต่าง ๆ ของรูปได้ ทั้งสมบัติภายในของรูป คุณสมบัติภายนอก และสามารถจำแนกรูปต่าง ๆ ได้ตามสมบัติอย่างเข้าใจ แต่ยังไม่สามารถสรุปความสัมพันธ์อย่างเป็นแบบแผนได้ ไม่สามารถให้เหตุผลเชิงโครงสร้างได้และยังไม่สามารถสรุปโดยใช้นิยาม ทฤษฎีบทได้

ระดับ 3 : ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน หรือ Formal Deduction เป็นขั้นที่ผู้เรียนมีพัฒนาการที่ดีขึ้น ผู้เรียนสามารถใช้นิยาม ทฤษฎีบทมาอ้างอิงในการสรุปปัญหาทางเรขาคณิตได้ ที่สำคัญ ผู้เรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ที่หลากหลายโดยใช้ความเข้าใจและการอ้างเหตุผล และสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทกลับได้

ระดับ 4 : ระดับการคิดสุดยอด หรือ Rigor ผู้เรียนมีสามารถในการบูรณาการความรู้ทางเรขาคณิตเพื่อการปรับใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ และบูรณาการความรู้กับศาสตร์อื่น ๆ ได้ อีกทั้งสามารถเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะที่เป็นนามธรรม โดยไม่ต้องใช้ตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม และสามารถพิสูจน์แบบขัดแย้ง และพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ได้

สรุปได้ว่า ระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ แบ่งเป็น 4 ระดับ คือ ระดับการวิเคราะห์ ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน ระดับการคิดสุดยอด ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน

จากรูปแบบในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ได้เป็นต้นแบบในการกำหนดระดับความคิด ในเวลาต่อมาได้มีการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต แบ่งออกเป็น 3 แบบ ดังนี้

แบบที่ 1 เป็นแบบดั้งเดิมที่แวนฮีลี่กำหนด ใช้หมายเลข 0 – 4 ในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 5 ระดับ ได้แก่ ระดับ 0 หมายถึง ระดับการมองเห็นสิ่งที่เป็นรูปธรรม, ระดับ 1 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์, ระดับ 2 หมายถึง ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน, ระดับ 3 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน และ ระดับ 4 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (Crowley, 1987 ; Burger & Shaughnessy, 1986)

แบบที่ 2 ใช้หมายเลข 1 - 5 ในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 5 ระดับ ดังนี้ ระดับ 1 หมายถึง ระดับการจำแนกออก ซึ่งระดับนี้เหมือนกับระดับ 0 ในแบบที่ 1, ระดับ 2 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์, ระดับ 3 หมายถึง ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน, ระดับ 4 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน และ ระดับ 5 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (Swafford, Jones & Thornton, 1997)

และ**แบบที่ 3** ใช้หมายเลข 0 – 5 ในการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตทั้ง 6 ระดับ ดังนี้ ระดับ 0 หมายถึง ระดับก่อนการจำแนกออก ระดับนี้นักเรียนสังเกตเพียงลักษณะภายนอกของรูปร่างที่มองเห็น แต่ไม่สามารถบอกความแตกต่างระหว่างรูปได้, ระดับ 1 หมายถึง ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก, ระดับ 2 หมายถึง ระดับการวิเคราะห์, ระดับ 3 หมายถึง ระดับการคิดแบบนามธรรม, ระดับ 4 หมายถึง ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน และ ระดับ 5 หมายถึง ระดับการคิดสุดยอด (Clements and Battista, 1992 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิต แบ่งออกเป็น 3 แบบ โดยมีต้นแบบมากจากการกำหนดระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ อย่างไรก็ตามผู้เรียนแต่ละคนอาจมีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่างกัน ซึ่งจะมีความสามารถต่างกัน แต่ผู้เรียนสามารถและพัฒนาระดับการคิดของตนได้

4.4 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาเรขาคณิต

ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิต ครูผู้สอนเป็นผู้มีบทบาทสำคัญจัดลำดับและถ่ายทอดเนื้อหาสาระที่สอดคล้องกับระดับความสามารถของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีความรู้ ความเข้าใจเนื้อหาสาระ ได้อย่างถูกต้องและมีเจตคติที่ดีต่อเรื่องเรขาคณิตและเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ จึงมีการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความรู้เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาเรขาคณิตไว้ดังนี้

ยุพิน พิพิธกุล (2530) ได้กล่าวถึง วิธีการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยแยกเป็น 3 ลักษณะ คือ

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังต่อไปนี้ 1) ให้ผู้เรียนค้นพบเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การสร้าง การใช้เหตุผลและการใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป 2) ให้ผู้เรียนแยกเหตุและผล 3) ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และ 4) เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุแล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และการสังเคราะห์ร่วมกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด โดยให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผลหรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกแยะได้ จะต้องพยายามฝึกจนกว่าจะแยกได้ จากนั้นให้ผู้เรียนเขียนรูปประกอบ และสุดท้ายเป็นขั้นตอนการพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์หรือใช้วิธีวิเคราะห์ รวมกับสังเคราะห์ ซึ่งต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง โดยผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับผู้เรียนก็สร้างตามผู้สอนจะเขียนกระดาน แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อม ๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วก็มาถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรเป็นการเสียเวลา และพิสูจน์จะใช้วิธีวิเคราะห์หรือสังเคราะห์อยู่ในดุลพินิจของผู้สอน

Sidhu (1981) ได้แนะนำการสอนเรขาคณิตดังนี้ คือ 1) งานที่ให้ผู้เรียนฝึกทำควรได้สัดส่วนและชัดเจน 2) ครูควรให้ผู้เรียนสังเกตสิ่งต่าง ๆ ด้วยตัวเอง โดยการทดลองวัดจริงหรือประสบการณ์ 3) กระดานดำที่ใช้ควรได้สัดส่วน สะอาดและถูกต้องเพื่อหลีกเลี่ยงความสงสัยและความเข้าใจผิดของผู้เรียน ขณะเดียวกันครูควรใช้ภาษาที่ถูกต้องชัดเจน และใช้ชอล์กสีเพื่อเน้นรายละเอียดที่สำคัญ 4) การให้แบบฝึกหัดผู้เรียน ไม่ควรทิ้งค้างไว้เพื่อให้ทำตอนท้ายของภาคเรียน แต่ควรจะให้ทำพร้อมกับทฤษฎีบทนั้น 5) ควรฝึกผู้เรียนให้เขียนรูปจากทฤษฎีบทและแบบฝึกหัดที่เห็นสมควรแล้วแต่กรณีในเบื้องต้นการสร้างทั้งหมดควรใช้วงเวียนและไม้บรรทัด 6) ครูควรมีการทบทวน โดยการถามผู้เรียนเกี่ยวกับทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่ได้เรียนผ่านมาแล้วเท่าที่สามารถกระทำได้ 7) ศัพท์ทางเรขาคณิตครูผู้สอนต้องนำมาใช้ให้ถูกต้อง 8) ครูผู้สอนควรสนับสนุนผู้เรียนให้แสดงเนื้อหาสาระ โดยการเขียนรูป การสร้างและถ้อยคำเท่าที่เป็นไปได้ และ 9) ครูผู้สอนควรให้ผู้เรียนสรุปผลลัพธ์สุดท้ายด้วยตนเอง

Simmons (1992) ได้เสนอกิจกรรมซึ่งสามารถนำมาใช้ประโยชน์สำหรับการเริ่มต้นบทเรียนโดย 1) การกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน 2) การเสนอเค้าโครงย่อประเด็นหลักของบทเรียน 3) ใช้การอุปมาอุปมัย เป็นการสร้างสถานการณ์ของหัวข้อเรื่องใหม่ให้สัมพันธ์กับประสบการณ์ของผู้เรียน ตลอดจนบางสิ่งที่คุ้นเคยกับผู้เรียน และ 4) การทบทวนสิ่งที่เกี่ยวข้องกับงานก่อนหน้า เช่น การทบทวนที่เกี่ยวกับความรู้โดยตรงทักษะ หรือความเข้าใจ

การพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตจากระดับหนึ่งไปสู่อีกระดับหนึ่งสามารถทำได้โดยการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสมโดยครูผู้สอน ซึ่งปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ ได้เสนอขั้นตอนการสอนเพื่อพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิต 5 ขั้นตอน (van Hiele - Geldof, 1984a and van Hiele, 1984b cited in Crowley, 1987; Teppo, 1999 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545) ดังนี้

ขั้นที่ 1 การใช้คำถามเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน (Inquiry /Information) ครูและผู้เรียนมีส่วนร่วมในการสนทนาและมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม โดยการสังเกตและใช้คำถาม ซึ่งจุดมุ่งหมายของกิจกรรมนี้ คือ 1) ครูได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นความรู้ดั้งเดิมของนักเรียนเกี่ยวกับหัวข้อนี้ และ 2) นักเรียนได้เรียนรู้สิ่งที่เป็นแนวทางการศึกษาเพิ่มเติม

ขั้นที่ 2 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง (Directed Orientation) ครูให้ผู้เรียนสำรวจหัวข้อของการศึกษาผ่านสื่อที่ครูจัดให้ ขั้นกิจกรรมนี้ควรจะแสดงให้นักเรียนเห็นลักษณะโครงสร้างอย่างค่อยเป็นค่อยไป

ขั้นที่ 3 การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น (Explication) เพื่อสร้างประสบการณ์จากประสบการณ์เดิมของผู้เรียน โดยให้ผู้เรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับสิ่งที่ได้จากการสังเกต ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนใช้ภาษาที่ถูกต้องและเหมาะสมในการอภิปรายซึ่งกันและกัน และอภิปรายร่วมกับครู ซึ่งบทบาทของครูจะลดลง

ขั้นที่ 4 การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ (Free Orientation) ผู้เรียนต้องเผชิญกับงานมีความซับซ้อนมากขึ้น ทำให้ผู้เรียนได้ประสบการณ์ในการค้นพบวิธีแก้ปัญหาด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนมีความชัดเจนเกี่ยวกับสิ่งที่ศึกษามากขึ้น

ขั้นที่ 5 การสรุปรวม (Integration) ผู้เรียนสรุปสิ่งที่ได้เรียนมาทั้งหมด โดยเป็นการทบทวนสิ่งที่ได้เรียนรู้ในการทำกิจกรรมตั้งแต่เริ่มต้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าขั้นตอนการสอนของปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ แบ่งออกเป็น 5 ขั้น คือ 1) การใช้คำถามเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน 2) การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างมีทิศทาง 3) การแลกเปลี่ยนความคิดเห็น 4) การเรียนรู้สิ่งใหม่อย่างอิสระ 5) การสรุปรวมโดยในแต่ละขั้นครูจะต้องเตรียมกิจกรรมที่เหมาะสมและเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนการสอนซึ่งทำให้นักเรียนได้พัฒนาความคิดทางเรขาคณิต

กิจกรรมสำหรับผู้เรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่างกันก็จะต่างกัน โดยการจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับผู้เรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตต่ำกว่าระดับ 4 จะทำให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตระดับความคิดทางเรขาคณิตตามแนวคิดของปิแอร์ แวนฮีลี่ และไดน่า แวนฮีลี่ไปสู่ระดับที่สูงกว่าได้ จนในที่สุดสามารถพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตไปสู่ระดับ 4 ซึ่งเป็นระดับสูงที่สุดได้ ซึ่งการจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับผู้เรียนที่มีระดับความคิดทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 0 - 3 (Crowley, 1987 อ้างถึงใน กุลยา เหมวัสดุกิจ, 2545) มีแนวทางดังนี้

ระดับ 0 ระดับการมองเห็นรูปธรรมภายนอก โดยกิจกรรมควรส่งเสริมให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมดังต่อไปนี้

1. ระบายสี พับ และสร้างรูปเรขาคณิต

2. ระบุรูปร่างของรูปเรขาคณิต เช่น ครูอาจจะให้นักเรียนวาดรูปง่าย ๆ พลิกรูปกลับไปมา ให้นักเรียนบอกวัตถุที่เกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตนั้นซึ่งอยู่ในห้องเรียน ที่บ้าน ในรูปถ่ายและอื่น ๆ หรือครูอาจจะให้ผู้เรียนบอกชื่อรูปเรขาคณิตที่อยู่ในรูปเรขาคณิตชนิดอื่น

3. สร้างรูป เช่น ครูให้ผู้เรียนคัดลอกรูปบนกระดาษจุด กระดาษตาราง หรือกระดาษลอกลาย

4. บรรยายรูปและใช้ภาษาที่เหมาะสมทั้งภาษาที่เป็นมาตรฐาน และ ภาษาที่ไม่เป็นมาตรฐาน เช่น ลูกบาศก์เหมือนกล่อง

5. แก้ปัญหาโดยการวัดและการนับ เช่น การหาพื้นที่โดยใช้การนับกระเบื้อง

ระดับ 1 ระดับการวิเคราะห์ ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

1. วัด ระบายสี พับ ตัด ใช้โมเดลและกระเบื้องเพื่อจะระบุสมบัติของรูป เช่น การพับรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวตามแนวเส้นทแยงมุมเพื่อตรวจสอบการสมมาตร

2. บรรยายรูปโดยใช้สมบัติ เช่น ถ้าไม่มีรูปคุณจะบรรยายให้คนที่ไม่เห็นรูปทราบได้อย่างไร

3. เปรียบเทียบรูปตามสมบัติของรูปเหล่านั้น เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนคล้ายกันอย่างไร และถ้ามองที่มุมสี่เหลี่ยม 2 รูปนี้แตกต่างกันอย่างไร

4. คัดเลือกรูปโดยใช้คุณลักษณะเพียงอย่างเดียว เช่น ให้รูปสี่เหลี่ยมมาหลายชนิดและให้บอกจำนวนของรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน หรือ จำนวนของรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมเป็นมุมฉาก

5. ระบุและวาดรูปโดยใช้การบอกปากเปล่าหรือการเขียนบรรยายสมบัติของรูป เช่น ผู้เรียนบรรยายสมบัติของรูปและให้ผู้เรียนคนอื่นตอบว่ารูปที่เป็นไปได้ตามสมบัติที่บรรยายได้แก่รูปอะไรบ้าง

6. บอกชื่อรูปจากสิ่งที่มองเห็น โดยให้ผู้เรียนเห็นส่วนของรูปทีละน้อยและนักเรียนตอบว่าเป็นรูปอะไร

7. ฝึกการสังเกต เช่น การใช้กระเบื้องเพื่อวัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

8. บอกสมบัติซึ่งใช้แสดงลักษณะหรือเปรียบเทียบกลุ่มของรูปที่แตกต่างโดยครูให้ผู้เรียนสำรวจความสัมพันธ์ระหว่างเส้นทแยงมุมกับรูปโดยใช้กระดาษยาว 2 ชิ้น เพื่อแสดงให้เห็นว่า เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันและมุมที่เส้นทแยงมุมตัดกันเป็นมุมฉาก และเมื่อเปลี่ยนขนาดของมุมและเส้นทแยงมุมจะได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

9. ค้นหาสมบัติที่ไม่คุ้นเคย เช่น จากสิ่งที่เป็นตัวอย่างและสิ่งที่ไม่เป็นตัวอย่างของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และตัดสินสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

10. ใช้คำศัพท์และสัญลักษณ์อย่างเหมาะสม

ระดับ 2 ระดับการอนุมานที่ไม่เป็นแบบแผน ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

1. ศึกษาความสัมพันธ์ สรุปและประยุกต์ เช่น ใช้บัตรคำ

2. ใช้กลุ่มของสมบัติน้อยที่สุดเพื่อบรรยายรูป เช่น ครูให้ผู้เรียนแข่งขันและตรวจสอบซึ่งกันและกัน ครูถามผู้เรียนว่าผู้เรียนจะบรรยายรูปให้คนอื่นทราบได้อย่างไร ใช้ขั้นตอนเพียง 2 – 3 ขั้นได้หรือไม่ ใช้ขั้นตอนที่แตกต่างกันหรือไม่

3. พัฒนาและใช้นิยาม เช่น ครูถามผู้เรียนว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสคืออะไร

4. ติดตามการสรุปอย่างไม่เป็นทางการ

5. แสดงการสรุปอย่างไม่เป็นทางการโดยใช้แผนภาพ (diagrams) ชิ้นส่วนที่ตัดออกมา (cut – out) แผนภูมิขั้นตอนการดำเนินงาน (flow charts) หรือใช้แผนที่บรรพบุรุษ (ancestry mapping) เช่น ใช้การ์ดและลูกศรเพื่อแสดงว่ามุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลรวมของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

6. ติดตามการสรุปอย่างเป็นทางการ เช่น ครูให้ผู้เรียนหาขั้นตอนที่ขาดหายไป

7. หาวิธีการแก้ปัญหามากกว่า 1 วิธี เช่น ครูให้ผู้เรียนบอกนิยามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมา 2 วิธี

8. อภิปรายข้อความและบทกลับของข้อความนั้น เช่น ครูให้ผู้เรียนเขียนบทกลับของข้อความที่ว่า ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่งแล้ว มุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180 องศา

9. แก้ปัญหาเกี่ยวกับสมบัติของรูป

ระดับ 3 ระดับการอนุมานที่เป็นแบบแผน ในระดับนี้ครูควรจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในสิ่งต่อไปนี้

1. บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ เช่น ครูให้โจทย์ปัญหามาและให้นักเรียนบอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์

2. บอกข้อมูลที่ได้จากรูปและข้อมูลที่ให้มา เช่น ครูให้รูป □ABCD ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนรู้จากรูปนี้ เขียนในรูป ถ้า...แล้ว... โดยใช้รูปที่ให้มาเป็นพื้นฐาน

3. แสดงความเข้าใจความหมายของอนิยาม บทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท เช่น ครูให้ข้อความและถามว่าข้อความใดเป็นบทนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบทเพราะเหตุใด

4. แสดงความเข้าใจเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่เพียงพอ เช่น ครูให้ผู้เรียนเขียนนิยามของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังต่อไปนี้ a) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า b) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน c) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ d) รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

5. ฝึกการพิสูจน์

6. เปรียบเทียบการพิสูจน์ที่แตกต่างกัน

7. ใช้เทคนิคการพิสูจน์ที่หลากหลาย เช่น การสังเคราะห์ การแปลงเวกเตอร์

8. บอกขั้นตอนการพิสูจน์ เช่น ถ้าพิสูจน์เกี่ยวกับเส้นขนานให้พยายามใช้มุมแย้ง มุมภายนอกกับมุมภายใน หรือการหมุน 180 องศา

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครูผู้สอนควรคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและจัดกิจกรรมที่เหมาะสมกับผู้เรียน เพื่อการพัฒนาระดับความคิดทางเรขาคณิตให้เพิ่มขึ้นและพัฒนาเจตคติที่ดีในการเรียนเรขาคณิต

4.5 สาระการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตระดับประถมศึกษา

นิยามของคำว่าเรขาคณิต (Geometry) ที่ De Klerk (2009) กล่าวว่า เรขาคณิตเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติและการวัด เช่น ภาพ 3 มิติ (Solid) พื้นผิว (Surfaces) เส้น (Line) มุม (Angles) และรูปทรงเชิงมิติ (Space) ในขณะที่ Spelke, Lee, and Izard (2010) กล่าวว่าองค์ความรู้หลักเกี่ยวกับเรขาคณิตแบ่งได้ 2 ประเภท คือ รูปทรงเรขาคณิตที่มีขนาดใหญ่ และรูปทรงเรขาคณิตที่มีขนาดเล็กในรูปแบบวัตถุที่สามารถเคลื่อนย้ายได้ ซึ่งจะประกอบไปด้วยเรขาคณิตแบบยูคลิด 3 ประเภทพื้นฐานที่มีความสัมพันธ์กัน ได้แก่ ระยะห่าง (หรือ ความยาว) มุม และทิศทาง และ Smith (2013) ได้สรุปว่า เรขาคณิตเกี่ยวข้องกับ จุด (Points) และกลุ่มของจุด เช่น เส้น (Lines) ระนาบ (Planes) และพื้นผิว (Surfaces) บางแนวคิดในเรขาคณิตเรียกว่า อนิยาม (Undefined Terms) เช่น จุด (Point) เส้น (Lines) และระนาบ (Planes) เรขาคณิตสามารถแยกออกเป็นสองประเภทกว้าง ๆ ได้แก่ 1) แบบดั้งเดิม (Traditional) เป็นเรขาคณิตของยูคลิด และ 2) แบบการเปลี่ยนแปลง (Transformational) หรือ เรขาคณิตนอกยูคลิด เป็นวิธีการทางพีชคณิตที่มากกว่าวิธีการแบบยูคลิด ซึ่งมีรายละเอียดต่าง ๆ ดังนี้

1. เรขาคณิตแบบดั้งเดิม (Traditional Geometry) สัจพจน์ของยูคลิด (Euclid's Postulates) มี 5 สัจพจน์ ดังนี้

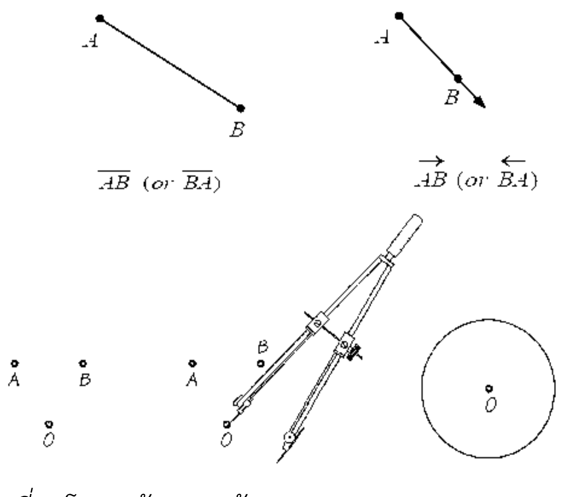
1.1 เส้นตรงสามารถวาดได้โดยวาดเส้นจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง

1.2 เส้นตรงขยายอนันต์ห่างไกลในทิศทางใดทิศทางหนึ่งมีความยาวไม่จำกัด

1.3 วงกลมสามารถอธิบายด้วยจุดศูนย์กลางและรัศมี

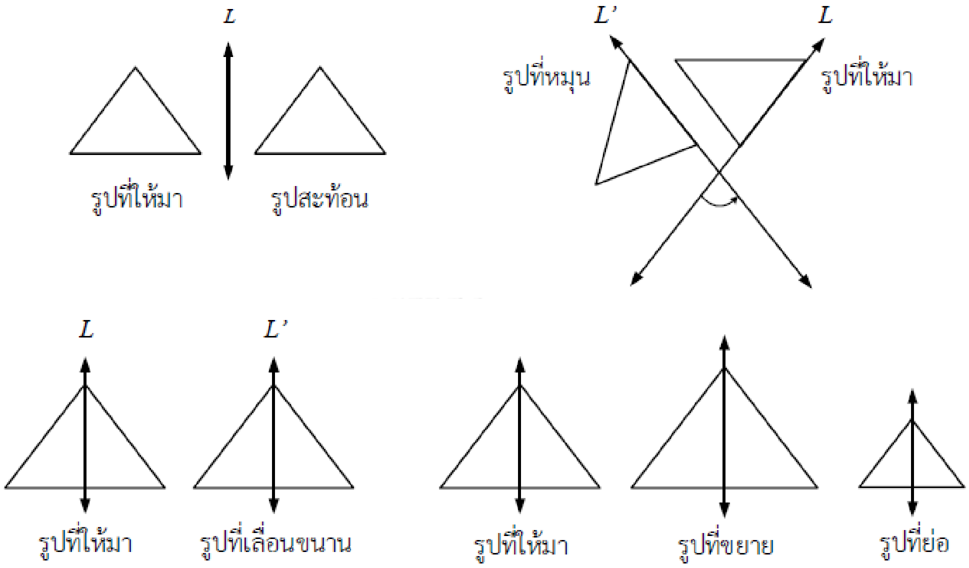
1.4 มุมฉากทุกมุมจะมีค่าเท่ากัน

1.5 กำหนดให้จุดหนึ่ง ซึ่งอยู่บนเส้นตรง จะมีเพียงเส้นหนึ่งและเส้นเดียวเท่านั้นที่สามารถลากผ่านจุดดังกล่าว โดยขนานกับเส้นที่ให้มา



ภาพที่ 8 โครงสร้างของเส้น และวงกลม (Smith, 2013)

2. เรขาคณิตแบบการแปลง (Transformational Geometry) เป็นวิธีการที่จะเปลี่ยนรูปทรงทางเรขาคณิตจากรูปแบบ หนึ่งไปยังอีกรูปแบบหนึ่ง ด้วยวิธีการสะท้อน (Reflection) การหมุน (Rotation) การเลื่อนขนาน (Translations) การขยาย (Dilations) และการย่อ (Contractions)



ภาพที่ 9 การเปลี่ยนแปลงรูปทรงทางเรขาคณิต (Smith, 2013)

สาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้มีการปรับตัวชี้วัดและสาระให้สอดคล้องต่อการส่งเสริม ให้ผู้เรียนมีทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เป็นสำคัญ โดยกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์จัดเป็น 4 สาระ ได้แก่ จำนวนและพีชคณิต การวัดและเรขาคณิต สถิติและความน่าจะเป็น แคลคูลัส ซึ่งสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต จะประกอบด้วยเนื้อหาสาระได้แก่ ความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตรและความจุ เงินและเวลา หน่วยวัดระบบต่าง ๆ การคาดคะเนเกี่ยวกับการวัด อัตราส่วนตรีโกณมิติ รูปเรขาคณิตและสมบัติของ รูปเรขาคณิต การนึกภาพ แบบจำลองทางเรขาคณิต ทฤษฎีบททางเรขาคณิต การแปลงทางเรขาคณิตในเรื่องการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน เรขาคณิตวิเคราะห์ เวกเตอร์ในสามมิติ และการนำความรู้เกี่ยวกับการวัดและเรขาคณิตไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ โดยมาตรฐานการเรียนรู้สำหรับผู้เรียนระดับประถมศึกษาได้แก่ มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด และนำไปใช้ และมาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้ นอกจากนี้หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานฉบับนี้ยังได้กำหนดคุณภาพผู้เรียนในสาระการวัดและเรขาคณิตไว้ดังนี้ เมื่อจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ผู้เรียนสามารถจำแนกและบอกลักษณะของรูปหลายเหลี่ยม วงกลม วงรี ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทรงกลม ทรงกระบอกและกรวย เขียนรูปหลายเหลี่ยม วงกลมและวงรีโดยใช้แบบ

ของรูป ระบุรูปเรขาคณิตที่มี แกนสมมาตรและจำนวนแกนสมมาตร และนำไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ และเมื่อจบชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ผู้เรียนจะสามารถอธิบายลักษณะและสมบัติของรูปเรขาคณิต หาความยาวรอบรูปและพื้นที่ของรูปเรขาคณิต สร้างรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมและวงกลม หาปริมาตรและความจุของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก และนำไปใช้ ในสถานการณ์ต่าง ๆ (สสวท., 2560) ดังนั้นวิธีการจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาผู้เรียนจึงเป็นสิ่งที่ผู้สอนจะต้องให้ความสำคัญและตระหนักถึง และต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระที่ถูกต้อง เพื่อนำไปถ่ายทอดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้องค์ความรู้ที่ถูกต้องและสามารถนำไปต่อยอดความรู้ในอนาคตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ในระดับประถมศึกษา ผู้เรียนจะได้เรียนรู้เรขาคณิตที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริง และเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้ในระดับสูงขึ้น โดยเริ่มจากเนื้อหาที่ผู้เรียนสามารถเรียนรู้หลักการทางเรขาคณิตได้จากประสบการณ์ หรือจากการทดลองกับสิ่งที่เป็นรูปธรรมหลาย ๆ กรณี เพื่อนำไปสู่การสรุปหลักการที่สำคัญ มีการบอกหรืออธิบายเหตุผล แต่ยังไม่ถึงขั้นการพิสูจน์ ลักษณะเนื้อหาดังกล่าวอาจเรียกว่า Informal Geometry หากพิจารณาเนื้อหาสาระของเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาพบว่า สามารถจำแนกออกได้เป็น 3 ส่วน คือ

ส่วนที่ 1 ระนาบ จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง รังสี มุม เส้นขนาน

ส่วนที่ 2 รูปเรขาคณิตสองมิติ

ส่วนที่ 3 รูปเรขาคณิตสามมิติ

เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจเรขาคณิต สามารถใช้ความรู้และเชื่อมโยงความรู้เรขาคณิตกับความรู้แขนงอื่น ๆ ได้ ผู้เรียนจะต้องลงมือปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ต่าง ๆ โดยเริ่มจากกิจกรรมง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ที่ท้าทาย ผู้เรียนจะต้องทำการสืบค้น ทดลอง และสำรวจสิ่งที่อยู่รอบตัว เช่น ฝึกการมองภาพ วาดภาพ เปรียบเทียบรูปร่างในตำแหน่งต่าง ๆ กันกิจกรรมดังกล่าวนี้จะช่วยพัฒนาความสามารถทางมิติสัมพันธ์ หรือความรู้สึกเชิงปริภูมิ หรือ Spatial sense (สสวท., 2560)

ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิตที่ผู้เรียนควรทราบมีดังต่อไปนี้

1) รูปเรขาคณิตสองมิติ

รูปเรขาคณิต 2 มิติ แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ ตามลักษณะของขอบหรือด้านของรูป ได้แก่ กลุ่มที่มีขอบหรือด้านที่เป็นเส้นโค้งงอ เช่น รูปวงกลม รูปวงรี เป็นต้น และกลุ่มที่มีขอบหรือด้านของรูปที่เป็นส่วนของเส้นตรง กลุ่มนี้คือ รูปหลายเหลี่ยม ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม รูปหกเหลี่ยม รูปแปดเหลี่ยม เป็นต้น โดยที่รูปหลายเหลี่ยม เป็นรูปทรงทางเรขาคณิตที่มี 3 ด้าน หรือมากกว่านั้น จุดเริ่มต้นและ จุดสิ้นสุดคือจุดเดียวกัน การเรียกชื่อของรูปหลายคือเรียกตามจำนวนด้าน หรือ จำนวนเหลี่ยม (สิริมณี บรรจง, 2549) โดยรูปเรขาคณิตสองมิติที่ควรทราบมีดังต่อไปนี้

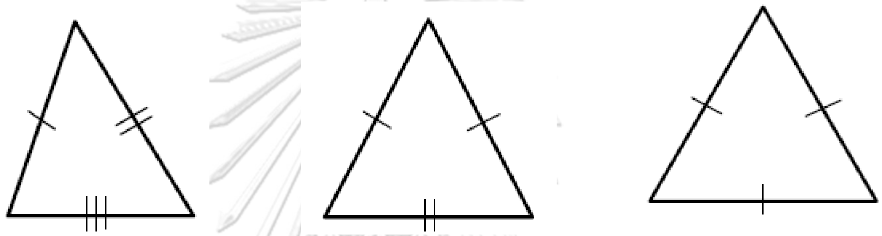
รูปสามเหลี่ยม (Triangles) รูปสามเหลี่ยมเป็นประเภทหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยม ประกอบด้วยด้าน 3 ด้าน และมุม 3 มุม ชนิดของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามลักษณะของด้านและลักษณะของมุม

โดยเมื่อแบ่งตาม**ลักษณะของด้าน**จะแบ่งได้เป็น

1) รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (Scalene Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามด้านยาวไม่เท่ากัน

2) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Isosceles Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันเพียงสองด้าน

3) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (Equilateral Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันทั้งสามด้าน



รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

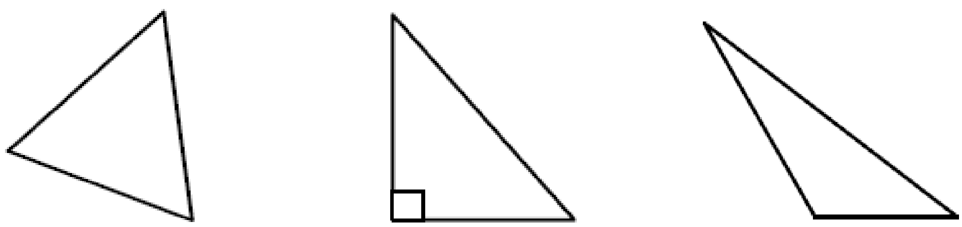
ภาพที่ 10 ประเภทของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามลักษณะของด้าน (Smith, 2013)

โดยเมื่อแบ่งตาม**ลักษณะของมุม**จะแบ่งได้เป็น

1) รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม (Acute Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีทุกมุมน้อยกว่า 90 องศา

2) รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (Right Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มุมหนึ่งมีขนาด 90 องศา

3) รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน (Obtuse Triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มุมหนึ่งมีขนาดมากกว่า 90 องศา



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน

ภาพที่ 11 ประเภทของรูปสามเหลี่ยมแบ่งตามลักษณะของมุม (Smith, 2013)

รูปสี่เหลี่ยม (Quadrilateral) รูปสี่เหลี่ยมเป็นประเภทหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยม ประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน และมุม 4 มุม ดังนี้

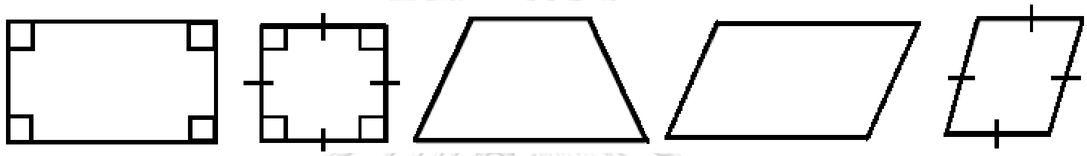
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (Rectangle) เป็นสี่เหลี่ยมด้านตรงข้าม ขนานและทุกมุมเป็นมุมฉาก

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Square) เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านตรงข้ามขนานกัน ทุกมุมเป็นมุมฉากและทุกด้านยาวเท่ากัน

รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid) เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกัน 1 คู่

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (Parallelogram) เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน 2 คู่

รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (Rhombus) เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านตรงข้ามขนานกันและทุกด้านยาวเท่ากัน



รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมคางหมู รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

ภาพที่ 12 ประเภทของรูปสี่เหลี่ยม (Smith, 2013)

การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ทำได้โดยใช้

(1) ความยาวของด้าน

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง × ความยาว

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ความยาวของด้าน × ความยาวของด้าน

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความสูง × ความยาวของฐาน

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน = ความสูง × ความยาวของฐาน

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}$×ความสูง × ผลบวกของความยาวของด้านคู่ที่ขนานกัน

(2) เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่ตัดกันเป็นมุมฉาก

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว

= $\frac{1}{2}$ ×ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ทำได้โดยใช้

(1) ความยาวของด้าน

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ × ความสูง × ความยาวของฐาน

(2) ความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมกับรูปสี่เหลี่ยม

พื้นที่รูปสามเหลี่ยมเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเดียวกัน และสูงเท่ากัน

การหาพื้นที่ของรูปวงกลม

พื้นที่รูปวงกลม = $\pi \times r \times r$ หรือ πr^2

(เมื่อ r คือความยาวของรัศมี และ π มีค่าประมาณ 3.14 หรือ $\frac{22}{7}$)

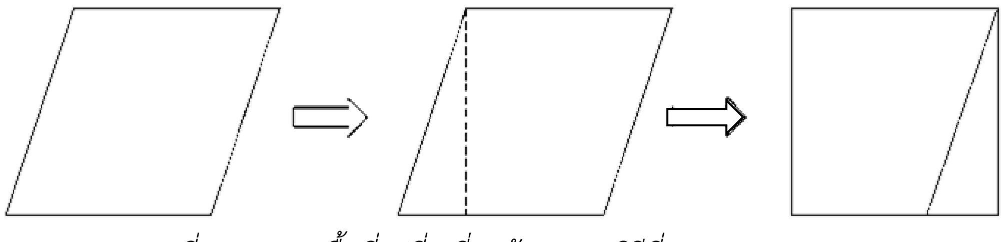
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท., 2556) พัฒนาครูผู้สอนและผู้เรียนในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีให้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระต่าง ๆ และสามารถจัดกระบวนการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีได้อย่างมีประสิทธิภาพ สอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ตามนโยบายยกระดับคุณภาพทางการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจึงได้รวบรวมเนื้อหาและแนะนำวิธีการสอนที่ถูกต้อง เหมาะสมกับบริบทการศึกษาไว้ดังนี้

วิธีการสอนหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ควรเริ่มจากการให้ผู้เรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยการนับตารางก่อน โดยครูติดกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือวาดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนกระดาน ให้ผู้เรียนออกมาตีตาราง แล้วบอกพื้นที่โดยการนับจำนวนตารางหน่วย โดยสังเกตว่าการนับจำนวนตารางหน่วย ใช้วิธีการนับเป็นแถวจะรวดเร็วขึ้น เมื่อนักเรียนหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยการนับจำนวนตารางหน่วยแล้ว ครูจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนหาพื้นที่โดยการนับตาราง และสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ที่นับได้จากกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับผลคูณของความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมนั้น ๆ ซึ่งจะได้ข้อสรุปว่า

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว

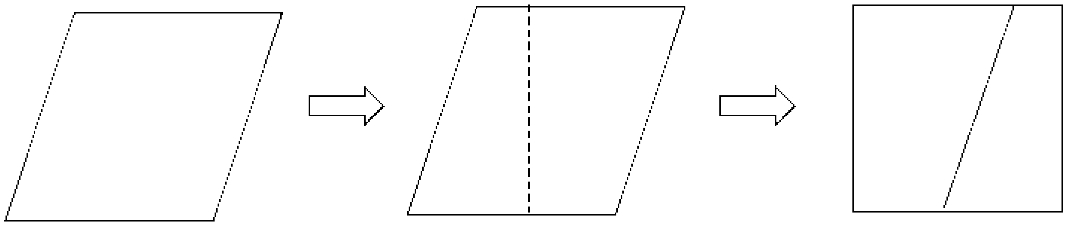
วิธีการสอนหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ครูเริ่มจากการแนะนำส่วนสูงและฐานของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ก่อนจะแสดงให้นักเรียนเห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งสามารถทำได้ 2 วิธี ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 ให้แบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ออกเป็น 2 ส่วน โดยมี 1 ส่วน ต้องเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จากนั้นตัดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ออกเป็น 2 ส่วน ตามที่แบ่ง และนำ 2 ส่วน มาประกอบใหม่ให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



ภาพที่ 13 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานวิธีที่ 1 (สสวท., 2556)

วิธีที่ 2 ให้แบ่งรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ออกเป็น 2 ส่วน โดยไม่มีส่วนใดเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่เมื่อนำทั้ง 2 ส่วนมาประกอบใหม่ แล้วจะต้องได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

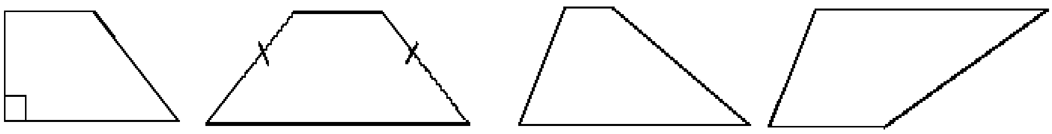


ภาพที่ 14 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานวิธีที่ 2 (สสวท., 2556)

จะเห็นได้ว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างฐานและส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน กับความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับความสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และความยาวของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่ากับความยาวของฐานของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้นจึงได้ **พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความสูง × ความยาวฐาน**

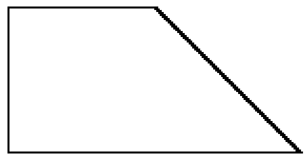
การสอนการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู เริ่มจากการให้ผู้เรียนรู้จักลักษณะของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู คือรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีด้านขนานกันหนึ่งคู่ โดยครูติดรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบต่าง ๆ ให้ดู เช่น



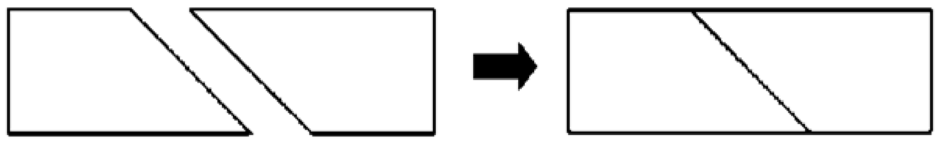
ภาพที่ 15 รูปสี่เหลี่ยมคางหมู (Smith, 2013)

จากนั้นแนะนำให้นักเรียนหาส่วนสูง และด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งจะได้ว่า ด้านคู่ขนานคือด้านตรงข้ามที่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูคือระยะห่างของด้านคู่ขนาน หรือความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับด้านคู่ขนาน เมื่อผู้เรียนรู้จักลักษณะและส่วนประกอบของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแล้ว ครูแสดงให้ผู้เรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เพื่อนำความสัมพันธ์ไปช่วยในการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังนี้

การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 1 มีด้านที่ขนานกัน 1 คู่ มีมุมฉาก 2 มุม

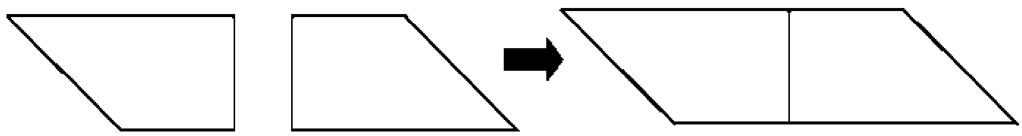


วิธีที่ 1 นำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบเดียวกันมาประกอบเพิ่มเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



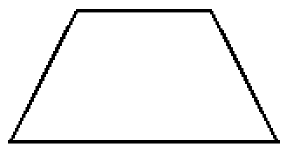
ภาพที่ 16 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูวิธีที่ 1 (สสวท., 2556)

วิธีที่ 2 นำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบเดียวกันมาประกอบเพิ่มเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

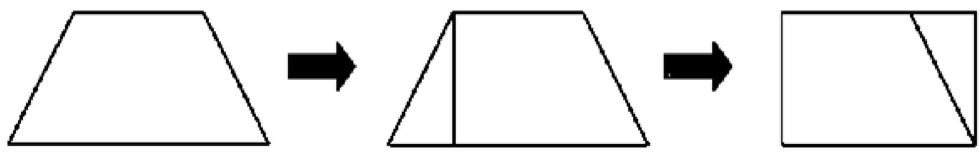


ภาพที่ 17 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูวิธีที่ 2 (สสวท., 2556)

การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 2 มีด้านที่ขนานกัน 1 คู่ และมีแกนสมมาตร 1 แกน

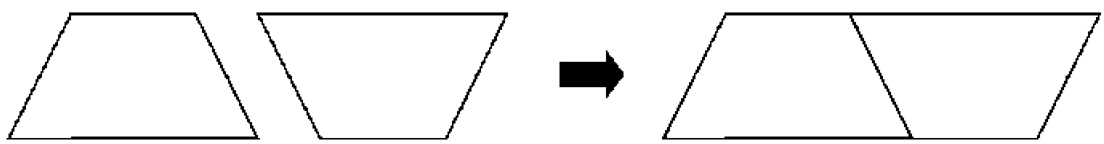


วิธีที่ 1 แบ่งรูปออกเป็น 2 ส่วน แล้วประกอบใหม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก



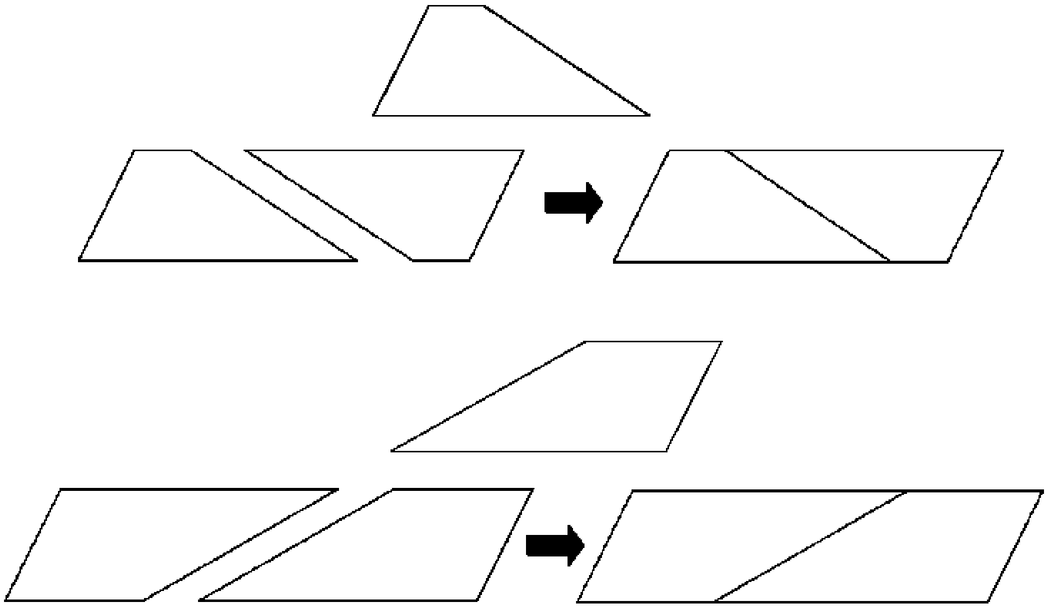
ภาพที่ 18 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูวิธีที่ 1 (สสวท., 2556)

วิธีที่ 2 นำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบเดียวกันมาประกอบเพิ่มเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



ภาพที่ 19 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูวิธีที่ 2 (สสวท., 2556)

การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 3 มีด้านที่ขนานกัน 1 คู่ ด้านทั้ง 4 ยาวไม่เท่ากัน ใช้วิธีนำรูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบเดียวกันมาประกอบเพิ่มเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



ภาพที่ 20 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูแบบที่ 3 (สสวท., 2556)

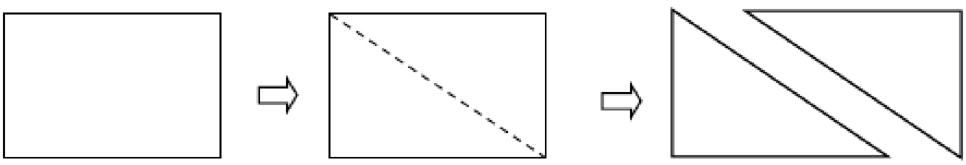
จะเห็นว่า เราสามารถเปลี่ยนรูปสี่เหลี่ยมคางหมูทุกแบบเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยเพิ่มรูปที่เหมือนกันอีก 1 รูป ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความสูงเท่ากัน ซึ่งจะได้

$$\textbf{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู} = \frac{1}{2} \times \textbf{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน}$$
$$= \frac{1}{2} \times \textbf{ความสูง} \times \textbf{ความยาวของฐาน}$$

