## บทที่ 3

# ตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญโดยกำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกันในรูปทั่วไป

จากบทที่ 2 ได้มีการกล่าวถึงวิธีระดมทุนของกองทุนบำนาญวิธีต่างๆ โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งตลอดระยะเวลาการระดมทุน ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญ โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน (Identical Independent Distribution: IID) ซึ่งในบทนี้เราจะกำหนดให้ตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการระดมทุนทั้งหมด (ยกเว้น อัตราผลตอบแทนการลงทุน) เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง จากบทที่แล้ว เรากำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนให้เป็นค่าคงที่ ดังนั้นค่าการระดมทุน ($F(t)$) และเงินสมทบ ($C(t)$) จึงเป็นค่าที่ไม่มีความแปรผันใดๆ แต่ในบทนี้เมื่อเรากำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน ค่าการระดมทุน และเงินสมทบจึงมีค่าไม่แน่นอน ดังนั้นจึงต้องมีการคำนวณค่า$EF(t)$, $EC(t)$, $Var\ F(t)$ และ $Var\ C(t)$* และในส่วนของเงินสมทบจะนำค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ ($ADJ(t)$) มาใช้ในการควบคุมเงินสมทบให้เหมาะสมกับการระดมทุน ซึ่งในบทนี้จะแสดงวิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญดังนี้

1. วิธีการระดมทุนในกองทุนบำนาญคิดเป็นรายสามัญ ซึ่งแบ่งเป็น 2 วิธี คือ
   - 1.1 วิธี Spread
   - 1.2 วิธี Amortization ของความสูญเสีย
2. วิธีการระดมทุนในกองทุนบำนาญคิดรวมทั้งหมด

โดยวิธีดังกล่าวจะเป็นระบบสะสมเงินล่วงหน้าเต็มจำนวน(Fully Funded) และทั้งวิธี Spread และ วิธี Amortization ของความสูญเสีย เป็นวิธีการที่จะใช้ในการกำหนดค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ เพื่อที่จะใช้ในการคำนวณในวิธีการระดมทุนในกองทุนบำนาญคิดเป็นรายสามัญ ส่วนวิธีการระดมทุนในกองทุนบำนาญคิดรวมทั้งหมด จะใช้ค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบในลักษณะของค่าปัจจุบันของเงินเดือนพนักงานในอนาคต ในการคำนวณค่าเงินสมทบ และการระดมทุน

---

* $EF(t)$ และ $EC(t)$ คือค่าคาดหวัง (Expected Value) ของการระดมทุน ($E[F(t)]$) และการสมทบทุนในกองทุนบำนาญ ($E[C(t)]$) ตามลำดับ

$VarF(t)$ และ $VarC(t)$ คือความแปรปรวน (Variance) ของการระดมทุน ($Var[F(t)]$) และการสมทบทุนในกองทุนบำนาญ ($Var[C(t)]$) ตามลำดับ

## 3.1 ค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ

การประมาณค่า $C(t)$ และ $F(t)$ นั้นขึ้นอยู่กับ จำนวนสมาชิกในแบบบำนาญที่เวลา $t$ เมื่อ $t = 0, 1, \ldots$ เท่านั้น ซึ่งการประมาณค่าดังกล่าว จะต้องสอดคล้องกับสมมติฐานดังต่อไปนี้

1) อัตราผลตอบแทนการลงทุนเท่านั้นที่ยอมให้เปลี่ยนแปลงตามเวลา ส่วนสมมติฐานทางคณิตศาสตร์ประกันภัยอื่นๆ นั้นกำหนดให้มีค่าคงที่

2) เมื่อเวลาเปลี่ยนไป สมาชิกใหม่จะได้รับอนุญาตให้เข้ามาเป็นสมาชิกในแบบบำนาญ ในลักษณะที่ทำให้ประชากรที่ศึกษานั้นมีสถานะคงที่ (Stationary)

3) อัตราเงินเฟ้อของเงินเดือนกำหนดจากอัตราผลตอบแทนการลงทุนที่มีความสัมพันธ์อย่างแท้จริงกับเงินเดือน หรือจะกล่าวได้ว่า ผลประโยชน์ (Benefit) ต่างๆ จะจ่ายเพิ่มขึ้นตามอัตราเดียวกับเงินเดือน ดังนั้น จึงพิจารณาตัวแปรต่างๆ ในเทอมที่แท้จริง อาทิเช่น กำหนดให้รายได้ต่อปีของพนักงานเป็น 1 หน่วยในตอนเริ่มต้น