สังเกตว่าความยาวของฐานของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังนั้นจึงได้

$$\textbf{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู} = \frac{1}{2} \times \textbf{ความสูง} \times \textbf{ผลบวกของความยาวของด้านคู่ที่ขนานกัน}$$

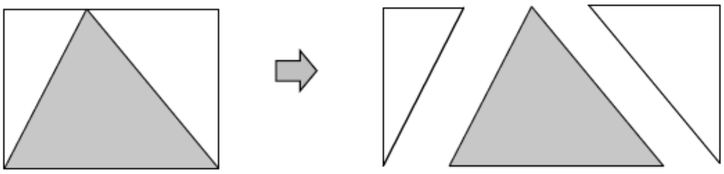
การสอนการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ทำได้โดยนำแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีรูปร่างและขนาดต่างกันมาให้นักเรียนตัดตามแนวเส้นทแยงมุม



ภาพที่ 21 การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (สสวท., 2556)

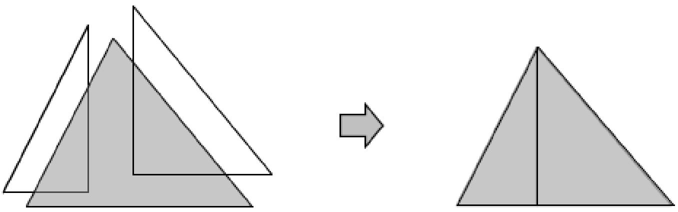
จะได้รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เมื่อนามาวางซ้อนกันแล้วทับกันสนิท แสดงว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีพื้นที่เท่ากัน จากนั้นเปรียบเทียบส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีฐานเดียวกัน และมีความสูงเท่ากัน สรุปเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเดียวกันและสูงเท่ากัน

เมื่อผู้เรียนทราบความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากการตัดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากตามแนวเส้นทแยงมุมแล้ว ครูนำแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีรูปสามเหลี่ยมอยู่ภายในมาให้ผู้เรียนตัดจะได้รูปสามเหลี่ยม 3 รูป



ภาพที่ 22 การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (สสวท., 2556)

จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามรวมกันแล้วเท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ให้ผู้เรียนเปรียบเทียบขนาดของรูปสามเหลี่ยมที่แรเงากับรูปสามเหลี่ยมอีก 2 รูป โดยการนามาวางซ้อนกัน



ภาพที่ 23 การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (สสวท., 2556)

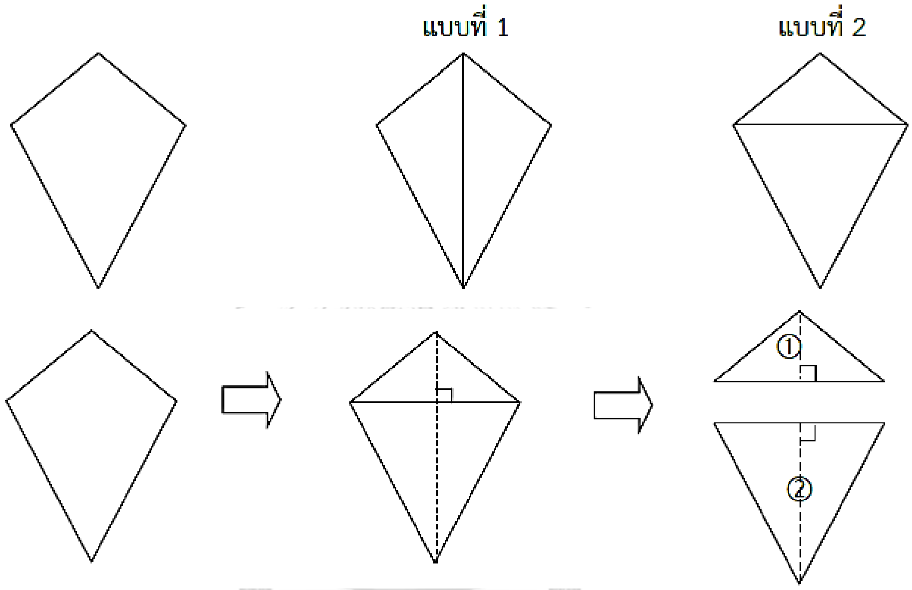
จะพบว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปต่อกันทับกันสนิทกับรูปสามเหลี่ยมที่แรเงา แสดงว่าพื้นที่เท่ากัน ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่แรเงาเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก สรุปเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเดียวกันและความสูงเท่ากันได้ว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเดียวกันและความสูงเท่ากันจึงได้

$$\textbf{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \textbf{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก}$$
$$= \frac{1}{2} \times \textbf{ความกว้าง} \times \textbf{ความยาว}$$

เนื่องจากความกว้างของรูปสามเหลี่ยมคือความสูงของรูปสามเหลี่ยม และความยาวของรูปสี่เหลี่ยมคือความยาวของฐานของรูปสามเหลี่ยมดังนั้น

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ **ความสูง** $\times$ **ความยาวของฐาน**

การสอนการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว ทาได้โดยนารูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวมาให้นักเรียนลากเส้นทแยงมุม 1 เส้น จะได้ว่าเส้นทแยงมุมแบ่งรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวเป็นรูปสามเหลี่ยม 2 รูป รูปสามเหลี่ยมที่ได้มีขนาดเท่ากันหรือไม่ขึ้นอยู่กับเส้นทแยงมุมที่ลาก เช่น



ภาพที่ 24 การหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว (สสวท., 2556)

จะเห็นว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว ได้จากการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปมารวมกัน และหากหากพิจารณาแบบที่ 2

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ความสูงของรูปสามเหลี่ยม $\times$ ความยาวฐานรูปสามเหลี่ยม

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ความสูงของรูปสามเหลี่ยม $\times$ ความยาวฐานรูปสามเหลี่ยม

สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปกับความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว จะได้ว่า ความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากับความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว ดังนั้น

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ความสูงของรูปสามเหลี่ยม $\times$ ความยาวของเส้นทแยงมุม

พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ความสูงของรูปสามเหลี่ยม $\times$ ความยาวของเส้นทแยงมุม

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว = พื้นที่รูปสามเหลี่ยม 1+ พื้นที่รูปสามเหลี่ยม 2

$= (\frac{1}{2} \times$ ความสูงของรูปสามเหลี่ยม $\times$ ความยาวของเส้นทแยงมุม)

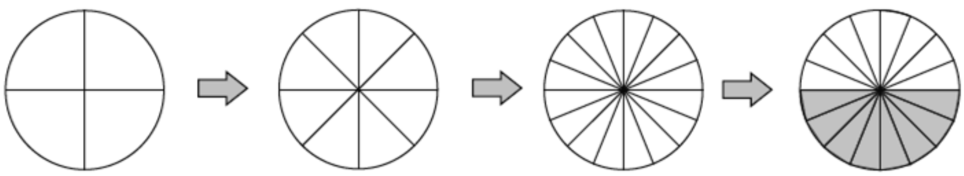
$+ (\frac{1}{2} \times$ ความสูงของรูปสามเหลี่ยม $\times$ ความยาวของเส้นทแยงมุม)

$= \frac{1}{2} \times$ความยาวเส้นทแยงมุม $\times$ผลบวกความสูงรูปสามเหลี่ยมทั้งสอง

สังเกตความสัมพันธ์ระหว่างความสูงของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปกับเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว จะได้ว่า ผลบวกของความสูงของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากับความยาวของเส้นทแยงมุมอีกเส้นของรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวดังนั้น

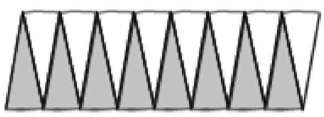
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว = $\frac{1}{2} \times$ ผลคูณของความยาวของเส้นทแยงมุม

การสอนการหาพื้นที่รูปวงกลมทำได้การจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติ โดยเริ่มจากใช้วงเวียนเขียนรูปวงกลมบนกระดาษ ถ้ารูปวงกลมมีรัศมียาว r หน่วย ความยาวรอบรูปวงกลมจะเท่ากับ 2πr หน่วย จากนั้นแบ่งรูปวงกลมเป็น 16 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วระบายสี 8 ส่วนดังรูป



ภาพที่ 25 การหาพื้นที่รูปวงกลม (สสวท., 2556)

ตัดรูปวงกลมแต่ละส่วนออกเป็น 16 ชิ้น แล้วนำมาติดสลับกัน จะได้รูปที่มีลักษณะใกล้เคียงกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



ภาพที่ 26 การหาพื้นที่รูปวงกลม (สสวท., 2556)

จากรูปจะเห็นว่า ฐานของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวใกล้เคียงครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูปวงกลมและความสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับความยาวของรัศมีรูปวงกลม

รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีพื้นที่ = ความสูง $\times$ ความยาวของฐาน

$= r \times 2\pi r /2$ ตารางหน่วย

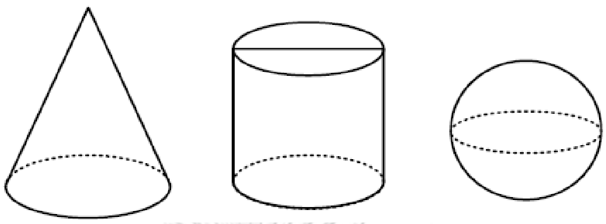
$= \pi \times r \times r$ ตารางหน่วย

พื้นที่รูปวงกลมเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้น พื้นที่รูปวงกลม $= \pi \times r \times r$ หรือ πr^2

2) รูปเรขาคณิตสามมิติ

ชมรมบ้านวิทยาศาสตร์ (2553) ได้ให้ความหมายของรูปเรขาคณิต 3 มิติ คือ รูปที่มีความกว้าง ความยาว และความสูง สำหรับทรง 3 มิติ พื้นฐานมี 5 แบบ ได้แก่ กรวย ทรงกระบอก ทรงกลม ปริซึม และพีระมิด ซึ่งสามารถแบ่งออกตามลักษณะของพื้นผิวได้เป็น 2 แบบ ดังนี้

1. ทรง 3 มิติ ที่มีพื้นผิวโค้ง



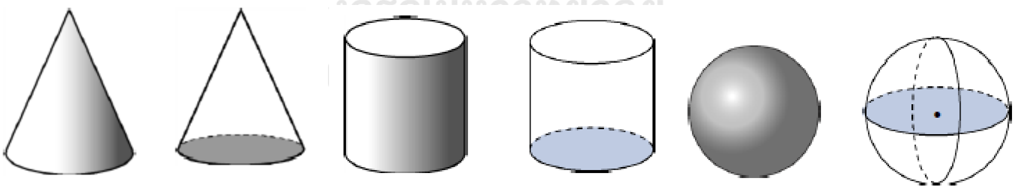
กรวย ทรงกระบอก ทรงกลม

ภาพที่ 27 ทรง 3 มิติ ที่มีพื้นผิวโค้ง (ชมรมบ้านวิทยาศาสตร์, 2553)

1.1 รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปวงกลม มียอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐาน มีผิวข้างโค้งเรียบ เรียกว่า ***กรวย***

1.2 รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีหน้าตัดหรือฐานทั้งสองข้าง คือ ด้านบนและด้านล่างเป็นรูปวงกลมที่เท่ากันทุกประการและอยู่บนระนาบที่ขนานกัน มีผิวข้างเรียบโค้ง เรียกว่า ***ทรงกระบอก***

1.3 ทรงกลม รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ ทุก ๆ จุดบนผิวเรียกว่า ***ทรงกลม***



ภาพที่ 28 ทรง 3 มิติ ที่มีพื้นผิวโค้ง (สสวท., 2556)

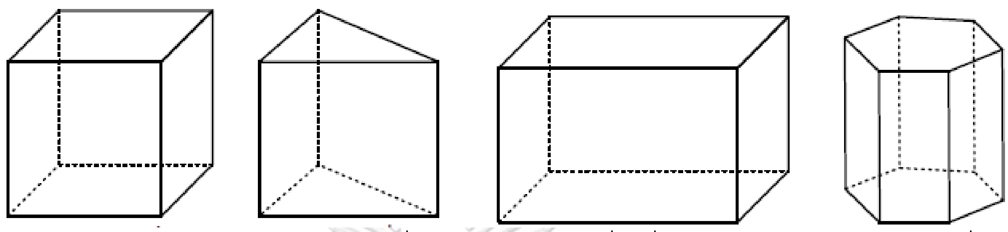
2. ทรง 3 มิติ ที่มีพื้นผิวเป็นรูปหลายเหลี่ยม

2.1 ***ปริซึม*** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีหน้าตัด (ฐาน) ทั้งสองด้านเป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ และอยู่ในระนาบที่ขนานกัน มีหน้าข้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ปริซึมที่มีหน้าทั้งหกหน้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เท่ากัน เรียกว่า ลูกบาศก์ แต่การเรียกชื่อของปริซึมชนิดอื่น ๆ จะใช้รูปร่างของฐานหรือหน้าตัดในการกำหนดชื่อ เช่น

ปริซึมที่มีหน้าทุกหน้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เรียกว่า ***ปริซึมสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือ ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก***

ปริซึมที่มีหน้าตัด (ฐาน) เป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า***ปริซึมสามเหลี่ยม***

ปริซึมที่มีหน้าตัด (ฐาน) เป็นรูปห้าเหลี่ยม เรียกว่า ***ปริซึมห้าเหลี่ยม***



ลูกบาศก์ ปริซึมสามเหลี่ยม ปริซึมสี่เหลี่ยม ปริซึมหกเหลี่ยม

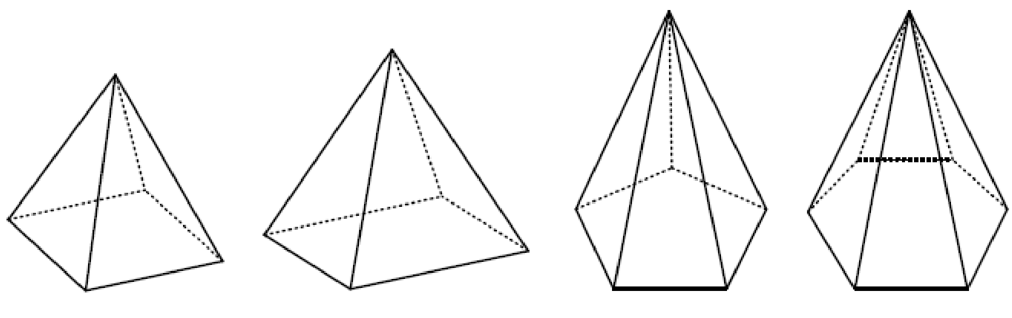
*ภาพที่ **29** ปริซึมที่มีพื้นผิวเป็นรูปหลายเหลี่ยม (ชมรมบ้านวิทยาศาสตร์, 2553)*

2.2 **พีระมิด** เป็นรูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปหลายเหลี่ยม มียอดแหลมซึ่งไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐานและมีหน้าข้างเป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งการเรียกชื่อของพีระมิด จะใช้ลักษณะรูปร่างของฐานในการกำหนดชื่อ เช่น

พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยม เรียกว่า ***พีระมิดฐานสี่เหลี่ยม***

พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปสามเหลี่ยม เรียกว่า ***พีระมิดฐานสามเหลี่ยม***

พีระมิดที่มีฐานเป็นรูปหกเหลี่ยม เรียกว่า***พีระมิดฐานหกเหลี่ยม***



พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัส พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้า พีระมิดฐานห้าเหลี่ยม พีระมิดฐานหกเหลี่ยม

ภาพที่ 30 พีระมิดที่มีพื้นผิวเป็นรูปหลายเหลี่ยม (ชมรมบ้านวิทยาศาสตร์, 2553)

5. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งงานวิจัยในประเทศและงานวิจัยต่างประเทศ มีนักวิชาการและนักการศึกษาได้ทำการศึกษาวิจัยที่มีความเกี่ยวข้องกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ แนวคิดคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง และกระบวนการแก้ปัญหา ดังนี้

5.1 งานวิจัยต่างประเทศ

Bitter (1990) กล่าวว่า การมอบปัญหาที่มีความน่าสนใจให้กับผู้เรียนและการแบ่งผู้เรียนให้ทำงานเป็นกลุ่มย่อย ๆ เพื่อให้ร่วมกันพิจารณาว่าข้อมูลของปัญหาคืออะไร ปัญหาถามอะไร ซึ่งเป็นการฝึกผู้เรียนให้รู้จักทำงานร่วมกัน มีการแสดงความคิดเห็นซึ่งกันและกันจะส่งเสริมให้ผู้เรียนมีการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Bellard (2000) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนที่หลากหลายในการแก้ปัญหาของผู้เรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ที่มีจุดมุ่งหมายเพื่อตรวจสอบว่าผู้เรียนใช้ตัวแทนอะไรบ้างในการแก้ปัญหา ผู้เรียนใช้ตัวแทนนั้นเมื่อใด ใช้ตัวแทนบ่อยแค่ไหนและประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนเพียงใด ผู้วิจัยค้นหารูปแบบพฤติกรรมของผู้เรียนที่ประสบความสำเร็จและไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทน กลุ่มตัวอย่างเป็นผู้เรียน 21 คน ผู้วิจัยสัมภาษณ์ในการแก้ปัญหาความน่าจะเป็นจำนวน 5 ข้อ และให้ผู้เรียนอธิบายถึงวิธีการหาคำตอบนั้นด้วย ผลการศึกษาพบว่า ผู้เรียนที่ประสบความสำเร็จและไม่ประสบความสำเร็จในการใช้ตัวแทนมีวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด นักเรียนที่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาสามารถวิเคราะห์ปัญหาค้นพบวิธีหาคำตอบและทราบว่าจะใช้แผนภาพเวนน์ ใช้สัญลักษณ์เมื่อไรและอย่างไร ส่วนผู้เรียนที่ไม่ประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาจะไม่ทราบว่าจะต้องแก้ปัญหาอย่างไรและไม่เข้าใจว่า 1) ตัวแทนอย่างไรจะช่วยให้ปัญหาชัดเจน 2) จุดมุ่งหมายของการใช้ตัวแทนคืออะไร และ3) ตัวแทนแบบใดที่ใช้ในการแก้ปัญหา ผู้วิจัยเสนอแนะว่าผู้เรียนจำเป็นต้องฝึกการแปลความหมายของตัวแทน ต้องเข้าใจลักษณะการใช้ตัวแทนที่หลากหลายและต้องฝึกการใช้ตัวแทนในลักษณะที่แตกต่างกัน

Widjaja and Heck (2003) ได้ศึกษาแนวการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงกับการทำงานในห้องปฏิบัติการไมโครคอมพิวเตอร์ที่ใช้สำหรับการเรียนเรื่อง กราฟ งานวิจัยนี้ได้มุ่งศึกษาการสนับสนุนบทเรียนโดยใช้ไอซีทีเป็นฐานในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงโดยศึกษาในประเทศอินโดนีเซีย ลักษณะการวิจัยเป็นแบบเชิงทดลองเกี่ยวกับทักษะด้านกราฟโดยเน้นที่การแปลความหมายกราฟของผู้เรียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประยุกต์ใช้ในเชิงกลศาสตร์ กลุ่มทดลองผู้เรียนมีอายุอยู่ในช่วง 13-14 ปี ใช้สื่อการเรียนการสอนและกิจกรรมที่พิเศษ พบว่าการตอบสนองในการทดลองของนักเรียนประสบความสำเร็จไปด้วยดี ซึ่งผู้วิจัยได้ตรวจสอบพฤติกรรมและการแสดงความคิดเห็นของผู้เรียนและครู เพื่อวิเคราะห์กิจกรรม ความคิดและความเข้าใจของผู้เรียน

ในด้านการประยุกต์ใช้ ผลที่ได้จากการทดลองพบว่า ผู้เรียนมีการพัฒนาศักยภาพในระดับที่ดีมาก สามารถเลือกวิธีการที่เหมาะสม อีกทั้งจากความคิดเห็นของผู้เรียนและครูพบว่า การสอนและการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบทั่วไปมีแนวโน้มในทางบวก ซึ่งการที่ผู้เรียนมีทัศนคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์จะทำให้ผู้เรียนมีความตั้งในการเรียนรู้และพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ให้ดีขึ้น

Dickinson, Eade, Gough, and Hough (2010) ศึกษาผลของการนำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์แก่นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลางถึงต่ำ ในโรงเรียนมัธยมศึกษา ประเทศอังกฤษ ผลการศึกษาพบว่า การนำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาใช้ในการจัดการเรียนการสอน ช่วยพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของนักเรียนและพัฒนาความรู้ในเนื้อหาวิชาให้แก่นักเรียน

Hirza, Kusumah, Darhim, and Zulkardi (2014) ได้พัฒนาทักษะการหยั่งรู้โดยใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ซึ่งจุดประสงค์คือเพื่อพัฒนาทักษะการหยั่งรู้ของผู้เรียนโดยการเปรียบเทียบการเรียนการสอนระหว่างการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเป็นฐานกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบปกติทั่วไป งานวิจัยนี้ศึกษากับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนปาเลมบัง (Palembang) จำนวน 164 คน การออกแบบการวิจัยคือ การทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน มีกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม วิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้โปรแกรม SPSS ผลการวิจัยพบว่า การเรียนการสอนแบบใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเป็นฐานมีการพัฒนาทักษะด้านการหยั่งรู้สูงกว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบปกติทั่วไป ซึ่งทักษะการหยั่งรู้นี้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ

5.2 งานวิจัยในประเทศ

อารีย์ เมฆวิลัย (2552) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และพฤติกรรมการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน ในโรงเรียนสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษากรุงเทพมหานคร เขต 1 โดยผลการวิจัยพบว่า 1) ผู้เรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ต่างก็มีการใช้สัญลักษณ์หรือตัวแปรเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์มากที่สุด ส่วนรองลงมา ผู้เรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง มีการใช้ข้อความเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ แต่ผู้เรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลางและต่ำ มีการใช้รูปภาพเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ 2) ผู้เรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูง ปานกลาง และต่ำ ต่างก็มีการใช้สัญลักษณ์หรือตัวแปรเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์มากที่สุด และ 3) นักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีพฤติกรรมการเรียนคณิตศาสตร์สูง และต่ำ ต่างก็มีการใช้สัญลักษณ์

หรือตัวแปรเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์มากที่สุด ส่วนรองลงมา ผู้เรียนมีการใช้รูปภาพเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์

สุริเยส สุขแสวง (2548) ได้ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหา ซึ่งผู้สอนจะนำเสนอปัญหาที่มีความน่าสนใจสอดคล้องกับชีวิตจริงของผู้เรียนและกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้ศักยภาพที่ตนเองมีในการแก้ปัญหา และมีการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้ช่วยกันหาวิธีในการแก้ปัญหานั้น พบว่า ผู้เรียนที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหา มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าผู้เรียนที่เรียนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จิรนันท์ พึ่งกลั่น (2555) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยลักษณะการจัดกิจกรรม ผู้สอนจะทำหน้าที่เป็นผู้ชี้แนะและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ การแก้ปัญหาผ่านการทำงานร่วมกับผู้อื่น โดยใช้ปัญหาที่มีความสอดคล้องกับชีวิตประจำวันของผู้เรียน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นฐานหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สุณิสา สุมิรัตนะ (2555) ได้ศึกษาการพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมการรู้คณิตศาสตร์ของผู้เรียน โดยใช้แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงและกระบวนการแก้ปัญหา โดยนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 52 คน และกลุ่มควบคุม 52 คน ผลการวิจัย นักเรียนกลุ่มทดลองมีการรู้คณิตศาสตร์และสมรรถนะหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนและสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และมีพัฒนาการรู้คณิตศาสตร์ด้านความรู้และสมรรถนะในทิศทางที่ดีขึ้น

เกศินี เพ็ชรรุ่ง (2556) ได้ศึกษาการพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง เพื่อส่งเสริมมโนทัศน์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง และศึกษาผลการใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง มีเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมีมโนทัศน์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ซึ่งการเชื่อมโยงความรู้นั้นเป็นพื้นฐานในการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาและทักษะอื่น ๆ ตามมา

ธัญพิมล จันทร์นุ่ม (2558) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับการพัฒนาความคิดของเด็กที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับการพัฒนาความคิดของเด็กมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ และนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับการพัฒนาความคิดของเด็ก มีพัฒนาการของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น

จากการศึกษางานวิจัยต่างประเทศและในประเทศสรุปได้ว่าการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน หากนำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์จะทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ที่จะแก้ปัญหาที่มีความหมาย มีการเชื่อมโยงความรู้และสร้างแบบจำลองทางความคิดด้วยพื้นฐานความสามารถในการมโนภาพ จะช่วยให้การแก้ปัญหาของผู้เรียนถูกต้องและมีประสิทธิภาพ อีกทั้งยังสร้างความกระตือรือร้นในการเรียนและช่วยเพิ่มทัศนคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากผู้เรียนจะได้คำตอบของปัญหาแล้วผู้เรียนยังได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาร่วมกัน สามารถนำกระบวนการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นไปปรับใช้ในการแก้ปัญหาในบริบทหรือสถานการณ์ปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตของตนได้ ซึ่งผู้วิจัยได้สรุปเป็นกรอบแนวคิดในการวิจัยดังภาพที่ 31

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

หลักการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตาม Gravemeijer (1994)

1) หลักการสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน
2) หลักการสร้างแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นโดยผู้เรียนเอง
3) หลักการการคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับคำแนะนำ

ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิด Yunita (2013)

ขั้นตอนที่ 1 การทำความเข้าใจบริบทปัญหา
สถานการณ์ที่ใช้เป็นปัญหาในชีวิตประจำวันที่เชื่อมโยงและสอดคล้องกับความรู้ทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 2 การแสดงวิธีการแก้ปัญหา
ผู้เรียนใช้**ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์** พัฒนาแบบจำลองการแก้ปัญหาจากมุมมองของตน (รูปธรรม) นำไปสู่การสร้างและพิสูจน์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (นามธรรม)
*** ตัวอย่างของแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น**

ขั้นตอนที่ 3 การเปรียบเทียบ/อภิปรายคำตอบ
ผู้เรียนอภิปรายวิธีการและคำตอบ เพื่อเรียนรู้ร่วมกัน โดยครูช่วยแนะนำ
ขั้นตอนที่ 4 การสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้
ตรวจสอบสรุปผลและสะท้อนคำตอบ กระบวนการ

ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ตาม Lohman (1979)

มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization)	มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation)	มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation)
ความเข้าใจในภาพ องค์ประกอบของภาพ การจัดการ รหมุน การกลับ การบิดภาพ รวมทั้งการเปลี่ยนทิศทางภายในใจได้	การเข้าใจถึงการจัดการรูปแบบภาพ การประมาณขนาด การแสดงเครื่องหมายแทนความสัมพันธ์ และการแสดงวิธีการหาคำตอบที่เกี่ยวข้องกับมิตินั้น ๆ	การมองเห็นถึงความสัมพันธ์รูปร่างรูปทรงในมิติหรือตำแหน่งที่เปลี่ยนไป และสร้างมโนภาพจากการหมุนวัตถุ 2 มิติ 3 มิติ นำไปสู่ความเข้าใจในความสัมพันธ์

ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา
สามารถวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ข้อมูลรายละเอียดของปัญหาแยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้

ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา
1) สามารถประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา
2) สามารถสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางหาคำตอบได้
3) สามารถลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น และปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างคล่องแคล่ว

ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้
สามารถตรวจสอบในแต่ละขั้นตอนถึงความบกพร่องของงาน ตรวจสอบคำตอบที่ได้มาจากการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น โดยผู้เรียนต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีมาช่วยในการหาสาเหตุแก้ปัญหาและเรียนรู้ประโยชน์จากความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาครั้งใหม่ รวมทั้งทราบแนวทางในการนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ

ภาพที่ 31 กรอบแนวคิดของการดำเนินการวิจัย

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก ซึ่งเป็นการวิจัยแบบกึ่งทดลอง (Quasi-experimental Research) ผู้วิจัยมีวิธีการดำเนินการวิจัยตามขั้นตอน ดังนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและตัวอย่างการวิจัย
4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
5. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
7. การวิเคราะห์ข้อมูล

แต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศเพื่อเป็นข้อมูลที่ใช้เป็นแนวทางในการดำเนินการวิจัย ดังนี้

1.1 ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา งานวิจัยและข้อมูลจากอินเทอร์เน็ตทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวกับการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ และกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตสองมิติสามมิติ เพื่อนำมาวิเคราะห์และสังเคราะห์เป็นกรอบแนวคิดและพัฒนาเครื่องมือในการวิจัย

1.2 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ในสาระที่ 2 การวัดและเรขาคณิต ซึ่งมาตรฐานการเรียนรู้ ได้แก่ มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด และนำไปใช้ และมาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้ เพื่อนำมาจัดทำโครงสร้างเนื้อหาที่จำเป็นสำหรับผู้เรียน ในการแก้ปัญหาเรขาคณิตในสถานการณ์ปัญหาที่สอดคล้องกับชีวิตจริง

1.3 ศึกษาเนื้อหาเรื่องเรขาคณิตสองมิติและสามมิติสำหรับผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 จากหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 หนังสือคู่มือครู หนังสือตำรา หนังสืออ่านประกอบอื่น ๆ เพื่อเป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้และแผนการจัดการเรียนรู้

1.4 ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา งานวิจัยและข้อมูลจากอินเทอร์เน็ตที่เกี่ยวกับระเบียบวิธีวิจัย การวัดและประเมินผลการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ การสร้างเครื่องมือวัดและแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยแบบกึ่งทดลอง (Quasi-experimental Research) ประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และ กลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม โดยแบบแผนการวิจัยมีลักษณะ ดังนี้

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
E	O_1	X	O_2
C	O_3		O_4

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง (Experimental Group)

C แทน กลุ่มควบคุม (Control Group)

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

O_1 O_3 แทน คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนการทดลองของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

O_2 O_4 แทน คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการทดลองของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

3. การกำหนดประชากรและตัวอย่างการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็กสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี สังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน

ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ใช้การเลือกแบบมีจุดมุ่งหมาย หรือ การเลือกแบบจำเพาะเจาะจง (Purposive Sampling) เนื่องด้วยผู้วิจัยต้องการทำการวิจัยเพื่อแก้ปัญหากลุ่มผู้เรียน

ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 ในบริบทโรงเรียนขนาดเล็ก ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้จึงเป็นผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็กแห่งหนึ่งของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี จำนวน 24 คน แบ่งออกเป็นกลุ่ม ทดลอง 12 คน กลุ่มควบคุม 12 คน โดยผู้วิจัยใช้ขั้นตอนในการจัดผู้เรียนเข้ากลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนี้

3.1 ผู้วิจัยคละผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 จากผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 14 คน ผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 10 คน โดยให้ผู้เรียนทำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดทักษะการแก้ปัญหา เรื่อง เรขาคณิตสองมิติและสามมิติ เป็นแบบทดสอบอัตนัย แบ่งออกเป็น 2 ชุด ชุดละ 10 ข้อ 50 คะแนน จากนั้นนำผลคะแนนทดสอบก่อนเรียนมาใช้ในการแบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 2 กลุ่มประกอบด้วย กลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และ กลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม แบ่งเป็นผู้เรียนกลุ่มละ 12 คน โดยใช้วิธีการจับคู่ (Match by Pair) เพื่อให้ได้กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่มีความใกล้เคียงกัน ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 9 ผลคะแนนทดสอบก่อนเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

กลุ่มทดลอง	
ผู้เรียนคนที่	คะแนน
1	24.5
2	21.5
3	17.5
4	16.5
5	16
6	15
7	15
8	14
9	13
10	13
11	12
12	11.5

กลุ่มควบคุม	
ผู้เรียนคนที่	คะแนน
1	22.5
2	20.5
3	17.5
4	16.5
5	16
6	15
7	14.5
8	14
9	14
10	13
11	12.5
12	11.5

3.2 ผู้วิจัยทำการสุ่มอย่างง่ายโดยการจับฉลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม และทำการแบ่งผู้เรียนออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 เป็นกลุ่มทดลอง จะได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ และผู้เรียนกลุ่มที่ 2 เป็นกลุ่มควบคุม จะได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องเรขาคณิตแบบปกติ

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ และแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ สำหรับผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 จำนวน 15 แผน ใช้เวลา 15 ชั่วโมง โดยทดลอง 8 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 2 ชั่วโมง ผู้วิจัยได้สร้างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

4.1 แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์

4.1.1 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎีจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวกับทักษะกระบวนการแก้ปัญหา แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์

โดยผู้วิจัยได้ทำการศึกษาแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงซึ่งเป็นการเปลี่ยนกระบวนคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมไปสู่การคิดเพื่อการแก้สถานการณ์ปัญหา จึงส่งเสริมให้ผู้เรียนใช้พื้นฐานความสามารถในการสร้างมโนภาพหรือความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยวิเคราะห์องค์ประกอบของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่สำคัญตามองค์ประกอบของ Lohman (1979, อ้างถึงใน พรรณปพร จตุวีรพงษ์, 2555) เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้เกิดความเข้าใจในปัญหาคณิตศาสตร์นำไปสู่การพัฒนาแบบรูปหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อการแก้ปัญหาและเชื่อมโยงกับชีวิตประจำวันของผู้เรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และผู้วิจัยได้นำแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงตามหลักการของ Gravemeijer (1994) และขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงของ Yunita (2013) มาเป็นแนวทางในการออกแบบการจัดการเรียนรู้ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 10 วิเคราะห์แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงตามหลักการของ Gravemeijer และขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงของ Yunita สู่แนวทางในการออกแบบการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย

หลักการ/แนวคิด	กระบวนการจัดการเรียนรู้ของผู้วิจัย	ทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
หลักการการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงของ Gravemeijer 1) การสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับผู้เรียน 2) แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นโดยผู้เรียนเอง 3) การคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับคำแนะนำ	**ขั้นตอนที่ 1 การทำความเข้าใจบริบทปัญหา** - **ครู**ให้สถานการณ์ปัญหาพร้อมข้อเสนอแนะอย่างไม่เป็นทางการ - **ผู้เรียน**เรียนรู้และทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา	**ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา** สามารถวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ข้อมูลรายละเอียดของปัญหาแยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้
ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดของ Yunita 1) การทำความเข้าใจบริบทปัญหา 2) การแสดงวิธีการแก้ปัญหา 3) การเปรียบเทียบ/การอภิปรายคำตอบ 4) การสรุป	**ขั้นตอนที่ 2 การแสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยผู้เรียนใช้<u>ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์</u>ช่วยในการสร้างแบบจำลองทางความคิด** - **ครู**ใช้สถานการณ์ปัญหาจากบริบทชีวิตจริงกระตุ้นกระบวนการเรียนรู้ เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสร้างและใช้กระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยครูให้คำแนะนำ ช่วยเหลือ - **ผู้เรียน**พัฒนาแบบจำลองในการแก้ปัญหาจากมุมมองของตน (รูปธรรม) นำไปสู่การสร้างและพิสูจน์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ (นามธรรม) ** ตัวอย่างแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง เป็นต้น*	**ทักษะการออกแบบและแก้ปัญหา** 1) ความสามารถในการประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ข้อมูลกับปัญหา 2) ความสามารถในการสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางหาคำตอบได้ 3) ความสามารถในการปฏิบัติตามแนวทางที่สร้าง และปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างคล่องแคล่ว
องค์ประกอบของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของ Lohman **1) มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization)** เป็นความเข้าใจในภาพ องค์ประกอบของภาพ การจัดการ รหมุน การกลับ การบิดภาพ รวมทั้งการเปลี่ยนทิศทางภายในใจได้ **2) มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) เป็น**การเข้าใจถึงการจัดการรูปแบบภาพ การประมาณขนาด การแสดงเครื่องหมายแทนความสัมพันธ์ และการแสดงวิธีการหาคำตอบที่เกี่ยวข้องกับมิตินั้น **3) มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation)** เป็นการมองเห็นถึงความสัมพันธ์รูปร่างรูปทรงในมิติหรือตำแหน่งที่เปลี่ยนไป และเป็นการสร้างมโนภาพจากการหมุนวัตถุ 2 มิติ 3 มิติ นำไปสู่ความเข้าใจในความสัมพันธ์	**ขั้นตอนที่ 3 การอภิปรายคำตอบและสรุปผล** - **ครูและผู้เรียนร่วมกัน** ตรวจสอบสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ (ทั้งคำตอบและกระบวนการ) **ขั้นตอนที่ 4 การสะท้อนผลการเรียนรู้และนำไปใช้** - **ครู**ให้คำแนะนำผู้เรียนในการสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ ส่งเสริมการอภิปราย - **ผู้เรียน**ร่วมแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันโดยการอภิปรายการเชื่อมโยงสถานการณ์ปัญหากับความรู้ ประสบการณ์เดิม สร้างกระบวนการในการแก้ปัญหาและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	**ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้** สามารถตรวจสอบในแต่ละขั้นตอนรวมถึงความบกพร่อง ตรวจสอบคำตอบที่ได้มาจากการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น โดยผู้เรียนต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีมาช่วยในการหาสาเหตุ แก้ปัญหา และเรียนรู้ประโยชน์จากความผิดพลาด เพื่อใช้แก้ปัญหาครั้งใหม่ รวมทั้งทราบแนวทางในการนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ

4.1.2 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6

4.1.3 ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ การออกแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ การวัดและประเมินผล และจัดโครงสร้างเนื้อหา เวลาที่เหมาะสม เพื่อดำเนินการทดลอง ดังนี้

ตารางที่ 11 โครงสร้างเนื้อหา กิจกรรมการเรียนรู้ และจำนวนชั่วโมงของกลุ่มทดลอง

แผนการสอน	เนื้อหา/สาระการเรียนรู้	จำนวนชั่วโมง
1	รูปเรขาคณิต**สองมิติ** ได้แก่ รูปวงกลม รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม	1
	รูปสี่เหลี่ยม	
2	- ลักษณะและคุณสมบัติพื้นฐานรูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ	1
3	- ความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยม	1
4	- พื้นที่ของ**รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก(จัตุรัส ผืนผ้า)**	1
5	- พื้นที่ของ**รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ด้านขนาน**	1
	รูปสามเหลี่ยม	
6	- ลักษณะและคุณสมบัติพื้นฐานรูปสามเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ	1
7	- ความยาวรอบรูปและพื้นที่รูปสามเหลี่ยม	1
	รูปวงกลม	
8	- ลักษณะและความยาวรอบรูปของรูปวงกลม	1
9	- พื้นที่ของรูปวงกลม	1
10	รูปเรขาคณิต**สามมิติ** ได้แก่ ลูกบาศก์ ปริซึม พีระมิด ทรงกรวย ทรงกระบอก ทรงกลม	1
11	รูปคลี่ของรูปเรขาคณิตสามมิติ (ลูกบาศก์ ปริซึม พีระมิด ทรงกรวย ทรงกระบอก)	1
12	- พื้นที่ผิวของ**ลูกบาศก์**	1
13	- ปริมาตรของ**ลูกบาศก์**	1
14	- ปริมาตรของ**รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก**	1
15	- ปริมาตรของ**ทรงกระบอก**	1
รวม		15

4.1.4 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ สำหรับผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 จำนวน 15 แผน โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงโดยเน้นพื้นฐานความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล โดยผู้วิจัยสร้างกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ข้างต้น

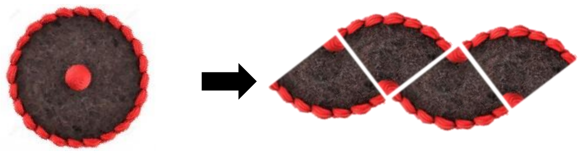
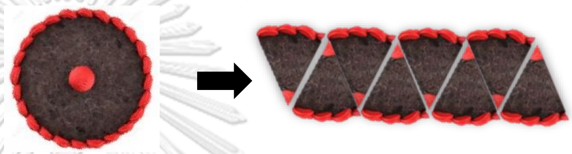
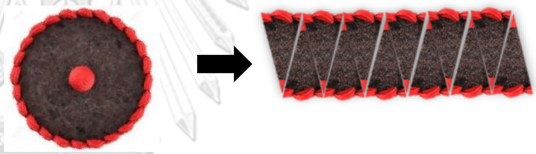
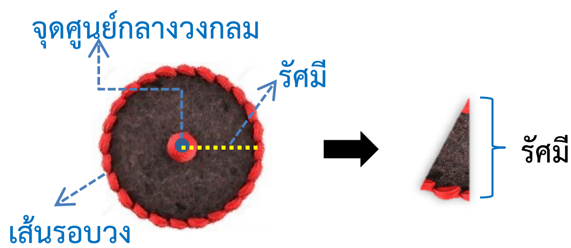
ตารางที่ 12 ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์**
ขั้นที่ 1 **ทำความเข้าใจบริบทปัญหา**	1. ครูแบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ร้านบุฟเฟต์” ผู้เรียนแต่ละกลุ่มจะต้องเวียนฐานเพื่อสลับกันเข้าร้าน 3 ร้าน เพื่อเรียนรู้และวางแผนแก้ปัญหาตามสถาการณ์ให้เวลาร้านละ 3 นาที โดยผู้เรียนรับกล่องใส่ขนมร้านละ 1 กล่องร้านกี่ชิ้นก็ได้ให้เต็มพื้นที่กล่องมากที่สุด ซึ่งร้านบุฟเฟต์ประกอบด้วย **ร้านโดนัท** (ขายแบบเป็นชิ้น)  **ร้านเค้ก** (ขายแบบเป็นปอนด์และแบบชิ้น)  **ร้านพิซซ่า** (ขายแบบเป็นถาดและแบบเป็นชิ้น) 

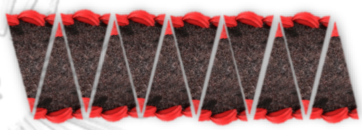
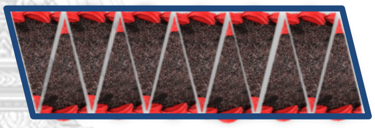
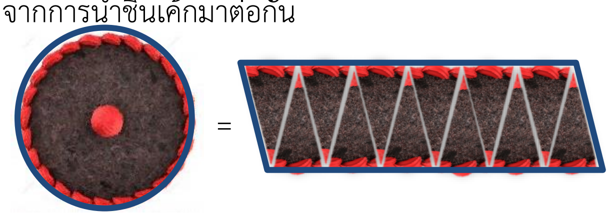
ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์**
	2. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบว่ากลุ่มใดซื้ออาหารบุฟเฟต์ได้คุ้มที่สุด กล่าวคือพื้นที่ของอาหารเต็มกล่องหรือใกล้เคียงกับพื้นที่ของกล่องมากที่สุดโดยผู้เรียนใช้พื้นฐานความสามารถ **มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization)** 3. **ผู้เรียนจะต้องใช้การมองภาพวัตถุซึ่งเป็นรูปธรรม แล้วจินตนาการปรับเปลี่ยนทิศทาง รูปแบบ หรือส่วนประกอบภาพ แล้วพิจารณาความสัมพันธ์เชื่อมโยง เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาสถานการณ์ข้างต้น** จากนั้นครูและผู้เรียนร่วมกันสังเกตและอภิปรายต่อว่าลักษณะของกลุ่มที่พื้นที่ของอาหารใกล้เคียงกับพื้นที่กล่องมีลักษณะแบบใดและซื้ออาหารแบบใด (เค้กและพิซซ่าแบบชิ้นที่แบ่งออกจากอาหารที่เป็นรูปวงกลมซึ่งนำมาจัดเรียงใหม่จะทำให้เต็มพื้นที่กล่องมากกว่าซื้อแบบเต็มชิ้นเพียงอย่างเดียว)
ขั้นที่ 2 **เรียนรู้และแสดงวิธีการแก้ปัญหา (ด้วยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์)**	4. ครูให้ผู้เรียนรับรูปภาพเค้ก (รูปวงกลม) กลุ่มละ 3 ภาพเพื่อช่วยกันคิดและออกแบบวิธีการหาพื้นที่ของเค้กรูปวงกลมร่วมกับความรู้เดิมในการหาพื้นที่รูปเรขาคณิตสองมิติว่าจะสามารถนำมาหาพื้นที่รูปวงกลมได้อย่างไร โดยครูให้ผู้เรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มและเขียนแบบจำลองทางความคิดประกอบการอภิปรายร่วมกันลงในกระดาษ เพื่อแสดงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงรูปภาพ ครูให้เวลา 5 นาที (ครูเดินดู แนะนำกลุ่มที่ยังมองภาพไม่ออกว่าหากตัดแบ่งออกเป็นชิ้นที่เท่าๆ กันเหมือนดังกิจกรรมแรกแล้วนำมาเรียงจะสามารถหาพื้นที่ได้หรือไม่)

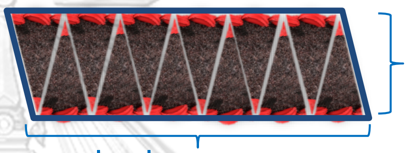
ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์**
	 ตัดแบ่งออกเป็น 4  ตัดแบ่งออกเป็น 8  ตัดแบ่งออกเป็น 12 * มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) * มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) **ผู้เรียนจะต้องใช้การปรับเปลี่ยนทิศทางและมุมมองของวัตถุ พิจารณาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปเดิมกับรูปใหม่ เพื่อเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปวงกลมกับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน** 5. ครูและผู้เรียนแต่ละกลุ่มอภิปรายเพื่อแลกเปลี่ยนร่วมกันถึงกิจกรรมในข้อ 4. ว่าแต่ละกลุ่มมีวิธีอย่างไร จากนั้นสังเกตร่วมกันถึงลักษณะของรูปวงกลมที่ถูกแบ่ง 

ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์**
	เมื่อตัดแบ่งเค้กรูปวงกลมโดยตัดแบ่งให้แต่ละชิ้นเท่าๆ กัน เราจึงต้องใช้แนวเส้นรัศมีเป็นหลักในการแบ่งเค้กแต่ละชิ้น และเมื่อนำมาเรียงต่อกันจะมีลักษณะดังนี้  6. ครูถามผู้เรียนว่าเมื่อนำเค้กมาต่อกันจะมีลักษณะคล้ายรูปเรขาคณิตชนิดใด และผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เดิมในการหาพื้นที่ได้หรือไม่ อย่างไร (รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)  ผู้เรียนสังเกตส่วนประกอบจากรูปที่ได้  ดังนั้นพื้นที่รูปวงกลมมีค่าเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากการนำชิ้นเค้กมาต่อกัน 

ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	**กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์**
ขั้นที่ 3 การอภิปรายคำตอบและสรุปผล	7. ครูถามผู้เรียนว่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสามารถหาได้อย่างไร โดยครูติดแถบประโยคประกอบหลังผู้เรียนทบทวนสูตรคำนวณ □ ด้านขนาน = ความสูง×ความยาวของฐาน  จากรูปชิ้นส่วนของเค้กที่เรียงต่อกัน ครูและผู้เรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปค่าความสูงและค่าความยาวฐานของรูป ความสูง มีค่าเท่ากับ ความยาวรัศมีวงกลม (r) ความยาวฐาน มีค่าเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูป ($2\pi r \div 2$) □ ด้านขนาน = ความสูง×ความยาวของฐาน $= r \times (2\pi r \div 2)$ $= r \times \pi r$ $= \pi r \times r$ $= \pi r^2$ 8. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปวิธีการคำนวณหาพื้นที่ของรูปวงกลม โดยครูติดแถบประโยคประกอบ พื้นที่รูปวงกลม = πr^2 ค่า π เป็นค่าคงตัวที่มีค่าประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 และมีหน่วยเป็นตารางหน่วย

ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์
	ครูยกตัวอย่างให้ผู้เรียนร่วมกันหาของพื้นที่พิซซ่า รัศมี 7 ซม. พื้นที่จะ $= \frac{22}{7}\times7\times7$ $=$ 154 ตารางเซนติเมตร 
ขั้นที่ 4 การสะท้อนผลการเรียนรู้และนำไปใช้	9. ครูและผู้เรียนร่วมกันสะท้อนผลการเรียนรู้ว่าผู้เรียนได้เรียนรู้อะไรบ้าง สามารถนำไปปรับใช้ได้อย่างไรบ้างรวมทั้งให้ผู้เรียนสะท้อนผลที่ได้เรียนรู้ผ่านกิจกรรม “สร้างโลกสีเขียว” ครูแจกแบบแปลนสวนสาธารณะประจำตำบล โดยองค์การบริหารส่วนตำบล (อบต.) แบ่งโซนออกเป็น A, B, C ซึ่งมีพื้นที่ดังต่อไปนี้  โดยครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันคำนวณพื้นที่และจัดวางสิ่งอำนวยความสะดวกสวนสาธารณะประจำตำบลให้มีความเหมาะสมกับขนาดของพื้นที่ ซึ่งครูจะเปิดโจทย์ให้ผู้เรียนคำนวณพื้นที่ทีละข้อ กลุ่มใดสามารถคำนวณได้ถูกต้องจะได้รับสิ่งอำนวยความสะดวกนั้น ๆ จัดวางลงในแบบแปลนที่ได้รับ

ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

<table>
<tr><th>ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้
ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์
ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง</th><th>กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์
ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์</th></tr>
<tr><td></td><td>

* มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation)

ผู้เรียนใช้การมองภาพเพื่อพิจารณาขนาด พื้นที่ จากนั้นคำนวณพื้นที่วัตถุเพื่อนำมาจัดวางตามตำแหน่งต่าง ๆ ให้มีความเหมาะสม

1) สวนน้ำพุ รัศมี 7 เมตร

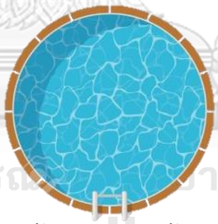
พื้นที่สวนน้ำพุ = πr^2

= $\frac{22}{7}\times 7\times 7$

= 154 ตร.ม.

ดังนั้น สวนน้ำพุจะตรงกับพื้นที่ในโซน C

2) สระว่ายน้ำ รัศมี 21 เมตร



พื้นที่สระว่ายน้ำ = πr^2

= $\frac{22}{7}\times 21\times 21$

= 1386 ตร.ม.

ดังนั้น สระว่ายน้ำจะตรงกับพื้นที่ในโซน B

3) สนามเด็กเล่น รัศมี 14 เมตร

พื้นที่สนาม = πr^2

= $\frac{22}{7}\times 14\times 14$

= 616 ตร.ม.

ดังนั้น สนามเด็กเล่นจะตรงกับพื้นที่ในโซน A

</td></tr>
</table>

ตารางที่ 12(ต่อ) ขั้นตอนและกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ขั้นตอนในการจัดการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง	กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์
	10. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง กลุ่มใดที่สามารถวางแปลนได้สมบูรณ์ที่สุดจะเป็นผู้ชนะ  11. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 6 พื้นที่ของรูปวงกลม โดยครูและผู้เรียนวิเคราะห์ทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา จากนั้นให้ผู้เรียนออกแบบและแก้ปัญหา รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของแบบฝึกทักษะ *1) หมู่บ้านสร้างวงเวียนหอนาฬิกาซึ่งวงเวียนมีรัศมี 3 เมตร และเทถนนรอบวงเวียน ถนนกว้าง 4 เมตร ผู้ใหญ่บ้านต้องเตรียมพื้นที่สำหรับทำวงเวียนและถนนโดยรอบเป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร* *2) พ่อสร้างคอกวัวรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ความยาวด้าน 20 เมตร ไว้กลางทุ่ง ในตอนกลางวันพ่อจะผูกวัวไว้กับเสามุมคอกที่อยู่ด้านนอกเพื่อกินหญ้ารอบ ๆ คอก โดยเชือกมีความยาว 14 เมตร อยากทราบว่าวัวที่พ่อเลี้ยงไว้สามารถกินหญ้าในบริเวณกว้างเป็นพื้นที่ทั้งหมดเท่าไร*

4.1.5 พิจารณาตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ และนำไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาและผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมและหาคุณภาพของเครื่องมือ เพื่อนำข้อเสนอแนะไปปรับปรุงแก้ไขก่อนนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้

4.2 แผนการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตแบบปกติ

4.2.1 ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

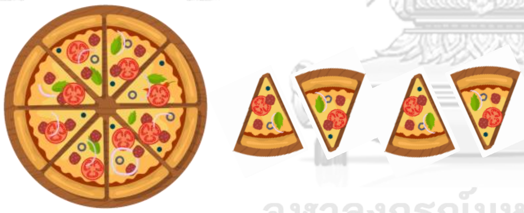
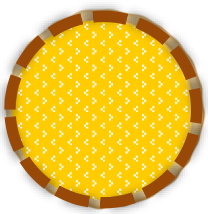
4.2.2 ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ รายละเอียดของสาระการเรียนรู้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล การจัดโครงสร้างเนื้อหากับเวลาที่เหมาะสมและสอดคล้องกับกลุ่มทดลอง เพื่อการดำเนินการทดลอง

4.2.3 เขียนแผนการจัดการเรียนรู้เรขาคณิต สำหรับผู้เรียนกลุ่มควบคุมชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 จำนวน 15 แผน โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ/แหล่งการเรียนรู้ การวัดและประเมินผล โดยตารางต่อไปนี้จะแสดงการเปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

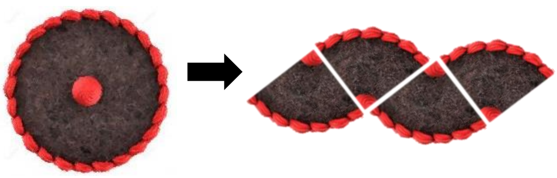
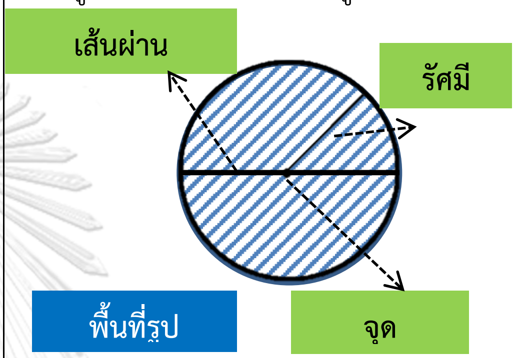
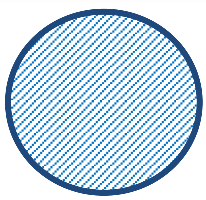
ตารางที่ 13 เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจบริบทปัญหา 1. ครูแบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ร้านบุฟเฟต์” ผู้เรียนแต่ละกลุ่มจะต้องเวียนฐานเพื่อสลับกันเข้าร้าน 3 ร้าน เพื่อเรียนรู้และแก้ปัญหาสถานการณ์ ให้เวลาร้านละ 3 นาที โดยผู้เรียนรับกล่องใส่ขนมร้านละ 1 กล่องร้านกี่ชิ้นก็ได้ให้เต็มพื้นที่กล่องมากที่สุด ซึ่งร้านบุฟเฟต์ประกอบด้วย	**ขั้นที่ 1 ขั้นนำ** 1. ครูแบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ทำพิซซ่าชีส” โดยครูแจกบัตรภาพแป้ง พิซซ่า ให้ผู้เรียนทำตามคำสั่งต่อไปนี้ 

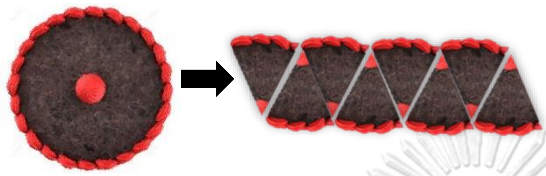
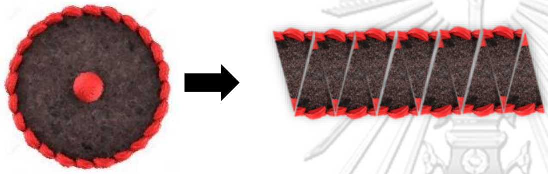
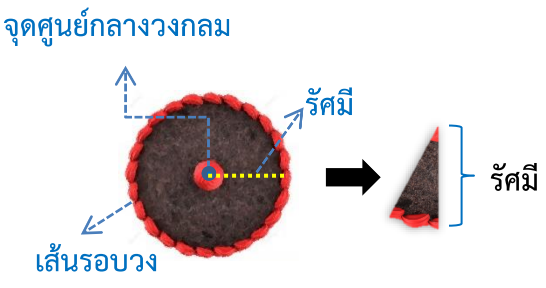
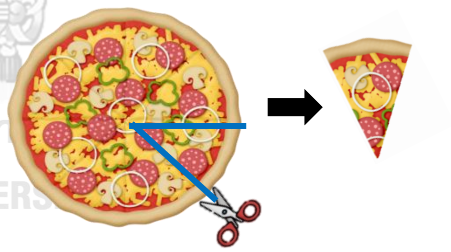
ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
ร้านโดนัท (ขายแบบเป็นชิ้น)  **ร้านเค้ก** (ขายแบบเป็นปอนด์และแบบชิ้น)  **ร้านพิซซ่า** (ขายแบบเป็นถาดและแบบเป็นชิ้น)  * มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) **ผู้เรียนจะต้องใช้การมองภาพวัตถุซึ่งเป็นรูปธรรม แล้วจินตนาการปรับเปลี่ยนทิศทาง รูปแบบ หรือส่วนประกอบภาพ แล้วพิจารณาความสัมพันธ์เชื่อมโยง เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาสถานการณ์ข้างต้น** 2. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบว่ากลุ่มใดซื้ออาหารบุฟเฟต์ได้คุ้มที่สุด กล่าวคือพื้นที่ของอาหารเต็มกล่องหรือใกล้เคียงกับพื้นที่ของกล่องมากที่สุด	**ขั้นที่ 1** ให้ผู้เรียนทาซอสพิซซ่าสีเหลืองให้เต็มพื้นที่ของพิซซ่ารูปวงกลม (ใช้การระบายสีเทียนแทนการทาซอสพิซซ่า)  **ขั้นที่ 2** ให้ผู้เรียนโรยชีสโดยทากาวและแปะกระดาษสีขาวแทนชีสให้ทั่วบริเวณพื้นที่ของพิซซ่า  **ขั้นที่ 3** ให้ผู้เรียนติดไส้กรอกที่ขอบ ทากาวแปะไส้กรอกบริเวณเส้นรอบวง 

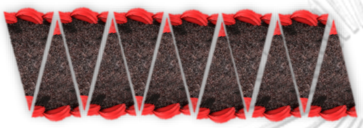
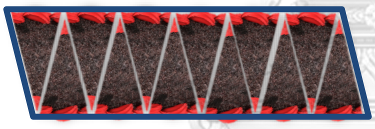
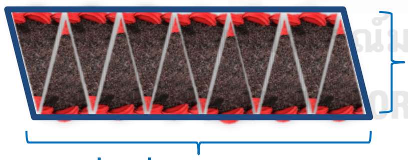
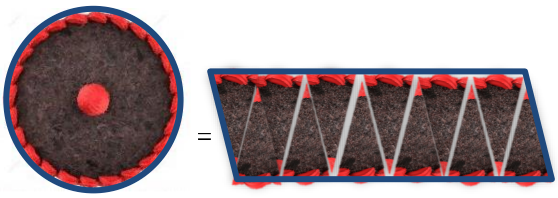
ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
3. ครูและผู้เรียนร่วมกันสังเกตและอภิปรายต่อว่าลักษณะของกลุ่มที่พื้นที่ของอาหารใกล้เคียงกับพื้นที่กล่องมีลักษณะแบบใดและซื้ออาหารแบบใด (เค้กและพิซซ่าแบบชิ้นที่แบ่งออกจากอาหารที่เป็นรูปวงกลม ซึ่งนำมาจัดเรียงใหม่จะทำให้เต็มพื้นที่กล่องมากกว่าซื้อแบบเต็มชิ้นเพียงอย่างเดียว) **<u>ขั้นที่ 2 เรียนรู้และแสดงวิธีการแก้ปัญหา (ด้วยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์)</u>** 4. ครูให้ผู้เรียนรับรูปภาพเค้ก (รูปวงกลม) กลุ่มละ 3 ภาพเพื่อช่วยกันคิดและออกแบบวิธีการหาพื้นที่ของเค้กรูปวงกลมร่วมกับความรู้เดิมในการหาพื้นที่รูปเรขาคณิตสองมิติว่าจะสามารถนำมาหาพื้นที่รูปวงกลมได้อย่างไร โดยครูให้ผู้เรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็นภายในกลุ่มและเขียนแบบจำลองทางความคิดประกอบการอภิปรายร่วมกันลงในกระดาษ ครูให้เวลา 5 นาที (ครูเดินดู แนะนำกลุ่มที่ยังมองภาพไม่ออกว่าหากตัดแบ่งออกเป็นชิ้นที่เท่าๆ กันเหมือนดังกิจกรรมแรกแล้วนำมาเรียงจะสามารถหาพื้นที่ได้หรือไม่)  ตัดแบ่งออกเป็น 4	2. ครูให้ผู้เรียนร่วมกันสังเกตและสรุปลักษณะของรูปวงกลม จากนั้นครูติดแผนภาพ  **<u>ขั้นที่ 2 ขั้นสอน</u>** 3. ครูถามผู้เรียนเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ในคาบเรียนที่แล้วว่าความยาวของเส้นรอบวงสามารถหาได้อย่างไร พร้อมทั้งติดแถบประโยคประกอบ ความยาวรอบรูปของวงกลม = $2\pi r$  ครูอธิบายต่อว่าส่วนที่ครูแรเงาด้านในของเส้นรอบวงคือพื้นที่ของรูปวงกลมซึ่งสามารถคำนวณได้จาก πr^2 โดยครูทั้งติดแถบประโยคประกอบ พื้นที่รูปวงกลม = πr^2

ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
 ตัดแบ่งออกเป็น 8  ตัดแบ่งออกเป็น 12 * มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) * มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) **ผู้เรียนจะต้องใช้การปรับเปลี่ยนทิศทางและมุมมองของวัตถุ พิจารณาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปเดิมกับรูปใหม่ เพื่อเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปวงกลมกับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน** 5. ครูและผู้เรียนแต่ละกลุ่มอภิปรายเพื่อแลกเปลี่ยนร่วมกันถึงกิจกรรมในข้อ 4. ว่าแต่ละกลุ่มมีวิธีอย่างไร จากนั้นสังเกตร่วมกันถึงลักษณะของรูปวงกลมที่ถูกแบ่ง  	4. ครูและผู้เรียนร่วมกันพิสูจน์ถึงที่มาสูตรคำนวณพื้นที่ของรูปวงกลม โดยใช้สื่อรูปภาพพิซซ่าประกอบ  ครูอธิบายว่าหากเราไม่สามารถหาพื้นที่รูปวงกลมแบบปกติได้ เราอาจใช้วิธีการตัดแบ่งรูปวงกลมออกเป็นชิ้นละเท่าๆ กัน แล้วนำมาต่อกัน  5. ครูเรียกตัวแทนผู้เรียนออกมาต่อชิ้นส่วนพิซซ่าในแนวยาวสลับฟันปลา เมื่อนำมาต่อกันให้ผู้เรียนทุกคนร่วมกันสังเกตว่ามีลักษณะเหมือนกับรูปเรขาคณิตชนิดใด 

ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
เมื่อตัดแบ่งเค้กรูปวงกลมโดยตัดแบ่งให้แต่ละชิ้นเท่าๆ กัน เราจึงต้องใช้แนวเส้นรัศมีเป็นหลักในการแบ่งเค้กแต่ละชิ้น และเมื่อนำมาเรียงต่อกันจะมีลักษณะดังนี้  6. ครูถามผู้เรียนว่าเมื่อนำเค้กมาต่อกันจะมีลักษณะคล้ายรูปเรขาคณิตชนิดใด และผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้เดิมในการหาพื้นที่ได้หรือไม่ อย่างไร (รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน)  ผู้เรียนสังเกตส่วนประกอบจากรูปที่ได้  ดังนั้นพื้นที่รูปวงกลมมีค่าเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจากการนำชิ้นเค้กมาต่อกัน 	ครูติดรูปพิซซ่าที่เรียงกันนี้บนกระดาน ครูวาดกรอบเพื่อแสดงการมองรูปที่ปรากฏ ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  __ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป__ 6. ครูถามผู้เรียนว่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสามารถหาได้อย่างไร โดยครูติดแถบประโยคประกอบหลังผู้เรียนทบทวนสูตรคำนวณ ☐ ด้านขนาน = ความสูง×ความยาวฐาน จากรูปข้างต้นครูให้ผู้เรียนสังเกตและบอกว่าส่วนใดคือความสูง และส่วนใดคือความยาวฐาน ความสูง มีค่าเท่ากับ ความยาวรัศมีวงกลม (r) ความยาวฐาน มีค่าเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูป ($2\pi r \div 2$)

ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

<table>
<tr><th>กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)</th><th>กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ
(สำหรับกลุ่มควบคุม)</th></tr>
<tr><td>

<u>**ขั้นที่ 3 การอภิปรายคำตอบและสรุปผล**</u>

7. ครูถามผู้เรียนว่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสามารถหาได้อย่างไร โดยครูติดแถบประโยคประกอบหลังผู้เรียนทบทวนสูตรคำนวณ

□ ด้านขนาน = ความสูง × ความยาวของฐาน

จากรูปชิ้นส่วนของเค้กที่เรียงต่อกัน ครูและผู้เรียนร่วมกันอภิปรายเพื่อสรุปค่าความสูงและค่าความยาวฐานของรูป

ความสูง มีค่าเท่ากับ ความยาวรัศมีวงกลม (r)

ความยาวฐาน มีค่าเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของความยาวรอบรูป (2πr ÷ 2)

□ ด้านขนาน = ความสูง × ความยาวของฐาน

= r × (2πr ÷ 2)

= r × πr

= πr × r

= πr^2

</td><td>

□ ด้านขนาน = ความสูง × ความยาวฐาน

= r × (2πr ÷ 2)

= r × πr

= πr × r

= πr^2

ดังนั้นจึงสรุปวิธีการคำนวณหาพื้นที่ของรูปวงกลม ได้ว่า

พื้นที่รูปวงกลม = πr^2

ค่า **π** เป็นค่าคงตัวที่มีค่าประมาณ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14

และมีหน่วยเป็นตารางหน่วย

7. ครูยกตัวอย่างให้ผู้เรียนร่วมกันหาพื้นที่พิซซ่า รัศมี 7 ซม.

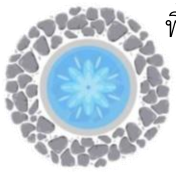
พื้นที่จะเท่ากับ $\frac{22}{7} \times 7 \times 7$ = 154 ตร.ซม.

</td></tr>
</table>

ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
8. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปวิธีการคำนวณหาพื้นที่ของรูปวงกลม โดยครูติดแถบประโยคประกอบ พื้นที่รูปวงกลม = πr^2 ค่า π เป็นค่าคงตัวที่มีค่าประมาณ $\frac{22}{7}$ และมีหน่วยเป็นตารางหน่วย  ครูยกตัวอย่างให้ผู้เรียนร่วมกันหาพื้นที่พิซซ่า รัศมี 7 ซม. พื้นที่จะเท่ากับ $\frac{22}{7}\times7\times7$ = 154 ตารางเซนติเมตร **<u>ขั้นที่ 4 การสะท้อนผลการเรียนรู้และนำไปใช้</u>** 9. ครูและผู้เรียนร่วมกันสะท้อนผลการเรียนรู้ว่าผู้เรียนได้เรียนรู้อะไรบ้าง สามารถนำไปปรับใช้ได้อย่างไรบ้างรวมทั้งให้ผู้เรียนสะท้อนผลที่ได้เรียนรู้ผ่านกิจกรรม “สร้างโลกสีเขียว” ครูแจกแบบแปลนสวนสาธารณะประจำตำบล โดยองค์การบริหารส่วนตำบล (อบต.) แบ่งโซนออกเป็น A,B,C ซึ่งมีพื้นที่ดังต่อไปนี้  * มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation)	8. ครูแบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ปาร์ตี้อาหารจานกลม” ผู้เรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันคำนวณพื้นที่ของเมนูอาหารว่าสามารถวางบนถาดอาหารสีเหลืองกลางโต๊ะอาหารได้หรือไม่ กลุ่มที่ตอบถูกจะได้รับเมนูนั้น ๆ เข้ากลุ่ม กลุ่มที่มีอาหารมากที่สุดเป็นผู้ชนะ  (ถาดอาหารสีเหลืองมีพื้นที่ 5,544 ตารางเซนติเมตร) **1) ขนมเค้ก รัศมี 21 ซม.**  พื้นที่เค้ก = πr^2 = $\frac{22}{7}\times21\times21$ = 1386 ตร.ซม. ดังนั้น ขนมเค้กพื้นที่ 1386 ตร.ซม. สามารถวางได้

ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
* มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) **ผู้เรียนใช้การมองภาพเพื่อพิจารณาขนาดพื้นที่ จากนั้นคำนวณพื้นที่วัตถุเพื่อนำมาจัดวางตามตำแหน่งต่าง ๆ ให้มีความเหมาะสม** **1) สวนน้ำพุ รัศมี 7 เมตร**  พื้นที่สวนน้ำพุ = πr^2 $= \frac{22}{7}\times7\times7$ = 154 ตร.ม. ดังนั้น สวนน้ำพุจะตรงกับพื้นที่ในโซน C **2) สระว่ายน้ำ รัศมี 21 เมตร**  พื้นที่สระว่ายน้ำ = πr^2 $= \frac{22}{7}\times21\times21$ = 1386 ตร.ม. ดังนั้น สระว่ายน้ำจะตรงกับพื้นที่ในโซน B **3) สนามเด็กเล่น รัศมี 14 เมตร**  พื้นที่สนาม = πr^2 $= \frac{22}{7}\times14\times14$ = 616 ตร.ม. ดังนั้น สนามเด็กเล่นจะตรงกับพื้นที่ในโซน A	**2) โดนัท รัศมี 7 ซม.**  พื้นที่โดนัท = πr^2 $= \frac{22}{7}\times7\times7$ = 154 ตร.ซม. ดังนั้น โดนัทพื้นที่ 154 ตร.ซม. สามารถวางได้ **3) โดนัท รัศมี 35 ซม.**  พื้นที่โดนัท = πr^2 $= \frac{22}{7}\times35\times35$ = 3850 ตร.ซม. ดังนั้น โดนัทพื้นที่ 3850 ตร.ซม. สามารถวางได้ 9. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง 10. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 6 พื้นที่ของรูปวงกลม และร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของแบบฝึกทักษะ *1) หมู่บ้านสร้างวงเวียนหอนาฬิกาซึ่งวงเวียนมีรัศมี 3 เมตร และเทถนนรอบวงเวียนถนนกว้าง 4 เมตร ผู้ใหญ่บ้านต้องเตรียมพื้นที่สำหรับทำวงเวียนและถนนโดยรอบเป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร*

ตารางที่ 13 (ต่อ) เปรียบเทียบกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่เรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงและกลุ่มควบคุมที่เรียนรู้แบบปกติ

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
10. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง กลุ่มใดที่สามารถวางแปลนได้สมบูรณ์ที่สุดจะเป็นผู้ชนะ  11. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 6 พื้นที่ของรูปวงกลม โดยครูและผู้เรียนวิเคราะห์ทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา จากนั้นให้ผู้เรียนออกแบบและแก้ปัญหารวมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของแบบฝึกทักษะ *1) หมู่บ้านสร้างวงเวียนหอนาฬิกาซึ่งวงเวียนมีรัศมี 3 เมตร และเทถนนรอบวงเวียน ถนนกว้าง 4 เมตร ผู้ใหญ่บ้านต้องเตรียมพื้นที่สำหรับทำวงเวียนและถนนโดยรอบเป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร* *2) พ่อสร้างคอกวัวรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ความยาวด้าน 20 เมตรไว้กลางทุ่ง ในตอนกลางวันพ่อจะผูกวัวไว้กับเสามุมคอกที่อยู่ด้านนอกเพื่อกินหญ้ารอบ ๆ คอก โดยเชือกมีความยาว 14 เมตร อยากทราบว่าวัวที่พ่อเลี้ยงไว้สามารถกินหญ้าในบริเวณกว้างเป็นพื้นที่ทั้งหมดเท่าไร*	*2) พ่อผูกวัวไว้กับเสาต้นหนึ่งเพื่อกินหญ้ารอบ ๆ คอก โดยเชือกมีความยาว 14 เมตร อยากทราบว่าวัวที่พ่อเลี้ยงไว้สามารถกินหญ้าในบริเวณกว้างเป็นพื้นที่ทั้งหมดเท่าไร*

4.2.4 พิจารณาตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนรู้เรขาคณิตตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์และแผนการจดการเรียนรู้แบบปกติ และนำไปให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม เพื่อนำข้อเสนอแนะไปปรับปรุงแก้ไขก่อนนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้

5. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียน แบบสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหาของผู้เรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง ซึ่งมีรายละเอียดและวิธีการสร้างแบบวัด ดังต่อไปนี้

5.1 แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดทักษะการแก้ปัญหา เรื่อง เรขาคณิตสองมิติและสามมิติ เป็นแบบทดสอบอัตนัย แบ่งออกเป็น 2 ชุด ชุดละ 10 ข้อ 50 คะแนน ใช้เวลา 60 นาที ประกอบด้วย

- แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับ<u>ก่อนเรียน</u>
- แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับ<u>หลังเรียน</u>

แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นแบบวัดที่สร้างขึ้นเพื่อใช้วัดความรู้ทางคณิตศาสตร์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบทดสอบดังนี้

5.1.1 ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เกณฑ์ในการวัดทักษะการแก้ปัญหา

5.1.2 ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้เรื่องเรขาคณิตสองมิติและสามมิติจากหนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 หนังสือคู่มือครู หนังสือตำรา หนังสืออ่านประกอบอื่น ๆ

5.1.3 สร้างแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 30 ข้อ โดยโครงสร้างเนื้อหาตามเรื่องที่สอนในตารางที่ 11

5.1.4 ผู้วิจัยนำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เสนออาจารย์ที่ปรึกษาเพื่อตรวจสอบความถูกต้อง เหมาะสม และให้ข้อเสนอแนะ เพื่อปรับปรุงแก้ไข จากนั้นผู้วิจัยนำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน (รายชื่อตามภาคผนวก ก) ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา แล้วนำมาหาค่า IOC ของผู้ทรงคุณวุฒิ 3 ท่านเป็นรายข้อ และนำคำแนะนำที่ได้รับมาปรับปรุง เช่น

โจทย์เดิม : สนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 42 เมตร ยาว 45 เมตร ต้องการพื้นที่วงกลมที่ใหญ่ที่สุดภายในสนามแล้วล้อมรั้วลวดหนามสูง 4 แถว **แถวละเท่า ๆ กัน** จะต้องใช้ลวดหนาม**ยาวเท่าไร**

โจทย์ใหม่ : สนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 42 เมตร ยาว 45 เมตร ต้องการพื้นที่วงกลมที่ใหญ่ที่สุดภายในสนามแล้วล้อมรั้วลวดหนามสูง 4 แถว **แต่ละแถวใช้ลวดหนามยาวเท่ากัน** จะต้องใช้ลวดหนาม**ยาวกี่เมตร**

โจทย์เดิม : ปรีชาเจอลูกช้างขนาดลำตัวยาว 2 เมตร กำลังตกมันยืนหมุมรอบตัวเองเป็นวงกลมในป่า โดยลูกช้างใช้งวงของมันเหวี่ยงต้นกล้วยยาว 5 เมตร ปรีชาต้องอยู่ให้ห่างจากรัศมีที่ช้างตกมันเป็นพื้นที่เท่าไร

โจทย์ใหม่ : ฐานของม้าหมุนในสวนสนุกแห่งหนึ่งเป็นวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 เมตร เจ้าของม้าหมุนต้องการทำหลังคาคลุมบนม้าหมุนและยื่นต่อออกไปจากตัวม้าหมุนอีก 2 เมตร หลังคาของม้าหมุนนี้มีพื้นที่กี่ตารางเมตร

5.1.5 นำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้ผ่านการพิจารณาจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้วมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ แล้วนำไปทดลองใช้ครั้งที่ 1 (Try out) กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนแห่งหนึ่งในจังหวัดสิงห์บุรี ซึ่งไม่ใช่ตัวอย่าง จำนวน 30 คน แล้วนำมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนด

5.1.6 ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ มาวิเคราะห์ข้อมูลของแบบทดสอบ เพื่อหาหาค่าความยาก(p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเที่ยง (Reliability) โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา(Alpha Coefficient) ของครอนบาค (Cronbach) ซึ่งค่าความยาก ค่าอำนาจจำแนก และความเที่ยงของแบบวัดตามเกณฑ์ที่กำหนด มีดังนี้

ค่าความยาก (p)	อยู่ระหว่าง 0.20 – 0.80
ค่าอำนาจจำแนก (r)	มีค่า 0.20 ขึ้นไป
ค่าความเที่ยง (reliability)	มีค่าตั้งแต่ 0.60 ขึ้นไป

5.1.7 นำผลที่ได้มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัด จากนั้นผู้วิจัยเลือกข้อสอบที่มีคุณภาพ ให้เหลือ 20 ข้อ แบ่งเป็น 1) แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน จำนวน 10 ข้อ และ 2) แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน จำนวน 10 ข้อ ซึ่งแบบวัดทั้งสองชุดมีความเป็นคู่ขนาน (เท่าเทียมกัน) ทั้งในด้านเนื้อหาและระดับความยาก โดยผู้วิจัยจัดเป็นชุดข้อสอบ 2 ชุดข้างต้นและสุ่มเลือกให้เป็นฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน

โดยผลการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีดังนี้

1) แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน จำนวน 10 ข้อ

ค่าความยาก (p)	มีค่า	0.34 – 0.71
ค่าอำนาจจำแนก (r)	มีค่า	0.25 – 0.81
ค่าความเที่ยง (reliability)	มีค่า	0.832

2) แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน จำนวน 10 ข้อ

ค่าความยาก (p)	มีค่า	0.31 – 0.70
ค่าอำนาจจำแนก (r)	มีค่า	0.31 – 0.79
ค่าความเที่ยง (reliability)	มีค่า	0.884

5.1.8 นำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

5.2 แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหาของผู้เรียน

ผู้วิจัยสังเกตพฤติกรรมการเรียนและการตอบคำถามในแบบฝึกทักษะโดยแบ่งประเด็นการสังเกตพฤติกรรมตามทักษะในการแก้ปัญหา ดังนี้

ตารางที่ 14 แบบบันทึกการสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผู้เรียน	บันทึกการสังเกตพฤติกรรมตามตามทักษะในการแก้ปัญหา					รวม
	1. ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา	2. ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา			3. ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้	
		2.1 ทักษะการเชื่อมโยงความรู้	2.2 ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด	2.3 ทักษะในการปฏิบัติ		
	(2 คะแนน)	(2 คะแนน)	(2 คะแนน)	(2 คะแนน)	(2 คะแนน)	(10 คะแนน)

ผู้วิจัยสังเกตพฤติกรรมที่แสดงถึงทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ผู้เรียน จากร่องรอยการทำงาน พฤติกรรมในการเรียน และการตอบคำถามในชั้นเรียน รวมถึงปัญหาและอุปสรรคที่พบขณะดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จากการสังเกตด้วยตัวผู้วิจัยและการบันทึกวิดีโอ โดยแบ่ง

การสังเกตพฤติกรรมออกเป็น 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 1-5, ระยะที่ 2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 6-10 และ ระยะที่ 3การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 11-15

ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเกณฑ์การให้คะแนนทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักการศึกษาหลายท่าน จนได้นำแนวทางมาสร้างเป็นเกณฑ์การวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นแนวทางในการประเมินผลทักษะผู้เรียนโดยสังเกตจากร่องรอยการทำงานในแบบฝึกทักษะร่วมกับการสังเกตพฤติกรรมในการเรียนและการตอบคำถามในชั้นเรียน โดยผู้วิจัยสังเกตด้วยตนเองประกอบกับการบันทึกภาพและวิดีโอประกอบ ดังนี้

ตารางที่ 15 เกณฑ์การให้คะแนนทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะ	คะแนนเต็ม	ระดับคะแนน	ระดับพฤติกรรมที่แสดงออกถึงทักษะในการแก้ปัญหา
1. ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา	2	0	ผู้เรียนไม่สามารถระบุรายละเอียดของปัญหาที่ต้องการแก้ได้
		1	ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหาถูกต้องเพียงบางส่วน ซึ่งส่วนที่ขาดหายไปคือส่วนหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหา
		2	ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหาถูกต้องและครบถ้วน และสามารถแยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้ได้ถูกต้องและครบถ้วน
2. ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา			
2.1 ทักษะการเชื่อมโยงความรู้	2	0	ผู้เรียนแก้ปัญหาทันทีโดยไม่มีการวางแผนหรือเชื่อมโยงความรู้กับปัญหาในการแก้ปัญหา
		1	ผู้เรียนแสดงวิธีการวางแผนแก้ปัญหาโดยมีการเชื่อมโยงข้อมูลกับปัญหาและประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการแก้ปัญหา แต่วิธีการทางคณิตศาสตร์ยังไม่ถูกต้องสมบูรณ์
		2	ผู้เรียนมีการวางแผนแก้ปัญหาโดยมีการเชื่อมโยงข้อมูลกับปัญหาและประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม ถูกต้องและครบถ้วนสมบูรณ์ หรือเขียนในรูปวิธีการทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง

ตารางที่ 15 (ต่อ) เกณฑ์การให้คะแนนทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ทักษะ	คะแนนเต็ม	ระดับคะแนน	ระดับพฤติกรรมที่แสดงออกถึงทักษะในการแก้ปัญหา
2.2 ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด	2	0	ผู้เรียนแก้ปัญหาโดยไม่มีการสร้างแบบจำลองทางความคิด
		1	ผู้เรียนมีการสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหา แต่แบบจำลองทางความคิดยังไม่ถูกต้องและเหมาะสม
		2	ผู้เรียนสามารถสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางหาคำตอบได้อย่างเหมาะสมและถูกต้อง
2.3 ทักษะในการปฏิบัติ	2	0	ผู้เรียนดำเนินการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง เมื่อเกิดข้อผิดพลาดผู้เรียนไม่สามารถประยุกต์ใช้ความรู้ในการลงมือแก้ปัญหาจนได้คำตอบที่ถูกต้องได้
		1	ผู้เรียนลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่วางไว้แต่ไม่ทั้งหมด โดยขาดขั้นตอนที่สำคัญต่อการแก้ปัญหา จนเกิดข้อผิดพลาดที่ผู้เรียนไม่สามารถประยุกต์ใช้ความรู้ในการลงมือแก้ปัญหา
		2	ผู้เรียนสามารถลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น มีการตรวจสอบความถูกต้องและข้อบกพร่องและสามารถปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างคล่องแคล่ว จนสามารถแก้ปัญหาหรือคิดคำนวณได้ถูกต้อง
3. ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้	2	0	ผู้เรียนไม่สามารถสามารถสรุปคำตอบ ไม่มีการตรวจสอบกระบวนการและคำตอบที่ได้ และไม่สามารถบอกแนวทางนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้
		1	ผู้เรียนสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้อง แสดงการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบถูกต้องส่วนหนึ่ง และอีกส่วนหนึ่งไม่ถูกต้อง และไม่สามารถเรียนรู้และปรับแก้ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นได้
		2	ผู้เรียนสามารถสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน มีการแสดงการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาและคำตอบที่ถูกต้องได้อย่างสมเหตุสมผลและครบถ้วน สามารถเรียนรู้และปรับแก้ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้นและบอกแนวทางการนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ

5.3 แบบบันทึกการสัมภาษณ์แนวทางการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยจัดเตรียมคำถามแบบกึ่งโครงสร้างสัมภาษณ์ผู้เรียนก่อนเรียนและหลังเรียน เพื่อศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อถามตัวแทนผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยมีกรอบการสัมภาษณ์ตามทักษะการแก้ปัญหา ได้แก่

1) ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา

2) ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา ประกอบด้วย ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด และทักษะในการปฏิบัติ

3) ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้

ตารางที่ 16 โครงสร้างคำถามแบบบันทึกการสัมภาษณ์แนวทางการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แนวข้อคำถาม	คำตอบของผู้เรียน
1. ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา - ปัญหา/สถานการณ์มีส่วนประกอบสำคัญในการนำไปใช้ประกอบการแก้ปัญหาคืออะไรบ้าง จงยกตัวอย่าง - ผู้เรียนมีข้อสังเกตอย่างไรในการเชื่อมโยงความรู้เพื่อการแก้ปัญหา ว่าในแต่ละสถานการณ์ต้องใช้ความรู้เรื่องใดมาปรับใช้	
2. ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา 2.1 ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ - ผู้เรียนได้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาปรับใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างไร 2.2 ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด - ผู้เรียนมีการวางแผนหรือออกแบบวิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างไร - ผู้เรียนได้สร้างแบบจำลองทางความคิดในการแก้ปัญหาหรือไม่ บ่อยแค่ไหน - ส่วนมากผู้เรียนจะแสดงแบบจำลองทางความคิดออกมาในรูปแบบใด ***(ตัวอย่างของแบบจำลอง เช่น ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น)***	

ตารางที่ 16 (ต่อ) โครงสร้างคำถามแบบบันทึกการสัมภาษณ์ทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แนวข้อคำถาม	คำตอบของผู้เรียน
2.3 ทักษะในการปฏิบัติ - ผู้เรียนมีส่วนร่วมกันการแก้ปัญหาในกลุ่มหรือในชั้นเรียนอยู่ในระดับใด (มากหรือน้อย) - ผู้เรียนได้ปฏิบัติการแก้ปัญหาตามที่ได้ออกแบบไว้หรือไม่ - หากการแก้ปัญหาไม่เป็นไปตามแผน ผู้เรียนมีวิธีการจัดการอย่างไร	
3. ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ - ผู้เรียนได้มีการตรวจสอบผลการแก้ปัญหาว่าประสบความสำเร็จหรือไม่ อย่างไร - ผู้เรียนสามารถสรุปผลการแก้ปัญหาด้วยตนเองได้หรือไม่ - หากผู้เรียนเจอสถานการณ์ปัญหาที่ใช้ความรู้เรื่องเดียวกับที่ได้เรียนรู้ ผู้เรียนจะมีวิธีการนำไปปรับใช้ได้อย่างไร	

6. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ เป็นการวิจัยแบบกึ่งทดลอง (Quasi-experimental Research) ผู้วิจัยได้ดำเนินการสอนนักเรียนตัวอย่าง จำนวน 1 กลุ่ม คือ กลุ่มทดลอง ได้ดำเนินการทดลอง และเก็บรวบรวมข้อมูล โดยแบ่งออกเป็นการเก็บข้อมูลเชิงปริมาณ และการเก็บข้อมูลเชิงคุณภาพ ดังนี้

6.1 การเก็บข้อมูลเชิงปริมาณ

6.1.1 ผู้วิจัยดำเนินการสอบผู้เรียนทั้งสองกลุ่มก่อนการทดลองโดยใช้แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

6.1.2 นำคะแนนที่ได้จากการทำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของตัวอย่างทั้งสองกลุ่มมาหาค่าเฉลี่ย ($\bar{x}$)

6.1.3 ผู้วิจัยทำการสุ่มอย่างง่ายโดยการจับฉลากเพื่อกำหนดกลุ่มทดลอง และกลุ่มควบคุม โดยผู้เรียนกลุ่มที่ 1 เป็นกลุ่มทดลอง จะได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ และผู้เรียนกลุ่มที่ 2 เป็นกลุ่มควบคุม จะได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่องเรขาคณิตแบบปกติ

6.1.4 ผู้วิจัยดำเนินการสอนตัวอย่างในการวิจัยทั้งสองกลุ่มตามแผนการจัดการเรียนรู้ทั้ง 2 รูปแบบที่ได้เตรียมไว้ โดยทำการทดลองสอนผู้เรียนทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 2 ชั่วโมง/สัปดาห์ เป็นเวลา 8 สัปดาห์ รวมทั้งสิ้น 15 ชั่วโมง ปีการศึกษา 2562 โดยสอนในชั่วโมงซ่อมเสริมของโรงเรียนขนาดเล็กแห่งหนึ่งของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี และเริ่มทำการทดลองตั้งแต่วันที่ 29 สิงหาคม 2562 ถึง 17 ตุลาคม 2562

6.1.5 เมื่อดำเนินการสอนตามที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ครบ 15 แผนแล้ว ผู้วิจัยให้ผู้เรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลา 1 ชั่วโมง

6.1.6 ผู้วิจัยนำแบบวัดของผู้เรียนทั้งสองกลุ่มมาตรวจให้คะแนน โดยพิจารณาตามคำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัยเพื่อให้อยู่ในขอบเขตที่สามารถใช้เกณฑ์ดังกล่าวได้ จากนั้นนำผลที่ได้ไปวิเคราะห์ข้อมูลตามจุดประสงค์การวิจัย

6.2 การเก็บข้อมูลเชิงคุณภาพ

6.2.1 ผู้วิจัยสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนด้านทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากร่องรอยการทำงาน พฤติกรรมในการเรียน และการตอบคำถามในชั้นเรียน รวมถึงปัญหาและอุปสรรคที่พบขณะดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยแบ่งการสังเกตพฤติกรรมออกเป็น 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 1-5, ระยะที่ 2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 6-10 และ ระยะที่ 3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 11-15

6.2.2 การสัมภาษณ์ผู้เรียนเป็นรายกรณี จำนวน 3 คน โดยผู้เรียนมีคะแนนทักษะในการแก้ปัญหาแตกต่างกัน เพื่อศึกษาทักษะการแก้ปัญหาทั้งก่อน และหลังจากที่นักเรียนปรับใช้ความรู้ โดยผู้วิจัยใช้คำถามแบบกึ่งโครงสร้างในการดำเนินการสัมภาษณ์

7. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลโดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ และการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ ดังนี้

7.1 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ผู้วิจัยนำผลจากการทำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องเรขาคณิตสองมิติและสามมิติมาตรวจให้คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน หลังเรียนของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม วิเคราะห์ข้อมูลด้วยการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S) และทำการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบที (t-test) ของคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Science: SPSS) ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

7.1.1 เปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตสองมิติตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน (t-test dependent)

7.1.2 เปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตสองมิติตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง กับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ โดยใช้การทดสอบค่าที (t-test independent)

7.2 การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ผู้วิจัยได้ศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพดังนี้

หลังจากวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ ผู้วิจัยนำประเด็นสำคัญมาหาคำอธิบายเพิ่มเติม โดยศึกษาร่องรอยการทำงานของผู้เรียนจากแบบฝึกทักษะ สังเกตพฤติกรรม การตอบคำถาม และการสัมภาษณ์ รวมถึงวิเคราะห์ปัญหาและอุปสรรคที่พบขณะที่ดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) เพื่อประกอบการอธิบายผลที่เกิดขึ้นระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และนำเสนอข้อมูลในลักษณะความเรียงประกอบตาราง

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก โดยผู้วิจัยแบ่งเป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ และการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ และได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ 3 ตอน ดังนี้

การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ตอนที่ 3 ผลการศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณ

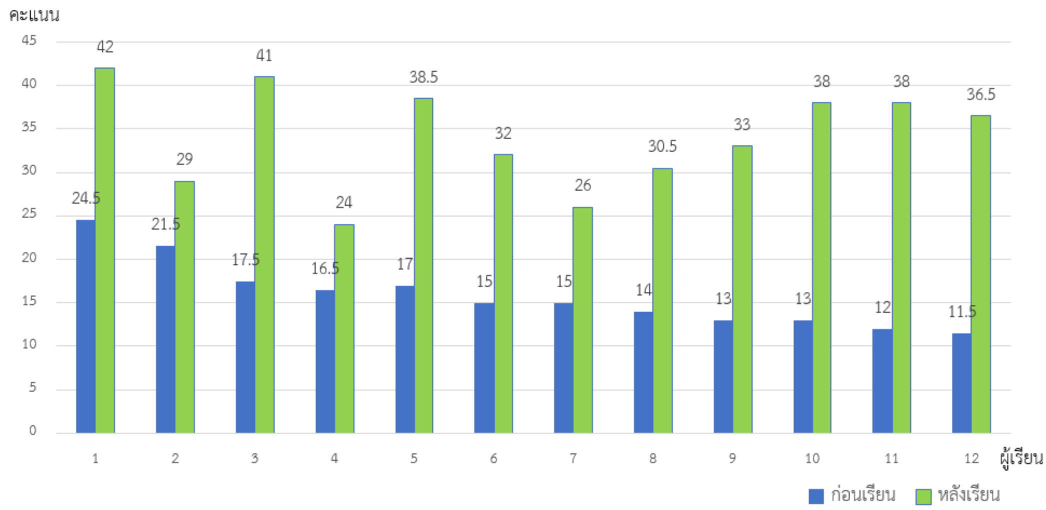
ตอนที่ 1 ผลการเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน

ตารางที่ 17 ค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่า t (t-test dependent) ของคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	ค่าสถิติพื้นฐาน		t	*p*
	$\bar{X}$	S.D.		
หลังเรียน	34.04	5.86	9.515	0.00*
ก่อนเรียน	15.88	3.89		

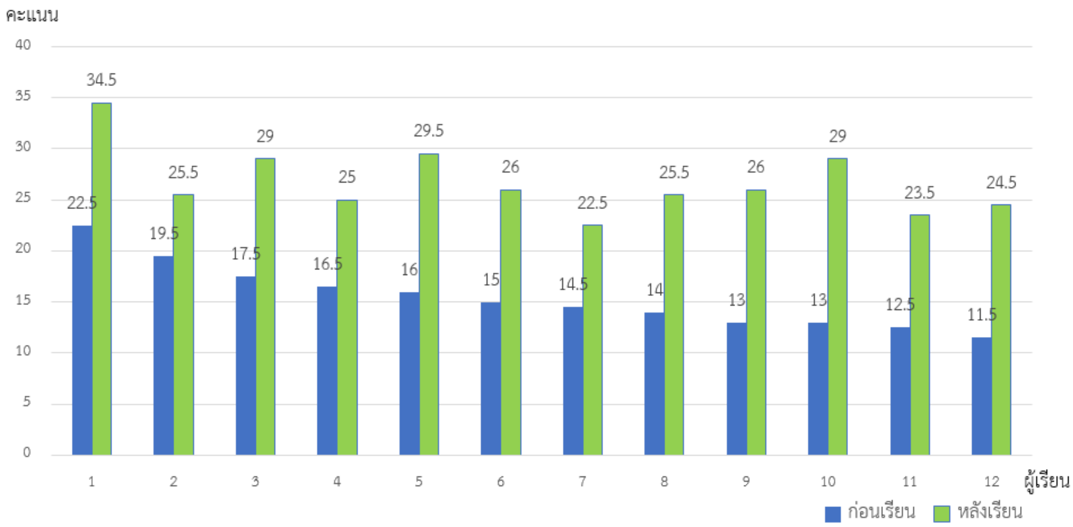
* $p < 0.05$

จากตารางที่ 17 พบว่า ผลการทดสอบค่าที (t-test dependent) เท่ากับ 9.515 และค่า *p* เท่ากับ 0.00 แสดงถึงความสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัย ทำให้ผลการเปรียบเทียบคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลองมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้ คะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน ของผู้เรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ จำนวน 12 คน มีค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ของคะแนนจากแบบทดสอบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนการทดลองเท่ากับ 15.88 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) เท่ากับ 3.89 และมีค่าเฉลี่ย ($\bar{X}$) ของคะแนนจากแบบทดสอบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการทดลอง เท่ากับ 34.04 คะแนนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 5.86 ซึ่งแสดงว่าคะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05



ภาพที่ 32 คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลอง

จากภาพที่ 32 เมื่อเปรียบเทียบคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลองที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เป็นรายผู้เรียน จำนวน 12 คน พบว่าผู้เรียนมีคะแนนทักษะการแก้ปัญหาหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน จำนวน 12 คน โดยแต่ละคนมีความแตกต่างของคะแนนที่ต่างกัน ตั้งแต่ 7.5 ถึง 26 คะแนน



ภาพที่ 33 คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มควบคุม

จากภาพที่ 33 เมื่อเปรียบเทียบคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มควบคุมที่ได้รับกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติเป็นรายผู้เรียน จำนวน 12 คน พบว่าผู้เรียนมีคะแนนทักษะการแก้ปัญหาหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน จำนวน 12 คน โดยแต่ละคนมีความแตกต่างของคะแนนที่ต่างกัน ตั้งแต่ 6 ถึง 16 คะแนน

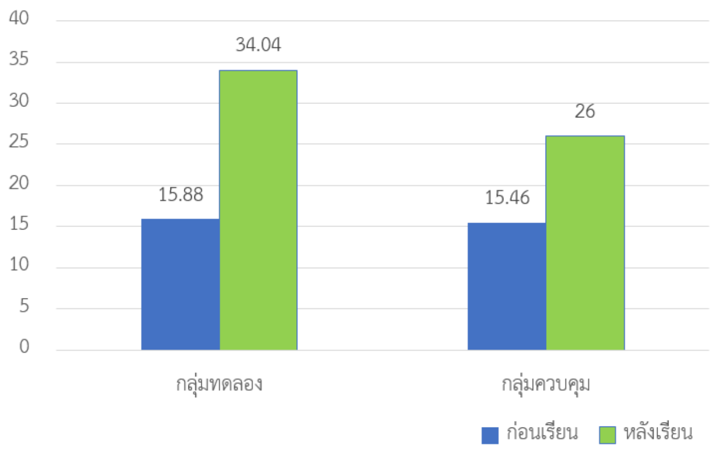
ตอนที่ 2 ผลการเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

ตารางที่ 18 ค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่า t (t-test independent) ของคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลองและผู้เรียนกลุ่มควบคุม

ผู้เรียน	คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียน		t	*p*
	$\overline{X}$	S.D.		
กลุ่มทดลอง	34.04	5.86	3.781	0.0005*
กลุ่มควบคุม	26.71	3.29		

* $p < 0.05$

จากตารางที่ 18 พบว่า ผลการทดสอบค่าที (t-test independent) เท่ากับ 3.781 และค่า *p* เท่ากับ 0.0005 แสดงถึงความสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัย ทำให้ผลการเปรียบเทียบคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมมีความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นอกจากนี้ คะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากการทดสอบหลังเรียนจากคะแนนเต็ม 50 คะแนนของผู้เรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 12 คน ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีค่าเฉลี่ย ($\overline{X}$) เท่ากับ 34.04 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) เท่ากับ 5.86 ในขณะที่ผู้เรียนกลุ่มควบคุมที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ จำนวน 12 คน มีค่าเฉลี่ย ($\overline{X}$) ของคะแนนจากแบบทดสอบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังการทดลอง เท่ากับ 26.71 คะแนนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 3.29 ซึ่งแสดงว่าคะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ



ภาพที่ 34 ค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม

จากภาพที่ 34 เมื่อเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนของผู้เรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม พบว่า ค่าเฉลี่ยของคะแนนทดสอบหลังเรียนของกลุ่มทดลอง เท่ากับ 34.04 ค่าเฉลี่ยคะแนนทดสอบหลังเรียนของกลุ่มควบคุม เท่ากับ 26.00 ซึ่งค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพ

ตอนที่ 3 ผลการศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรูตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

ผู้วิจัยได้ทำการสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนด้านทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ โดยสังเกตจากร่องรอยการทำงาน พฤติกรรมในการเรียน การตอบคำถามในชั้นเรียนประกอบกับการสัมภาษณ์ตัวแทนผู้เรียนที่มากจากการสุ่มตัวแทนผู้เรียน 3 คนในช่วงก่อนการทดลองและหลังการทดลอง เพื่อศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนได้รับการพัฒนาโดยกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยผู้วิจัยวิเคราะห์ผลการศึกษาออกเป็น 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 1-5), ระยะที่ 2 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 6-10) และ ระยะที่ 3 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 11-15)

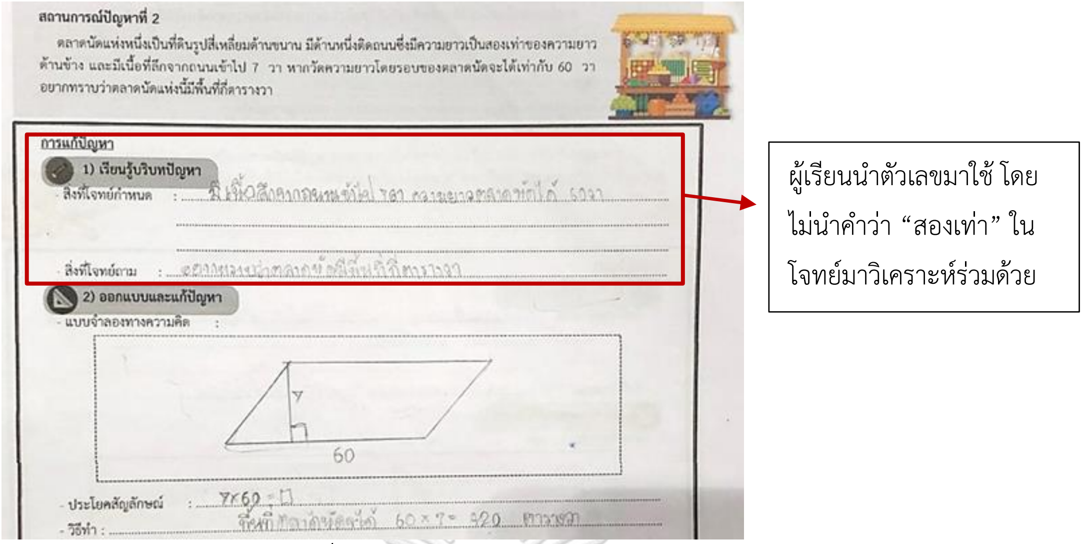
3.1 ผลการศึกษาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระยะที่ 1 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 1-5)

จากการสังเกตร่องรอยในการทำแบบวัดทักษะและแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนในช่วงแรก ผู้วิจัยพบว่า **ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา**ของผู้เรียน ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหา โดยระบุส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้ได้ครบถ้วน จากบทสัมภาษณ์ที่ว่าผู้เรียนจะทราบได้อย่างไรว่าข้อนั้น ๆ กำหนดอะไรมาให้ และโจทย์ต้องการให้หาอะไร

“สังเกตจากตัวเลขค่ะ ถ้าประโยคไหนมีตัวเลขมาให้ ประโยคนั้นคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เราเอามาคิดเลขค่ะ แต่ประโยคที่มี กี่ หรือเท่าไร จะประโยคคำถามที่ให้เราตอบค่ะ”

ผู้เรียนคนที่ 1 สัมภาษณ์ 29 ส.ค. 62

จากการสัมภาษณ์เกี่ยวกับการเรียนรู้กับสถานการณ์ปัญหาดังกล่าว ผู้เรียนที่สัมภาษณ์เพิ่มเติมอีก 2 คนตอบในทิศทางเดียวกัน แต่ปัญหาที่ผู้วิจัยพบในการทำความเข้าใจของผู้เรียนคือ 1) เมื่อผู้เรียนเจอโจทย์ที่มีตัวเลขและตัวเลขลวง ผู้เรียนจะนำตัวเลขทั้งหมดที่โจทย์ให้มาในการคำนวณ โดยผู้เรียนพยายามเชื่อมโยงตัวเลขที่โจทย์ให้มาทั้งหมด แล้วทำให้ได้คำตอบที่ไม่ถูกต้องได้ 2) กรณีที่ผู้เรียนไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ในความสัมพันธ์ของตัวเลขบางตัวในการหาคำตอบได้ ผู้เรียนจะมีการตัดข้อมูลที่สำคัญที่โจทย์ให้มานั้นทิ้ง ไม่นำมาใช้ในการคำนวณ คำตอบที่ได้จึงไม่ถูกต้องเช่นเดียวกัน และ 3) ผู้เรียนนำตัวเลขที่โจทย์ให้มา มาใช้ในการหาคำตอบ แต่ไม่นำข้อความที่กำหนดเพิ่มเติมมาใช้ในการคิดคำนวณ เนื่องจากผู้เรียนการทำความเข้าใจและการวิเคราะห์ข้อความอย่างละเอียดรอบคอบ ดังภาพที่ 35 ที่โจทย์มีตัวเลขความลึกของที่ดิน 7 วา และความยาวรอบที่ดิน 60 วา และมีการใช้ข้อความกำหนดเพิ่มเติมเพื่อใช้ในการคำนวณว่า **ความยาวด้านที่ติดถนนมีความยาวเป็นสองเท่าของความยาวด้านข้าง** ซึ่งผู้เรียนไม่ได้นำข้อกำหนดนี้มาใช้ในการคำนวณ จึงได้คำตอบที่ไม่ถูกต้อง จึงสรุปได้ว่า ผู้เรียนแยกส่วนประกอบของโจทย์ได้ แต่หลายคนไม่ได้ทำความเข้าใจโจทย์อย่างแท้จริง จึงนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้อง



ภาพที่ 35 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 1

ส่วนด้าน**ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา**ของผู้เรียน ผู้วิจัยได้ทำการสัมภาษณ์ผู้เรียนด้วยคำถามที่ว่า เมื่อผู้เรียนได้เรียนรู้และทำความเข้าใจกับโจทย์แล้วขั้นตอนต่อไปมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไร

“หนูเริ่มต้นจากดูว่าต้องคิดอะไรในข้อนั้นแล้วก็นึกว่ามีสูตรว่าอะไร ถ้าข้อที่ยากหน่อยก็อาจวาดรูปไปด้วย ช่วยให้เรามองภาพออก แต่ถ้าข้อไหนไม่ยากก็บวกลบคูณหารออกมาเลย จะถูกไม่ถูกก็รอดูเฉลยจากครูอีกทีค่ะ”

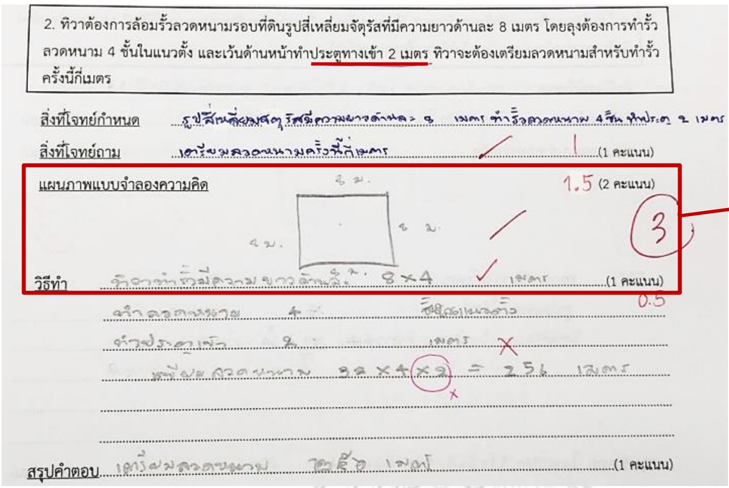
ผู้เรียนคนที่ 1 สัมภาษณ์ 29 ส.ค. 62

“ปกติถ้าทำแบบฝึกหัด ครูเขามีรูปมาให้ก็คิดตาม แต่ถ้าไม่มีเราก็ดูก่อนว่าข้อนั้นต้องหาคำตอบอะไร แล้วก็ไปดูว่าโจทย์ให้อะไรมาใช้ในการแสดงวิธีทำ ก็เอาตัวเลขมาแทนค่าในสูตรและก็หาคำตอบ”

ผู้เรียนคนที่ 2 สัมภาษณ์ 29 ส.ค. 62

จากบทสัมภาษณ์ผู้เรียนทำให้ผู้วิจัยอาจสรุปได้ว่าผู้เรียนให้ความสำคัญของการจดจำและแทนค่าสูตรทางเรขาคณิตในการหาคำตอบ ส่วนการวาดภาพประกอบผู้เรียนได้นำมาใช้ในกรณีที่โจทย์มีความซับซ้อนมากขึ้น และเมื่อผู้วิจัยได้ให้ผู้เรียนได้ทำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น พบว่า ผู้เรียนสามารถระบุได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้และโจทย์ให้หาอะไร แต่สิ่งที่สำคัญในการเชื่อมโยงโจทย์สู่การหาวิธีการแก้ปัญหาคือกระบวนการทางความคิด การแปลงโจทย์ให้เป็นรูปภาพหรือเป็นแบบจำลองทางความคิดของผู้เรียนไม่ได้รับการฝึกฝนและพัฒนา จึงเกิดปัญหาตามมาดังตัวอย่างภาพที่ 36 คือ ผู้เรียนไม่สามารถสร้างแบบจำลองทางความคิดได้อย่างถูกต้องทั้งหมด โดยผู้เรียนทำการหาความยาวรอบรูปของการล้อมรั้วได้ถูกต้อง แต่ส่วนที่สำคัญที่ผู้เรียนขาดไปใน

แบบจำลองทางความคิดของผู้เรียน อันเกิดจากการตกหล่นในการทำความเข้าใจและใส่ข้อมูลในแบบจำลองที่มาจากกระบวนการคิดที่ไม่ครบถ้วน คือ การเว้นส่วนของประตูไว้ไม่ต้องล้อมรั้วด้วยลวดหนาม ทำให้การเชื่อมโยงความรู้ในการแก้ปัญหาข้อดังกล่าวนี้คลาดเคลื่อน (การเว้นประตูไม่ล้อมรั้วลวดหนาม ใช้วิธีลบ แต่ผู้เรียนใช้วิธีการคูณ) จึงนำไปสู่การแสดงวิธีทำไม่ถูกต้อง คำตอบจึงไม่ถูกต้อง


2. ทิวาต้องการล้อมรั้วลวดหนามรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 8 เมตร โดยลุงต้องการทำรั้วลวดหนาม 4 ชั้นในแนวตั้ง และเว้นด้านหน้าทำประตูทางเข้า 2 เมตร ทิวาจะต้องเตรียมลวดหนามสำหรับทำรั้วครั้งนี้กี่เมตร

สิ่งที่โจทย์กำหนด

สิ่งที่โจทย์ถาม (1 คะแนน)

แผนภาพแบบจำลองความคิด 1.5 (2 คะแนน)

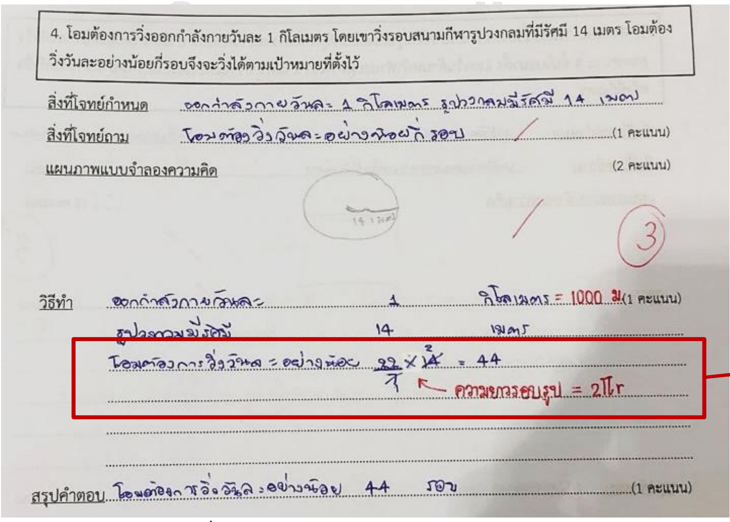
วิธีทำ (1 คะแนน)

สรุปคำตอบ (1 คะแนน)

ผู้เรียนวาดแบบจำลองทางความคิดไม่ถูกต้อง เนื่องจากวิเคราะห์โจทย์ไม่ละเอียด

ภาพที่ 36 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบวัดทักษะก่อนเรียน 1

นอกจากนี้ผู้วิจัยยังพบว่า ผู้เรียนคนหนึ่งทำความเข้าใจและสามารถสร้างแบบจำลองทางความคิดจากโจทย์ได้ถูกต้องแม้อาจมีการระบุสิ่งที่ต้องการหาคำตอบในแบบจำลองอาจยังไม่ชัดเจนเท่าที่ควร แต่จากการเชื่อมโยงความรู้ของผู้เรียนจากการเรียนที่มีจุดเริ่มต้นจากการท่องจำสูตร ซึ่งไม่ได้เรียนรู้สูตรจากการพิสูจน์เพื่อความเข้าใจก่อนนำมาสู่การจดจำ อาจทำให้ผู้เรียนจำสูตรผิดพลาด ส่งผลให้ผู้เรียนเกิดความผิดพลาดในการแสดงวิธีคิด และการทำความเข้าใจจากโจทย์ของผู้เรียนยังไม่แม่นยำและชัดเจนว่าสิ่งที่ต้องหาคืออะไร นำไปสู่การสรุปคำตอบที่ไม่สมเหตุสมผล ดังในภาพที่ 37


4. โอมต้องการวิ่งออกกำลังกายวันละ 1 กิโลเมตร โดยเขาวิ่งรอบสนามกีฬารูปวงกลมที่มีรัศมี 14 เมตร โอมต้องวิ่งวันละอย่างน้อยกี่รอบจึงจะวิ่งได้ตามเป้าหมายที่ตั้งไว้

สิ่งที่โจทย์กำหนด

สิ่งที่โจทย์ถาม (1 คะแนน)

แผนภาพแบบจำลองความคิด (2 คะแนน)

วิธีทำ (1 คะแนน)

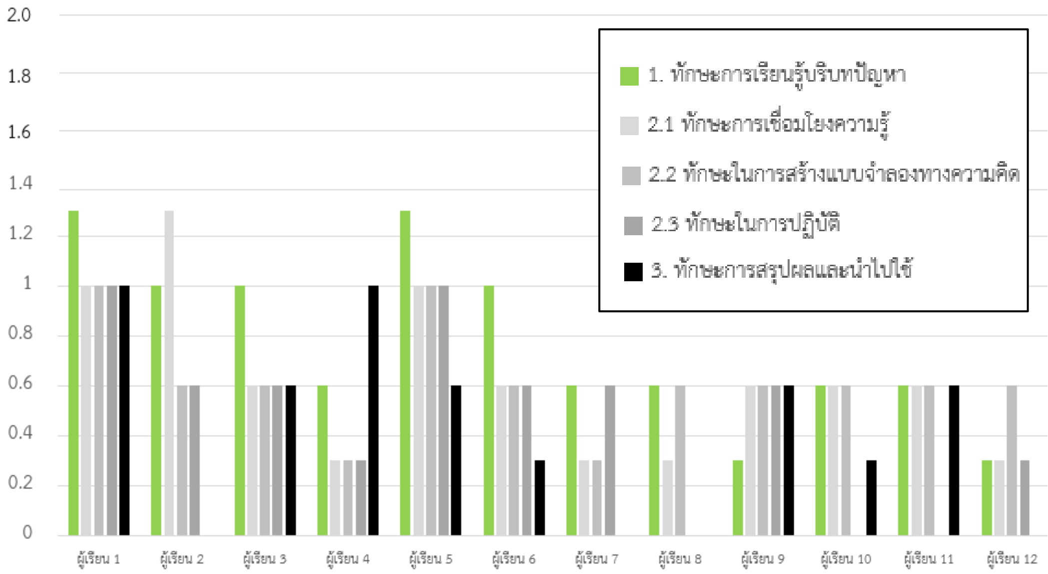
สรุปคำตอบ (1 คะแนน)

ผู้เรียนจำสูตรไม่ถูกต้อง จึงทำให้การแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

ภาพที่ 37 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบวัดทักษะก่อนเรียน 2

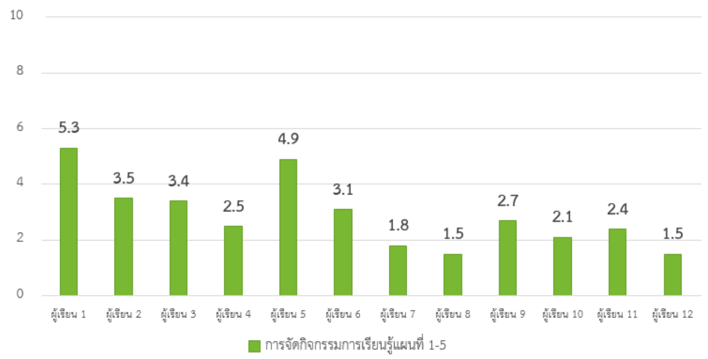
การที่ผู้เรียนเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อการแก้ปัญหาที่ไม่ถูกต้องและถอดแบบจำลองทางความคิดออกมาไม่ถูกต้อง สิ่งที่เกิดขึ้นตามมาจากแนวปฏิบัติที่ไม่ถูกต้องคือการที่ผู้เรียนแก้ปัญหาได้ไม่ถูกต้องเช่นกัน และจากภาพที่ 37 ยังแสดงให้เห็นว่าการทำความเข้าใจและออกแบบวิธีคิดยังส่งผลถึงการสรุปผลของคำตอบที่ได้นั้นจะไม่ถูกต้องด้วย เนื่องจากโจทย์ต้องการหาจำนวนรอบจากการวิ่งตามเป้าหมายที่กำหนดไว้ 1,000 เมตร ไม่ใช่การคำนวณความยาวรอบรูปและนำมาสรุปเป็นจำนวนรอบ ซึ่งแสดงถึงการขาดการตรวจสอบคำตอบที่ได้

เมื่อผู้วิจัยได้ทำการสังเกตพฤติกรรมและการตรวจสอบร่องรอยการทำงานของผู้เรียนกลุ่มทดลองในระยะที่ 1 โดยผู้วิจัยทำการบันทึกคะแนนในแบบวัดจำนวน 3 ครั้ง คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 3,4,5 และนำคะแนนจากแบบสังเกตพฤติกรรมที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย สรุปได้ดังภาพที่ 38



ภาพที่ 38 คะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระยะที่ 1 แบ่งเป็นรายทักษะ

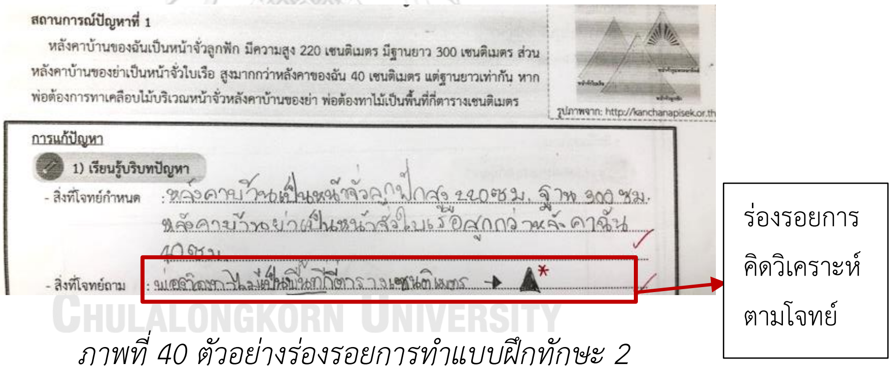
จากภาพที่ 38 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะในการแก้ปัญหาของผู้เรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 12 คนในระยะที่ 1 ของการทดลอง แต่ละด้านมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน โดยใช้แบบวัดและเกณฑ์ที่ผู้วิจัยได้ทำการออกแบบ ซึ่งผู้เรียนมีทักษะที่ 1 คือทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาอยู่ในช่วง 0.3 – 1.3 คะแนน ทักษะที่ 2 ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา แบ่งเป็น 2.1) ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ 2.2) ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด และ 2.3) ทักษะในการปฏิบัติ มีคะแนน 0.3 – 1 คะแนนเช่นเดียวกันทั้ง 3 ทักษะย่อย และ ทักษะที่ 3 การสรุปผลและนำผลไปใช้ มีคะแนน 0.3 – 1 คะแนน โดยผู้เรียนที่มีคะแนนรวมของทักษะการแก้ปัญหาสูงสุด คือผู้เรียนคนที่ 1 มีคะแนน 5.3 คะแนนจากคะแนนเต็ม 10 คะแนน ต่ำที่สุดคือ ผู้เรียนคนที่ 8 และ 12 มีคะแนน 1.5 คะแนนจากคะแนนเต็ม 10 คะแนน ดังมีรายละเอียดดังภาพที่ 39



ภาพที่ 39 คะแนนเฉลี่ยรวมทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระยะที่ 1 แบ่งเป็นรายคน

3.2 ผลการศึกษาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระยะที่ 2 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 6-10)

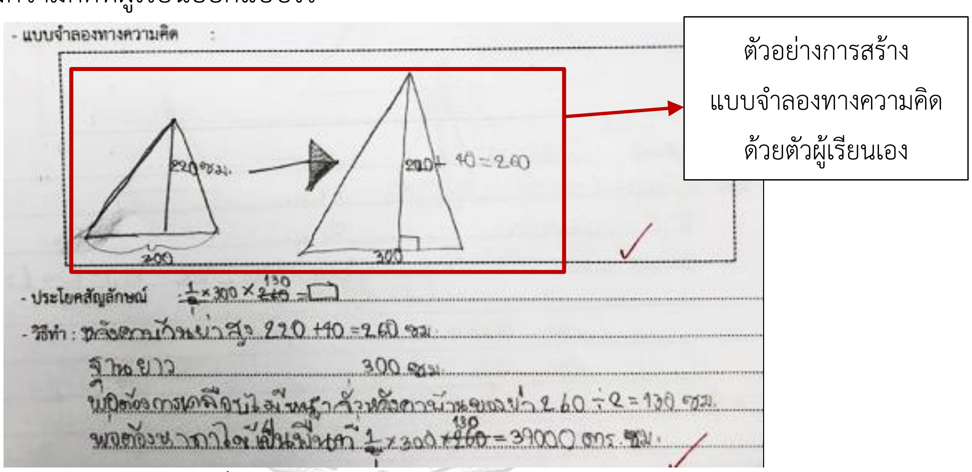
จากการสังเกตร่องรอยในการทำแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนในช่วงระหว่างทดลอง ผู้วิจัยพบว่า **ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา**ของผู้เรียน ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหาและมีการทบทวนในการวิเคราะห์โจทย์ถึงสิ่งที่กำหนดมาในโจทย์และสิ่งที่ผู้เรียนต้องการหาคำตอบว่ามีการเชื่อมโยงหรือต้องใช้ความรู้เรื่องใดในการหาคำตอบ จากภาพที่ 40 ผู้เรียนคนหนึ่งได้ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง อีกทั้งยังได้แสดงร่องรอยที่แสดงถึงการวิเคราะห์และทบทวนในคำถามสถานการณ์ในข้อนี้ว่าเป็นการหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 40 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 2

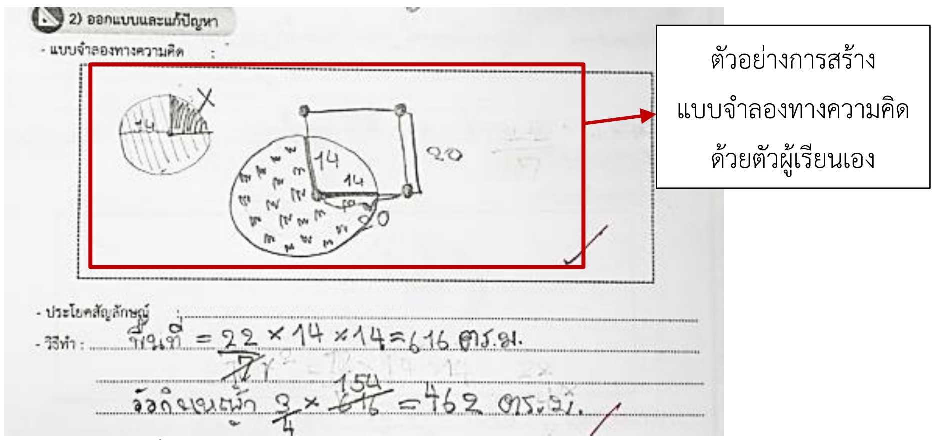
หลังจากการเรียนรู้ด้วยกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของผู้เรียนในระยะที่ 1 จำนวน 5 ชั่วโมง ผู้เรียนได้รับการฝึกฝน **ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา** พัฒนาทักษะในการประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา เพื่อนำไปสู่การสร้างแนวทางหาคำตอบด้วยการสร้างแบบจำลองทางความคิด ในภาพที่ 41 ซึ่งเป็นการแก้ปัญหาต่อจากภาพที่ 40 เป็นการทำแบบฝึกทักษะของผู้เรียนในชั่วโมงที่ 7 ผู้วิจัยพบว่า หลังจากที่ผู้เรียนได้เรียนรู้และทำเชื่อมโยงความรู้เพื่อออกแบบการแก้ปัญหา ผู้เรียนได้มีการแสดงแบบจำลองทางความคิดโดยใช้การวาดภาพประกอบการใส่ตัวเลขเพื่อ

การนำไปใช้ในการแก้ปัญหา และสามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ถูกต้องและสอดคล้องกับภาพแบบจำลองความคิดที่ผู้เรียนออกแบบไว้



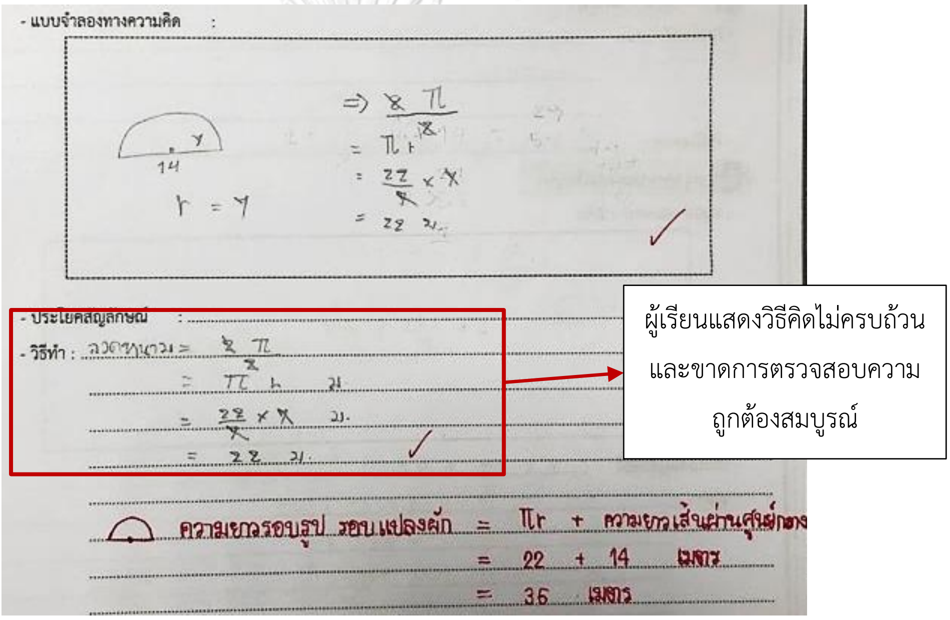
ภาพที่ 41 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 3

จากสถานการณ์ที่ว่า *“พ่อสร้างคอกวัวรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ความยาวด้าน 20 เมตรไว้กลางทุ่ง ในตอนกลางวันพ่อจะผูกวัวไว้กับเสามุมคอกที่อยู่ด้านนอกเพื่อกินหญ้ารอบ ๆ คอก โดยเชือกมีความยาว 14 เมตร อยากทราบว่าบริเวณที่วัวตัวนี้สามารถกินหญ้าได้เป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร”* ผู้เรียนสามารถแสดงแบบจำลองทางความคิดได้ดังภาพที่ 42 หากผู้เรียนไม่เรียนรู้เพื่อทำความเข้าใจโจทย์และคิดเพื่อแสดงความคิดออกมาเป็นแบบจำลองทางความคิด ผู้เรียนหลายคนอาจแก้ปัญหาในสถานการณ์นี้ได้ไม่ถูกต้อง เพราะการทำความเข้าใจและแสดงแบบจำลองทางความคิดจะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจและมองเห็นถึงความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในโจทย์ และที่สำคัญผู้เรียนจะต้องนึกถึงภาพความเป็นจริงว่าเชือกที่ผูกวัวตัวนี้ไว้ถ้าวัวอยู่ห่างจากเสามากที่สุด หรือ เชือกตึงมากที่สุดแล้ว ความยาวเชือกคือความยาวรัศมีของพื้นที่ที่วัวจะสามารถกินหญ้าได้ ซึ่งพื้นที่ที่วัวกินหญ้าได้เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นรูปวงกลม ที่ผู้เรียนจะต้องหาพื้นที่ 3 ใน 4 ส่วนของรูปวงกลม



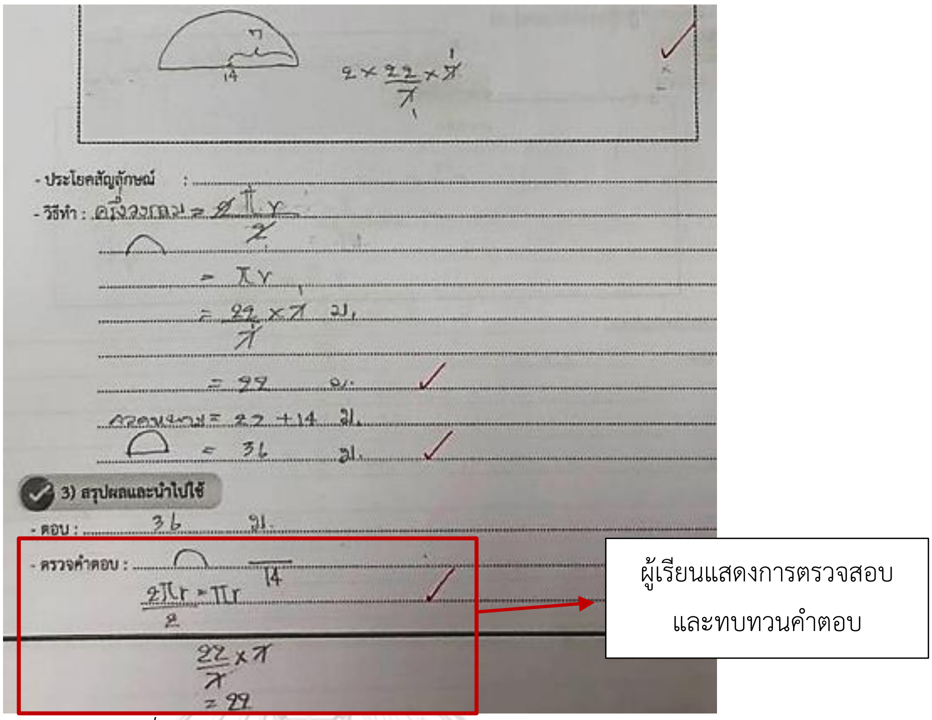
ภาพที่ 42 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 4

อาจกล่าวได้ว่าทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหาที่ประกอบด้วย การประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา การสร้างแบบจำลองทางความคิดเพื่อการหาคำตอบได้ และการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น มีทักษะกระบวนการย่อยที่แต่ละทักษะมีความสำคัญอย่างมากที่ผู้เรียนควรได้รับการฝึกฝนและพัฒนาอย่างต่อเนื่อง แต่อย่างไรก็ตามการตรวจสอบความถูกต้องถือเป็นอีกทักษะที่สำคัญในการแก้ปัญหา ดังแสดงให้เห็นได้จากภาพที่ 43 ซึ่งเป็นสถานการณ์ปัญหาที่ว่า *“แปลงปลูกผักรูปครึ่งวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เมตร ต้องการล้อมลวดหนามรอบแปลงผัก จะต้องใช้ลวดหนามยาวกี่เมตร”* ซึ่งผู้เรียนคนนี้ได้เรียนรู้และวิเคราะห์โจทย์ ถอดความคิดออกมาเป็นแบบจำลองทางความคิดได้ถูกต้อง แต่อาจจะขาดการตรวจสอบอย่างรอบคอบถี่ถ้วน จึงทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการหาคำตอบที่ขาดหายไปขั้นตอนหนึ่ง



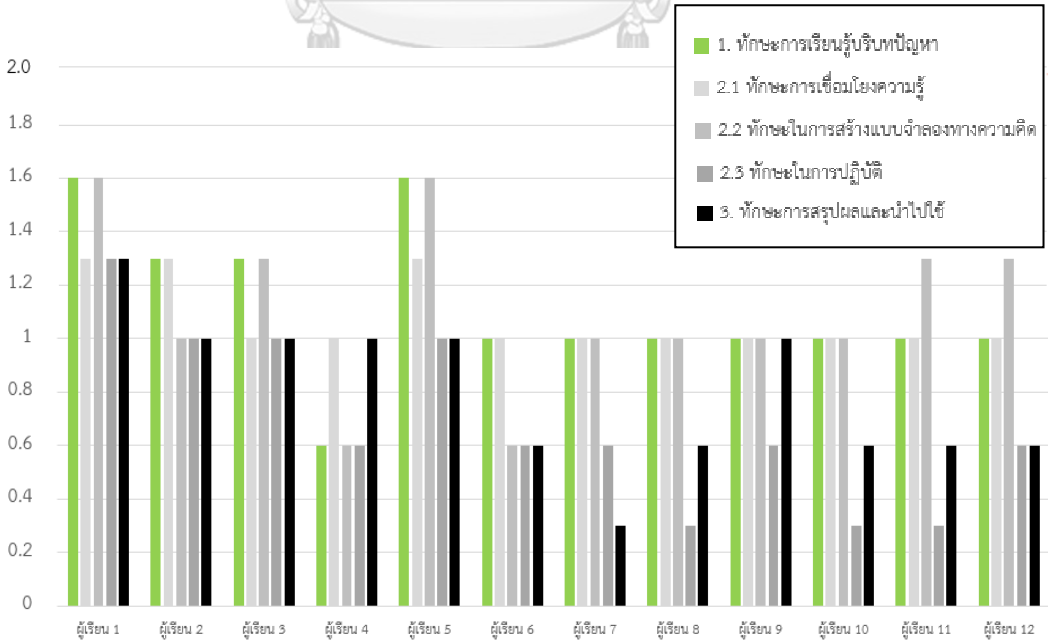
ภาพที่ 43 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 5

ในทางตรงกันข้าม สถานการณ์ปัญหาเดียวกันนี้ ผู้เรียนอีกคนหนึ่งสามารถแสดงวิธีการคิดอีกทั้งยังมีการตรวจสอบความถูกต้องของสถานการณ์ปัญหาอย่างละเอียดถี่ถ้วน จึงทำให้การแก้ปัญหานี้ถูกดำเนินการได้อย่างถูกต้อง ดังแสดงในภาพที่ 44



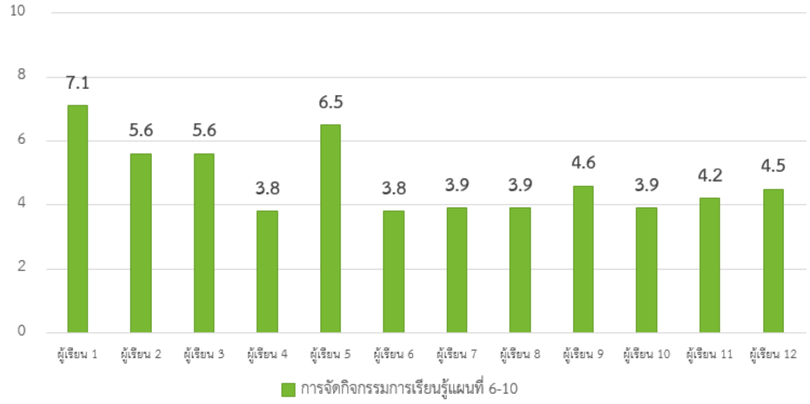
ภาพที่ 44 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 6

เมื่อผู้วิจัยได้ทำการสังเกตพฤติกรรมและตรวจสอบร่องรอยการทำงานของผู้เรียนกลุ่มทดลองในระยะที่ 2 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 6-10) โดยผู้วิจัยทำการบันทึกคะแนนในแบบวัดจำนวน 3 ครั้ง คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 7,8,9 นำคะแนนจากแบบสังเกตพฤติกรรมที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย สรุปดังภาพที่ 45



ภาพที่ 45 คะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระยะที่ 2

จากภาพข้างต้น เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะในการแก้ปัญหา 5 ทักษะย่อยของผู้เรียนระยะที่ 2 แต่ละทักษะคะแนนเต็ม 2 คะแนน ซึ่งผู้เรียนมีทักษะที่ 1 การเรียนรู้บริบทปัญหาอยู่ในช่วง 0.6 – 1.6 คะแนน ทักษะที่ 2 ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา แบ่งเป็น 2.1) ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ อยู่ในช่วง 1.0 – 1.3 คะแนน 2.2) ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด อยู่ในช่วง 0.6 – 1.6 คะแนน และ 2.3) ทักษะในการปฏิบัติ มีคะแนน 0.3 – 1.3 คะแนน และ ทักษะที่ 3 การสรุปผลและนำผลไปใช้ มีคะแนน 0.3 – 1.3 คะแนน โดยผู้เรียนที่มีคะแนนรวมของทักษะการแก้ปัญหาสูงสุด จากคะแนนเต็ม 10 คะแนน คือ ผู้เรียนคนที่ 1 มีคะแนน 7.1 คะแนน ต่ำที่สุดคือ ผู้เรียนคนที่ 4 และ 6 มีคะแนน 3.8 ดังภาพที่ 46



ภาพที่ 46 คะแนนเฉลี่ยรวมทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระยะที่ 2 แบ่งเป็นรายคน

3.3 ผลการศึกษาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระยะที่ 3

จากการศึกษาทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาในระยะที่ 3 ของการทดลอง ในช่วงของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 11-15 พบว่า ทักษะที่หนึ่ง **ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหา** ที่ผู้เรียนจำนวน 11 คน มีพัฒนาการที่สูงขึ้น แต่ผู้เรียน 1 คน คือ ผู้เรียนคนที่ 4 มีพัฒนาการที่คงที่ ซึ่งจากการสังเกตในการทำกิจกรรม แบบฝึกทักษะและแบบวัดทักษะหลังเรียน ส่วนที่ให้ผู้เรียนบอกถึงสิ่งที่ได้เรียนรู้จากบริบทปัญหา ผู้เรียนจะเริ่มวิเคราะห์อย่างระมัดระวังและมีความละเอียดรอบคอบมากยิ่งขึ้น ความผิดพลาดลงลง เนื่องจากผู้เรียนสามารถวิเคราะห์และแยกแยะส่วนที่โจทย์กำหนดมาเพื่อใช้ในการแก้ปัญหากับส่วนที่โจทย์กำหนดมาแต่เป็นตัวลวง ซึ่งไม่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา นอกจากนี้เมื่อผู้เรียนอ่าน ทำความเข้าใจโจทย์แล้วผู้เรียนยังต้องคำนึงถึงรูปร่าง รูปทรง ซึ่งเป็นความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ เพื่อจะนำไปสู่การคิดเพื่อสร้างแบบจำลองทางความคิดและเพื่อเชื่อมโยงความรู้ในการแก้ปัญหาต่อไป ตามที่ผู้วิจัยได้ทำการสัมภาษณ์ผู้เรียนด้วยคำถามว่า *ผู้เรียนมีการเรียนรู้โจทย์ปัญหาอย่างไร มีข้อสังเกตและมีวิธีการอย่างไรในการเชื่อมโยงความรู้เพื่อการแก้ปัญหา* พบว่าผู้เรียน 3 คนมีการแสดงทักษะส่วนตัวที่มีความคล้ายคลึงและแตกต่างกันดังนี้