4) สมมติให้อัตราผลตอบแทนการลงทุน ณ วันประเมินค่า มีการกำหนดให้เป็น $i_v$

5) อัตราผลตอบแทนการลงทุนที่แท้จริง ที่ได้จากกองทุนบำนาญในช่วงเวลา $t$ ถึง $t+1$ คือ $i(t+1)$ ในลักษณะเดียวกันจะได้ Force of Interest ที่แท้จริงซึ่งสมมติว่าคงที่ในช่วงเวลา $t$ ถึง $t+1$ คือ $\delta(t+1)$ โดยที่ $1 + i(t+1) = e^{\delta(t+1)}$ ซึ่ง $i(t+1)$ จะกำหนดในรูปแบบที่มีความสัมพันธ์กับ $F(t)$

6) กำหนดให้ $E[1 + i(t)] = E[e^{\delta(t+1)}] = 1 + i$ เราสมมติให้ $i = i_v$ เมื่อ $i_v$ เป็นอัตราผลตอบแทนการลงทุน ณ วันประเมินค่า จึงหมายความว่าอัตราผลตอบแทนการลงทุน ณ วันประเมินค่าเป็นอัตราเฉลี่ย สมมติฐานนี้ไม่มีความสำคัญทางคณิตศาสตร์ แต่เป็นที่ยอมรับมาแต่เดิมว่าในกองทุนบำนาญว่าจะต้องมีการประเมินค่า เราจะสังเกตว่าการคำนวณค่าปัจจุบัน ในทางปฏิบัติจะใช้อัตราส่วนลดรายปีทบต้น, $\upsilon = (1+E[i(t)])^{-1}$ ในลักษณะนี้มากกว่าจะใช้หลักทางทฤษฎี $\upsilon^* = E[(1+i(t))^{-1}]$

7) สมมติว่า เงินสมทบที่เข้ามา และ ผลประโยชน์ที่จ่ายออกไป จะเกิดขึ้น ณ ต้นช่วงเวลา

8) มูลค่าของกองทุนบำนาญ ณ เวลาเริ่มต้น ( $t = 0$ ) จะต้องทราบค่า นั่นคือ $Prob[F(0) = F_0] = 1$ สำหรับ $F_0$ บางค่า

9) การประเมินค่าจะต้องกระทำในช่วงปีหนึ่งๆ

ภายใต้สมมติฐานข้อ 1, 2, 3 และ 4 เราสามารถกล่าวได้ว่า $AL$, $NC$ และ $B$ มีค่าคงที่เมื่อเทียบกับเวลา (Trowbridge, 1952; Bowers et al., 1976, cited in Haberman, 1994: 221) และจากข้อสมมติ ข้อ 1, 2, 4, 7 และ 9 เราจะได้ความสัมพันธ์ของ $AL$ ที่สอดคล้องกับสมการที่สมมูลกัน ดังนี้

$$AL = (1 + i)(AL + NC - B) \tag{3.1.1}$$

$$AL = AL + i\,AL + (1 + i)NC - (1 + i)B$$

$$B = d\,AL + NC \tag{3.1.2}$$

เมื่อ $d = \dfrac{i}{1+i}$ แทนส่วนลดที่อัตราดอกเบี้ยทบต้น

## 3.2 อัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกันและอิสระจากกัน

ในตัวแบบนี้เราจะกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุน$(i(t))$ สำหรับ $t \geq 1$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกัน โดยที่ $Prob[\,i(t) > -1] = 1,\ E[\,i(t)] = i = i_v$ และ $Var[\,i(t)] = \sigma^2 < \infty$

### 3.2.1 วิธีระดมทุนโดยคิดเป็นรายสามัญ

ตัวแบบเงินสมทบทั้งหมด ณ เวลา $t$ จะเป็นดังนี้

$$C(t) = \sum_{A_t} NC(x,t) + ADJ(t)$$

$$= NC(t) + ADJ(t) \tag{3.2.1.1}$$

เมื่อ $NC(x\,,\,t)$ แทน Normal Cost ของสมาชิก ที่อายุ $x$ เมื่อเวลา $t$

$NC(t)$ แทน Total Normal Cost ของสมาชิก เมื่อเวลา $t$

$ADJ(t)$ แทนค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ เมื่อเวลา $t$

ค่าตัวแปรต่างๆ (ยกเว้น $ADJ(t)$) จะกำหนดให้เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ส่วนค่า $ADJ(t)$ จะมีการกำหนดค่าตามวิธีต่างๆ ดังต่อไปนี้

3.2.1.1 วิธี Spread

กำหนดให้

$$ADJ(t) = k\,UAL(t) \tag{3.2.1.1.1}$$

$$UAL(t) = \sum_{A_t} AL(x,t) - F(t) = AL(t) - F(t) \qquad (3.2.1.1.2)$$

เมื่อ $$k = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} \qquad (3.2.1.1.3)$$

จากที่กล่าวมาแล้วในข้างต้นสมการ (3.2.1.1), (3.2.1.1.1) และ (3.2.1.1.2) จะได้ว่า

$$C(t) = NC(t) + k\,(AL(t) - F(t)) \qquad (3.2.1.1.4)$$

และความสัมพันธ์พื้นฐานของการระดมทุนในช่วงเวลา $t$ ถึง $t+1$ คือ

$$F(t+1) = (1 + i(t+1))(F(t) + C(t) - B(t)) \;,\; t = 0, 1, \ldots \qquad (3.2.1.1.5)$$

เมื่อ $B(t)$ แทนผลประโยชน์ที่จะต้องจ่ายให้กับลูกจ้างที่เกษียณอายุทั้งหมด ณ เวลา $t$

จากสมการ (3.2.1.1.4) เมื่อแทนค่าในสมการ (3.2.1.1.5) จะได้

$$\begin{aligned} F(t+1) &= (1 + i(t+1))((1-k)F(t) + NC(t) - B(t) + k\,AL(t)) \\ &= w(t+1)(q\,F(t) + r(t)) \qquad (3.2.1.1.6) \end{aligned}$$

เมื่อ $$w(t+1) = \frac{1+i(t+1)}{1+i}$$

$$q = (1+i)(1-k) = \frac{(1+i)(\ddot{a}_{\overline{m|}} - 1)}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-1|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}$$

$$r(t) = (1+i)(NC(t) - B(t) + k\,AL(t))$$

จากสมการ (3.2.1.1.6) สามารถหาฟังก์ชันที่ให้โมเมนต์ลำดับที่ $n$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} EF(t+1)^n &= Ew(t+1)^n\, E(q\,F(t) + r(t))^n \\ &= Ew(t+1)^n\, E[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} r(t)^{n-j} q^j F(t)^j] \end{aligned}$$

$$= Ew(t+1)^n E[r(t)^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} r(t)^{n-j} q^j F(t)^j]$$

$$= Ew(t+1)^n [r(t)^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} r(t)^{n-j} q^j EF(t)^j] \qquad (3.2.1.1.7)$$

จากสมการ (3.2.1.1.6) และสมมติฐานข้อที่ 6) จะได้ $Ew(t+1) = 1$ ดังนั้น ฟังก์ชันที่ให้โมเมนต์ลำดับที่ 1 จะได้

$$EF(t+1) = q\, EF(t) + r(t) \qquad (3.2.1.1.8)$$

โดยที่ $EF(t+1)$ นั้นจะขึ้นอยู่กับ $r(s)$ และ $EF(s)$ สำหรับ $s \le t$ ดังนั้น $EF(t+1)^n$ จะขึ้นอยู่กับ $r(s)$ และ $EF(s)^j$ สำหรับ $s \le t$ และ $j = 1, \ldots, n$ จากความสัมพันธ์ของสมการ(3.1.1) หากกำหนดให้ $NC(t)$, $AL(t)$ และ $B(t)$ เป็นค่าคงที่ $NC$, $AL$ และ$B$ ตามลำดับ

$$r(t) \equiv r = (1+i)(NC - B + k\,AL)$$

จากสมการ (3.2.1.1.8) จะได้

$$EF(t+1) = q\, EF(t) + r \qquad (3.2.1.1.9)$$

ผลจากการดำเนินการของสมการ (3.2.1.1.9) จะเป็นดังนี้

$$EF(0) = F_0$$

$$EF(1) = q\, F_0 + r$$

$$EF(2) = q^2 F_0 + q\, r + r$$

…………………………………….