“หนูจะรู้ได้ไงว่าต้องใช้ความรู้เรื่องไหนมาแก้ปัญหาหรอคะ ขั้นแรกก็ต้องอ่านโจทย์สัก 2 รอบก่อนแล้วทำความเข้าใจกับโจทย์ ส่วนข้อสังเกตของหนูคือส่วนประกอบของรูปร่าง รูปทรง เพราะแต่ละเรื่องมันรูปร่างไม่เหมือนกัน ถ้าโจทย์ให้รัศมีมาก็เดาไว้ก่อนว่าเป็นเรื่องวงกลม และพอไปอ่านคำถาม ก็จะรู้เองว่าตกลงเขาให้หาอะไรแน่”

ผู้เรียนคนที่ 3 สัมภาษณ์ 17 ต.ค. 62

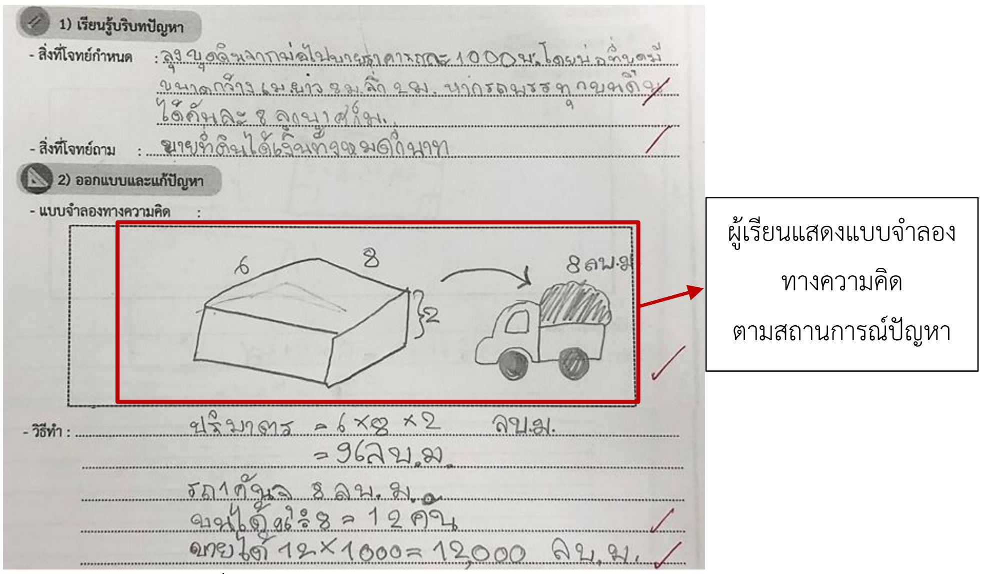
“ปกติหนูก็ดูเหมือนเดิมนะคะ สิ่งที่โจทย์กำหนดมักจะมีตัวเลข สิ่งที่โจทย์ถามก็ต้องเป็นคำถาม แต่ว่าจะต้องสังเกตและระวังมากขึ้นตรง เรื่องหน่วย ถ้าหน่วยที่ไม่เกี่ยวข้อง ก็อาจจะให้มากหลอก ๆ เราต้องอ่านให้ดีว่าโจทย์เขาให้หาอะไรค่ะ”

ผู้เรียนคนที่ 2 สัมภาษณ์ 17 ต.ค. 62

“เวลาที่หนูจะทำโจทย์ก็จะอ่านโจทย์ไปด้วยวาดรูปไปด้วย รูปที่ออกมานั่นแหละที่เราต้องเอาไปใช้แสดงวิธีทำ แล้วหนูก็จะแก้ปัญหาตามรูปที่วาดออกมา”

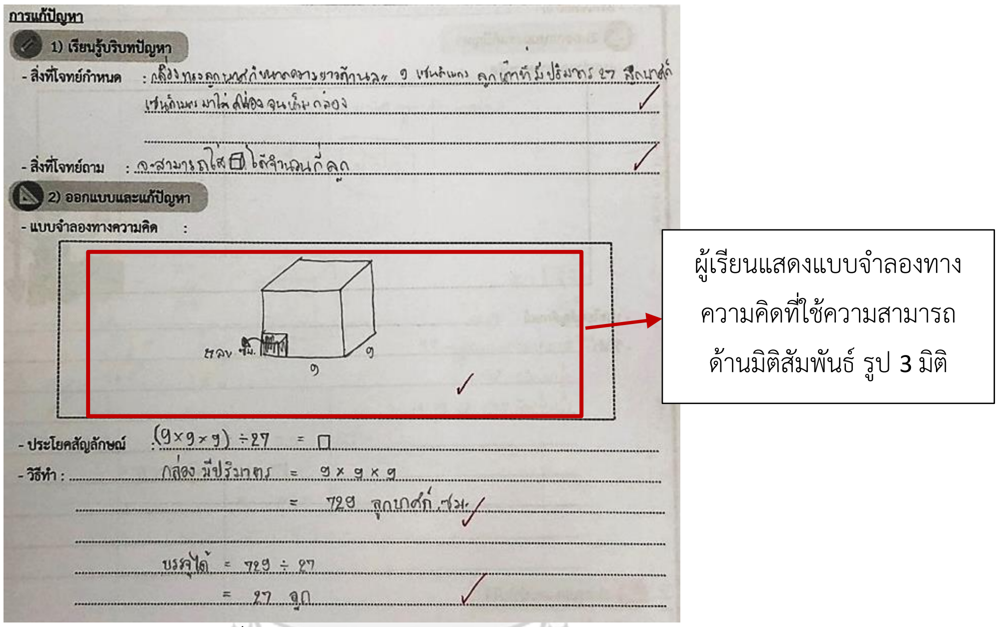
ผู้เรียนคนที่ 1 สัมภาษณ์ 17 ต.ค. 62

สำหรับ **ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา** ผู้เรียนได้นำแนวทางการวิเคราะห์และสร้างแบบจำลองความคิดที่มีการเชื่อมโยงความรู้ทางเรขาคณิตไปปรับใช้ ผู้วิจัยพบว่า จากสถานการณ์ปัญหาที่ว่า *“ลุงขุดดินจากบ่อไปขายราคารถละ 1,000 บาท โดยบ่อที่ขุดกว้าง 6 เมตร ยาว 8 เมตร ลึก 2 เมตร หากรถบรรทุกสามารถขนดินได้คันละ 8 ลูกบาศก์เมตร ลุงจะขายดินได้เงินทั้งหมดกี่บาท”* ผู้เรียนวาดภาพแสดงแบบจำลองทางความคิดได้อย่างชัดเจน ทำให้ผู้เรียนเชื่อมโยงความรู้ไปสู่การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติได้ถูกต้อง และแสดงวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องตามภาพที่ 47

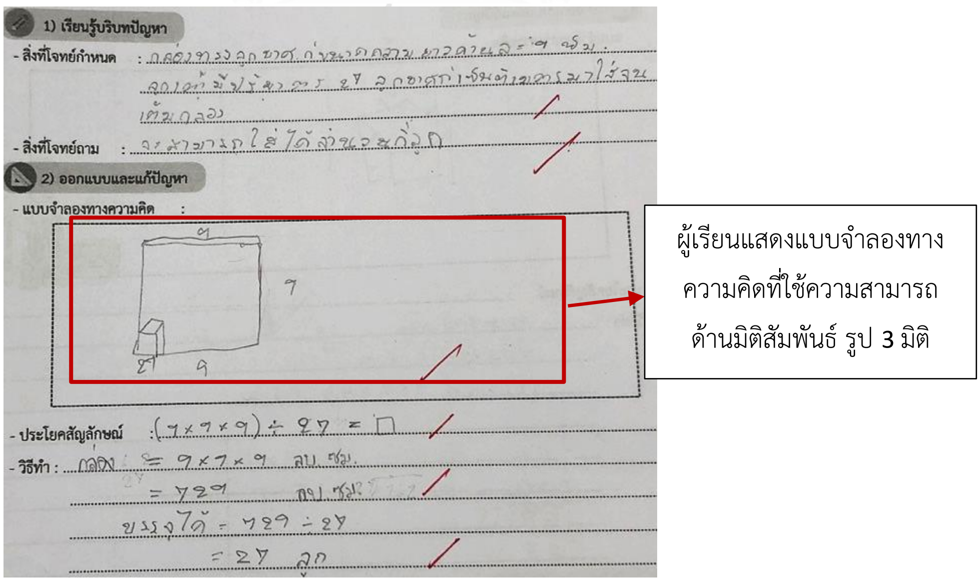


ภาพที่ 47 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 7

ในอีกสถานการณ์หนึ่ง *“กล่องทรงลูกบาศก์ขนาดความยาวด้านละ 9 เซนติเมตร ถ้านำขนมลูกเต๋าที่มีปริมาตร 27 ลูกบาศก์เซนติเมตรมาใส่จนเต็มกล่อง จะสามารถใส่ได้จำนวนกี่ลูก”* ผู้เรียนคุ้นเคยจากขนมที่ขายอยู่ในร้านของชำข้างโรงเรียน ทำให้ผู้เรียนรู้จักลักษณะและเชื่อมโยงความรู้ขนมลูกเต๋าที่มีลักษณะเป็นทรงลูกบาศก์ซึ่งมีด้านทุกด้านเท่ากัน ผู้วิจัยให้ผู้เรียนนึกถึงการนำขนมลูกเต๋ามาเรียงเพื่อบรรจุลงในกล่องให้เต็ม ผู้เรียนสามารถแสดงแบบจำลองทางความคิดและแสดงวิธีคิดได้อย่างถูกต้อง ในขณะที่การวาดรูปทางสามมิติของผู้เรียนบางคนอาจจะมีมิติที่ยังไม่ถูกต้องแต่ผู้เรียนสามารถแสดงวิธีคิดหาคำตอบออกมาได้ถูกต้องดังภาพที่ 48 และ ภาพที่ 49

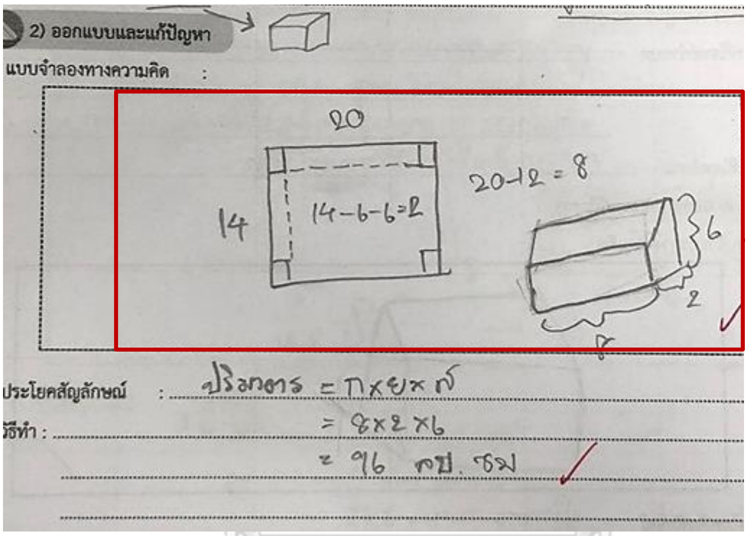


ภาพที่ 48 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 8



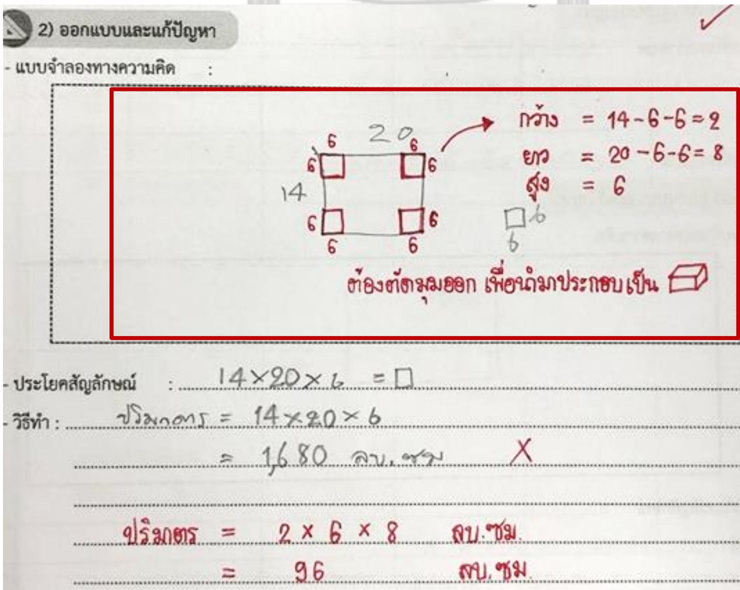
ภาพที่ 49 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 9

สำหรับสถานการณ์ที่จำเป็นต้องใช้ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่ยากขึ้นที่เป็นมิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) ในสถานการณ์ที่ว่า *“แม่นำกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 14 เซนติเมตร ยาว 20 เซนติเมตร มาตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมทั้งสี่มุมออก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 เซนติเมตร จากนั้นแม่พับด้านทั้งสี่ขึ้นมาเป็นรูปกล่องใส่แป้งทำขนม กล่องใบนี้ของแม่สามารถใส่แป้งได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร”* โดยผู้วิจัยพบว่า ผู้เรียนจำนวน 7 คนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์และแสดงแบบจำลองทางความคิดออกมาได้ถูกต้อง แต่ในขณะเดียวกัน อาจเป็นปัญหาของผู้เรียนบางคนที่ไม่สามารถที่จะเชื่อมโยงจินตนาการภาพจากการประกอบรูปคลี่ให้เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้จึงทำให้ผู้เรียน จำนวน 5 คน ยังไม่สามารถหาคำตอบได้ถูกต้อง ดังในภาพที่ 50 และภาพที่ 51



ผู้เรียนแสดงแบบจำลองทางความคิดที่ใช้ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ เชิงสัมพันธ์ได้ถูกต้อง

ภาพที่ 50 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 10

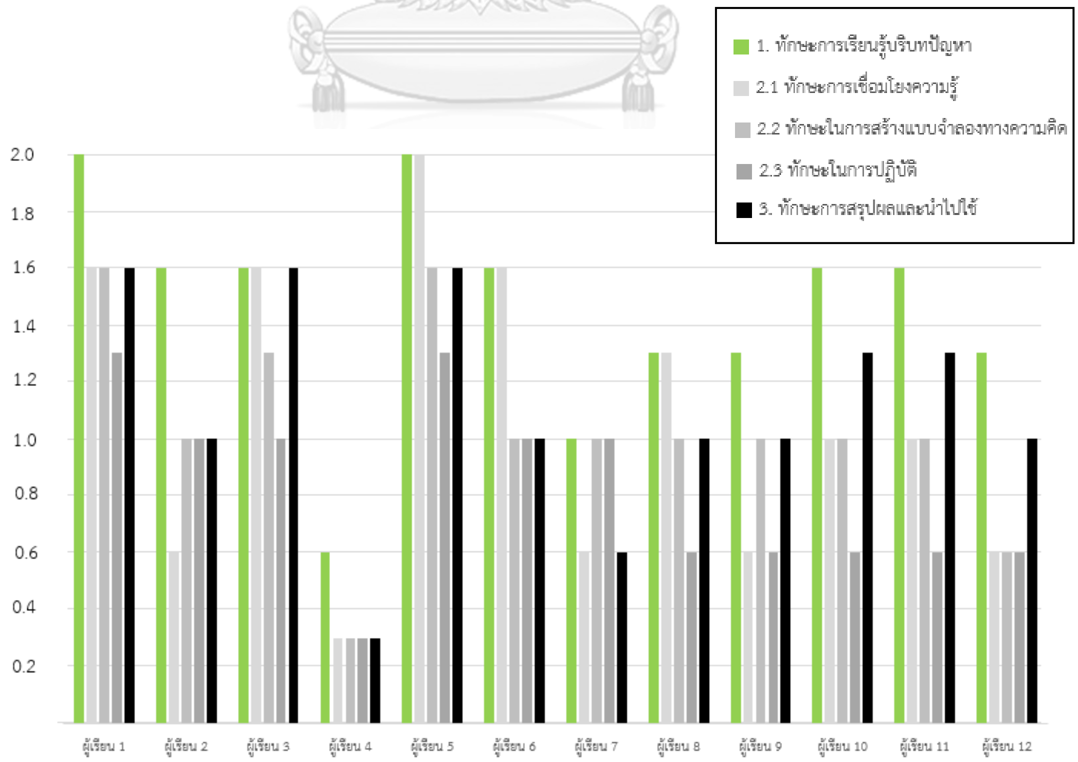


ผู้เรียนแสดงแบบจำลองทางความคิดที่ใช้ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ไม่ถูกต้อง

ภาพที่ 51 ตัวอย่างร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ 11

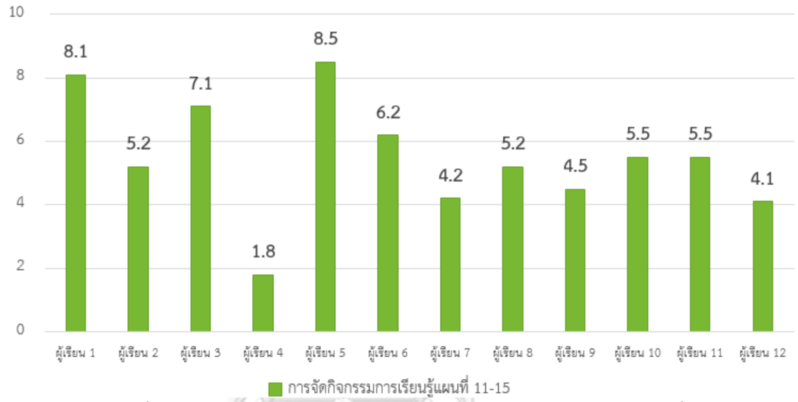
ผู้วิจัยพบว่าผู้เรียนมีทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาและทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหาที่ดีขึ้น ผู้เรียนกล้าที่จะแสดงความคิดของตนเองมากขึ้นไม่ว่าจะถูกต้องหรือไม่ก็ตาม ซึ่งผู้เรียนที่สามารถแสดงแบบจำลองทางความคิดออกมาได้สอดคล้องกับปัญหาจะส่งผลต่อการสรุปผลที่ถูกต้องตามมา **ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้** จึงได้รับพัฒนาให้ดีขึ้น ช่วยให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบคำตอบก่อนที่จะส่งแบบฝึกทักษะหรือแบบทดสอบ ทำให้ผู้เรียนได้ฝึกการคิดอย่างละเอียดถี่ถ้วนของผู้เรียนให้มากขึ้น ในขณะเดียวกันเมื่อผู้เรียนเจอปัญหาที่มีความซับซ้อนทั้งในเรื่องโจทย์ หรือเรื่องมิติของรูปทรง ผู้เรียนไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์ได้อย่างถูกต้อง หรือไม่สามารถสร้างแบบจำลองทางความคิดได้ สิ่งที่ตามมาคือผู้เรียนจะไม่สามารถสรุปผลและตรวจสอบคำตอบของตนเองให้ถูกต้องได้ ดังนั้นผู้เรียนควรได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง

อย่างไรก็ตามในภาพรวมของแบบทดสอบหลังเรียนเมื่อเปรียบเทียบกับการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ผู้เรียนได้นำทักษะการแก้ปัญหาที่ได้รับการพัฒนาไปปรับใช้ในการแก้ปัญหาในแบบทดสอบ จึงทำให้ค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของแบบทดสอบหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และจากการสังเกตพฤติกรรม ร่องรอยการทำงานของผู้เรียนกลุ่มทดลองในระยะที่ 3 โดยผู้วิจัยทำการบันทึกคะแนนในแบบวัดจำนวน 3 ครั้ง คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 12,13,15 และนำคะแนนจากแบบสังเกตพฤติกรรมที่ได้มาหาค่าเฉลี่ย สรุปดังภาพ



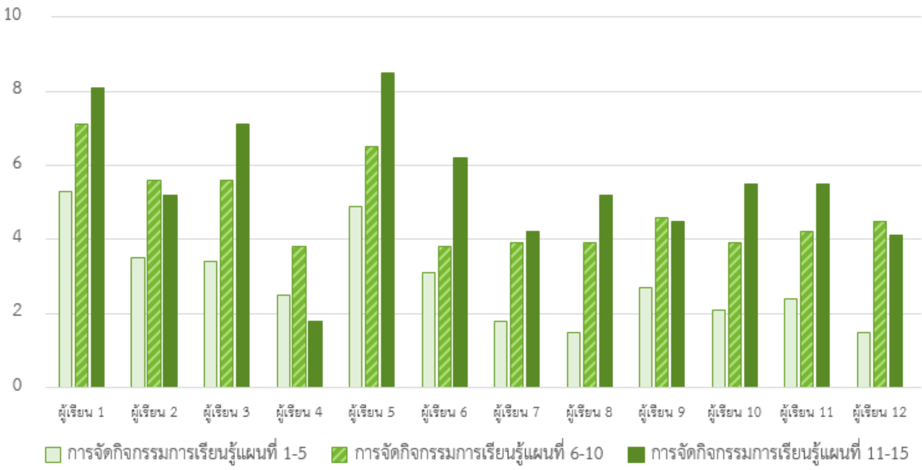
ภาพที่ 52 คะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระยะที่ 3

จากภาพที่ 52 เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยคะแนนทักษะในการแก้ปัญหา 5 ทักษะย่อยของผู้เรียนช่วงหลังทดลอง แต่ละทักษะมีคะแนนเต็ม 2 คะแนน ซึ่งผู้เรียนมีทักษะที่ 1 คือทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาอยู่ในช่วง 0.6 – 2.0 คะแนน ทักษะที่ 2 ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา แบ่งเป็น 2.1) ทักษะการเชื่อมโยงความรู้ อยู่ในช่วง 0.3 – 2.0 คะแนน 2.2) ทักษะในการสร้างแบบจำลองทางความคิด อยู่ในช่วง 0.3 – 1.6 คะแนน และ 2.3) ทักษะในการปฏิบัติ มีคะแนน 0.3 – 1.3 คะแนน และ ทักษะที่ 3 การสรุปผลและนำผลไปใช้ มีคะแนน 0.3 – 1.6 คะแนน โดยผู้เรียนที่มีคะแนนรวมของทักษะการแก้ปัญหาสูงสุด จากคะแนนเต็ม 10 คะแนน คือ ผู้เรียนคนที่ 5 มีคะแนน 8.5 คะแนน ต่ำที่สุดคือ ผู้เรียนคนที่ 4 มีคะแนน 1.8 ดังภาพที่ 53



ภาพที่ 53 คะแนนเฉลี่ยรวมทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ระยะที่ 3 แบ่งเป็นรายคน

ผู้วิจัยได้ศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยแบ่งออกเป็น 3 ช่วงและทำการสรุปคะแนนเฉลี่ยทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยผู้เรียนจำนวน 8 คนจาก 12 คนมีพัฒนาการที่ดีขึ้นตามลำดับ ในขณะที่ผู้เรียน 4 คนมีคะแนนเฉลี่ยในช่วงที่ 3 สูงกว่าช่วงที่ 1 แต่ต่ำกว่าช่วงที่ 2 ดังแสดงในภาพที่ 54



ภาพที่ 54 คะแนนเฉลี่ยรวมทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน แบ่งเป็นรายคน

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก โดยวัตถุประสงค์การวิจัย คือ 1) เพื่อเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน 2) เพื่อเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ และ 3) เพื่อศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยมีประชากร คือ ผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็ก สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี สังกัดสำนักงานการศึกษาขั้นพื้นฐาน ตัวอย่าง คือ ผู้เรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6 โรงเรียนขนาดเล็กแห่งหนึ่งของสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี จำนวน 24 คน แบ่งออกเป็นกลุ่ม ทดลอง 12 คน กลุ่มควบคุม 12 คน **เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย** แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ 1) เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ได้แก่ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติสำหรับผู้เรียนกลุ่มควบคุม และแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์สำหรับผู้เรียนกลุ่มทดลอง 2) เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่ แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียน แบบสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหาของผู้เรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและแบบสัมภาษณ์กึ่งโครงสร้าง การวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง โดยมีขั้นตอนต่าง ๆ ดังนี้ 1) ขั้นเตรียมการ ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยและเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูล จัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารที่เกี่ยวข้อง จากนั้นนำหนังสืออนุญาตดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยยื่นต่อโรงเรียน เพื่อขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล 2) ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล ผู้วิจัยทำการทดสอบก่อนเรียนตามแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจากนั้นตรวจให้คะแนนเพื่อนำคะแนนแบ่งกลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มโดยใช้วิธีการจับคู่ (Match by Pair) เพื่อให้ได้กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่มีความใกล้เคียงกันและจับสลากเพื่อกำหนดตัวอย่างเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ผู้วิจัยดำเนินการสอนด้วยตนเองทั้ง 2 กลุ่ม โดยผู้วิจัยสอนกลุ่มละ 2 ชั่วโมง/สัปดาห์

เป็นเวลา 8 สัปดาห์ รวมทั้งสิ้น 15 ชั่วโมง เริ่มทำการทดลองตั้งแต่วันที่ 29 สิงหาคม 2562 ถึง 17 ตุลาคม 2562 ระหว่างทำการวิจัยผู้วิจัยสังเกตพฤติกรรมผู้เรียนจากร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะ การร่วมกิจกรรม การตอบคำถามและการบันทึกวีดิโอ จากนั้นผู้วิจัยให้ผู้เรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนมาตรวจให้คะแนน นำผลที่ได้ไปวิเคราะห์หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$) และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และการทดสอบค่าที (t-test) เพื่อ 1) เปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตสองมิติตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน และ 2) เปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรขาคณิตสองมิติตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงกับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ อีกทั้งวิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพโดยวิเคราะห์เชิงเนื้อหา (Content Analysis) เพื่อศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์

สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยเรื่องผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก สามารถสรุปผลการวิจัย ดังนี้

1. ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

2. ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05

3. ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น

อภิปรายผลการวิจัย

ผู้วิจัยขอนำเสนอการอภิปรายผลการวิจัยตามวัตถุประสงค์การวิจัย โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. จากผลการเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน พบว่า ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 1 อาจเป็นเพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ช่วยส่งเสริมและพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของผู้เรียน เนื่องจากก่อนที่ผู้เรียนจะแก้ปัญหาในบริบทชีวิตจริงผู้เรียนจำเป็นต้องมองปัญหาและทำความเข้าใจกับปัญหาเพื่อสามารถอธิบายปัญหา นำไปสู่การหาขั้นตอน กระบวนการในการแก้ปัญหาด้วยตนเองของผู้เรียน ในขณะเดียวกันผู้เรียนได้ใช้ความรู้พื้นฐาน เพื่อสร้างแนวทางในการแก้ปัญหา ทำให้ผู้เรียนได้ทักษะในการเลือกใช้วิธีการในการแก้ปัญหา (Barnes, 2004) ผลการวิจัยจึงแสดงให้เห็นว่าผู้เรียนจึงมีพัฒนาที่สูงขึ้นหลังจากที่ได้เรียนรู้ตามแนวคิดดังกล่าวนี้

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ มีจุดเริ่มต้นจากสถานการณ์ปัญหาที่แสดงให้เห็นความเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตจริง รวมถึงสถานการณ์ปัญหาจริงตามความรู้สึกของผู้เรียนที่เป็นการทำให้คณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่อยู่ใกล้ชิดกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันของผู้เรียน ทำให้ผู้เรียนเกิดความสนใจในการเรียนรู้ปัญหา (De lange, 1996 อ้างถึงใน Zukardi, 2002) ในบริบทโรงเรียนขนาดเล็กที่อยู่ในพื้นที่ต่างจังหวัดจะมีสภาพแวดล้อม บริบทปัญหาที่ผู้เรียนมีความคุ้นเคยที่แตกต่างไปจากโรงเรียนที่อยู่ในชุมชนเมือง ผู้วิจัยจึงพยายามหยิบยกสถาการณ์ปัญหาที่มีความสอดคล้องกับบริบทและสภาพแวดล้อมของผู้เรียนมาสร้างเป็นสถานการณ์ปัญหา เช่น 1) พื้นที่ของตลาดนัดที่มีความเชื่อมโยงกับวิถีชีวิตของผู้เรียนทุกคน ทุกคนจะต้องรู้จักลักษณะและสภาพแวดล้อมนี้ 2) พื้นที่ที่วัวที่โดนผูกเชือกกับเสาจะสามารถกินหญ้าได้ ด้วยความคุ้นเคยหรือเคยพบเห็นผู้เรียนจะนึกภาพตามได้อย่างถูกต้อง 3) การบรรจุขนมลูกเต๋าลงกล่อง ซึ่งขนมลูกเต๋าเป็นขนมที่มีขายที่โรงเรียน มีลักษณะเป็นรูปลูกบาศก์ ผู้เรียนจะคุ้นเคยและเข้าใจรูปทรงของลูกเต๋านี้เป็นอย่างดี และ 4) การใช้ขนมเค้ก พิซซา โดนัทมาใช้สอนเรื่องรูปวงกลม ผู้เรียนในทุก ๆ บริบทจะคุ้นเคยเพราะเป็นอาหารที่ผู้เรียนวัยนี้ชอบรับประทาน เป็นต้น ในกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นตอนที่ 1 จึงมุ่งเน้นให้ผู้เรียนการทำความเข้าใจบริบทปัญหา โดยมีครูเป็นผู้ให้สถานการณ์ปัญหาพร้อมให้ข้อเสนอแนะอย่างไม่เป็นทางการ ขั้นตอนที่ 2 ผู้เรียนจะมีโอกาสแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยพื้นฐานความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ โดยผู้เรียนพัฒนา

แบบจำลองทางความคิดที่เป็นรูปธรรมไปสู่การสร้างมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมในมุมมองของตน นำไปสู่การพิสูจน์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางความคิดเพื่อการแก้ปัญหาของผู้เรียน อาจอยู่ในรูปของภาษา สัญลักษณ์ ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง เป็นต้น โดยครูมีบทบาทในการให้คำแนะนำ ช่วยเหลือ กระตุ้นกระบวนการเรียนรู้ เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสร้างและใช้กระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเอง ซึ่งผู้เรียนส่วนใหญ่จะสร้างแบบจำลองทางความคิดออกมาในรูปของการวาดภาพประกอบจำนวน ผู้เรียนบางคนอาจใช้รูปแบบของสัญลักษณ์แทนรูปร่างรูปทรงต่าง ๆ ในขั้นตอนที่ 3 ผู้เรียนอภิปรายและนำเสนอกระบวนการและคำตอบของปัญหาที่ตนสร้างขึ้น เพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันโดยในการวิจัยครั้งนี้มีทั้งรูปแบบกลุ่มย่อยและแบบทั้งห้องเรียน จนนำไปสู่ขั้นตอนที่ 4 การสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ โดยครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบสรุปผลและสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ทั้งคำตอบและกระบวนการที่เกิดขึ้น จากขั้นตอนดังกล่าวเมื่อผู้วิจัยนำมาปรับกับกิจกรรมการเรียนรู้ที่เชื่อมโยงกับสถาการณ์ปัญหาเกี่ยวกับเรขาคณิต และผู้วิจัยได้กำหนดเกณฑ์ในการพัฒนาและประเมินทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้รับการพัฒนาผ่านกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่เกิดจากการนำความรู้ ทักษะและหลักการต่าง ๆ มาใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในรูปแบบหรือสถานการณ์ต่าง ๆ เพื่อให้ได้วิธีการและคำตอบของปัญหานั้น อันประกอบด้วย 1) ทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาที่ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ข้อมูลรายละเอียดของปัญหา แยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง 2) ทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหา ผู้เรียนสามารถประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา เพื่อนำไปสู่การสร้างแนวทางหาคำตอบ โดยผู้วิจัยแบ่งออกเป็น 3 ทักษะย่อย ได้แก่ ความสามารถในการประยุกต์ใช้ความรู้และเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลกับปัญหา ความสามารถในการสร้างแบบจำลองทางความคิด เพื่อเป็นแนวทางหาคำตอบได้ และความสามารถในการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น และสามารถปรับใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้อย่างคล่องแคล่ว และ 3) ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ คือ ความสามารถในการตรวจสอบในแต่ละขั้นตอนถึงความบกพร่องของงาน ตรวจสอบคำตอบที่ได้มาจากการลงมือปฏิบัติตามแนวทางที่สร้างขึ้น โดยผู้เรียนต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีมาช่วยในการหาสาเหตุ แก้ปัญหาและเรียนรู้ประโยชน์จากความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น ข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาครั้งใหม่ รวมทั้งทราบแนวทางในการนำสิ่งที่ได้ไปปรับใช้ในสถานการณ์อื่น ๆ ทำให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนและพัฒนาตามขั้นตอนที่มีความสอดคล้องกับการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของ Polya (1985, อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2553) 4 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem)

ขั้นที่ 2 วางแผนงาน (Devising a plan) ขั้นที่ 3 ดำเนินการตามแผน (Carrying out the plan) ขั้นที่ 4 ตรวจสอบผล (Looking back) ผู้เรียนจึงมีทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น

ผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของจิรนันท์ พึ่งกลั่น (2555) ที่พบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ปัญหาที่มีความสอดคล้องกับชีวิตประจำวันของผู้เรียนเป็นฐานที่มีผู้สอนเป็นผู้ชี้แนะ เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และแก้ปัญหาผ่านการทำงานร่วมกัน ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนให้สูงขึ้น สอดคล้องกับ Dickinson, Eade, Gough, and Hough (2010) ที่นำแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งช่วยพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของผู้เรียนและพัฒนาความรู้ในเนื้อหาวิชาให้แก่ผู้เรียนแก่นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลางถึงต่ำ อีกทั้งการเรียนรู้ปัญหาและหาแนวทางการแก้ปัญหาจะมีระบบและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น หากได้รับการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไปพร้อมกัน ดังที่พัฒนา ชัชพงศ์ (2550) กล่าวว่า “เพียเจต์ (Piaget) กล่าวไว้ว่า มนุษย์สามารถเรียนรู้โดยการปรับขยายจากประสบการณ์เดิมสู่สิ่งใหม่ ถ้าเขามีทักษะมิติสัมพันธ์ที่ดี จะช่วยให้เขาเรียนรู้อย่างมีศักยภาพที่ดียิ่งขึ้น” ผู้เรียนจะได้พัฒนาความสามารถในการมองภาพและเชื่อมโยงสิ่งต่าง ๆ ในการเรียนรู้ เพื่อนำไปสู่การวางแผนจากการจัดกลุ่มรูปแบบต่าง ๆ ในสมองได้ดี (อุดม เพชรสังหาร, 2550) ดังผลการวิจัยของอารีย์ เมฆวิลัย (2552) ได้ศึกษาการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่มี ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และพฤติกรรมการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน ต่างก็มีการใช้สัญลักษณ์หรือตัวแปรเป็นตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาและเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

2. จากผลการเปรียบเทียบทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์กับผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ พบว่า ผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยข้อที่ 2 เพราะเมื่อเปรียบเทียบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงกับรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบปกติจะมีความแตกต่างกันที่การประยุกต์ใช้ความรู้และจุดเริ่มต้นของการจัดการเรียนรู้ โดยการเรียนรู้แบบปกติจะมีวิธีการประมวลผลข้อมูลความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบ เป็นการเรียนรู้หลักคณิตศาสตร์ เพื่อนำความรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผนมาใช้ในการแก้ปัญหา การเรียนรู้จึงเริ่มจากสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นไว้เรียบร้อยแล้ว ผู้สอนจะสอนให้ผู้เรียนเรียนรู้องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ตามลักษณะของมโนทัศน์และขั้นตอนวิธีการ จากนั้นผู้เรียนจะได้ฝึกฝนจนชำนาญ และจึงจะประยุกต์ใช้ความรู้และทักษะต่าง ๆ

ในการแก้ปัญหาเชิงบริบท (Mayer, 2001) การที่ผู้เรียนแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์โดยนำความรู้คณิตศาสตร์มาใช้ แล้วแปลงคำตอบเชิงคณิตศาสตร์กลับไปสู่บริบทชีวิตจริง บางครั้งคำตอบในทางคณิตศาสตร์ที่ได้อาจไม่สอดคล้องกับปัญหาในบริบทชีวิตจริง เพราะอาจทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของข้อมูลระหว่างการแปลงปัญหาชีวิตจริงสู่แก้ปัญหาในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสิ่งนี้เป็นข้อจำกัดที่อาจเกิดขึ้นได้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการดั้งเดิม ในขณะที่กระบวนการแก้ปัญหาในเชิงบริบทจริงจะยึดปัญหาเป็นหลัก ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำความเข้าใจปัญหาและเรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหา มีโอกาสนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาปรับใช้ในการแก้ปัญหาด้วยตนเอง จนทำให้ผู้เรียนสามารถสรุปข้อค้นพบและนำไปปรับใช้ในการแก้ปัญหาบริบทชีวิตจริงได้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ด้วยความเข้าใจ (Gravemejer, 1997) ซึ่งจากผลการวิจัยผู้วิจัยพบว่าข้อค้นพบที่เป็นปัญหาของผู้เรียนกลุ่มที่ได้เรียนรู้แบบปกติคือการแก้ปัญหาด้วยการแทนค่าสูตรทางเรขาคณิตที่เกิดจากการท่องจำ ซึ่งบางครั้งผู้เรียนจำสูตรไม่ถูกต้องหรือมีความคลาดเคลื่อน การแก้ปัญหาของผู้เรียนจึงเกิดความผิดพลาด หรือในบางกรณีผู้เรียนเจอสถาการณ์ที่มีความซับซ้อนหรือพลิกแพลงไป เมื่อผู้เรียนแทนค่าสูตรตามหลักการแต่ไม่ได้นึกถึงมโนภาพในความเป็นจริง ผู้เรียนก็อาจเกิดข้อผิดพลาดในการแก้ปัญหาตามมา เช่น การล้อมรั้วรูปครึ่งวงกลมถ้าผู้เรียนหาความยาวรอบรูปของรูปวงกลมแล้วนำมาหารสอง นั้นก็อาจยังไม่ถูกต้อง เนื่องจากต้องบวกเพิ่มในส่วนของเส้นผ่านศูนย์กลางเข้าไปด้วย เป็นต้น ในขณะเดียวกันการเรียนรู้ของผู้เรียนได้รับการพัฒนาความสามารถด้านมิติสัมพันธ์เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการพัฒนากระบวนการคิด จะทำให้ผู้เรียนมองเห็นความเชื่อมโยงของสิ่งต่าง ๆ และสามารถจินตนาการมโนภาพที่มีความเชื่อมโยงกันให้เกิดขึ้นภายในใจได้ พร้อมทั้งสามารถที่จะถ่ายทอดออกมาให้คนอื่นรับรู้ได้อย่างเป็นรูปธรรม (อุดม เพชรสังหาร, 2549) นำไปสู่การสร้างแบบจำลองทางความคิดเพื่อการแก้ปัญหาที่ง่ายขึ้นและมีประสิทธิภาพมากขึ้น เนื่องจากผู้ที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ดีจะมีความสามารถในการมองเห็นความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ อย่างเชื่อมโยง ผู้เรียนจะเรียนรู้และวางแผนแก้ปัญหาสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็ว เพราะการเรียนรู้บนพื้นฐานความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จะเกิดจากจากการรับรู้ การคิด ความจำ รวมถึงการทำความเข้าใจเชื่อมโยงเหตุการณ์ การใช้เหตุผล และการสร้างความคิดนามธรรม จึงทำให้ผู้ที่มีทักษะด้านมิติสัมพันธ์จะเห็นภาพโดยรวมได้อย่างชัดเจนและเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับการทำงานในชีวิตประจำวัน (Baenninger and Newcombe, 1995)

ผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับเกศินี เพ็ชรรุ่ง (2556) พบว่าชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงทำให้ความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ของผู้เรียนหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลองและสูงกว่าผู้เรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ สอดคล้องกับงานวิจัยของสุริเยส สุขแสวง (2548) ที่พบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหา โดยใช้ปัญหาที่มีความน่าสนใจและสอดคล้องกับชีวิตจริงของผู้เรียน ช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้ศักยภาพของตนในการแก้ปัญหา สอดคล้องกับ Hirza, Kusumah, Darhim, and Zulkardi (2014)

ที่ได้พัฒนาทักษะการหยั่งรู้โดยใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง โดยการเปรียบเทียบการเรียนการสอนระหว่างการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเป็นฐานกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบปกติทั่วไป พบว่า การเรียนการสอนแบบใช้การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเป็นฐานมีการพัฒนาทักษะด้านการหยั่งรู้สูงกว่าการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบปกติทั่วไป

3. จากผลการศึกษาทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ พบว่า ผู้เรียน 8 จาก 12 คน มีทักษะในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้นตามลำดับเมื่อเปรียบเทียบ 3 ระยะ คือ ระยะที่ 1 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 1-5), ระยะที่ 2 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 6-10) และ ระยะที่ 3 (การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แผนที่ 11-15) และผู้เรียนจำนวน 4 คน มีทักษะที่ดีขึ้นเมื่อเปรียบเทียบระยะที่ 1 กับระยะที่ 2 แต่คะแนนทักษะการแก้ปัญหาในช่วงหลังการทดลองลดลงจากช่วงระหว่างทดลองเล็กน้อย โดยผู้วิจัยพบว่ามีผลมาจากปัจจัย 1) การขาดเรียนของผู้เรียน 2) ความยากในเนื้อหา ซึ่งระยะที่ 1 และ 2 ของการทดลองเป็นเรื่องเรขาคณิตสองมิติ ในขณะที่เนื้อหาระยะที่ 3 ซึ่งเป็นเรื่องเรขาคณิตสามมิติ ผู้วิจัยจะขออภิปรายถึงพัฒนาการของทักษะในการแก้ปัญหาโดยแบ่งออกเป็น 3 ทักษะที่ได้รับการพัฒนาผ่านกิจกรรมการเรียนรู้แต่ละขั้นตอน ดังนี้

3.1) พัฒนาการทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาของผู้เรียนได้รับการพัฒนาจากกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นที่ 1 คือ การทำความเข้าใจบริบทปัญหา ซึ่งช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้บริบทปัญหาจากเรียนรู้และทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา โดยวิเคราะห์และแยกส่วนของปัญหาเป็นส่วนที่ต้องการหาคำตอบและส่วนที่กำหนดให้ ซึ่งผู้วิจัยเลือกใช้สถานการณ์ปัญหาที่มีความเชื่อมโยงกับชีวิตจริงเพื่อให้ผู้เรียนเกิดมโนภาพตามขณะที่อ่านและวิเคราะห์โจทย์ ผู้วิจัยพบว่า ในช่วงแรกของการทดลองผู้เรียนคุ้นเคยกับการทำความเข้าใจโจทย์โดยการแยกแยะอย่างง่าย ดังบทสัมภาษณ์ผู้เรียนที่ว่า "สังเกตจากตัวเลขค่ะ ถ้าประโยคไหนมีตัวเลขมาให้ ประโยคนั้นคือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เรา เอามาคิดเลขค่ะ แต่ประโยคที่มี กี่ หรือเท่าไร จะประโยคคำถามที่ให้เราตอบค่ะ" (ผู้เรียนคนที่ 1, 29 สิงหาคม 2562) ซึ่งการเรียนรู้เพื่อทำความเข้าใจกับโจทย์ขาดความละเอียดถี่ถ้วนและการวิเคราะห์เพื่อเชื่อมโยงไปสู่แนวทางในการแก้ปัญหา ผู้เรียนจะแยกได้แค่ว่าส่วนที่กำหนดจำนวนมาให้คือสิ่งที่โจทย์กำหนดและส่วนที่เป็นประโยคคำถามคือสิ่งที่โจทย์ให้หาคำตอบ แต่เมื่อโจทย์มีตัวลวง ผู้เรียนจะไม่สามารถแยกแยะสิ่งที่ใช้กับไม่ใช้ในการแก้ปัญหา หรือเมื่อผู้เรียนเจอโจทย์ที่มีความซับซ้อนผู้เรียนไม่สามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของจำนวนเพื่อเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์หรือแสดงแนวคิดได้ ทั้งนี้อาจเป็นเพราะผู้เรียนอ่านโจทย์ไม่ละเอียดรอบคอบ จึงส่งผลให้ผู้เรียนสร้างมโนภาพที่ไปสู่การสร้างแบบจำลองการแก้ปัญหาไม่ถูกต้องตามมา ในช่วงระหว่างทดลองผู้เรียนได้เรียนรู้ ผู้เรียนสามารถระบุข้อมูลรายละเอียดของปัญหาและมีการทบทวนในการวิเคราะห์โจทย์ถึงสิ่งที่กำหนดมาในโจทย์และ