$$EF(t) = q^t F_0 + q^{t-1} r + \ldots + q\, r + r$$

$$= q^t F_0 + \frac{r(1-q^t)}{1-q} \qquad , t \ge 0 \qquad (3.2.1.1.10)$$

จากสมการ (3.1.2) จะทำให้ $r$ มีค่าดังนี้

$$r = (1+i)(k-d)AL$$

$$\frac{r}{1-q} = \frac{(1+i)(k-d)AL}{1-(1+i)(1-k)} = AL$$

ดังนั้นจากสมการ (3.2.1.1.10) จะได้

$$\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong \frac{r}{1-q} = AL \qquad (3.2.1.1.11)$$

เมื่อกำหนดให้ $q < 1$

$$(1+i)(1-k) < 1$$

$$1-k < \frac{1}{1+i}$$

$$k > \frac{i}{1+i} = d \quad \text{และ} \quad m > 1$$

และจากสมการ (3.2.1.1.4) จึงทำให้

$$\lim_{t\to\infty} EC(t) \cong NC + k(AL - \lim_{t\to\infty} EF(t)) = NC \qquad (3.2.1.1.12)$$

จาก $Var\,F(t+1) = EF(t+1)^2 - (EF(t+1))^2$

และจากสมการ (3.2.1.1.7) และ (3.2.1.1.8) จะได้

$$\begin{aligned} EF(t+1)^2 &= Ew(t+1)^2 E(qF(t) - qEF(t) + qEF(t) + r)^2 \\ &= Ew(t+1)^2 E(q(F(t) - EF(t)) + EF(t+1))^2 \\ &= Ew(t+1)^2 (q^2 E(F(t) - EF(t))^2 + (EF(t+1))^2) \\ &= Ew(t+1)^2 (q^2\, Var\,F(t) + (EF(t+1))^2) \end{aligned}$$

เมื่อ
$$\begin{aligned} Ew(t+1)^2 &= \frac{E(1+i(t+1))^2}{(1+i)^2} \\ &= \frac{1}{(1+i)^2}(1 + 2i + E\,i(t+1)^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1+i)^2}(1 + 2i + i^2 + E\,i(t+1)^2 - i^2)$$

$$= \frac{(1+i)^2 + \sigma^2}{(1+i)^2}$$

โดยที่ $E\,i(t+1)^2 - i^2 = Var\,i(t+1) = \sigma^2$

ดังนั้น $Var\,F(t+1) = ((1+i)^2 + \sigma^2)(1-k)^2\,Var\,F(t) + \frac{\sigma^2}{(1+i)^2}(E\,F(t+1))^2$

$$= a\,Var\,F(t) + b(EF(t+1))^2 \qquad (3.2.1.1.13)$$

เมื่อ $a = ((1+i)^2 + \sigma^2)(1-k)^2$

$$b = \frac{\sigma^2}{(1+i)^2}$$

ผลจากการดำเนินการของสมการ (3.2.1.1.13) จะเป็นดังนี้

$$Var\,F(0) = 0$$

$$Var\,F(1) = b(EF(1))^2$$

$$Var\,F(2) = ab(EF(1))^2 + b(EF(2))^2$$

…………………………………………………….

$$Var\,F(t) = a^{t-1}b(EF(1))^2 + a^{t-2}b(EF(2))^2 + \ldots + b(EF(2))^2$$

$$= b\sum_{j=1}^{t} a^{j-1}(EF(j))^2 \qquad , t \geq 1 \qquad (3.2.1.1.14)$$

ถ้า $a < 1$ แล้ว จะได้

$$(1-k)^2((1+i)^2 + \sigma^2) < 1$$

$$(1-k)^2 < \frac{1}{(1+i)^2 + \sigma^2}$$

$$1 - k < \frac{1}{\sqrt{(1+i)^2 + \sigma^2}}$$

$$k > 1 - \frac{1}{E(1+i(t))} = 1 - \frac{1}{1+i} = d$$

และจาก $\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong AL$ กับสมการ (3.2.1.1.14) จะได้