สิ่งที่ผู้เรียนต้องการหาคำตอบว่ามีการเชื่อมโยงหรือต้องใช้ความรู้เรื่องใดในการหาคำตอบ โดยผู้เรียนแสดงร่องรอยการขีดเขียน หรือระบุเพิ่มเติมเกี่ยวกับสิ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหาสถานการณ์นั้น ๆ สำหรับในช่วงหลังของการทดลองผู้เรียนมีพัฒนาการที่ดีขึ้นในเรื่องของการวิเคราะห์โจทย์ จากการสัมภาษณ์ผู้เรียนคนเดิมหลังจากการเรียน พบว่าผู้เรียนมีการวิเคราะห์และทำความเข้าใจกับสถานการณ์ปัญหาอย่างละเอียดรอบคอบมากขึ้น ผู้เรียนกล่าวว่า “เวลาที่หนูจะทำโจทย์ก็จะอ่านโจทย์ไปด้วยวาดรูปไปด้วย รูปที่ออกมานั่นแหละที่เราต้องเอาไปใช้แสดงวิธีทำ แล้วหนูก็จะแก้ปัญหาตามรูปที่วาดออกมา” (ผู้เรียนคนที่ 1, 17 ตุลาคม 2562) ประกอบกับการสังเกตจากพฤติกรรมและร่องรอยของการทำแบบฝึกหัด ผู้เรียนมีความละเอียดรอบคอบที่เพิ่มขึ้น มีความผิดพลาดที่ลดลง ผู้เรียนสามารถตัดตัวลวงในโจทย์ที่ไม่ได้ใช้ในการแก้ปัญหาออกได้ ผู้เรียนสามารถระบุได้ว่า สิ่งที่ต้องการค้นหาคำตอบว่าต้องใช้การเชื่อมโยงความรู้เรื่องใด โดยผู้วิจัยพบว่า ผู้เรียนจำนวน 11 คน มีพัฒนาการที่สูงขึ้น แต่ผู้เรียน 1 คน คือ ผู้เรียนคนที่ 4 มีพัฒนาการที่คงที่ ซึ่งขั้นตอนที่ 1 เป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับผู้เรียนเพราะจะทำให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาสถานการณ์ในขั้นต่อไปได้อย่างถูกต้อง

3.2) พัฒนาการทักษะการออกแบบและการแก้ปัญหาของผู้เรียนได้รับการพัฒนาผ่านกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นตอนที่ 2 การแสดงวิธีการแก้ปัญหาด้วยพื้นฐานความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ประกอบกับการฝึกฝนด้วยแบบฝึกทักษะ ในระยะที่ 1 ผู้วิจัยได้มีการช่วยเหลือชี้แนะถึงวิธีการดังกล่าวแก่ผู้เรียนในหลาย ๆ ประเด็น ทั้งในการทำกิจกรรมกลุ่มและทำแบบฝึกทักษะด้วยตนเอง (หรือบางคาบเรียนใช้การทำเป็นคู่) ผู้วิจัยพบว่า ผู้เรียนได้แสดงแบบจำลองทางความคิดโดยใช้การวาดภาพประกอบการใส่ตัวเลขเพื่อการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยระยะที่ 1 ผู้เรียนอาจวาดและแสดงความสัมพันธ์ของส่วนต่าง ๆ ไม่ครบถ้วน บางกรณีไม่แสดงความยาว หน่วย หรือส่วนที่โจทย์ต้องการทราบ แบบจำลองที่สร้างขึ้นจึงทำให้การแก้ปัญหาขาดความแม่นยำและความถูกต้อง นอกจากนี้ผู้เรียนบางคนไม่แสดงความคิดออกมา เนื่องจากขาดความมั่นใจ กลัวว่าการแสดงวิธีคิดของตนเองจะไม่ถูกต้อง ผู้วิจัยจึงคอยให้คำแนะนำ ช่วยเหลือ และอาจให้ผู้เรียนช่วยกันแลกเปลี่ยนความคิดซึ่งกันและกัน เมื่อผู้เรียนได้เรียนรู้ข้อบกพร่องจากการแลกเปลี่ยนและอภิปรายร่วมกันระหว่างผู้เรียนและครู หรือการตรวจสอบจากคำอธิบายของครูแล้วนำไปปรับปรุงพัฒนาวิธีการของตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับ Gravemeijer (1997) ที่ให้ความสำคัญการคิดค้นคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมโดยได้รับการแนะนำที่กระบวนการคณิตศาสตร์ของผู้เรียนควรได้รับประสบการณ์จากสถานการณ์จริงแต่มีการได้รับคำแนะนำและอำนวยความสะดวกจากครูผู้สอนเกี่ยวกับวิธีการแก้ปัญหาที่ไม่เป็นทางการ นอกจากนี้ผู้เรียนได้รับการฝึกฝนจากการทำแบบฝึกหัดเพิ่มจากเรื่องอื่น ๆ อย่างต่อเนื่องจึงทำให้ผู้เรียนมีพัฒนาการที่ดีขึ้นในระยะที่ 2 และ 3 ผู้วิจัยได้ให้ผู้เรียนได้มีโอกาสออกแบบวิธีการด้วยตนเองและแสดงความคิดของตนเองอย่างเต็มความสามารถก่อนที่จะให้คำชี้แนะ โดยผู้เรียนมีความกล้าที่จะแสดงความคิดของตนเองมากขึ้น ไม่กลัวว่าจะผิดหรือถูก ผู้เรียนหลายคนวิเคราะห์

โจทย์ปัญหาแล้วมีการขีดเขียนเพื่อทำความเข้าใจกับรูปร่าง รูปทรงของวัตถุข้อนั้น ๆ จากนั้นเพิ่มเติมรายละเอียดในแบบจำลองรูปภาพนั้นด้วยการเติมจำนวนแสดงความยาวด้าน รัศมี ความยาวรอบรูปหรือพื้นที่ อีกทั้งผู้เรียนบางคนวาดภาพเพิ่มเติมถึงส่วนที่โจทย์ต้องการทราบเพื่อแสดงความคิดของตนเองออกมา ทำให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาต่อจากแบบจำลองทางความคิดที่ตนเองสร้างไว้ได้ และผู้เรียนส่วนใหญ่สามารถแสดงวิธีหาคำตอบได้ถูกต้องและสอดคล้องกับภาพแบบจำลองความคิดที่ผู้เรียนออกแบบไว้ อย่างไรก็ตามในการแก้ปัญหาของผู้เรียนบางคนอาจมีข้อบกพร่องในกรณีที่ผู้เรียนเจอโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ที่ตนเองไม่คุ้นเคย หรือมีความซับซ้อนดังเช่นรูปเรขาคณิตสามมิติที่ผู้เรียนบางคนแสดงแบบจำลองความคิดที่คลาดเคลื่อนไปจึงทำให้การแก้ปัญหาของผู้เรียนไม่ถูกต้อง ในทางตรงข้ามหากผู้เรียนเจอสถานการณ์ปัญหาที่ผู้เรียนคุ้นเคย การแก้ปัญหาของผู้เรียนจะเกิดประสิทธิภาพ ผู้เรียนจะเข้าใจบริบทปัญหา สามารถเชื่อมโยงความรู้ แสดงความคิดและแบบจำลองออกมาเป็นรูปภาพได้อย่างดี หรือผู้เรียนที่สามารถจินตนาการภาพที่เกิดจากการแปลความจากข้อความในสถานการณ์ปัญหาโดยใช้พื้นฐานการคิดด้วยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ผู้เรียนแปลภาษามาสู่การวาดแบบจำลองออกมาได้นำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นผู้เรียนควรได้รับการพัฒนาพื้นฐานมิติสัมพันธ์และฝึกฝนอย่างต่อเนื่อง สอดคล้องกับ Baron (1978) ที่กล่าวว่ากลยุทธ์ในการแก้ปัญหาด้านมิติสัมพันธ์เป็นหนึ่งในปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ส่งผลให้ความสามารถในการแก้ปัญหาของแต่ละบุคคลจะมีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น (Baron, 1978) และเมื่อผู้เรียนตรวจสอบความถูกต้องจะทำให้ผู้เรียนได้เรียนรู้กระบวนการแก้ปัญหาที่ตนเองสร้างเพื่อเป็นการเรียนรู้และจดจำสำหรับการนำไปปรับใช้ในสถานการณ์ปัญหาที่ใกล้เคียงกัน สอดคล้องกับ De lange (1996) ที่เชื่อว่ากิจกรรมในการแก้ปัญหาควรเป็นสถานการณ์ปัญหาที่เชื่อมโยงและสอดคล้องกับคณิตศาสตร์ ทำให้คณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่อยู่ใกล้ชิดกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันของผู้เรียน ทำให้ผู้เรียนมองเห็นถึงการประยุกต์ใช้หรือมองเห็นแบบจำลองในการแก้ปัญหาได้ (De lange, 1996 อ้างถึงใน Zukardi, 2002)

3.3) พัฒนาการทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ เป็นกระบวนการที่เกิดจากการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาของตนเอง จากนั้นผู้เรียนได้มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้จากกระบวนการแก้ปัญหาของเพื่อนผ่านการอภิปราย ตลอดจนการตรวจสอบความถูกต้องจากครู เพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไขและพัฒนาวิธีการของตนเองให้มีความถูกต้องสมบูรณ์ สอดคล้องกับหลักการปฏิสัมพันธ์ (interaction principle) ของ Marja van den Heuvel-Panhuizen (2000) ที่ว่าการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงถือว่าเป็นกิจกรรมทางสังคมที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้แลกเปลี่ยนแบ่งปันกลยุทธ์และผลงานของผู้เรียนกับเพื่อนคนอื่น ๆ โดยการฟังและพูดในสิ่งที่ตนเองคิด เพื่อปรับปรุงวิธีการในการแก้ปัญหาของตนเอง นอกจากนี้ยังทำให้เกิดการสะท้อนความคิด เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจและเห็นความสำคัญของการทำงานมากยิ่งขึ้น ซึ่งในระยะที่ 1 ผู้เรียนส่วนใหญ่

ไม่เข้าใจถึงความสำคัญของการสรุปผลและตรวจสอบคำตอบ ไม่ได้มีการย้อนคิดหรือไตร่ตรองในวิธีการแก้ปัญหาของตนเองก่อนที่จะส่งคำตอบกับครู นำสิ่งที่ได้จากการแก้ปัญหานั้นมีสรุปเป็นคำตอบ ซึ่งในบางครั้งคำตอบที่ไม่ถูกต้องนั้นเกิดจากความไม่รอบคอบหรือความผิดพลาดเล็กน้อย เช่น เรื่องหน่วยที่ไม่ถูกต้อง การตอบไม่ตรงคำถาม การคิดคำนวณเลขไม่ถูกต้อง เป็นต้น สิ่งต่าง ๆ เหล่านี้ ทำให้ผู้เรียนแก้ปัญหาไม่ถูกต้องแล้ว ยังทำให้ผู้เรียนไม่ได้ทบทวนตนเอง ไม่ได้เกิดการเรียนรู้จากกระบวนการคิดแก้ปัญหาของตนเองด้วยตนเอง จึงทำให้ทักษะการสรุปผลและนำไปใช้ของผู้เรียนในระยะแรกอยู่ในระดับต่ำ แต่เมื่อผู้วิจัยชี้ให้เห็นถึงความสำคัญและเน้นย้ำให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหาของตนที่ไม่ได้ตรวจสอบแค่คำตอบ แต่เป็นการตรวจสอบกระบวนการเพื่อเรียนรู้วิธีการไปพร้อมกับการตรวจสอบความถูกต้อง ผู้เรียนได้เริ่มเห็นความสำคัญและให้เวลากับการสะท้อนคิดและตรวจสอบ สิ่งที่จะเกิดขึ้นตามมาคือการที่ได้เรียนรู้วิธีการเพื่อนำวิธีการไปใช้ในสถานการณ์หรือเรื่องที่มีความใกล้เคียงหรือเชื่อมโยงกัน

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะ ดังนี้

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริง ผู้สอนควรมีการศึกษาและเตรียมสถานการณ์ที่มีความสอดคล้องกับสภาพแวดล้อมของผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนทุกคนเกิดความกระตือรือร้น มีส่วนร่วมในการเรียนรู้ และสามารถนำสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ไปปรับใช้ในชีวิตประจำวัน

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ผู้วิจัยจะต้องมีการสังเกตพฤติกรรมจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียนและมีการตรวจสอบความถูกต้องของการทำแบบฝึกหัด เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน

3. หากผู้วิจัยนำกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไปใช้กับผู้เรียนที่มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ที่ดีแล้ว ผู้เรียนจะได้มีโอกาสในการเรียนรู้และเกิดข้อค้นพบด้วยตนเองอย่างแท้จริง แต่หากนำไปใช้กับผู้เรียนที่มีพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์และความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ที่ไม่ดี ผู้วิจัยจะต้องคอยให้คำแนะนำและตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการแก้ปัญหาของผู้เรียนอย่างใกล้ชิด เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และรับข้อมูลที่ถูกต้อง

4. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จำเป็นต้องให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนทักษะกระบวนการคิด และแสดงแบบจำลองทางความคิดโดยใช้การเชื่อมโยงพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ออกมา เนื่องจากความสามารถของผู้เรียนแต่ละคนไม่เท่ากัน อาจทำให้ผู้เรียนแต่ละคนใช้เวลาที่ต่างกัน ผู้เรียนบางคนอาจไม่กล้าที่จะแสดงความคิดออกมา ผู้สอนจึงมีบทบาทสำคัญที่นอกจากการให้คำแนะนำผู้เรียนแล้ว อาจมีการกระตุ้นหรือใช้การเสริมแรงผู้เรียนมาช่วย

5. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ ควรนำไปใช้เพื่อพัฒนาผู้เรียนอย่างต่อเนื่อง จะทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะในการแก้ปัญหาและทักษะอื่น ๆ จนอาจพัฒนาไปเป็นความสามารถของผู้เรียน

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1. ผู้วิจัยอาจการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ไปปรับใช้เพื่อพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ได้แก่ ทักษะการให้เหตุผล ทักษะการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ ทักษะการเชื่อมโยง และทักษะความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ผู้วิจัยควรเพิ่มเวลาในการทำกิจกรรมในการแก้ปัญหาของผู้เรียนแต่ละกิจกรรมที่มากขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนได้มีโอกาสสร้างกระบวนการคิด และสร้างแบบจำลองได้อย่างหลากหลาย รอบด้านและคิดอย่างสร้างสรรค์มากยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

ภาษาไทย

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). *มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์สหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

กระทรวงศึกษาธิการ. กรมวิชาการ. (2544). *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.* กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

กนิษฐา ศรีวชิโรทัย. (2554). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการเสนอแนวคิดนาที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

กองสิน อ่อนวาด. (2550). *การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้การเรียนรู้แบบร่วมมือ.* วิทยานิพนธ์คุรุศาสตรมหาบัณฑิต. สาขาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย.

กุลยา เหมวัสดุกิจ. (2545). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบแวนฮีลี่ที่มีต่อระดับความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

เกศินี เพ็ชรรุ่ง. (2556). *การพัฒนาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงเพื่อส่งเสริมมโนทัศน์และความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

โกมล ไพศาล. (2540). การพัฒนาการเรียนการสอนรายบุคคลด้านเรขาคณิตสำหรับครูคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น. วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

คันธรส วงศ์ศักดิ์. (2553). *ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของเด็กปฐมวัยที่ได้รับการจัดกิจกรรมศิลปะประดิษฐ์ โดยใช้พืชผักผลไม้.* วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาปฐมวัย บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

จันทร์เพ็ญ ชูประภาวรรณ. (2541). *เด็กเยาวชน และครอบครัว.* กรุงเทพฯ: สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย.

จิรนันท์ พึ่งกลั่น. (2555). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ปัญหาเป็นฐานการเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ในห้องเรียนกับชีวิตประจำวัน. *วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์,* 27(3), 131-140.

ชมรมบ้านวิทยาศาสตร์. (2553). *หนังสือคณิตศาสตร์การปฏิบัติ: รูปทรงมหัศจรรย์.* พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ: บริษัทไทยร่มเกล้า จำกัด.

ณัชชา กมล. (2542). *ผลของการใช้เครื่องคำนวณกราฟฟิกทีมีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิต สังกัดทบวงมหาวิทยาลัย.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทองห่อ วิภาวิน. (2523). *การวัดความถนัด.* กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์โอเดียนสโตร์.

ธัญพิมล จันทร์นุ่ม. (2556). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับการพัฒนาความคิดของเด็กที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นฤชล ศรีมาพรหม. (2549). *การพัฒนาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการสำหรับชั้นมัธยมศึกษาปี ที่ 2 โรงเรียนนางรอง อำเภอนางรอง จังหวัดบุรีรัมย์.* วิทยานิพนธ์ครุศาสตรมหาบัณฑิต. ภาควิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์.

นวลทิพย์ นวพันธุ์. (2552). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

บุสญา อิ่มแก้ว. (2557). *ผลการสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดกับแบบปกติที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่องเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5.* วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต. มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์.

ประพิมพ์พักตร์ พละพงศ์. (2550). *ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของเด็กปฐมวัยในการทำกิจกรรมศิลปะสร้างสรรค์ด้วยกระดาษเส้น.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาปฐมวัยบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2537). การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์. *วารสารคณิตศาสตร์,* 38(434-435), 62-74.

ปานทอง กุลนาถศิริ. (2541). การสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาในศตวรรษที่ 21. *วารสารคณิตศาสตร์*, 41(474-475), 65-68.

ปิยะรัตน์ โพธิบัติ. (2549). *การแสดงหลักฐานความเที่ยงตรงและความเชื่อมั่นของแบบทดสอบมิติสัมพันธ์แบบแยกภาพรูปทรงเรขาคณิตและแบบพับกระดาษ.* วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการวัดผลการศึกษามหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ.

พัฒนา ชัชพงศ์. (2550). *จากทฤษฎีสู่การปฏิบัติ.* ฉบับที่ 85. กรุงเทพฯ: นิตยสารคิด แอน สคูล.

พรรณปพร จตุวีรพงษ์. (2555). *ผลของตัวชี้นำด้วยภาพในบทเรียนมัลติมีเดียแบบเกมที่มีต่อความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ต่ำ.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาเทคโนโลยีและสื่อสารการศึกษา ภาควิชาเทคโนโลยีและสื่อสารการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

มัลลิกา พงศ์ปริตร. (2544). *ก้าวไกลกับรองเท้าคู่เก่ง วิธีพัฒนาพหุปัญญาในห้องเรียน.* กรุงเทพมหานคร: สถาบันพัฒนาวิชาการ.

มานพ เถี้ยมแก้ว. (2545). *การพัฒนาแบบวัดความสามารถในการคิดแก้ปัญหาของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นตามเกณฑ์มาตรฐานโรงเรียน พ.ศ. 2541 ของสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ*. วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการวัดผลการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยทักษิณ.

มานะ เอกจริยวงศ์. (2537). จุดมุ่งหมายของการสอนเรขาคณิตในโรงเรียน. *วารสารคณิตศาสตร์*, 38(428-429), 1-5.

เยาวพา เดชะคุปต์. (2542). *การจัดการศึกษาสำหรับเด็กปฐมวัย.* กรุงเทพฯ: แม็ค.

ยุพิน พิพิธกุล. (2530). *การสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพมหานคร: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ยุพิน พิพิธกุล. (2542). การแก้ปัญหา. *วารสารคณิตศาสตร์,* 485-487(กุมภาพันธ์-เมษายน), 5-12.

ยุวรรณดา พรหมนิวาส. (2553) *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โมเดลของแวนฮีลีที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางเรขาคณิตของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รักษพล ธนานุวงศ์. (2556). เรียนรู้สภาวะโลกร้อนด้วย STEM Education แบบบูรณาการ. *วารสารสสวท.,* 41(182), 15-20.

รสอุบล ธรรมพานิชวงศ์. (2545). *ผลของการพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับสัญลักษณ์และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชา

การศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ล้วน สายยศ. (2543). มิติสัมพันธ์สำคัญไฉน. *วารสารวิชาการศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร,* ปีที่ 1 (2 มกราคม-เมษายน), 21-27.

ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ. (2541). *เทคนิคการสร้างและสอบข้อสอบความถนัดทางการเรียน.* กรุงเทพมหานคร: สุริยาสาส์น.

วิจารณ์ พานิช. (2555). *วิถีสร้างการเรียนรู้เพื่อศิษย์ในศตวรรษที่ 21.* กรุงเทพฯ: มูลนิธิสดศรีสฤษดิ์วงศ์.

วิชัย วงษ์ใหญ่. (2542). *พลังการเรียนรู้ในกระบวนทัศน์ใหม่.* กรุงเทพมหานคร: สุริยาสาส์น.

วัชรี กาญจน์กีรติ. (2554). *การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์.* เพชรบุรี: มหาวิทยาลัยราชภัฏเพชรบุรี.

วรรณทิพา รอดแรงค้า. (2540). *การสอนวิทยาศาสตร์ที่เน้นทักษะกระบวนการ.* กรุงเทพฯ: สถาบันพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.).

วรรณวิภา สุทธเกียรติ. (2542). *การพัฒนาบทเรียนเรขาคณิตที่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้.* ปริญญานิพนธ์การศึกษาดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

ศรีสมัย ดวงมณี. (2558). *โมเดลความสัมพันธ์เชิงสาเหตุของความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีอิทธิพลต่อการหยั่งรู้เชิงเรขาคณิตและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ในจังหวัดจาปาสัก สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว.* วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต. สาขาวิชาการวิจัยและสถิติทางวิทยาการปัญญา วิทยาลัยวิทยาการวิจัยและวิทยาการปัญญา มหาวิทยาลัยบูรพา.

สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2561). *สรุปผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ปีการศึกษา 2561*. สืบค้นจาก http://www.newonetresult.niets.or.th/AnnouncementWeb/PDF/SummaryONETP6_2561.pdf

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). *แนวทางการจัดการเรียนรู้.* กรุงเทพมหานคร: คุรุสภา.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). *เอกสารอบรมครู (หลักสูตรแกนกลาง) ในโครงการความร่วมมือ สกอ. - สพฐ. - สสวท.* กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (อัดสำเนา)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: 3-คิว มีเดีย.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). *การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์*. กรุงเทพมหานคร: ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2556). *เอกสารสำหรับผู้รับการอบรมโครงการอบรมครูด้วยระบบทางไกลกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับประถมศึกษาหลักสูตรมาตรฐานการอบรมครู ปีที่ 3 (ฉบับปรับปรุง)* [online]. แหล่งที่มา: http://www.mrcud2.com/news_file/p74002141154.pdf

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. กระทรวงศึกษาธิการ. (2557). *รายงานผลการวิจัยโครงการ TIMSS 2011 วิชาคณิตศาสตร์*. สืบค้นจาก https://library.ipst.ac.th/bitstream/handle/ipst/740/TIMSS2011_maths_report.pdf?sequence=1&isAllowed=y

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). *สรุปข้อมูลเบื้องต้น PISA 2015*. สืบค้นจาก https://drive.google.com/file/d/0BwqFSkq5b7zSaHpGemExYVhjYUk/view

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. สืบค้นจาก http://www.sl.ac.th/files/vichakan/3.pdf

สมเดช บุญประจักษ์. (2544). แนวคิดในการพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์. *วารสารคณิตศาสตร์.* (พฤศจิกายน-ธันวาคม 2544): 33-37.

สายพิณ ล้ำเลิศ. (2558). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการ RMT ร่วมกับ แนวคิดการเสริมต่อการเรียนรู้ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุจิรา มุสิกะเจริญ. (2542). *การเปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเส้นขนานและความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัยจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุณิสา สุมิรัตนะ. (2555). *การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมการรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน มัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้แนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับชีวิตจริงและกระบวนการแก้ปัญหา.* วิทยานิพนธ์ดุษฎีบัณฑิต. สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุดารัตน์ ไชยเลิศ. (2553). *การสร้างแบบวัดความสามารถในการคิดแก้ปัญหาสิ่งแวดล้อมของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสังกัดกรุงเทพมหานคร.* ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. สาขาการวัดผลการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

สุพัตรา จอมคำสิงห์. (2552). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างงานที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุวิทย์ มูลคำ. (2547). *กลยุทธ์การสอนคิดแก้ปัญหา.* กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดภาพพิมพ์.

สุริเยส สุขแสวง. (2548). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จังหวัดสุรินทร์.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สิริมณี บรรจง. (2549). *เด็กปฐมวัยกับทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์.* กรุงเทพมหานคร: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

สิริมา ภิญโญอนันตพงษ์. (2553). *การวัดและประเมินเด็กแนวใหม่: เด็กปฐมวัย (ปรับปรุงแก้ไข).* กรุงเทพฯ: ดอกหญ้าวิชาการ.

อรชร ภูบุญเติม.(2550). *การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน.* ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

อรวรรณ ตันสุวรรณรัตน์. (2552). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการแก้ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2. *วารสารอิเล็กทรอนิกส์ทางการศึกษา, 5*(1), 115-128.

อัมพร ม้าคนอง. (2546). *คณิตศาสตร์: การสอนและการเรียนรู้.* กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อัมพร ม้าคนอง. (2553). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ :การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ.* กรุงเทพฯ: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อาพันธ์ชนิต เจนจิต. (2546). *กิจกรรมการเรียนการสอนเรขาคณิต โดยใช้การแก้ปัญหาอย่างสร้างสรรค์สำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์.* ดุษฎีนิพนธ์ปริญญาการศึกษาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

อารีย์ เมฆวิลัย (2552). *การศึกษาการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และพฤติกรรมการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน.* วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต. สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อุดม เพชรสังหาร. (2549). ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์. *นิตยสารรักลูก, 24(277), 164-165.*

ภาษาอังกฤษ

Anastasi, A. (1982). *Psychological Testing*. 5 th ed. New York: Macmillan.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Baenninger M, Newcombe N. (1995). Environmental input to the development of sex-related differences in spatial and mathematical ability. *Learn Individ Differ,* 7(4), 363–379.

Barnes, H. (2004). Realistic mathematics education: Eliciting alternative mathematical conceptions of learners. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *8*(1), 53-64.

Baron, J. (1978). Intelligence and general strategies. *Strategies of information processing*, 403-450. London: Academic Press.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1993). Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically: Prentice Hall.

Bennett, G.K., Seashore, H.G., and Wesman, A.G. (1967). *Differential Aptitude Tests Directions for Administration and Norms.* New York: David Mckay.

Bell, F. H. (1978). *Teaching and Learning mathematics (In Secondary School).* Dubuque: Wm C. Brown Company.

Bellard, J. W. (2000). Students Use of Multiple Representations in Mathematical Problem Solving. *Dissertation Abstracts International,* 40, 61-09A.

Bitter, G. (1990). *Mathematics methods for the elementary and middle school : A Comprehensive Approach*. Boston: Allyn & Bacon.

Brinkmann, E. H. (1966). Programed instruction as a technique for improving spatial visualization. *Journal of Applied Psychology, 50*(2), 179.

Burger, W. F., and Shaughnessy, J. M. Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, 17 (January 1986), 31-48.

Burin, D. I., Delgado, A. R., & Prieto, G. (2000). Solution strategies and gender differences in spatial visualization tasks. *Psicológica, 21*(2), 275-286.

Caldera, Y. M., Mc Culp, A., O'Brien, M., Truglio, R. T., Alvarez, M., & Huston, A. C. (1999). Children's play preferences, construction play with blocks, and visual spatial skills: Are they related? *International Journal of Behavioral Development, 23*(4), 855-872.

Carroll, J.B. (1993). *Human cognitive abilities*: A survey of factor-analytic studies. USA: Cambridge University Press.

Connor, J. M., & Serbin, L. A. (1985). Visual-spatial skill: Is it important for mathematics? Can it be taught. *Women and mathematics: Balancing the equation*, 151-174.

Cooper, L., & Mumaw, R. (1985). Spatial aptitude. *Individual differences in cognition, 2*, 67-94.

Crowley, M. L. (1987). *The van Hiele model of the development of geometry thought. In M. M. Lindquist and A . Shulte (eds.) , Learning and teaching geometry.* Virginal: NCTM,

Cronbach, L. J. (1970). *Essentials of Psychological Testing*. 3 rd ed. New York: Harper and Row.

Daniel, S. (2014). *Difference of students Mathematical connection ability using Realistic Mathematics Education approach and Problem posing approach in SMP SWASTA KATOLIK ASSISI MEDAN Academic year 2014/2015.* Mathematics Education Study Program, Faculty of Mathematics and Science, Universitas Negeri Medan.

De Lange, J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education. In A.J. Bishop et al., (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer, 49-97.

De Klerk, J. (2009). Illustrated Maths Dictionary (4th ed.). Australia: Pearson Australia Group Pty Ltd.

Demaisip-Hortillosa, A. (2013). *Context-Based Mathematics Problem Solving: Cognitive and Affective Effects on BIT and BS VOC-Tech Students.* IAMURE International Journal of Education, 5(1), 1-1.

Deno, J. A. (1995). The relationship of previous experiences to spatial visualization ability. *Engineering Design Graphics Journal, 59*(3), 5-17.

Dhillon, A. S. (1998). Individual differences within problem-solving strategies used in physics. *Science Education, 82*(3), 379-405.

Dickinson, P., & Hough, S. (2012). *Using Realistic Mathematics Education (RME) in UK Classrooms*. England: Mathematics in Education & Industry Schools Project.

Dickinson, P., Eade, F., Gough, S., & Hough, S. (2010). Using Realistic Mathematics Education with low to middle attaining pupils in secondary schools' reference. *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education, April*, 73-80.

Eme, P.-E., & Marquer, J. (1999). Individual strategies in a spatial task and how they relate to aptitudes. *European journal of psychology of education, 14*(1), 89-108.

Fauzan, A. (2002). *Apply Realistic Mathematics Education (RME) in Teaching Geometry in Indonesian Primary Schools*: 35-43.

Fisher, R. (1987). *Problem Solving in Primary School.* Great Britain: Basil Blackwell.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. The Netherlands: Kluwer.

Gagne, R. M. (1970). *The learning of concepts*. Cited in Clarizio, H.F., Craig, R.C. & Mehrens, W. A. (eds) *Contemporary Psychology*. Boston: Allyn &Bacon.

Gardner, H. (1995). *Learning Minds.* New York: Ballentine.

Gitimu, P. N., & Workman, J. E. (2007). Influence of strategy choice on spatial performance in apparel design. *Clothing and Textiles Research Journal, 25*(2), 171-183.

Gluck, J., & Fitting, S. (2003). Spatial Strategy Selection: Interesting Incremental Information. *International Journal of Testing, 3*(3), 293-308.

Good, C.V. (1973). *Dictionary of Education. 3rd ed*. New York: McGraw – Hill BookCompany, Inc.

Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems, a case of modeling? *Learning and Instruction, 7*(4), 389-397. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/ S095947529700011X

Gravemeijer, K.P.E. and Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, 32, 777–796.

Guilford, J.P.,& Lacey, J.I. (1947). *Printed classification tests. AAF aviation psychology research program reports (No.5).* Washington, DC:GPO.

Guilford, J. P. and H. Ralph. (1971). *The Analysis of Intelligence*. McGraw – Hill Book Company.

Harle, M. & Towns, M. (2011). A review of Spatial Ability Literature, Its Connection to Chemistry, and Implications for Instruction. *Journal of Chemical Education*, 88(3): 351-360.

Hirza, B., Kusumah, Y., Darhim., & Zulkardi,. (2014). Improving Intuition Skills with Realistic Mathematics Education. *IndoMS-JME, 5*(1), 27-34.

Hill, C., Corbett, C., & St Rose, A. (2010). *Why so few? Women in science, engineering technology, and mathematics,* Washington, DC: AAUW.

Hsi, S., Linn, M. C., & Bell, J. E. (1997). The Role of Spatial Reasoning in Engineering and the Design of Spatial Instruction. *Journal of Engineering Education, 86*(2), 151-158.

Jansen, P., Zayed, K., & Osmann, R. (2016). Gender differences in mental rotation in Oman and Germany. *Learning and Individual Differences, 51*, 284-290.

Kali Y., and Orion N. (1996). Spatial abilities of high-school students in the perception of geological structures. *Journal of Research in Science Teaching*, v.33, pp.369-391.

Krulik, Stephen, & Rudnick Jesse A. (1988). *Problem solving*. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Kyllonen, P. C., Lohman, D. F., & Snow, R. E. (1984). Effects of aptitudes, strategy training, and task facets on spatial task performance. *Journal of Educational Psychology, 76*(1), 130.

Levy, J. U., and Levy, N. (2001). *Mechanical Aptitude & Spatial Relations Tests 5 th ed.* United States of America: Thomson Learning.

Liben, L. S. (1981). Spatial representation and behavior: Multiple perspectives. *Spatial representation and behavior across the life span: Theory and application, 79*, 3-32.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479- 1498.

Lord, T. R., & Garrison, J. (1998). Comparing spatial abilities of collegiate athletes in different sports. *Perceptual and motor skills, 86*(3), 1016-1018.

Lohman, D.F. (1988). Spatial abilities as traits, process and knowledge. In R.J.Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*, Vol.40, 181- 248.

Marja van den Heuvel-Panhuizen. (2000). *Mathematics Education in the Netherlands*: A Guided Tour, Freudenthal Institute CD-ROM for ICME9. Retrieved from http://www.fi.uu.nl/en/rme/TOURdef+ref.pdf.

Marunic, G., & Glazar, V. (2013). Spatial ability through engineering graphics education. *International Journal of Technology and Design Education, 23*(3), 703-715.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological bulletin, 86*(5), 889-918.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education.* Washington, DC: National Academy Press.

Piaget. (1969). *Biology and knowledge.* Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1971). The Theory of Stages in Cognitive Development. In D.R. Green (Ed.), *Measurement and Piaget*. New York: McGraw-Hill.

Piaget, J., & Cook, M. (1952). *The origins of intelligence in children (M. Cook, Trans.).* New York, NY, US: W W Norton & Co.

Polya, G. (1957). *How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. 2nd* ed. New York: Doubleday and Company.

Rauscher, F. H., & Zupan, M. A. (2000). Classroom keyboard instruction improves kindergarten children's spatial-temporal performance: A field experiment. *Early Childhood Research Quarterly, 15,* 215-228.

Ravielli, A. (1957). *An adventure in geometry.* New York: The Viking Press.

Sheffield, J. (2000). *Teaching and Learning Mathematics Pre-Kindergarten Through Middle School*. New York: John Wiley & Sons.

Sidhu, K. S. (1981). *TheTeaching of Mathematics*. 3rd ed. New Delhi: Sterling Printer.

Simmons, Malcolm. (1992). *The Effective Teaching of Mathematics.* New York: Longman Publishing.

Smith, K. J. (2013). *Mathematics: Its Power, and Utility (10th ed.).* USA: Charles Van Wagner.

Smith, M. I. (1994). *Spatial Ability.* London: London University, Press.

Sorby, S.A. (1999). Developing 3-D Spatial Visualization Skills. *Engineering Design Graphics Journal,* 63(2), 21-32.

Sorby, S.A. and Wysocki, A.F. (2003). *Introduction to 3D spatial visualization an active approach.* United States: Thomson Delmar Learning.

Sorby, S. A. (2009). Educational Research in Developing 3-D Spatial Skills for Engineering Students. *International Journal of Science Education, 31*(3), 459-480.

Spelke, E., Lee, S. A., & Izard, V. (2010). Beyond core knowledge: Natural geometry. *Cogn Sci*, 34 (5), 863-884.

Streefland, L. (1991). *Fraction in Realistic Mathematics Education.* Boston: Kluwer.

Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28 (July 1997), 467-483.

Thurstone, L. L. (1958). *Primary Mental Ability.* Chicago: Chicago University, Press.

Treffers, A. (1991). *Didactical background of a mathematics programm for primary education*, in L. Streefland (ed.), Realistic Mathematics Education in Primary School, Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.

Turner, M. J., Blackledge, J. M., & Andrews, P. R. (1998). *Fractal geometry in digital imaging.* USA: Academic Press.

Van den Heuvel-Panguizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. F.L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education*, 1-43.

Widjaja, Y., & Heck, A. (2003). How a Realistic Mathematics Education Approach and Microcomputer-Based Laboratory Worked in Lessons on Graphing at an Indonesian Junior High School. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 26*(2), 1-51.

Weir, J.J. (1974). Problem Solving in Everybody Problem. *Science Teacher*, (41), 16 – 18.

Yunita, H. S. (2013). *Perbedaan Kemampuan Komunikasi dan Koneksi Matematis Siswa dengan Pendekatan Matematika Realistik dan Konvensional*, Thesis, Pascasarjana, Unimed, Medan.

Zulkardi, Z. (2002). *Developing a learning environment on realistic mathematicseducation for Indonesian student teachers* Twente: University of Twente.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

ผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้ แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบสังเกตพฤติกรรมและแบบสัมภาษณ์ผู้เรียน มีดังนี้

1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม	อาจารย์ประจำสาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พิมพ์พร อสัมภินพงศ์	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายประถม
3. ดร.สาวิตรี จุ้ยทอง	ศึกษานิเทศก์ สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษา นนทบุรี เขต 1

ภาคผนวก ข

หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิและขอความร่วมมือในการวิจัย

ที่ อว 64.6(2791.01)/62-2644

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กรกฎาคม 2562

เรื่อง ขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนวัดโพธิ์ศรี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วยนางสาวนิดาวรรณ ทองไทย นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ในระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก” โดยมีอาจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บข้อมูลด้วยแผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียน แบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาเรื่องเรขาคณิตตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงโดยร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ และแบบสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหา กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทำการเก็บข้อมูลวิจัยดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 0-8641-23631 email: Nidawan.oum@gmail.com

ที่ อว 64.6(2791.01)/62-**2643**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กรกฎาคม 2562

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน ดร.สาวิตรี จุ้ยทอง

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วยนางสาวนิดาวรรณ ทองไทย นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ในระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก" โดยมีอาจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาในการนี้ จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 0-8641-23631 email: Nidawan.oum@gmail.com

ที่ อว 64.6(2791.01)/62-**2642**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กรกฎาคม 2562

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ พิมพ์พร อสัมภินพงศ์

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วยนางสาวนิดาวรรณ ทองไทย นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ในระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก” โดยมีอาจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้ จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 0-8641-23631 email: Nidawan.oum@gmail.com

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ โทร. 82565-97 ต่อ 6732
ที่ อว 64.6(2791.01)/62-2641 **วันที่** กรกฎาคม 2562
เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ น่วมนุ่ม

ด้วยนางสาวนิดาวรรณ ทองไทย นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ในระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก” โดยมีอาจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี

เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 0-8641-23631 email: Nidawan.oum@gmail.com

ที่ อว 64.6(2791.01)/62-**2645**

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

กรกฎาคม 2562

เรื่อง ขอทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนชุมชนวัดกลางท่าข้าม

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วยนางสาวนิดาวรรณ ทองไทย นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ในระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ที่มีต่อทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนขนาดเล็ก" โดยมีอาจารย์ ดร.ยุรวัฒน์ คล้ายมงคล เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องทดลองใช้เครื่องมือ คือ แผนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ แบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน-หลังเรียน แบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาเรื่องเรขาคณิตตามแนวคิดการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงโดยร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์ และแบบสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหา กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ทั้งนิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 0-8641-23631 email: Nidawan.oum@gmail.com

ภาคผนวก ค

ผลการวิเคราะห์คุณภาพเครื่องมือ

ผลการประเมินความตรงเชิงเนื้อหาของแบบวัดจากผู้ทรงคุณวุฒิ

ตารางที่ 1 แสดงผลการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของข้อคำถามในแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อคำถาม	ความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ			ผลรวมคะแนน (Σ**R**)	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
2	1	0	1	2.00	0.67	ใช้ได้
3	0	1	1	2.00	0.67	ใช้ได้
4	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
5	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
6	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
7	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
8	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
9	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
10	0	1	1	2.00	0.67	ใช้ได้
11	1	0	1	2.00	0.67	ใช้ได้
12	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
13	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
14	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
15	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
16	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
17	1	0	1	2.00	0.67	ใช้ได้
18	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
19	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
20	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
21	1	0	1	2.00	0.67	ใช้ได้
22	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
23	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
24	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
25	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้

ตารางที่ 1 (ต่อ) แสดงผลการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของข้อคำถามในแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อคำถาม	ความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ			ผลรวมคะแนน (Σ**R**)	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
26	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
27	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
28	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
29	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
30	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้

ตารางที่ 2 แสดงผลการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของข้อคำถามในแบบสังเกตพฤติกรรมในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อคำถาม	ความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ			ผลรวมคะแนน (Σ**R**)	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
2	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
3	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
4	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
5	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้

ตารางที่ 3 แสดงผลการหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของข้อคำถามในแบบสัมภาษณ์ผู้เรียน

ข้อคำถาม	ความคิดเห็นของผู้ทรงคุณวุฒิ			ผลรวมคะแนน (Σ**R**)	ค่า IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	0	1	1	2.00	0.67	ใช้ได้
2	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
3	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
4	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้
5	1	1	1	3.00	1.00	ใช้ได้

ตารางที่ 4 ค่าความเที่ยง ความยาก และอำนาจจำแนกของแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.94	0.118	0.944
2	0.46	0.158	
3	0.57	0.232	
4	0.59	0.626	
5	0.71	0.473	
6	0.80	0.428	
7	0.70	0.427	
8	0.66	0.482	
9	0.55	0.632	
10	0.49	0.462	
11	0.60	0.710	
12	0.46	0.816	
13	0.52	0.739	
14	0.31	0.667	
15	0.71	0.638	
16	0.54	0.766	
17	0.55	0.608	
18	0.44	0.726	
19	0.66	0.719	
20	0.50	0.686	
21	0.34	0.707	
22	0.34	0.661	
23	0.35	0.625	
24	0.38	0.653	

ตารางที่ 4 (ต่อ) ค่าความเที่ยง ความยาก และอำนาจจำแนกของแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ข้อที่	**ค่าความยาก (p)**	**ค่าอำนาจจำแนก (r)**	**ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ**
25	0.31	0.584	
26	0.54	0.740	
27	0.59	0.597	
28	0.59	0.564	
29	0.38	0.479	
30	0.29	0.612	

ตารางที่ 5 ค่าความเที่ยง ความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน

ข้อที่	**ค่าความยาก (p)**	**ค่าอำนาจจำแนก (r)**	**ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ**
1	0.71	0.377	0.832
2	0.66	0.479	
3	0.59	0.517	
4	0.55	0.624	
5	0.49	0.399	
6	0.57	0.251	
7	0.38	0.729	
8	0.54	0.810	
9	0.34	0.577	
10	0.34	0.544	

ตารางที่ 6 ค่าความเที่ยง ความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบวัดทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

ข้อที่	ค่าความยาก (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.60	0.583	0.884
2	0.70	0.309	
3	0.59	0.595	
4	0.54	0.788	
5	0.46	0.758	
6	0.44	0.787	
7	0.55	0.580	
8	0.38	0.468	
9	0.35	0.661	
10	0.31	0.674	

ภาคผนวก ง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

```
T-TEST PAIRS=Post WITH Pre (PAIRED)
  /CRITERIA=CI(.9500)
  /MISSING=ANALYSIS.
```

T-Test

[DataSet0]

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Post	34.042	12	5.8600	1.6916
	Pre	15.875	12	3.8854	1.1216

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Post & Pre	12	.125	.699

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	Post - Pre	18.1667	6.6138	1.9092	13.9645	22.3689	9.515	11	.000

```
T-TEST GROUPS=Group(1 2)
  /MISSING=ANALYSIS
  /VARIABLES=solve
  /CRITERIA=CI(.9500).
```

T-Test

[DataSet0]

Group Statistics

	Group	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
solve	1	12	34.042	5.8600	1.6916
	2	12	26.708	3.2854	.9484

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
solve	Equal variances assumed	6.250	.020	3.781	22	.001	7.3333	1.9393	3.3114	11.3553
	Equal variances not assumed			3.781	17.293	.001	7.3333	1.9393	3.2470	11.4197

ภาคผนวก จ

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
และร่องรอยการทำแบบฝึกทักษะของผู้เรียน

แบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องเรขาคณิตตามแนวคิด
การศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถทางด้านมิติสัมพันธ์

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

พ่อสร้างคอกวัวรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ความยาวด้าน 20 เมตรไว้กลางทุ่ง ในตอนกลางวันพ่อจะผูกวัวไว้กับเสามุมคอกที่อยู่ด้านนอกเพื่อกินหญ้ารอบ ๆ คอก โดยเชือกมีความยาว 14 เมตร อยากทราบว่าบริเวณที่วัวตัวนี้สามารถกินหญ้าได้เป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร

การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : ....
....
....
- สิ่งที่โจทย์ถาม : ....

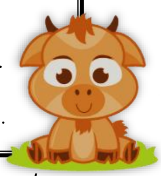
2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

- ประโยคสัญลักษณ์ : ....
- วิธีทำ : ....
....
....
....
....
....
....

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ....
- ตรวจคำตอบ : ....



** ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น*
ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

สถานการณ์ปัญหาที่ 2

พ่อต้องการขุดสระว่ายรูปทรงลูกบาศก์แทนที่สวนหย่อมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความโดยรอบ 36 เมตร เมื่อพ่อขุดสระแล้วจ้างช่างมาปูกระเบื้องภายในสระว่ายน้ำ พ่อต้องจ้างช่างปูกระเบื้องเป็นพื้นที่ทั้งหมดกี่ตารางเมตร

<u>การแก้ปัญหา</u>

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : ....

....

....

- สิ่งที่โจทย์ถาม : ....

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

- ประโยคสัญลักษณ์ : ....

- วิธีทำ : ....

....

....

....

....

....

....

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ....

- ตรวจคำตอบ : ....

** ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น*

ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

สถานการณ์ปัญหาที่ 3

ลุงขุดดินจากบ่อไปขายราคารถละ 1,000 บาท โดยบ่อที่ขุดมีขนาดกว้าง 6 เมตร ยาว 8 เมตร ลึก 2 เมตร หากรถบรรทุกสามารถขนดินได้คันละ 8 ลูกบาศก์เมตร ลุงจะขายดินได้เงินทั้งหมดกี่บาท

<u>การแก้ปัญหา</u>

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : ....

....

....

- สิ่งที่โจทย์ถาม : ....

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

- ประโยคสัญลักษณ์ : ....

- วิธีทำ : ....

....

....

....

....

....

....

3) สรุปผลและนำไปใช้

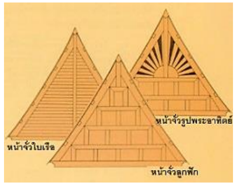
- ตอบ : ....

- ตรวจคำตอบ : ....

** ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น*
ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

สถานการณ์ปัญหาที่ 4

หลังคาบ้านของฉันเป็นหน้าจั่วลูกฟัก มีความสูง 220 เซนติเมตร มีฐานยาว 300 เซนติเมตร ส่วนหลังคาบ้านของย่าเป็นหน้าจั่วใบเรือ สูงมากกว่าหลังคาของฉัน 40 เซนติเมตร แต่ฐานยาวเท่ากัน หากพ่อต้องการทาเคลือบไม้บริเวณหน้าจั่วหลังคาบ้านของย่า พ่อต้องทาไม้เป็นพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร



รูปภาพจาก: http://kanchanapisek.or.th

การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : ....
....
....
- สิ่งที่โจทย์ถาม : ....