$$\lim_{t\to\infty} Var\, F(t) \cong \frac{bAL^2}{1-a} \qquad (3.2.1.1.15)$$

และจากสมการ (3.2.1.1.4) จะได้

$$Var\, C(t) = k^2\, Var\, F(t)$$

ดังนั้น จะได้

$$\lim_{t\to\infty} Var\, C(t) \cong \frac{k^2 bAL^2}{1-a} \qquad (3.2.1.1.16)$$

ถ้า $a \geq 1$ แล้ว $\lim_{t\to\infty} Var\, F(t)$ และ $\lim_{t\to\infty} Var\, C(t)$ จะมีค่าอนันต์ ดังนั้น ข้อจำกัดที่ว่า $a < 1$ จะสามารถอ้างอิงไปถึงข้อจำกัดในการเลือกค่า $M$ ที่เหมาะสมได้ดังนี้

จาก $$a < 1$$

$$k > 1 - \frac{1}{\sqrt{(1+i)^2+\sigma^2}}\,\frac{v}{v}$$

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} > 1 - v\sqrt{\frac{1}{1+b}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{m|}} < \frac{1}{1-v\sqrt{\frac{1}{1+b}}}$$

$$1 - v^m < \frac{i\sqrt{1+b}}{(1+i)\sqrt{1+b}-1}$$

$$v^m > \frac{\sqrt{1+b}-1}{(1+i)\sqrt{1+b}-1}$$

$$m \ln e^{-\delta} > \ln \frac{\sqrt{1+b}-1}{(1+i)\sqrt{1+b}-1}$$

$$M = m < \frac{1}{\delta} \ln \frac{(1+i)\sqrt{1+b}-1}{\sqrt{1+b}-1} = M_1$$

และข้อจำกัดนี้จะทำให้เราได้ค่า $M$ ที่เป็นไปได้ และสามารถทำให้ $\lim_{t\to\infty} Var\ F(t)$ และ $\lim_{t\to\infty} Var\ C(t)$ ลู่เข้า และ ทำให้เราทราบว่า ถ้า $M_1$ มีค่าลดลง แล้ว จะทำให้ $i$ และ $\sigma$ เพิ่มขึ้น (Dufresne, 1988: 539)

**กรณีพิเศษ :** ถ้า $k = 1$ ซึ่งจะสมมูลกับ $m = 1$ แล้ว $a = 0$ ดังนั้น จากสมการ (3.2.1.1.6) จะได้

$$\begin{aligned} F(t+1) &= (1 + i(t+1))(F(t) + C(t) - B) \\ &= (1 + i(t+1))(F(t) + NC + AL - F(t) - B) \\ &= (1 + i(t+1))(NC + AL - B) \end{aligned}$$

จากสมการ (3.1.1) จะได้

$$F(t+1) = \frac{(1+i(t+1))AL}{1+i}$$

และ

$$Var\ F(t) = b(EF(t))^2 = \frac{\sigma^2}{(1+i)^2} AL^2$$

$$Var\ C(t) = Var\ F(t)$$

ซึ่งจากค่าดังกล่าวจะทำให้ Standard Deviation ของ $F(\infty)$ เป็นค่าที่น้อยที่สุด(Dufresne, 1988: 539)

3.2.1.2 วิธี Amortization ของความสูญเสีย

กำหนดให้

$$ADJ(t) = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} L(t-j)}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} \tag{3.2.1.2.1}$$

$$UAL(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j L(t-j) \tag{3.2.1.2.2}$$

$$\lambda_j = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-j|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} \tag{3.2.1.2.3}$$

จากสมการ (3.2.1.1.5) จะได้

$$F(t) = (1 + i(t))(F(t-1) + C(t-1) - B) \qquad , t \geq 1 \tag{3.2.1.2.4}$$

จากการกำหนดค่า Unfunded Accrued Liability ที่เวลา $t$ คือ

$$UAL = AL - F(t) \qquad , t \geq 1$$

และกำหนดค่า Loss Experienced ทางคณิตศาสตร์ประกันภัย ระหว่างช่วงเวลา $t-1$ ถึง $t$ คือ

$$L(t) = UAL(t) - UAL^{A}(t) \tag{3.2.1.2.5}$$

เมื่อ $UAL^{A}(t)$ คือ ค่า $UAL(t)$ ที่เป็นไปตามสมมติฐานทางคณิตศาสตร์ประกันภัยทั้งหมด ระหว่างช่วงเวลา $t-1$ ถึง $t$

กำหนดให้ ที่เวลาเริ่มต้น $L(t) = 0$ , $t \leq 0$ และจากสมการ(3.1.1) ลบด้วยสมการ(3.2.1.2.4) เมื่อกำหนดให้ $i(t) = i$ จะได้

$$\begin{aligned} UAL^{A}(t) &= AL - F(t) \\ &= (1+i)(UAL(t-1) + NC - C(t-1)) \end{aligned} \tag{3.2.1.2.6}$$

จากสมการ (3.2.1.1) และ (3.2.1.2.1) สามารถแสดงค่า $UAL(t)$ ในเทอมของ Loss ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} UAL(t) &= AL - F(t) \\ &= (1+i)(AL + NC - B) - (1+i(t))(F(t-1) + NC + ADJ(t-1) - B) \\ &= (1+i(t))(AL - F(t-1) - ADJ(t-1)) - (i(t)-i)(AL + NC - B) \\ &= (1+i)(UAL(t-1) - ADJ(t-1)) \\ &\quad + (i(t)-i)(UAL(t-1) - ADJ(t-1) - (1+i)^{-1}AL) \end{aligned}$$

และจากสมการ (3.2.1.2.5) และ (3.2.1.2.6) จะได้

$$L(t) = (i(t) - i)(UAL(t-1) - ADJ(t-1) - (1+i)^{-1}AL) \qquad , t \geq 1 \tag{3.2.1.2.7}$$

ดังนั้น จากสมการ(3.2.1.2.5) เราจะได้

$$\begin{aligned} UAL(t) &= (1+i)(UAL(t-1) - ADJ(t-1)) + L(t) \\ &= \lambda_0 L(t) + \lambda_1 L(t-1) + \ldots + \lambda_m L(t-m) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j L(t-j) \end{aligned} \tag{3.2.1.2.8}$$

เมื่อ $\lambda_0 = 1$

$$\lambda_1 = (1+i) - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(1+i) = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

$$\lambda_2 = (1+i)^2 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(1+i)^2 - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(1+i) = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-2}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

......................................................................................

$$\lambda_{m-1} = (1+i)^{m-1} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(1+i)^{m-1} - \ldots - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}(1+i) = \frac{\ddot{a}_{\overline{1}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

$$\lambda_j = 0 \qquad , j \geq m$$

ดังนั้น เราจะได้

$$F(t) = AL - UAL(t) = AL - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j L(t-j)$$

$$C(t) = NC + \frac{\sum_{j=0}^{m-1} L(t-j)}{\ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

จากสมการ (3.2.1.2.1), (3.2.1.2.7) และ (3.2.1.2.8) จะได้

$$L(t) = (i(t)-i)(\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_j L(t-1-j) - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}\sum_{j=0}^{m-1}L(t-1-j) - (1+i)^{-1}AL)$$

$$= (i(t)-i)(\sum_{j=1}^{m-1}(\lambda_{j-1} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}})L(t-j) - (1+i)^{-1}AL)$$

$$= (i(t)-i)(\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j L(t-j) - (1+i)^{-1}AL) \qquad (3.2.1.2.9)$$

เมื่อ $\beta_j = \lambda_{j-1} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = \frac{\ddot{a}_{\overline{m-j|}}}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}$

$\beta_m = \lambda_{m-1} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{m|}}} = 0$

จากสมการ(3.2.1.2.9) จะได้

$$EL(t) = E(i(t)-i)(\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j EL(t-j) - (1+i)^{-1}AL)$$

เมื่อ $i(t)$ เป็นอิสระจาก $L(t-j)$ , $k \geq 1$

ถ้า $|i(t)-i|\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j < 1$ แล้ว $L(t), F(t)$ และ $C(t)$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้า และ

1) $\lim_{t\to\infty} EL(t) \cong \dfrac{-(i(t)-i)(1+i)^{-1}AL}{1-((i(t)-i)\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j)} = M_\infty$

2) $\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong AL - M_\infty\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j$