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

- ประโยคสัญลักษณ์ : ....
- วิธีทำ : ....
....
....
....
....
....
....

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ....
- ตรวจคำตอบ : ....

** ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น*
ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

สถานการณ์ปัญหาที่ 5

กล่องทรงลูกบาศก์ขนาดความยาวด้านละ 9 เซนติเมตร ถ้านำขนมลูกเต๋าที่มีปริมาตร 27 ลูกบาศก์เซนติเมตร มาใส่จนเต็มกล่อง จะสามารถใส่ได้จำนวนกี่ลูก

รูปภาพจาก: https://twitter.com/ekachaisalee

การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : ....

....

....

- สิ่งที่โจทย์ถาม : ....

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

- ประโยคสัญลักษณ์ : ....

- วิธีทำ : ....

....

....

....

....

....

....

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ....

- ตรวจคำตอบ : ....

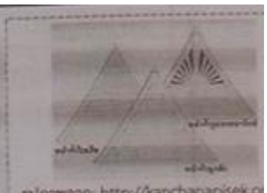
**** ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น***

ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

หลังคาบ้านของฉันเป็นหน้าจั่วลูกฟัก มีความสูง 220 เซนติเมตร มีฐานยาว 300 เซนติเมตร ส่วนหลังคาบ้านของย่าเป็นหน้าจั่วใบเรือ สูงมากกว่าหลังคาของฉัน 40 เซนติเมตร แต่ฐานยาวเท่ากัน หากพ่อต้องการทาเคลือบไม้บริเวณหน้าจั่วหลังคาบ้านของย่า พ่อต้องทาไม้เป็นพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร



รูปภาพจาก: http://kanchanapisek.o

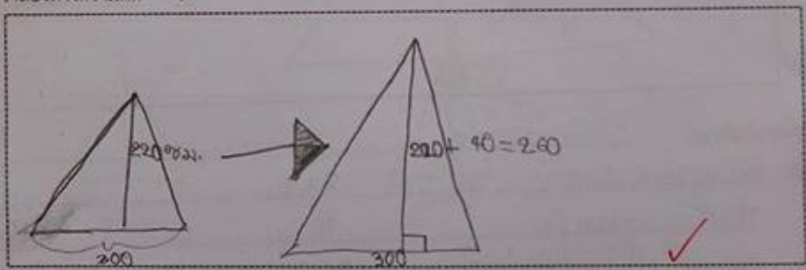
การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : หลังคาบ้านเป็นหน้าจั่วลูกฟักสูง 220 ซม. ฐานยาว 300 ซม. หลังคาบ้านย่าเป็นหน้าจั่วใบเรือสูงกว่าหลังคาฉัน 40 ซม.
- สิ่งที่โจทย์ถาม : พ่อจ้องทาไม้เป็นพื้นที่กี่ตารางเซนติเมตร →

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :



- ประโยคสัญลักษณ์ : $\frac{1}{2} \times 300 \times \cancel{260}^{130} = \square$
- วิธีทำ : หลังคาบ้านย่าสูง 220 + 40 = 260 ซม.

ฐานยาว 300 ซม.

พ่อต้องการเคลือบไม้บริเวณหน้าจั่วหลังคาบ้านของย่า 260 ÷ 2 = 130 ซม.

พ่อต้องทาไม้เป็นพื้นที่ $\frac{1}{2} \times 300 \times \cancel{260}^{130}$ = 39000 ตร.ซม.

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ๓๙๐๐๐ ตร.ซม.
- ตรวจคำตอบ : $\frac{1}{2} \times 300 \times \cancel{260}^{130}$ = 39000 ตร.ซม.

$130 \times 3 = 390$

สถานการณ์ปัญหาที่ 2

แปลงปลูกผักรูปครึ่งวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 เมตร ต้องการล้อมลวดหนามรอบแปลงผัก จะต้องใช้ลวดหนามยาวกี่เมตร

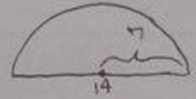
การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : แปลงครึ่งวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 ม. ล้อมลวดหนามรอบผัก
- สิ่งที่โจทย์ถาม : ต้องการใช้ลวดหนามยาวกี่เมตร

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :



$2 \times \frac{22}{\cancel{7}_{1}} \times \cancel{7}^{1}$

- ประโยคสัญลักษณ์ :
- วิธีทำ : ครึ่งวงกลม $= \frac{\cancel{2}\pi r}{\cancel{2}}$

$= \pi r$

$= \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7}$ ม.

$= 22$ ม.

ลวดหนาม $= 22 + 14$ ม.

$= 36$ ม.

3) สรุปผลและนำไปใช้

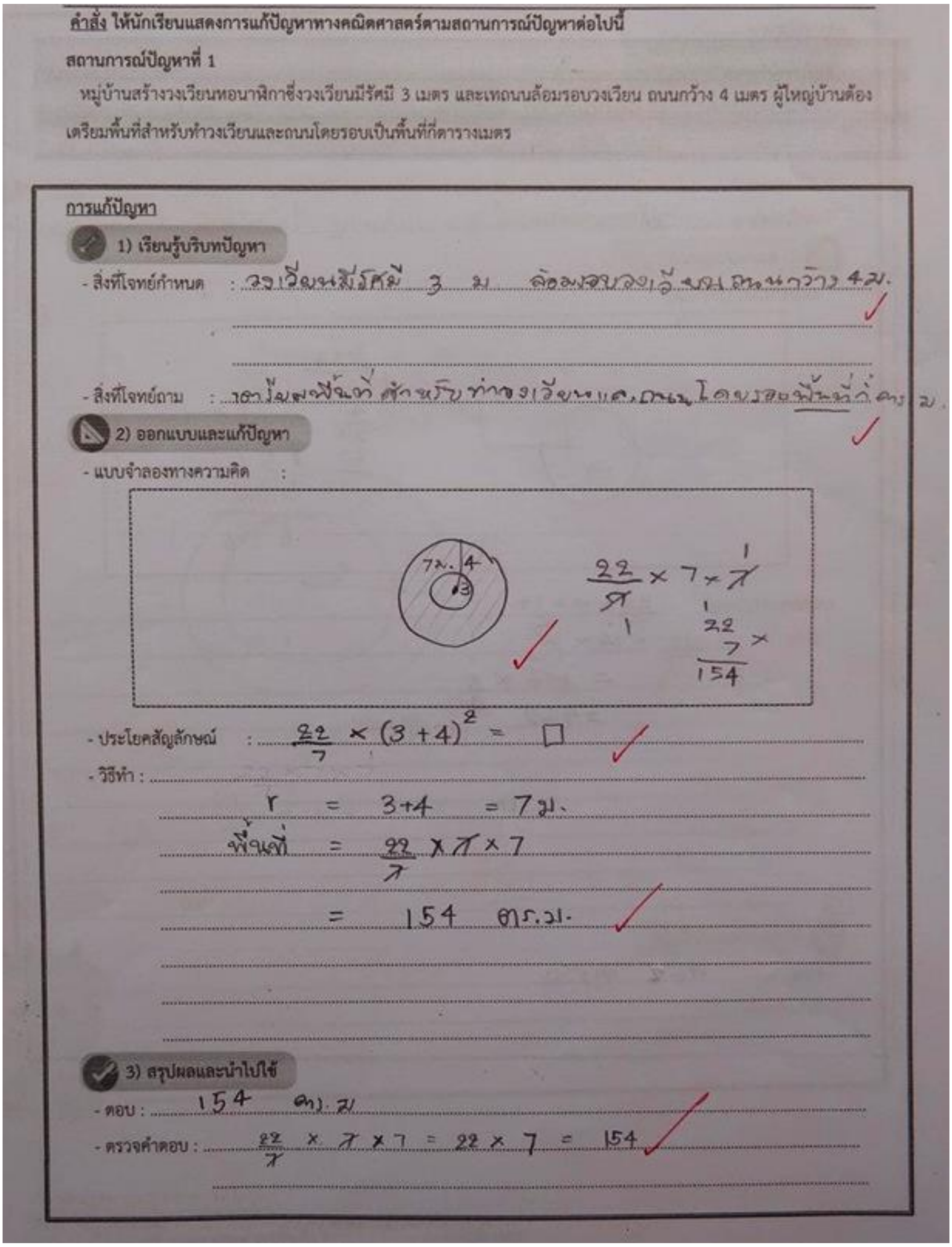
- ตอบ : 36 ม.
- ตรวจคำตอบ :

$\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ 14

$\frac{22}{7} \times 7$

$= 22$

* ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น



<u>คำสั่ง</u> ให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

หมู่บ้านสร้างวงเวียนหอนาฬิกาซึ่งวงเวียนมีรัศมี 3 เมตร และเทถนนล้อมรอบวงเวียน ถนนกว้าง 4 เมตร ผู้ใหญ่บ้านต้องเตรียมพื้นที่สำหรับทำวงเวียนและถนนโดยรอบเป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร

<u>การแก้ปัญหา</u>

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : วงเวียนมีรัศมี 3 ม ล้อมรอบวงเวียนถนนกว้าง 4 ม.

- สิ่งที่โจทย์ถาม : เตรียมพื้นที่สำหรับทำวงเวียนและถนนโดยรอบพื้นที่กี่ตร.ม.

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

7ม. 4 3

$\frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$22 \times 7 = 154$

- ประโยคสัญลักษณ์ : $\frac{22}{7} \times (3+4)^2 = \square$

- วิธีทำ :

$r = 3+4 = 7$ ม.

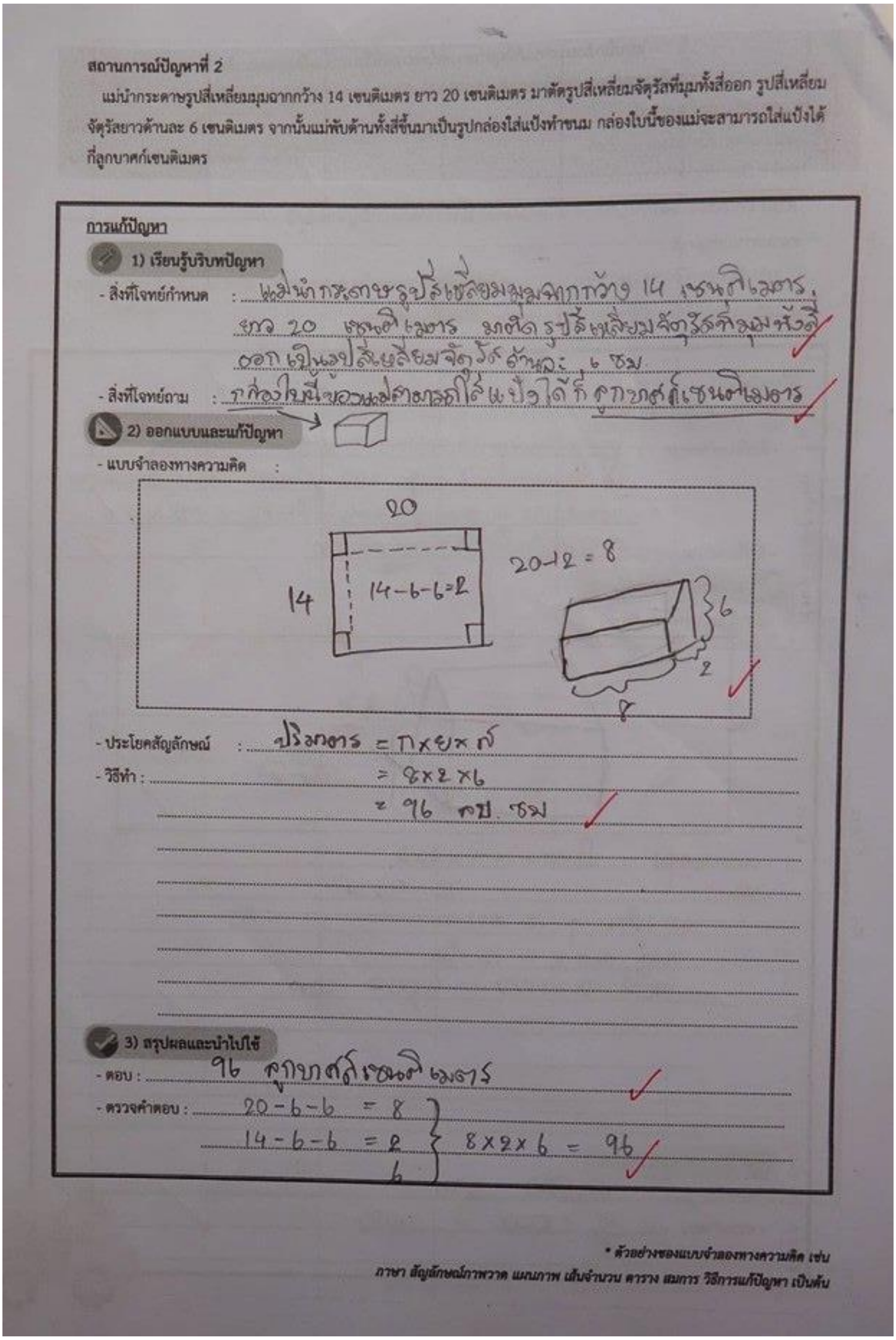
พื้นที่ $= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 154$ ตร.ม.

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : 154 ตร.ม

- ตรวจคำตอบ : $\frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 22 \times 7 = 154$



สถานการณ์ปัญหาที่ 2

แม่นำกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 14 เซนติเมตร ยาว 20 เซนติเมตร มาตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมทั้งสี่ออก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 เซนติเมตร จากนั้นแม่พับด้านทั้งสี่ขึ้นมาเป็นรูปกล่องใส่แป้งทำขนม กล่องใบนี้ของแม่จะสามารถใส่แป้งได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : แม่นำกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 14 เซนติเมตร, ยาว 20 เซนติเมตร มาตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมทั้งสี่ ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านละ 6 ซม.
- สิ่งที่โจทย์ถาม : กล่องใบนี้ของแม่สามารถใส่แป้งได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :

- ประโยคสัญลักษณ์ : ปริมาตร = ก × ย × ส
- วิธีทำ :
  = 8 × 2 × 6
  = 96 ลบ.ซม.

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : 96 ลูกบาศก์เซนติเมตร
- ตรวจคำตอบ :
  20 − 6 − 6 = 8
  14 − 6 − 6 = 2
  6
  8 × 2 × 6 = 96

* ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

พ่อหล่อเสาปูนทรงกระบอกที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 70 เซนติเมตร สูง 1.8 เมตร จำนวน 10 ต้น พ่อต้องซื้อปูนกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

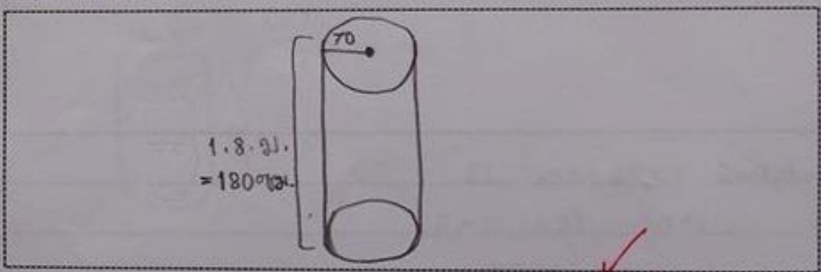
การแก้ปัญหา

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : เสาปูนทรงกระบอกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 70 เซนติเมตร สูง 1.8 ม. จำนวน 10 ต้น
- สิ่งที่โจทย์ถาม : ต้องซื้อปูนกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :



- ประโยคสัญลักษณ์ :
- วิธีทำ : ปริมาตรปูน $= \pi r^2 \times$ สูง

$= \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \times 180$

$= 3,850 \times 180$

$= 693,000$ ลบ.ซม.

เสา 10 ต้น $= 693,000 \times 10$

$= 6,930,000$ ลบ.ซม.

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : 6,930,000 ลบ.ซม.
- ตรวจคำตอบ :

สถานการณ์ปัญหาที่ 2

พ่อสร้างคอกวัวรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ความยาวด้าน 20 เมตรไว้กลางทุ่ง ในตอนกลางวันพ่อจะผูกวัวไว้กับเสามุมคอกที่อยู่ด้านนอกเพื่อกินหญ้ารอบๆ คอก โดยเชือกมีความยาว 14 เมตร อยากทราบว่าบริเวณที่วัวตัวนี้สามารถกินหญ้าได้เป็นพื้นที่กี่ตารางเมตร

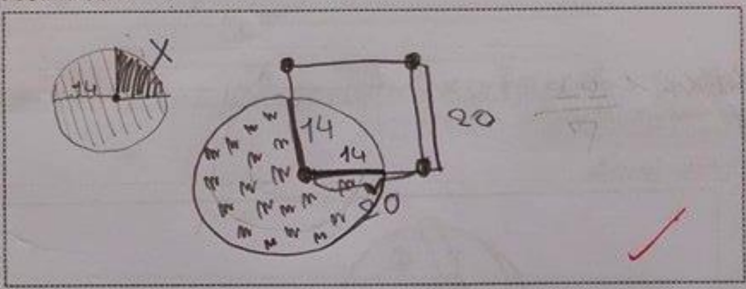
__การแก้ปัญหา__

1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : คอกวัวรูป□จัตุรัสยาว20 ม. เชือกยาว 14 ม.
- สิ่งที่โจทย์ถาม : บริเวณที่วัวตัวนี้กินหญ้าเป็นกี่ตร.ม.

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :



- ประโยคสัญลักษณ์ :
- วิธีทำ : พื้นที่ $= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ ตร.ม.

วัวกินหญ้า $\frac{3}{4} \times \cancel{616}^{154} = 462$ ตร.ม.

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ๔๖๒ ตร.ม.
- ตรวจคำตอบ : $\frac{3}{4} \times 616 = 462$

** ตัวอย่างของแบบจำลองทางความคิด เช่น ภาษา สัญลักษณ์ภาพวาด แผนภาพ เส้นจำนวน ตาราง สมการ วิธีการแก้ปัญหา เป็นต้น*

คำสั่ง ให้นักเรียนแสดงการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามสถานการณ์ปัญหาต่อไปนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1

กล่องทรงลูกบาศก์ขนาดความยาวด้านละ 9 เซนติเมตร ถ้านำขนมลูกเต๋าที่มีปริมาตร 27 ลูกบาศก์เซนติเมตร มาใส่จนเต็มกล่อง จะสามารถใส่ได้จำนวนกี่ลูก

รูปภาพจาก: https://twitter.com/ekachaisalee

การแก้ปัญหา

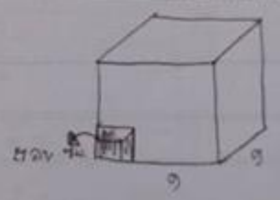
1) เรียนรู้บริบทปัญหา

- สิ่งที่โจทย์กำหนด : กล่องทรงลูกบาศก์ขนาดความยาวด้านละ 9 เซนติเมตร ลูกเต๋าที่มีปริมาตร 27 ลูกบาศก์เซนติเมตร มาใส่กล่องจนเต็มกล่อง

- สิ่งที่โจทย์ถาม : จะสามารถใส่ ☐ ได้จำนวนกี่ลูก

2) ออกแบบและแก้ปัญหา

- แบบจำลองทางความคิด :



- ประโยคสัญลักษณ์ : (9 × 9 × 9) ÷ 27 = ☐

- วิธีทำ : กล่องมีปริมาตร = ๙ × ๙ × ๙

= ๗๒๙ ลูกบาศก์ ซม.

บรรจุได้ = ๗๒๙ ÷ ๒๗

= ๒๗ ลูก

3) สรุปผลและนำไปใช้

- ตอบ : ๒๗ ลูกเต็มกล่อง

- ตรวจคำตอบ : 27 × 27 = 729 ลบ.ซม.

ภาคผนวก ฉ

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6**

ผู้สอน นางสาวนิดาวรรณ ทองไทย **จำนวน 1 คาบ เวลา 1 ชั่วโมง**

เรื่อง รูปเรขาคณิตสองมิติ (รูปวงกลม รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปหลายเหลี่ยม)

---

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค 2.2 เข้าใจและวิเคราะห์รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และทฤษฎีบททางเรขาคณิต และนำไปใช้

ตัวชี้วัด ป. 5/2 จำแนกรูปสี่เหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป

ตัวชี้วัด ป. 6/1 จำแนกรูปสามเหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูป

2. สาระสำคัญ

รูปเรขาคณิต 2 มิติ คือ รูปเรขาคณิตที่เป็นรูปปิดแสดงความกว้างและความยาวของรูป ซึ่งสามารถจำแนกจากจำนวนด้านและมุมได้เป็น รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปหลายเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1. ผู้เรียนสามารถอธิบายลักษณะและสมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยมและรูปวงกลมได้
2. ผู้เรียนสามารถจำแนกรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูปได้
3. ผู้เรียนสามารถออกแบบสิ่งต่าง ๆ จากสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางเรขาคณิตได้อย่างเหมาะสม

ด้านทักษะ/กระบวนการ

4. ผู้เรียนสามารถนำเสนอผลการใช้รูปเรขาคณิตสองมิติในการสร้างสิ่งต่าง ๆ ที่กำหนดให้
5. ผู้เรียนสามารถแสดงเหตุผลในการแก้ปัญหาโดยอ้างอิงความรู้ทางเรขาคณิต

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

6. ผู้เรียนวางแผนก่อนการทำงานได้อย่างเหมาะสม
7. ผู้เรียนกล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
8. ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมในชั้นเรียน
9. ผู้เรียนทำงานเป็นระเบียบเรียบร้อย

4. สาระการเรียนรู้

รูปเรขาคณิตสองมิติ คือ รูปเรขาคณิตที่เป็นรูปปิดแสดงความกว้างและความยาวของรูป ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ ๆ ตามลักษณะของขอบหรือด้านของรูป ได้แก่

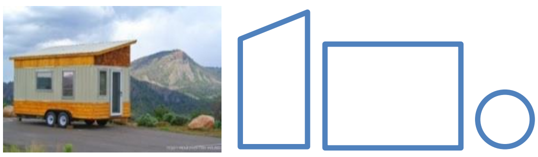
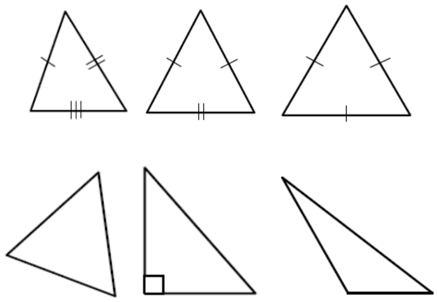
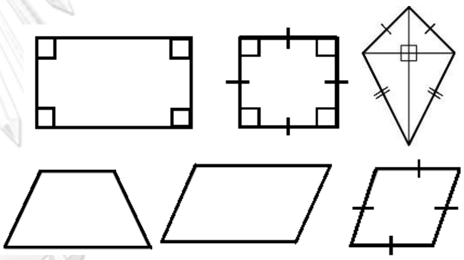
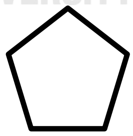
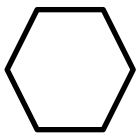
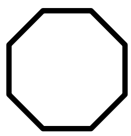
1) กลุ่มที่มีขอบหรือด้านที่เป็นเส้นโค้งงอ เช่น รูปวงกลม รูปวงรี เป็นต้น

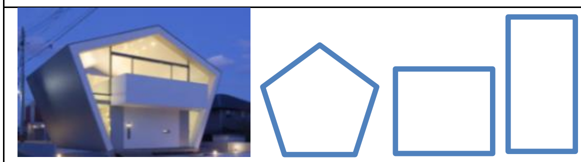
2) กลุ่มที่มีขอบหรือด้านของรูปที่เป็นส่วนของเส้นตรง กลุ่มนี้คือรูปหลายเหลี่ยม ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม รูปหกเหลี่ยม รูปแปดเหลี่ยม เป็นต้น โดยที่รูปหลายเหลี่ยมเป็นรูปเหลี่ยมเรขาคณิตที่มี 3 ด้านหรือมากกว่านั้น จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดคือจุดเดียวกัน การเรียกชื่อของรูปหลายคือเรียกตามจำนวนด้านหรือจำนวนเหลี่ยมของรูปนั้น

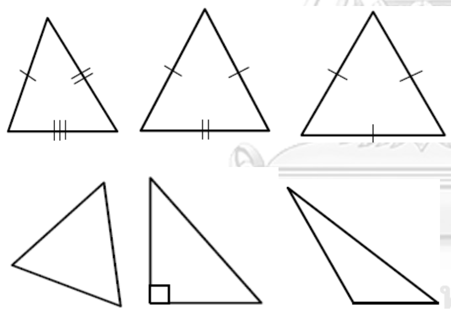
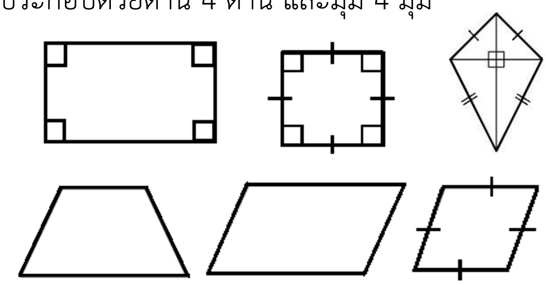
5. กิจกรรมการเรียนรู้

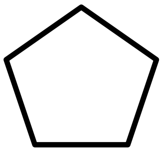
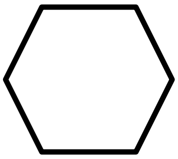
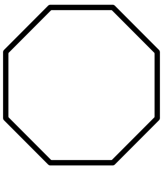
กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
<u>**ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจบริบทปัญหา**</u> 1. ผู้เรียนสังเกตและเลือกบัตรรูปภาพลักษณะของที่อยู่อาศัยของมนุษย์ให้เหมาะสมกับสภาพอากาศและการดำรงชีวิตที่ครูกำหนด  - บ้านในสภาพอากาศที่หนาวเย็นอย่างรุนแรง อุณหภูมิติดลบหรือต่ำกว่า 0 องศาเซลเซียส วัสดุที่ใช้สร้างบ้านคือน้ำแข็งและหนังสัตว์ที่เป็นฉนวนกักความร้อนจากตะเกียง - บ้านในสภาพอากาศแบบอบอุ่นในฤดูร้อน แต่หนาวจัดในฤดูหนาวถึงขั้นดินเป็นน้ำแข็ง เพาะปลูกไม่ได้ คนที่อาศัยจึงเป็นคนเร่ร่อน อพยพไปเรื่อย ๆ	<u>**ขั้นที่ 1 ขั้นนำ**</u> 1. ครูแบ่งผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม จากนั้นแจกกระดาษรูปสินค้าชนิดต่าง ๆ กลุ่มละ 1 ชุด ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาลักษณะแล้วแบ่งออกเป็นกลุ่มๆ โดยไม่บอกเกณฑ์ในการแบ่ง 

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)
- บ้านที่อาศัยใกล้ภูเขาที่มีการเปลี่ยนแปลงอากาศอย่างรุนแรง มีลม ฝน หิมะ พายุ บ้านจึงต้องแข็งแรง มีหลังคาเฉียงเพื่อรับแสงแดดและความอบอุ่น - บ้านที่อากาศขมุกขมัวไม่ร้อน ไม่หนาวจัด ได้รับอิทธิพลพายุและลมพัดจากมหาสมุทร มักออกแบบบ้านให้มีหน้าต่างมาก ๆ เพื่อรับแสงจากธรรมชาติ - บ้านที่อยู่ในสภาพอากาศร้อนชื้น อุณหภูมิสูง ฝนตกชุก ต้องสร้างบ้านที่กันแดดกันฝน หลังคาสูงเพื่อระบายน้ำและอากาศได้ดี - บ้านในสภาพอากาศแบบทะเลทรายที่มีความร้อนและแห้งแล้งมาก บ้านดินผนังหนาๆ ช่วยป้องกันความร้อนและพายุทราย 2. ครูเปิดประเด็นอภิปรายว่านอกจากวัสดุที่เหมาะสมกับสภาพอากาศและการดำรงชีวิตแล้ว ส่วนประกอบของบ้านส่วนใดที่ยังมีความสำคัญต่อการสร้างที่อยู่อาศัย (รูปร่าง รูปทรง) และให้คำถามชวนคิดว่าเพราะเหตุใด 3. ผู้เรียนสังเกตรูปแบบการสร้างบ้านในอดีตและปัจจุบันที่มีพัฒนาการอย่างต่อเนื่อง และมีรูปแบบที่สอดคล้องต่อความต้องการของผู้อยู่อาศัย ครูให้ผู้เรียนดูรูปบ้านแบบต่าง ๆ ต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกข้อแตกต่างของรูปบ้านแต่ละหลัง (ความแตกต่างคือรูปทรงเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ)   	   จากนั้นครูให้ผู้เรียนสังเกตและแบ่งกลุ่มอีกครั้ง โดยใช้เกณฑ์ลักษณะของรูปร่าง และถามนักเรียนว่าเราเรียกรูปข้างต้นนี้ว่าอะไร เพราะเหตุใด (รูปเรขาคณิตสองมิติ) 2. ให้ผู้เรียนแต่ละคนเลือกสินค้า (โดยไม่ซ้ำกัน) นำเสนอรูปที่ได้ว่าคือรูปเรขาคณิตสองมิติชนิดใด และนักเรียนคิดว่าเพราะเหตุใดจึงเรียกชื่อเช่นนั้น **<u>ขั้นที่ 2 ขั้นสอน</u>** 3. ครูและผู้เรียนร่วมกันอภิปรายถึงลักษณะของรูปเรขาคณิตชนิดต่าง ๆ พร้อมทั้งใช้บัตรภาพประกอบ **รูปวงกลม** คือ รูปร่างทางเรขาคณิตรูปแบบหนึ่ง เป็นรูปปิด ไม่มีมุม สามารถวาดได้โดยกำหนดจุดศูนย์กลางขึ้นมา 1 จุด จากนั้นจึงลากเส้นให้มีระยะห่างจากจุดนี้เท่ากันโดยตลอดวนรอบจุดศูนย์กลางจนกลับมาถึงจุดเริ่มต้น โดยระยะห่างจากจุดศูนย์กลางนี้มีชื่อเรียกว่า “รัศมี” **รูปสามเหลี่ยม** เป็นประเภทหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยม ประกอบด้วยด้าน 3 ด้าน และมุม 3 มุม ชนิดของรูปสามเหลี่ยม

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
 4. จากนั้นครูถามว่าการที่จะสร้างบ้านแบบต่าง ๆ ได้นั้น สถาปนิกและวิศวกรผู้ออกแบบต้องมีความรู้คณิตศาสตร์เรื่องใดบ้าง (เรื่อง มุม ด้าน รูปเรขาคณิต) **<u>ขั้นที่ 2 เรียนรู้และแสดงวิธีการแก้ปัญหา (ด้วยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์)</u>** 5. ครูให้สถานการณ์ปัญหา “สถาปนิกตัวน้อย” แก่ผู้เรียน โดยครูแบ่งผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ให้นักเรียนรับโจทย์คือภาพบ้านตามความต้องการของลูกค้า ให้ผู้เรียนสังเกตและแกะแบบแปลนบ้านจากนั้นบอกลักษณะของส่วนประกอบที่ใช้ในการสร้างบ้านว่าเป็นรูปเรขาคณิตสองมิติชนิดใดบ้าง ซึ่งครูให้ผู้เรียนถอดความคิดออกมาเป็นแบบจำลองโดยการวาดภาพหรือเขียนบันทึก (รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปวงกลม รูปห้าเหลี่ยม)  	 **รูปสี่เหลี่ยม** เป็นประเภทหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยม ประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน และมุม 4 มุม  นอกจากนี้ยังมีรูปเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ โดยสังเกตจากด้านและมุม เช่น  **รูปห้าเหลี่ยม** มีด้าน 5 ด้าน มีมุม 5 มุม  **รูปหกเหลี่ยม** มีด้าน 6 ด้าน มีมุม 6 มุม  **รูปห้าเหลี่ยม** มีด้าน 8 ด้าน มีมุม 8 มุม

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
 * มิติสัมพันธ์เชิงการมองภาพ (Spatial Visualization) **<u>ขั้นที่ 3 การอภิปรายคำตอบและสรุปผล</u>** 6. นักเรียนสรุปลักษณะและคุณสมบัติพื้นฐานของรูปเรขาคณิตสองมิติจากกิจกรรม “สถาปนิกตัวน้อย” พร้อมทั้งชวนคิดว่าทำไมจึงเรียกชื่อแบบนั้น รูปสามเหลี่ยม (เพราะมีมุม3มุม มีด้าน3ด้าน) รูปสี่เหลี่ยม (เพราะมีมุม3มุม มีด้าน3ด้าน) รูปห้าเหลี่ยม (เพราะมีมุม5มุม มีด้าน5ด้าน) รูปวงกลม (เพราะไม่มีมุม เส้นรอบรูปบรรจบกันเป็นวง) 7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายสรุปว่ารูปเรขาคณิต สองมิติ คือ รูปเรขาคณิตที่เป็นรูปปิดแสดงความกว้างและความยาวของรูป ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ ตามลักษณะของขอบหรือด้านของรูป ได้แก่ 1) กลุ่มที่มีขอบหรือด้านที่เป็นเส้นโค้งงอ เช่น รูปวงกลม รูปวงรี เป็นต้น **รูปวงกลม**เป็นรูปปิด ไม่มีมุม สามารถวาดได้โดยกำหนดจุดศูนย์กลางขึ้นมา 1 จุด จากนั้นจึงลากเส้นให้มีระยะห่างจากจุดนี้เท่ากันโดยตลอด วนรอบจุดศูนย์กลางจนกลับมาถึงจุดเริ่มต้น โดยระยะห่างจากจุดศูนย์กลางนี้มีชื่อเรียกว่า “รัศมี”	**<u>ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป</u>** 5. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความหมาย ลักษณะและจำแนกรูปเรขาคณิตสองมิติชนิดต่าง ๆ รูปเรขาคณิต 2 มิติ คือ รูปเรขาคณิตที่เป็นรูปปิดแสดงความกว้างและความยาวของรูป ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ ตามลักษณะของขอบหรือด้านของรูป ได้แก่ 1) กลุ่มที่มีขอบหรือด้านที่เป็นเส้นโค้งงอ เช่น รูปวงกลม รูปวงรี เป็นต้น 2) กลุ่มที่มีขอบหรือด้านของรูปที่เป็นส่วนของเส้นตรง กลุ่มนี้คือ รูปหลายเหลี่ยม ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม รูปหกเหลี่ยม รูปแปดเหลี่ยม เป็นต้น โดยที่รูปหลายเหลี่ยม เป็นรูปทรงทางเรขาคณิตที่มี 3 ด้านหรือ มากกว่านั้น จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดคือจุดเดียวกัน การเรียกชื่อของรูปหลายคือเรียกตามจำนวนด้าน หรือจำนวนเหลี่ยม 6. ครูให้ผู้เรียนแต่ละคนเลือกสิ่งของที่อยู่ใกล้ตัว 1 ชนิด เพื่อนำมาพิจารณาและนำเสนอลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติที่ปรากฏอยู่ที่สิ่งของนั้น ๆ

<table>
<tr>
<th>กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)</th>
<th>กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ
(สำหรับกลุ่มควบคุม)</th>
</tr>
<tr>
<td>2) กลุ่มที่มีขอบหรือด้านของรูปที่เป็นส่วนของเส้นตรง กลุ่มนี้คือ รูปหลายเหลี่ยม ได้แก่ รูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม รูปหกเหลี่ยม รูปแปดเหลี่ยม เป็นต้น โดยที่รูปหลายเหลี่ยมเป็นรูปทรงทางเรขาคณิตที่มี 3 ด้าน หรือมากกว่านั้น จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดคือจุดเดียวกัน การเรียกชื่อของรูปหลายคือเรียกตามจำนวนด้านหรือจำนวนเหลี่ยม
รูปสามเหลี่ยม เป็นประเภทหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยม ประกอบด้วยด้าน 3 ด้าน และมุม 3 มุม ชนิดของรูปสามเหลี่ยม

รูปสี่เหลี่ยม เป็นประเภทหนึ่งของรูปหลายเหลี่ยม ประกอบด้วยด้าน 4 ด้าน และมุม 4 มุม

นอกจากนี้ยังมีรูปเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ โดยสังเกตจากด้านและมุม เช่น</td>
<td>7. จากนั้นครูให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “กล่องขนม” โดยครูให้ผู้เรียนแต่ละคนจับสลากหมายเลขโจทย์เพื่อออกแบบชั้นวางขนม ดังต่อไปนี้
1) กล่องใส่ขนมไทย ประกอบด้วยรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
2) กล่องขนมเค้ก ประกอบด้วยรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีขอบหรือด้านที่เป็นเส้นโค้งงอ
3) กล่องคุกกี้ ประกอบด้วยรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีด้านสามด้าน มีมุมสามมุม
จากนั้นให้ผู้เรียนเขียนอธิบายเพิ่มเติมว่าภาพที่ได้ประกอบด้วยรูปเรขาคณิตสองมิติชนิดใดบ้าง และชนิดละกี่รูป
8. ครูสุ่มเลือกตัวอย่างผู้เรียนออกมานำเสนอผลงาน</td>
</tr>
</table>

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
 **รูปห้าเหลี่ยม** มีด้าน 5 ด้าน มีมุม 5 มุม  **รูปหกเหลี่ยม** มีด้าน 6 ด้าน มีมุม 6 มุม  **รูปห้าเหลี่ยม** มีด้าน 8 ด้าน มีมุม 8 มุม **<u>ขั้นที่ 4 การสะท้อนผลการเรียนรู้และนำไปใช้</u>** 9. ผู้เรียนเข้ากลุ่มทำกิจกรรม “สถาปนิกสร้างร้าน” โดยผู้เรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันออกแบบแปลนสถานที่ที่กำหนดให้โดยใช้รูปเรขาคณิตสองมิติที่เรียนมาในการสร้างสรรค์ผลงานให้ถูกต้องตามคุณสมบัติที่กำหนด 1) ร้านกาแฟด้านเท่า : ส่วนประกอบของร้านจะเกิดจากรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีด้านทุกด้านเท่ากัน 2) ตลาดมุมฉาก : ส่วนประกอบของตลาดจะเกิดจากรูปเรขาคณิตสองมิติที่มีมุมเป็นมุมฉาก 3) ห้างสรรพสินค้าไร้มุม : ส่วนประกอบของห้างสรรพสินค้าจะต้องไม่มีมุม 10. ครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มเลือกภาพสินค้าที่มีคุณสมบัติตามสถานที่ดังกล่าวเข้าร้าน/ตลาด/ห้างสรรพสินค้าของกลุ่มตนให้ถูกต้อง	

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)
               11. ผู้เรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน ครูและผู้เรียนตรวจสอบความถูกต้อง	

6. สื่อการเรียนรู้

6.1 บัตรรูปภาพ

6.2 บัตรรูปภาพชุดกิจกรรม จำนวน 3 ชุด

6.3 ใบงานบันทึกกิจกรรม

- กิจกรรมสถาปนิกตัวน้อย
- กิจกรรมสถาปนิกสร้างร้าน
- กิจกรรมกล่องขนม

7. การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ/เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
<u>ด้านความรู้</u>		
1. อธิบายลักษณะและสมบัติของรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม และรูปวงกลมได้	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมสถาปนิกตัวน้อย	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
2. จำแนกรูปสี่เหลี่ยมและรูปสามเหลี่ยมโดยพิจารณาจากสมบัติของรูปได้	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมสถาปนิกตัวน้อย - ตรวจสอบจากใบงานบันทึกกิจกรรมสถาปนิกตัวน้อย	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำใบงาน/ ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
3. ออกแบบสิ่งต่าง ๆ จากสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางเรขาคณิตได้อย่างเหมาะสม	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมสถาปนิกสร้างร้าน - ตรวจสอบจากใบงานบันทึกกิจกรรมสถาปนิกสร้างร้าน	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำใบงาน/ ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะ/กระบวนการ</u>		
4. นำเสนอผลการใช้รูปเรขาคณิตสองมิติในการสร้างสิ่งต่าง ๆ ที่กำหนดให้	สังเกตจากการนำเสนอผลงานกิจกรรมสถาปนิกสร้างร้าน	ความถูกต้องของการนำเสนอถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
5. แสดงเหตุผลในการแก้ปัญหาโดยอ้างอิงความรู้ทางเรขาคณิต	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรม	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์</u>		
6. วางแผนก่อนการทำงานได้อย่างเหมาะสม	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างน้อยร้อยละ 50 ถือว่าผ่าน
7. กล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรม	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น 1-2 ครั้งถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ/เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
8. มีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างน้อยร้อยละ 50 ถือว่าผ่าน
9. ทำงานเป็นระเบียบเรียบร้อย	ตรวจสอบจากใบงานบันทึกกิจกรรม	ผู้เรียนทำใบงานด้วยความตั้งใจและมีการตรวจสอบความเป็นระเบียบเรียบร้อยถือว่าผ่าน

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6**
ผู้สอน นางสาวนิดาวรรณ ทองไทย **จำนวน 1 คาบ เวลา 1 ชั่วโมง**
เรื่อง พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก(จัตุรัส ผืนผ้า)

---

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดและนำไปใช้

ตัวชี้วัด ป. 4/3 แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับความยาวรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมและ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

2. สาระสำคัญ

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ ขนาดของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากซึ่งเกิดจากความกว้างคูณความยาวมีหน่วยเป็นตารางหน่วย

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1. ผู้เรียนสามารถระบุหน่วยความยาว ความกว้างและหน่วยพื้นที่ได้ถูกต้อง
2. ผู้เรียนสามารถหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากการนับตารางที่กำหนดให้ได้
3. ผู้เรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว และพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้
4. ผู้เรียนสามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยคำนวณจากความกว้าง 1 ด้านคูณกับความยาว 1 ด้านได้ถูกต้อง
5. ผู้เรียนสามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยคำนวณจากผลคูณความยาวด้าน 2 ด้านได้ถูกต้อง
6. ผู้เรียนสามารถหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในชีวิตประจำวันได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

7. ผู้เรียนสามารถออกแบบสิ่งต่าง ๆ จากสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางเรขาคณิตเรื่องพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม (กลุ่มทดลอง)
8. ผู้เรียนสามารถแสดงแบบจำลองทางความคิดในการแก้ปัญหาโดยอ้างอิงความรู้ทางเรขาคณิต (กลุ่มทดลอง)

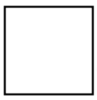
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

9. ผู้เรียนวางแผนก่อนการทำงานได้อย่างเหมาะสม
10. ผู้เรียนกล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
11. ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมในชั้นเรียน
12. ผู้เรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์
13. ผู้เรียนทำงานเป็นระเบียบเรียบร้อย

4. สาระการเรียนรู้

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ซึ่งได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งหน่วยในการใช้วัดพื้นที่ คือ ตารางหน่วย หรือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 1 หน่วย

1 หน่วย



1 หน่วย

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้ มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย

การหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉาก นับได้จากหน่วยพื้นที่ที่เรียงต่อกันเป็นตาราง และจากตารางจะแสดงถึงองค์ประกอบที่สำคัญในการหาพื้นที่ คือ ความกว้างกับความยาวของสี่เหลี่ยมนั้น ๆ ดังความสัมพันธ์ คือ

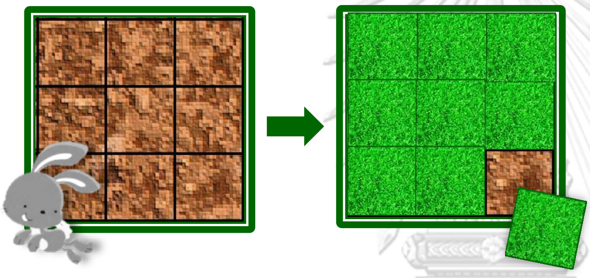
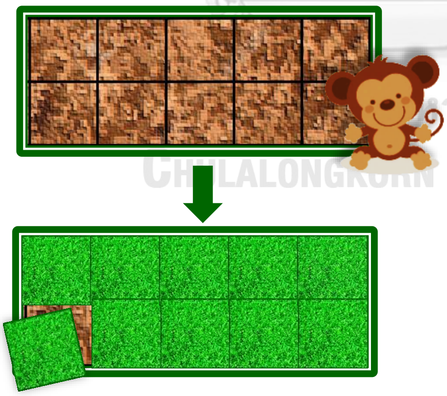
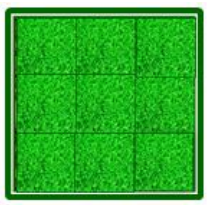
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง × ความยาว

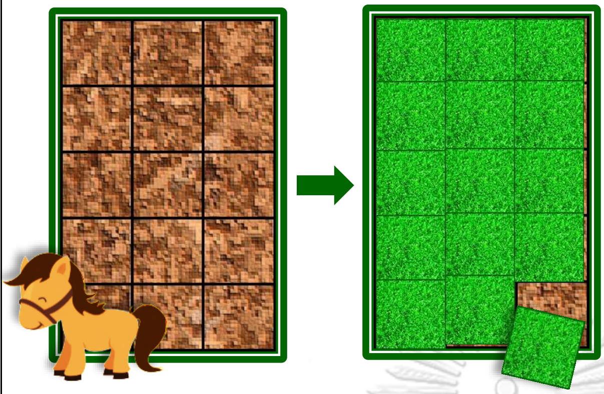
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน × ด้าน

5. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
<u>ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจบริบทปัญหา</u> 1. ครูแบ่งผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม ทำกิจกรรม “จิ๊กซอว์ต่อเติมหญ้า” กำหนดให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มได้รับมอบหมายให้เป็นผู้ดูแลกรงสัตว์ในสวนสัตว์ (กระต่าย ม้า ลิง) โดยแต่ละกรงจะมีพื้นที่ไม่เท่ากัน แต่มีภารกิจเหมือนกันคือการปูหญ้าในกรงให้เต็มพร้อมทั้งบอกว่าใช้หญ้าทั้งหมดกี่ตารางหน่วย	**<u>ขั้นที่ 1 ขั้นนำ</u>** 1. ครูติดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านละ 1 หน่วยบนกระดาน จากนั้นแรเงาพื้นที่ภายในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 1 หน่วย  1 หน่วย