3) $\lim_{t\to\infty} EC(t) \cong NC + M_\infty\dfrac{m}{\ddot{a}_{\overline{m|}}}$

จากสมมติฐานข้อ 6) : $E[i(t)] = i$ และ $Var[i(t)] = \sigma^2$ ดังนั้นจะได้

$$EL(t) = E(i(t) - i)(\sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \, E\,L(t-j) - (1+i)^{-1} AL)$$

$$= 0 \qquad , t \geq 1 \qquad (3.2.1.2.10)$$

$$Cov(L(t), L(s)) = E(L(t)L(s))$$

$$= E(i(t) - i)(\sum_{j=0}^{m-1} \beta_j \, E\,L(t-j) - (1+i)^{-1} AL)L(s)$$

$$= 0 \qquad , t \geq 1 \text{ และ } s < t \qquad (3.2.1.2.11)$$

ดังนั้น $L(t)$ , $t \geq 1$ จะเป็นอนุกรมของตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และเป็นอิสระจากกัน

จากสมการ (3.2.1.2.9) จะได้

$$Var\,L(t) = Var(i(t) - i)\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j^2 \; Var\,L(t-j) + (1+i)^{-2} AL^2 Var(i(t) - i)$$

$$= \sigma^2 (\sum_{j=1}^{m-1} \beta_j^2 \; Var\,L(t-j) + (1+i)^{-2} AL^2) \qquad , t \geq 1$$

$$= 0 \qquad , t \leq 0 \qquad (3.2.1.2.12)$$

ถ้า $\sigma^2 \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j^2 < 1$ แล้ว

$$\lim_{t \to \infty} Var\,L(t) \cong \frac{\sigma^2 (1+i)^{-2} AL^2}{1 - \sigma^2 \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j^2} = V_\infty \qquad (3.2.1.2.13)$$

$$\lim_{t \to \infty} Var\,F(t) \cong V_\infty \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j^2 \qquad (3.2.1.2.14)$$

$$\lim_{t \to \infty} Var\,C(t) \cong V_\infty \frac{m}{\ddot{a}^2_{\overline{m|}}} \qquad (3.2.1.2.15)$$

ดังนั้นหากทำการวิเคราะห์ในระยะยาวจะเห็นถึงความไม่สม่ำเสมอ และการที่จะทำให้เกิดความสม่ำเสมอได้นั้น จะขึ้นอยู่กับค่า $M$ ซึ่งจะเป็นค่าที่น้อยกว่าขอบเขตบน, $M_1$ (Dufresne, 1989: 74)

**3.2.2 วิธีระดมทุนโดยคิดรวมทั้งหมด**

ตัวแบบเงินสมทบทั้งหมด ณ เวลา $t$ จะเป็นดังนี้

$$C(t) = (PVB(t) - F(t))\frac{S(t)}{PVS(t)} \tag{3.2.2.1}$$

เมื่อ $S(t)$ แทนเงินเดือนรวมทั้งหมดของสมาชิกที่ทำงานได้ (Active Member) เมื่อเวลา $t$

$PVB(t)$ แทนค่าปัจจุบันของผลประโยชน์ที่จะต้องจ่ายในอนาคต (สำหรับสมาชิกทุกคนรวมทั้งผู้เกษียณอายุ) เมื่อเวลา $t$

$PVS(t)$ แทนค่าปัจจุบันของเงินเดือนในอนาคตของสมาชิกที่ทำงานได้ เมื่อเวลา $t$

จากสมการ (3.2.1.1.5) จะได้

$$F(t+1) = (1 + i(t+1))(F(t) + C(t) - B)$$

และจากสมการ (3.2.2.1) จะได้

$$C(t) = (PVB - F(t))\frac{S}{PVS}$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} EF(t+1) &= (1+i)(EF(t) + (PVB - EF(t))\frac{S}{PVS} - B) \\ &= (1+i)((1 - \frac{S}{PVS})EF(t) + \frac{PVB \cdot S}{PVS} - B) \end{aligned} \tag{3.2.2.2}$$

ผลจากการดำเนินการของสมการ (3.2.2.2) จะเป็นดังนี้

$$EF(0) = F_0$$

$$EF(1) = (1+i)((1-\frac{S}{PVS})F_0 + \frac{PVB \cdot S}{PVS} - B)$$

$$EF(2) = (1+i)^2(1-\frac{S}{PVS})^2F_0 + (1+i)(\frac{PVB \cdot S}{PVS} - B)((1+i)(1-\frac{S}{PVS}) + 1)$$