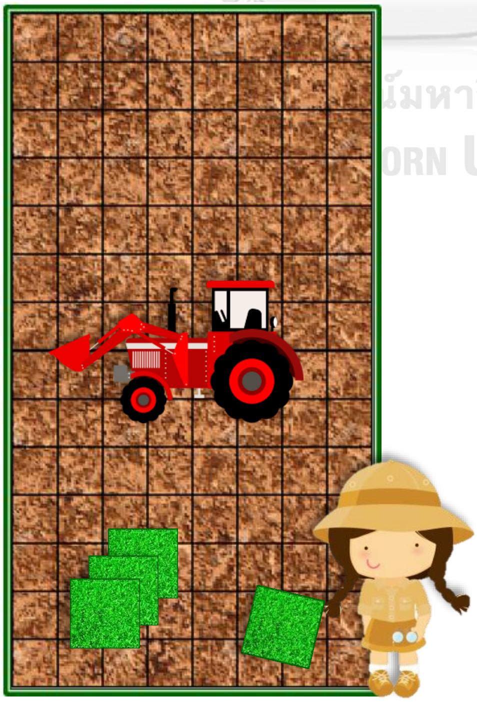
กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
ซึ่งหญ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 1 หน่วย จะมีพื้นที่เป็น 1 ตารางหน่วย  1 หน่วย 1 หน่วย กลุ่มที่สามารถทำภารกิจต่อหญ้าในกรงได้อย่างรวดเร็ว และตอบคำถามได้ถูกต้องจะได้รับแต้มเหรียญ เพื่อสะสมคะแนน  พื้นที่กรงกระต่าย เท่ากับ 9 ตารางหน่วย  พื้นที่กรงลิง เท่ากับ 10 ตารางหน่วย	2. ครูถามผู้เรียนว่ารูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด และมีลักษณะอย่างไร (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านทุกด้านเท่ากัน มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก) รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้มีพื้นที่เท่ากับเท่าไร (1 ตารางหน่วย) และมีหน่วยในการใช้วัดพื้นที่ คืออะไร (ตารางหน่วย) จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมว่าถ้าหน่วยความยาวเป็นเซนติเมตร พื้นที่จะเป็น “ตารางเซนติเมตร” 3. ครูกำหนดให้หญ้ามีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย  ครูให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ตามหาสนามหญ้าให้หนูหน่อย” โดยจับคู่จำนวนพื้นที่ที่สัตว์ต่าง ๆ ต้องการ กับ พื้นที่สนามหญ้าให้ถูกต้อง  

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)

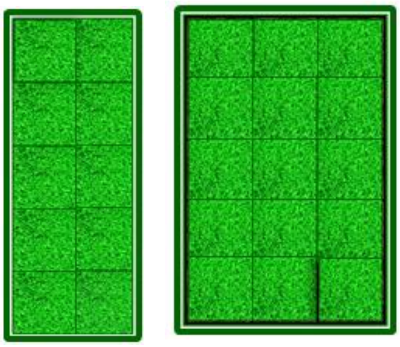


พื้นที่คอกม้า เท่ากับ 15 ตารางหน่วย

2. ครูถามวิธีการหาคำตอบของผู้เรียน (จากการนับ) ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปการหาพื้นที่ของกรงสัตว์รูปสี่เหลี่ยมนับได้จากหน่วยพื้นที่ที่ต่อกันเป็นตาราง จากนั้นครูให้ผู้เรียนสังเกตและถามต่อว่า กรงสัตว์ที่ผู้เรียนปูหญ้านี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด (รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก)



กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)



<u>ขั้นที่ 2 ขั้นสอน</u>

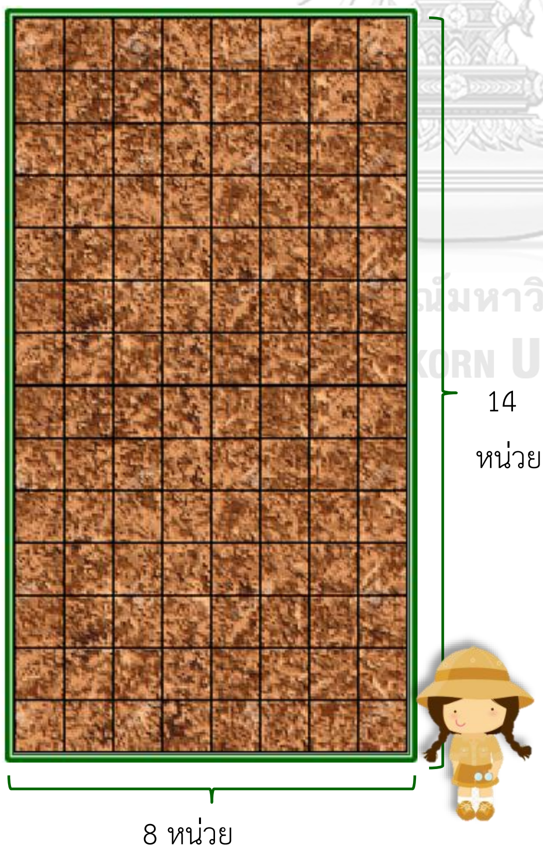
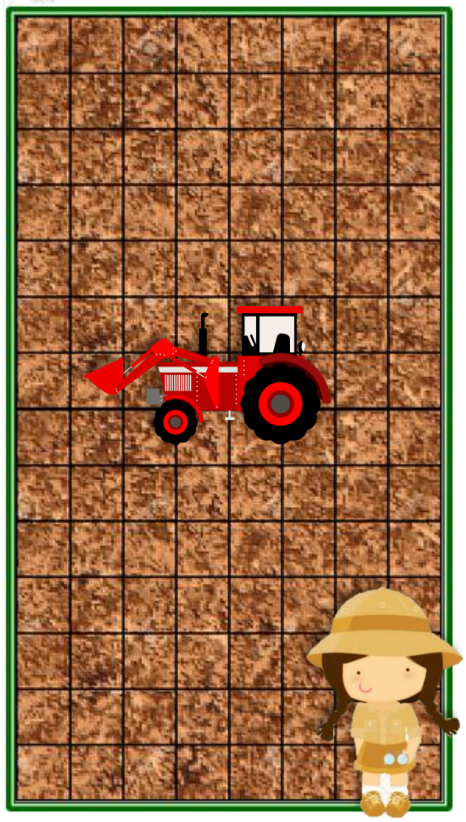
4. ครูถามผู้เรียนว่าสนามหญ้า 3 รูปนี้มีความเหมือนหรือความแตกต่างกันอย่างไร (เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากเหมือนกัน แต่ต่างกันที่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้าน ขนาดและพื้นที่ต่างกัน)

5. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้อง โดยครูสรุปเป็นตาราง จากนั้นให้ผู้เรียนสังเกตความสัมพันธ์ความกว้าง ความยาว และพื้นที่

	ด้าน	ด้าน	พื้นที่
กรงกระต่าย	3	3	9

	ความกว้าง	ความยาว	พื้นที่
กรงลิง	2	5	10
คอกม้า	3	5	15

(ซึ่งตรงกับการหาจำนวนพื้นที่โดยการนับ)

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)
3. ครูให้สถานการณ์ปัญหาในการปลูกหญ้าในบริเวณดังกล่าว เพื่อใช้สร้างสวนนก โดยให้ร่วมกันอภิปรายวิธีการหาพื้นที่ **<u>ขั้นที่ 2 เรียนรู้และแสดงวิธีการแก้ปัญหา (ด้วยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์)</u>** 4. ผู้เรียนร่วมกันคิดว่ามีวิธีการใดในการหาพื้นที่ที่ง่ายกว่าการนับตารางหรือไม่ และสามารถหาพื้นที่ได้โดยวิธีใด โดยครูแจกกระดาษทดให้ผู้เรียนร่วมกันคิดและออกแบบวิธีการหาพื้นที่ในรูปแบบภาพวาด หรือข้อความ  	**<u>ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป</u>** 6. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว และพื้นที่จากตาราง ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า **พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน × ด้าน** **พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง × ความยาว** 7. ครูให้ผู้เรียนแต่ละคนลองใช้สูตรความสัมพันธ์ที่ได้ในการหาพื้นที่ของที่ดินต่อไปนี้ 

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)

ผู้เรียนร่วมกันสังเกตความสัมพันธ์จากตารางจะแสดงถึงองค์ประกอบที่สำคัญในการหาพื้นที่ คือ ความกว้างกับความยาวของสี่เหลี่ยมนั้น ๆ ผู้เรียนสามารถหาจำนวนตารางได้จากนำจำนวนช่องในแนวตั้งคูณจำนวนช่องในแนวนอน หรือ ความกว้างคูณความยาว

* มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation)

* มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation)

โดยครูแสดงตารางเพื่อให้ผู้เรียนสังเกตความสัมพันธ์ความกว้าง ความยาว และพื้นที่จากกรงสัตว์ก่อนหน้า

	ด้าน	ด้าน	พื้นที่
กรงกระต่าย	3	3	9

(ซึ่งตรงกับการหาจำนวนพื้นที่โดยการนับ)

	ความกว้าง	ความยาว	พื้นที่
กรงลิง	2	5	10
คอกม้า	3	5	15

(ซึ่งตรงกับการหาจำนวนพื้นที่โดยการนับ)

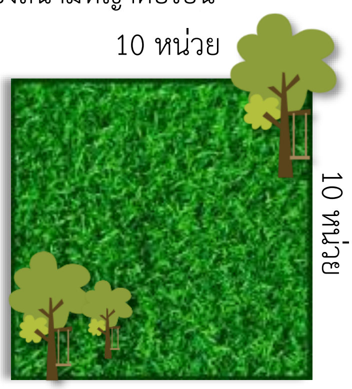
ดังนั้น พื้นที่สวนนก = 8 × 14 ตารางหน่วย

= 112 ตารางหน่วย

และร่วมกันเฉลยคำตอบพร้อมกันว่า จากรูปเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านกว้าง 8 หน่วย ยาว 14 หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ที่ดิน = 8 × 14 = 112 **ตารางหน่วย**8. ครูให้ผู้เรียนแต่ละคนลองใช้สูตรความสัมพันธ์ที่ได้ในการหาพื้นที่ของสนามหญ้าต่อไปนี้

10 หน่วย



10 หน่วย

พื้นที่ของสนามหญ้า

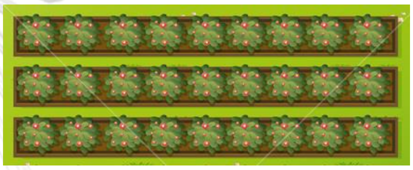
= 10 × 10 ตารางหน่วย

= 100 ตารางหน่วย

9. ครูให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “บ้านสวนพอเพียง” โดยครูแบ่งผู้เรียนออกเป็น 3 กลุ่ม จากนั้นครูให้ที่ดินนักเรียนแต่ละกลุ่มกลุ่มละหนึ่งแปลง ครูจะนำเสนอสิ่งปลูกสร้างต่าง ๆ ที่ละชนิดให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันคำนวณหาพื้นที่ภายในเวลา 1 นาทีพร้อมทั้งเขียนคำตอบลงในใบคำตอบส่งครู หากกลุ่มใดสามารถตอบพื้นที่ได้ถูกต้องภายในเวลาที่กำหนด จะได้รับสิ่งปลูกสร้างนั้น ๆ เข้าไปไว้ที่ที่ดินกลุ่มตนเอง

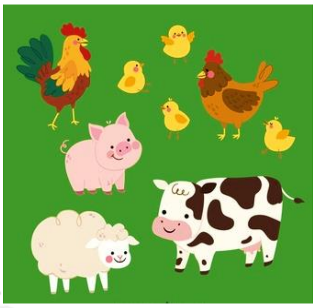
<table>
<tr>
<th>กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)</th>
<th>กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ
(สำหรับกลุ่มควบคุม)</th>
</tr>
<tr>
<td>
5. ครูให้ผู้เรียนร่วมกันคำนวณพื้นที่ของโรงเก็บอาหารสัตว์และสนามหญ้าโดยรอบ
10 หน่วย

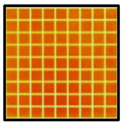
10 หน่วย
พื้นที่ของโรงเก็บอาหารสัตว์และสนามหญ้าโดยรอบ = 10 × 10 = 100 ตารางหน่วย
<u>ขั้นที่ 3 การอภิปรายคำตอบและสรุปผล</u>
6. ครูและผู้เรียนร่วมกันสรุปความสัมพันธ์ของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากโรงเก็บอาหารสัตว์ และความสัมพันธ์ของความยาวและความกว้างของสวนนกรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
<table>
<tr><th></th><th>ด้าน</th><th>ด้าน</th><th>พื้นที่</th></tr>
<tr><td>โรงอาหารสัตว์</td><td>10</td><td>10</td><td>100</td></tr>
</table>
<table>
<tr><th></th><th>ความกว้าง</th><th>ความยาว</th><th>พื้นที่</th></tr>
<tr><td>สวนนก</td><td>8</td><td>14</td><td>112</td></tr>
</table>
(ซึ่งตรงกับการหาจำนวนพื้นที่โดยการนับ)
เพื่อหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ว่า
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน × ด้าน
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง × ความยาว
</td>
<td>
1) บ่อเลี้ยงปลา (พื้นที่ 15 ตารางเมตร)
5 เมตร

3 เมตร
2) แปลงปลูกผัก (พื้นที่ 12 ตารางเมตร)
6 เมตร

2 เมตร
3) แปลงดอกไม้ (พื้นที่ 9 ตารางเมตร)
3 เมตร

3 เมตร
4) ไร่ชา (พื้นที่ 36 ตารางเมตร)
6 เมตร

6 เมตร
</td>
</tr>
</table>

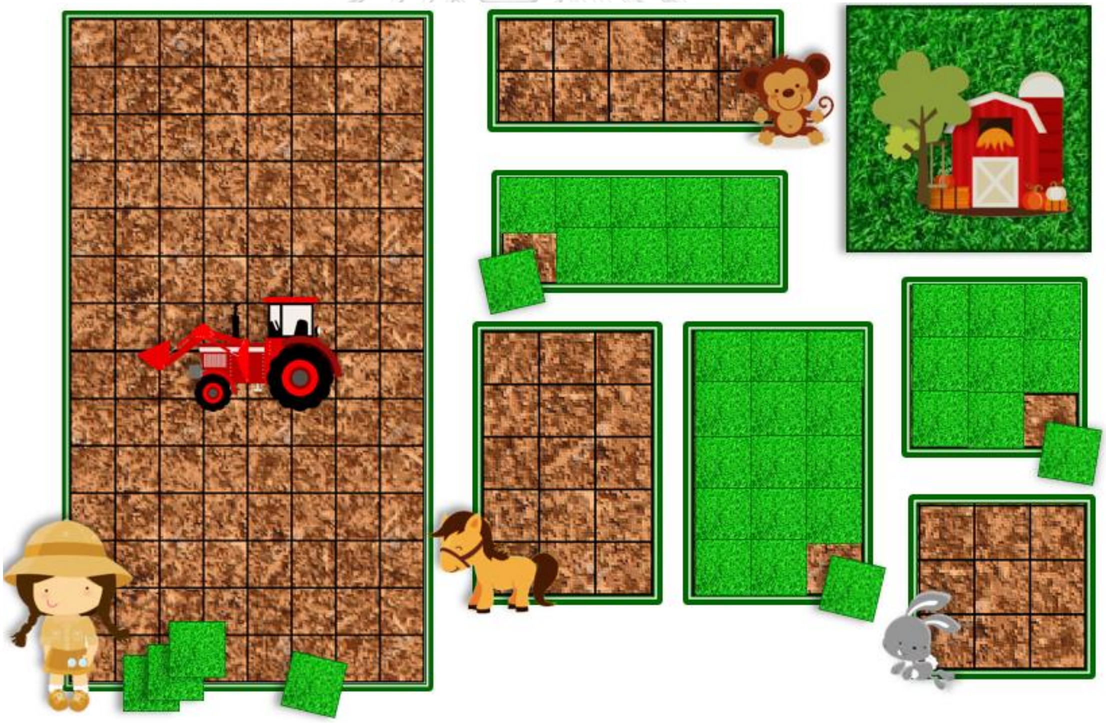
กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
7. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายถึงหน่วยในการใช้วัดพื้นที่ คือ ตารางหน่วย หรือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 1 หน่วย ครูถามผู้เรียนว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 1 เมตร รูปสี่เหลี่ยมนี้จะมีพื้นที่เป็นหน่วยใด (ตารางเมตร) **<u>ขั้นที่ 4 การสะท้อนผลการเรียนรู้และนำไปใช้</u>** 8. ครูให้ผู้เรียนสะท้อนสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้โดยถามผู้เรียนว่า เรื่องการหาพื้นที่มีความสำคัญอย่างไร และสามารถนำไปปรับใช้ในเรื่องใด อย่างไร (การปูกระเบื้อง การทาสี การตัดผ้า การสร้างสนามฟุตบอล เป็นต้น) 9. ครูให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ก่อร่างสร้างบ้าน” โดยครูกำหนดพื้นที่บ้านให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มออกแบบแปลนบ้านตามข้อกำหนด 1) ที่ดินที่ใช้ปลูกบ้านติดถนนใหญ่ กว้าง 30 หน่วย ยาว 40 หน่วย 2) บ้านจะประกอบด้วยห้องต่าง ๆ ภายในบ้านที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 3) ห้องแต่ละห้องจะใช้กระเบื้องและมีพื้นที่ดังต่อไปนี้  ทางเดินหน้าบ้าน พื้นที่ 20 ตารางหน่วย  ห้องนอน พื้นที่ 28 ตารางหน่วย	5) คอกสัตว์ (พื้นที่ 25 ตารางเมตร) 5 เมตร  5 เมตร 10. เมื่อจบเกม กลุ่มใดมีพื้นที่ว่างน้อยที่สุดจะเป็นผู้ชนะ 11. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2 การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นการบ้านและนำมาส่งในคาบถัดไป *1) สนามหญ้าที่โรงเรียนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 20 เมตร ยาว 4 เมตร ครูต้องการเทปูนเพื่อทำทางเดินรอบนอกสนามหญ้าทุกด้านกว้าง 1 เมตร อยากทราบว่าทางเดินปูนจะมีพื้นที่เท่าใด* *2) ห้องนอนของน้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีความยาว 6 เมตร กว้าง 4.5 เมตร พ่อต้องการปูกระเบื้องห้องนี้โดยใช้กระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 50 เซนติเมตรให้เต็มพื้นที่ห้อง พ่อต้องซื้อกระเบื้องอย่างน้อยกี่แผ่น*

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
 ห้องครัว พื้นที่ 16 ตารางหน่วย  ห้องน้ำ พื้นที่ 9 ตารางหน่วย  ห้องนั่งเล่น พื้นที่ 24 ตารางหน่วย และปลูกหญ้าพื้นที่ส่วนที่เหลือรอบๆบ้าน * มิติสัมพันธ์เชิงสัมพันธ์ (Spatial Relation) * มิติสัมพันธ์เชิงพื้นที่และทิศทาง (Spatial orientation) 10. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอและร่วมกันตรวจสอบ กลุ่มใดสามารถออกแบบได้ถูกต้องและเหมาะสมจะเป็นผู้ชนะ 11. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 2 การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยครูทบทวนแนวทางในการวิเคราะห์ทำความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา การออกแบบและแก้ปัญหา รวมทั้งวิธีการตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะเป็นการบ้าน *1) สนามหญ้าที่โรงเรียนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง 20 เมตร ยาว 4 เมตร ครูต้องการเทปูนเพื่อทำทางเดินรอบนอกสนามหญ้าทุกด้านกว้าง 1 เมตร อยากทราบว่าทางเดินปูนจะมีพื้นที่เท่าใด*	

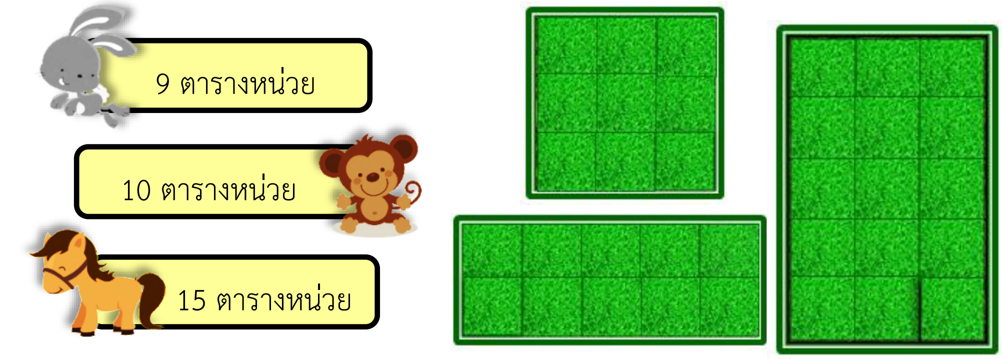
กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)
2) ห้องนอนของน้องเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีความยาว 6 เมตร กว้าง 4.5 เมตร พ่อต้องการปูกระเบื้องห้องนี้โดยใช้กระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 50 เซนติเมตร ปูให้เต็มพื้นที่ห้อง พ่อต้องซื้อกระเบื้องอย่างน้อยกี่กล่อง (กระเบื้องขนาดดังกล่าว 1 กล่อง มี 4 แผ่น)	

6. สื่อการเรียนรู้

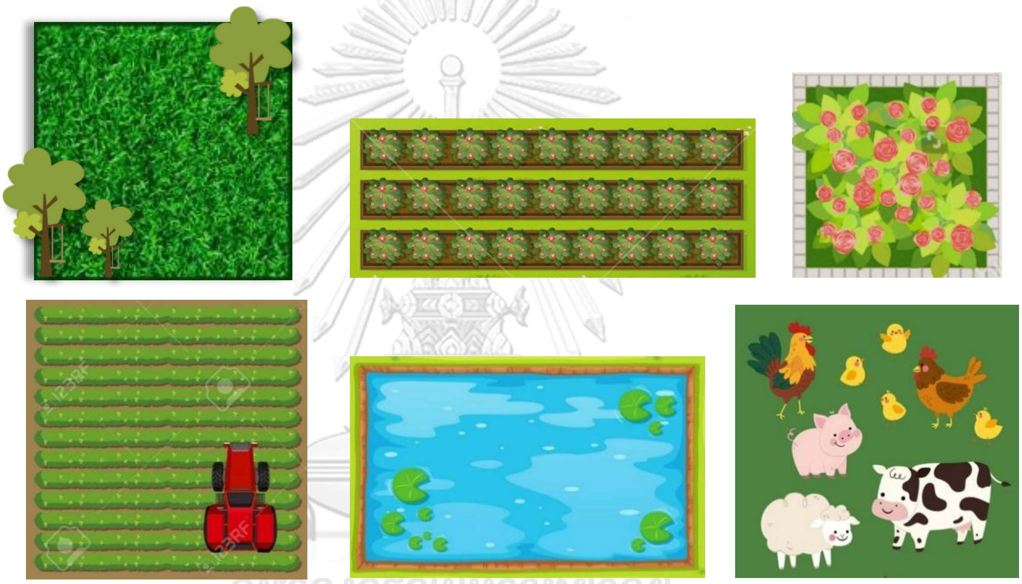
6.1 บัตรรูปภาพกิจกรรมจิ๊กซอว์ต่อเติมหญ้า (กลุ่มทดลอง)



6.2 บัตรรูปภาพกิจกรรมตามหาสนามหญ้าให้หนูหน่อย (กลุ่มควบคุม)



6.3 ชุดกิจกรรมบ้านสวนพอเพียง จำนวน 3 ชุด (กลุ่มควบคุม)



6.4 ชุดกิจกรรมกระเบื้องปูพื้นจำนวน 3 ชุด (กลุ่มทดลอง)

6.5 ตารางที่ดิน ขนาด 120 ตารางหน่วย จำนวน 3 ชุด

6.6 บัตรคำ

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = ด้าน × ด้าน

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง × ความยาว

6.7 แบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 2 การหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (กลุ่มทดลอง)

7. การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ/เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
<u>ด้านความรู้</u> 1. หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากการนับตารางที่กำหนดให้ได้	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมจิ๊กซอว์ต่อเติมหญ้า	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
2. บอกความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว และพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมจิ๊กซอว์ต่อเติมหญ้า	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
3. หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยคำนวณจากความกว้าง 1 ด้านคูณกับความยาว 1 ด้านได้ถูกต้อง	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมก่อร่างสร้างบ้าน - ตรวจสอบจากแบบฝึกทักษะ	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรม/แบบฝึกทักษะถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
4. หาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยคำนวณจากผลคูณความยาวด้าน 2 ด้านได้ถูกต้อง	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมก่อร่างสร้างบ้าน - ตรวจสอบจากแบบฝึกทักษะ	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรม/แบบฝึกทักษะถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
5. ยกตัวอย่างการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในชีวิตประจำวันได้	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมสะท้อนผลการเรียนรู้	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
6. ระบุหน่วยความยาว ความกว้างและหน่วยพื้นที่ได้ถูกต้อง	- สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมก่อร่างสร้างบ้าน - ตรวจสอบจากแบบฝึกทักษะ	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะ/กระบวนการ</u> 7. ออกแบบสิ่งต่าง ๆ จากสถานการณ์ปัญหาโดยใช้ความรู้ทางเรขาคณิตเรื่องพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม	สังเกตจากการลงมือปฏิบัติกิจกรรมในชั้นเรียน	ผู้เรียนได้มีส่วนร่วมในการลงมือปฏิบัติและได้ข้อสรุปที่ถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ/เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
8. แสดงแบบจำลองทางความคิดในการแก้ปัญหาโดยอ้างอิงความรู้ทางเรขาคณิต	ตรวจสอบจากแบบฝึกทักษะ	ผู้เรียนตอบคำถามในแบบฝึกทักษะถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์</u> 9. วางแผนก่อนการทำงานได้อย่างเหมาะสม	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างน้อยร้อยละ 50 ถือว่าผ่าน
10. กล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรม	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น 1-2 ครั้ง ถือว่าผ่าน
11. มีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างน้อยร้อยละ 50 ถือว่าผ่าน
12. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างน้อยร้อยละ 50 ถือว่าผ่าน
13. ทำงานเป็นระเบียบเรียบร้อย	ตรวจสอบจากใบบันทึกกิจกรรม	ผู้เรียนทำใบงานด้วยความตั้งใจและมีการตรวจสอบความเป็นระเบียบเรียบร้อยถือว่าผ่าน

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 14

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5-6**

ผู้สอน นางสาวนิดาวรรณ ทองไทย **จำนวน 1 คาบ เวลา 1 ชั่วโมง**

เรื่อง ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

---

1. มาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค 2.1 เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัด และนำไปใช้

ตัวชี้วัด ป. 5/3 แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและความจุของภาชนะทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ตัวชี้วัด ป. 6/1 แสดงวิธีหาคำตอบของโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปริมาตรของรูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบด้วยทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

2. สาระสำคัญ

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากสามารถหาได้โดยความกว้างคูณความยาวคูณความสูง มีหน่วยเป็นลูกบาศก์หน่วย

3. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1. ผู้เรียนสามารถบอกลักษณะของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
2. ผู้เรียนสามารถระบุส่วนประกอบของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
3. ผู้เรียนสามารถบอกวิธีการหาและหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง
4. ผู้เรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว ความสูงและปริมาตรได้ (กลุ่มทดลอง)

ด้านทักษะ/กระบวนการ

5. ผู้เรียนสามารถตรวจสอบปริมาตรจากการนับจำนวนลูกบาศก์ภายในของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้
6. ผู้เรียนสามารถฝึกหัดการใช้จ่ายในสถานการณ์จำลองให้เกิดความคุ้มค่าและเหมาะสม (กลุ่มทดลอง)
7. ผู้เรียนสามารถจัดเรียงสิ่งของตามปริมาตรที่คำนวณได้ (กลุ่มควบคุม)

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

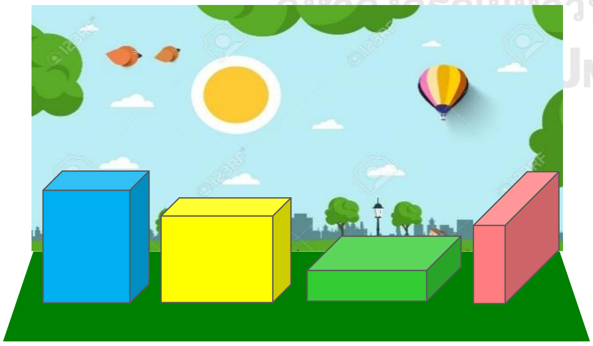
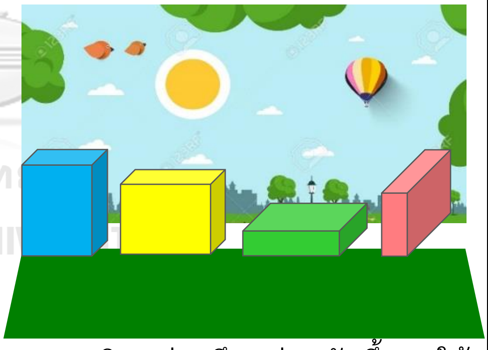
8. ผู้เรียนวางแผนก่อนการทำงานได้อย่างเหมาะสม

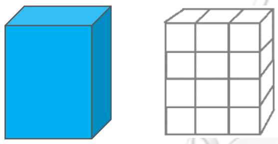
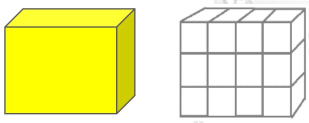
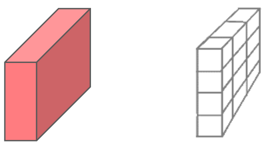
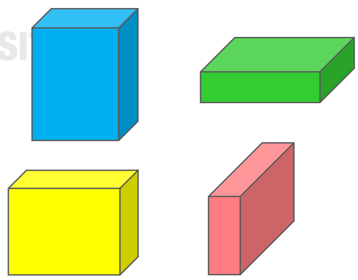
9. ผู้เรียนกล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น
10. ผู้เรียนมีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมในชั้นเรียน
11. ผู้เรียนทำงานเป็นระเบียบเรียบร้อย

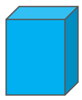
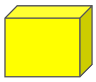
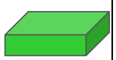
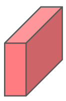
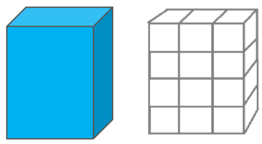
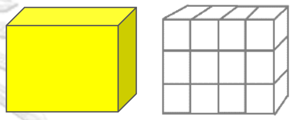
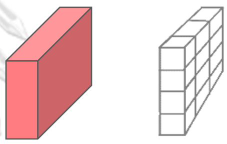
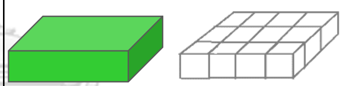
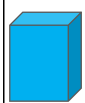
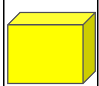
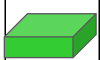
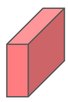
4. สาระการเรียนรู้

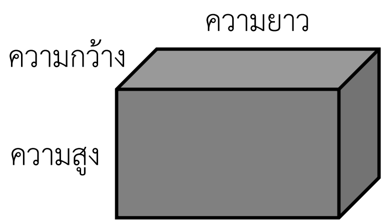
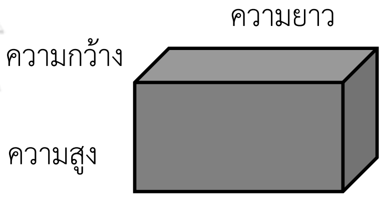
ปริมาตรของปริซึมสี่เหลี่ยม หรือ ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = ความกว้าง × ความยาว × ความสูง โดยมีหน่วยเป็น ลูกบาศก์หน่วย

5. กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจบริบทปัญหา 1. ครูให้ผู้เรียนสังเกตกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนโมเดลรูปตึกจำนวน 4 ตึก จากนั้นครูถามผู้เรียนว่าตึกทั้งสี่เหมือนหรือต่างกันอย่างไร - สิ่งที่เหมือนกัน คือ รูปทรง (ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก) ขนาด - สิ่งที่ต่างกัน คือ สี ความกว้าง ความยาว ความสูง  2. ครูถามผู้เรียนว่ารูปทรง (ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก) และ ขนาดที่เท่ากันจะทำให้ปริมาตรของรูปทรงเท่ากันหรือไม่	**ขั้นที่ 1 ขั้นนำ** 1. ครูแบ่งกลุ่มผู้เรียนออกเป็น 4 กลุ่ม ให้ผู้เรียนทำกิจกรรม “ตึกแปลงร่าง” ครูมีกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนโมเดลรูปตึกจำนวน 4 ตึก  2. ครูหยิบกล่องตึกแต่ละอันขึ้นมาให้ผู้เรียนร่วมกันสังเกตและบอกลักษณะของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จากนั้นครูถามผู้เรียนว่าตึกทั้งสี่เหมือน/ต่างกันอย่างไร - สิ่งที่เหมือนกัน คือ รูปทรง (ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก) ขนาด - สิ่งที่ต่างกัน คือ สี ความกว้าง ความยาว ความสูง

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
<u>ขั้นที่ 2 เรียนรู้และแสดงวิธีการแก้ปัญหา (ด้วยความสามารถด้านมิติสัมพันธ์)</u> 3. ครูแบ่งผู้เรียนเป็น 3 กลุ่ม ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มรับตึกรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก กลุ่มละ 1 ชิ้น ครูให้ผู้เรียนรับลูกบาศก์ (ทำจากโฟม) ขนาน 1 ลูกบาศก์นิ้ว จากนั้นเปิดกล่องตึกด้านบนพร้อมทั้งวาดแบบจำลองโครงสร้างกล่องรูปตึกประกอบเพื่อนำไปเติมลูกบาศก์ในตึกให้เต็มพอดี  ครูให้ผู้เรียนสังเกตว่าใช้โฟมลูกบาศก์ทั้งหมดกี่หน่วย  (12 หน่วย)  (12 หน่วย)  (12 หน่วย)  (12 หน่วย) (ครูและผู้เรียนปฏิบัติเป็นตัวอย่างก่อน 1 ชุด)	**<u>ขั้นที่ 2 ขั้นสอน</u>** 3. ครูอธิบายพร้อมทั้งหยิบยกตัวอย่างจากกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาว่ากล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติ ซึ่งมีความกว้าง ความยาว ความสูง ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากจึงเกิดจากการหาผลคูณของความกว้าง ความยาว ความสูง ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = กว้าง × ยาว × สูง ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = พื้นที่ฐาน × สูง ครูอธิบายพร้อมทั้งติดแถบประโยคประกอบ 4. ครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มรับตึกรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก กลุ่มละ 1 ชิ้น ซึ่งภายในจะมีลูกบาศก์โฟมขนาด 1 ลูกบาศก์นิ้วบรรจุอยู่เต็มกล่องพอดี  5. ครูให้ผู้เรียนวัดขนาด (ความกว้าง ความยาว และความสูง) แล้วนำค่าที่ได้มาคำนวณตามวิธีการหาปริมาตรในแถบประโยคที่ครูอธิบาย จากนั้นผู้เรียนจดบันทึกไว้

<table>
<tr>
<th>กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)</th>
<th>กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)</th>
</tr>
<tr>
<td>
4. ครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มรับรูปทรงของตึก เพื่อวัดขนาด (ความกว้าง ความยาว และความสูง) โดยใช้หน่วยนิ้ว ให้ตัวแทนกลุ่มออกมาเติมคำตอบในตาราง
<table>
<tr><th>รูปตึก</th><th>กว้าง</th><th>ยาว</th><th>สูง</th><th>ปริมาตร</th></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>12</td></tr>
</table>
5. ครูถามผู้เรียนว่าจากตารางผู้เรียนสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว ความสูง ว่ามีความสัมพันธ์อย่างไรกับปริมาตรที่ได้
6. ครูถามผู้เรียนว่าหน่วยปริมาตรจะออกมาเป็นหน่วยใด (ลูกบาศก์นิ้ว) และปริมาตรที่ได้ในตารางกับจำนวนลูกบาศก์ที่มีขนาด 1 ลูกบาศก์นิ้ว มีความสัมพันธ์กันอย่างไร (เท่ากัน)
<u>ขั้นที่ 3 การอภิปรายคำตอบและสรุปผล</u>
7. ครูและผู้เรียนอภิปรายเพื่อลงข้อสรุปร่วมกันถึงที่มาของการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ผู้เรียนสังเกตได้ คือ
ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = กว้าง × ยาว × สูง
ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = พื้นที่ฐาน × สูง
</td>
<td>
6. ผู้เรียนเปิดกล่องตึกเพื่อนำจำนวนลูกบาศก์ขนาด 1 ลูกบาศก์นิ้วออกมานับ จากนั้นผู้เรียนตรวจสอบว่าปริมาตรที่นับได้ตรงกับปริมาตรที่คำนวณหรือไม่

(12 หน่วย)

(12 หน่วย)

(12 หน่วย)

(12 หน่วย)
7. ครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มรายงานผล ครูและผู้เรียนสรุปในตาราง โดยใช้หน่วยนิ้ว
<table>
<tr><th>รูปตึก</th><th>กว้าง</th><th>ยาว</th><th>สูง</th><th>ปริมาตร</th></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>12</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	**กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)**
ครูติดแถบประโยคประกอบ  **<u>ขั้นที่ 4 การสะท้อนผลการเรียนรู้และนำไปใช้</u>** 8. ครูให้ผู้เรียนสะท้อนผลการเรียนรู้ที่ได้พร้อมบอกวิธีการนำความรู้ไปปรับใช้ทำกิจกรรม “Shopping Basket” โดย 1) ครูให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มจะได้รับเงินกลุ่มละ 20 เหรียญในการซื้อสินค้าที่ครูวางไว้หน้าชั้นเรียน ซึ่งสินค้าแต่ละชิ้นจะมีราคาไม่เท่ากัน  4 เหรียญ กว้าง 1, ยาว 2, สูง 6 หน่วย  2 เหรียญ กว้าง 3, ยาว 3, สูง 1 หน่วย  8 เหรียญ กว้าง 3, ยาว 5, สูง 12 หน่วย  6 เหรียญ กว้าง 5, ยาว 5, สูง 2 หน่วย  12 เหรียญ กว้าง 5, ยาว 6, สูง 10 หน่วย	**<u>ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป</u>** 7. ครูและผู้เรียนสรุปร่วมกันถึงที่มาของการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ผู้เรียนสังเกตได้ คือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = กว้าง × ยาว × สูง ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = พื้นที่ฐาน × สูง ครูติดแถบประโยคประกอบ  8. ครูให้ผู้เรียนเล่นเกม “กล่องตั้งแถว” โดยครูมีสินค้าให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มจำนวน 5 ชิ้น ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มคำนวณปริมาตรและจัดเรียนสินค้าจากปริมาตรน้อยที่สุดไปสินค้าที่มีปริมาตรมากที่สุด กลุ่มที่เรียงถูกต้องจะเป็นผู้ชนะ  กว้าง 1, ยาว 2, สูง 6 หน่วย  กว้าง 3, ยาว 5, สูง 12 หน่วย  กว้าง 3, ยาว 3, สูง 1 หน่วย

กิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการศึกษาคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับชีวิตจริงร่วมกับความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ (สำหรับกลุ่มทดลอง)	กิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ (สำหรับกลุ่มควบคุม)
2) ผู้เรียนซื้อของกี่ชิ้นก็ได้โดยใช้เงิน 20 เหรียญที่ได้รับ 3) สินค้าแต่ละชิ้นจะมีความกว้าง ความยาว ความสูงของสินค้าติดอยู่ที่กล่อง หลังจากซื้อสินค้าแล้วให้ผู้เรียนคำนวณว่าปริมาตรของสินค้าแต่ละชิ้นเท่าไรและปริมาตรรวมของสินค้าทั้งหมดที่ซื้อมาเป็นเท่าไร 4) ผู้เรียนกลุ่มที่มีปริมาตรรวมมากที่สุดจะเป็นผู้ชนะ 9. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องร่วมกัน 10. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดที่ 8 ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะและส่งท้ายคาบเรียน *1) ลุงขุดดินจากบ่อไปขายราคารถละ 1000 บาท โดยบ่อที่ขุดมีขนาดกว้าง 6 เมตร ยาว 8 เมตร ลึก 2 เมตร หากรถบรรทุกสามารถขนดินได้คันละ 8 ลูกบาศก์เมตร ลุงจะขายดินได้เงินทั้งหมดกี่บาท* *2) แม่นำกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 14 เซนติเมตร ยาว 20 เซนติเมตร มาตัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มุมทั้งสี่ออก รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 เซนติเมตร จากนั้นแม่พับด้านทั้งสี่ขึ้นมาเป็นรูปกล่องใส่แป้งทำขนม กล่องใบนี้ของแม่จะสามารถใส่แป้งได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร*	 กว้าง 5, ยาว 5, สูง 2 หน่วย  กว้าง 5, ยาว 6, สูง 10 หน่วย 9. ครูและผู้เรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องร่วมกัน 10. ผู้เรียนแต่ละคนทำแบบฝึกเรื่องปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะและส่งท้ายคาบเรียน *1) ลุงขุดดินจากบ่อไปขายราคารถละ 1000 บาท โดยบ่อที่ขุดมีขนาดกว้าง 6 เมตร ยาว 8 เมตร ลึก 2 เมตร หากรถบรรทุกสามารถขนดินได้คันละ 8 ลูกบาศก์เมตร ลุงจะขายดินได้เงินทั้งหมดกี่บาท* *2) แม่นำกล่องกระดาษรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก 6 ใบ มาใส่แป้งทำขนม โดยกล่องกว้าง 14 เซนติเมตร ยาว 20 เซนติเมตร สูง 5 เซนติเมตร กล่องของแม่จะสามารถใส่แป้งได้กี่ลูกบาศก์เซนติเมตร*

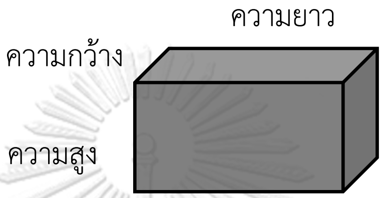
6. สื่อการเรียนรู้

6.1 แถบประโยค

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = กว้าง × ยาว × สูง

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก = พื้นที่ฐาน × สูง

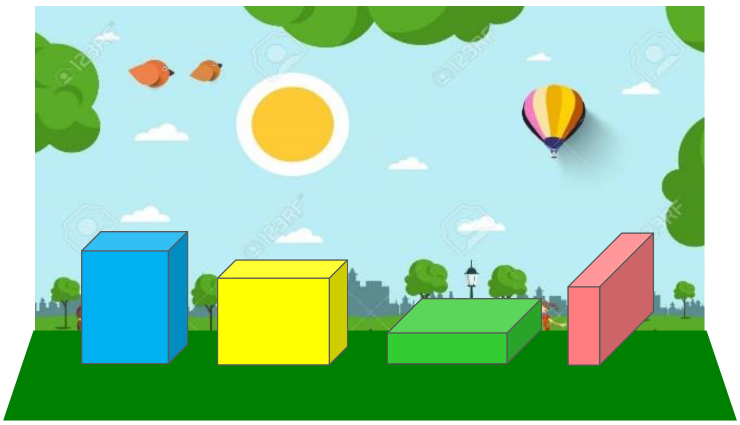
6.2 แผนภาพส่วนประกอบรูปทรงลูกบาศก์



6.3 สื่ออุปกรณ์ (ของจริง) ที่ติดราคาและความกว้าง ความยาว และความสูง

6.4 ลูกบาศก์ (ทำจากโฟม) ขนาน 1 ลูกบาศก์นิ้ว

6.5 กล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนโมเดลรูปตึกจำนวน 4 ตึก



7. การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ/เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
<u>ด้านความรู้</u> 1. บอกลักษณะของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและกิจกรรมโมเดลตึก	ผู้เรียนตอบคำถามถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ผ่าน
2. ระบุส่วนประกอบของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและกิจกรรมโมเดลตึก	ผู้เรียนตอบ/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
3. บอกวิธีการหาและหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ถูกต้อง	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรมโฟมลูกบาศก์	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
4. บอกความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว ความสูงและปริมาตรได้ (กลุ่มทดลอง)	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนโฟมลูกบาศก์	ผู้เรียนตอบคำถามถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
<u>ด้านทักษะ/กระบวนการ</u> 5. ตรวจสอบปริมาตรจากการนับจำนวนลูกบาศก์ภายในของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากได้	สังเกตจากการทำกิจกรรมโฟมลูกบาศก์	ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
6. ฝึกหัดการใช้จ่ายในสถานการณ์จำลองให้เกิดความคุ้มค่าและเหมาะสม (กลุ่มทดลอง)	สังเกตจากการทำกิจกรรม Shopping Basket	ผู้เรียนทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
7. จัดเรียงสิ่งของตามปริมาตรที่คำนวณได้ (กลุ่มควบคุม)	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรม Shopping Basket	ผู้เรียนตอบคำถาม/ทำกิจกรรมถูกต้องอย่างน้อยร้อยละ 80 ถือว่าผ่าน
<u>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์</u> 8. วางแผนก่อนการทำงานได้อย่างเหมาะสม	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	-
9. กล้าแสดงความคิดเห็นและยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น	สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	-

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ/เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมินผล
10. มีความกระตือรือร้นในการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	สังเกตจากการตอบคำถามในชั้นเรียนและการทำกิจกรรม	-
11. ทำงานเป็นระเบียบเรียบร้อย	ตรวจสอบจากใบบันทึกกิจกรรม	-

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นางสาวนิดาวรรณ ทองไทย
วัน เดือน ปี เกิด	18 พฤษภาคม 2535
สถานที่เกิด	จังหวัดลพบุรี
วุฒิการศึกษา	สำเร็จการศึกษาปริญญาครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2559 และในปีการศึกษา 2560 ได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาประถมศึกษา ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ที่อยู่ปัจจุบัน	6/1 หมู่ 5 ตำบลม่วงหมู่ อำเภอเมือง จังหวัดสิงห์บุรี 16000 ปัจจุบันรับราชการตำแหน่งครู ค.ศ.1 โรงเรียนวัดโพธิ์ศรี อำเภอค่ายบางระจัน จังหวัดสิงห์บุรี สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาสิงห์บุรี