………………………………………………………………

$$EF(t) = (1+i)^t(1-\frac{S}{PVS})^tF_0 + (1+i)(\frac{PVB \cdot S}{PVS} - B)((1+i)^{t-1}(1-\frac{S}{PVS})^{t-1} + \ldots + 1)$$

$$= (1+i)^t(1-\frac{S}{PVS})^tF_0 + (1+i)(\frac{PVB \cdot S}{PVS} - B)\left(\frac{1-(1+i)^t(1-\frac{S}{PVS})^t}{1-(1+i)(1-\frac{S}{PVS})}\right)$$

$$= q^{*t}F_0 + r^*\left(\frac{1-q^{*t}}{1-q^*}\right) \qquad (3.2.2.3)$$

เมื่อ $q^* = (1+i)(1-\frac{S}{PVS})$

$r^* = (1+i)(\frac{PVB \cdot S}{PVS} - B)$

ซึ่ง $0 < q^* < 1$ และจะเห็นได้ว่า จากสมการ(3.2.2.3) จะอยู่ในรูปแบบเดียวกันกับสมการ(3.2.1.1.10) และแตกต่างกันเพียงค่า $q$ กับ $q^*$ เท่านั้น ซึ่งขึ้นอยู่กับการกำหนดค่า $N$ อย่างเช่น $\ddot{a}_{\overline{N|}} = \frac{PVS}{S}$ ดังนั้น ในกรณีนี้จึงสามารถอ้างอิงผลลัพธ์ของสมการ (3.2.1.1.11), (3.2.1.1.12), (3.2.1.1.15) และ (3.2.1.1.16) ได้

วิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญในบทนี้ ได้มีการตั้งสมมติฐานทางคณิตศาสตร์ประกันภัย สำหรับอัตราผลตอบแทนการลงทุนที่มีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกันและอิสระจากกัน เพื่อนำไปใช้กับตัวแบบการระดมทุน ซึ่งจากวิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญคิดเป็นรายสามัญ ตัวแบบเงินสมทบ($C(t)$) จะมีค่าขึ้นอยู่กับค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ($ADJ(t)$) โดยจะกำหนดให้ค่าดังกล่าวขึ้นมา 2 วิธี โดยวิธีแรก คือ วิธี Spread จะใช้ Unfunded Accrued Liability (*UAL*) เป็นตัวกำหนด วิธีนี้จะได้ค่า $\lim_{t\to\infty} EF(t) \cong AL$ และ $\lim_{t\to\infty} EC(t) \cong NC$ ส่วนอีกวิธีหนึ่ง คือ วิธี Amortization ของความสูญเสีย จะใช้ Loss Experience ($L(t)$) เป็นตัวกำหนด แต่ผลที่ได้แตกต่างจากวิธีแรก เนื่องจากใช้สมมติฐานต่างกัน และวิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญคิดรวมทั้งหมด ตัว

แบบเงินสมทบ จะขึ้นอยู่กับ เงินเดือนปัจจุบัน ($S(t)$) และค่าปัจจุบันของเงินในอนาคตของลูกจ้าง ($PVS(t)$) แต่ท้ายที่สุดแล้ว วิธีนี้ก็สามารถจัดตัวแบบการระดมทุนให้เหมือนกับ วิธีระดมทุนคิดเป็นรายสามัญ และก็ได้ค่า $\lim_{t \to \infty} EF(t) \cong AL$ และ $\lim_{t \to \infty} EC(t) \cong NC$ เช่นเดียวกัน ในบทนี้ เรากำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และอิสระจากกันในรูปทั่วไป โดยไม่ได้กำหนดรูปแบบของการแจกแจงความน่าจะเป็นของอัตราผลตอบแทนการลงทุน ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว ควรจะมีรูปแบบของการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบใดแบบหนึ่ง เพื่อใช้ในการพยากรณ์ค่าการระดมทุนในอนาคต ในบทต่อไปจะกล่าวถึงวิธีระดมทุนในกองทุนบำนาญ โดยกำหนดให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Autoregressive และ Moving Average