

สมบัติที่สถานะพื้นของอัลคาไลแก๊สที่ถูกกักแบบขึ้นกับทิศทาง
โดยวิธีการอินทิเกรตตามวิถีของฟายน์แมน

นายณัฐพล นาคปฐมกุล



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2544

ISBN 974-17-0267-1

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

GROUND-STATE PROPERTIES OF AN ANISOTROPICALLY TRAPPED ALKALI GAS
USING FEYNMAN PATH INTEGRATION

Mr. NATTHAPON NAKPATHOMKUN

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Physics

Department of Physics

Faculty of Science


Chulalongkorn University

Academic Year 2001

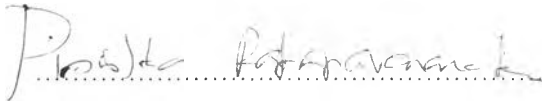
ISBN 974-17-0267-1

Thesis Title Ground-State Properties of an Anisotropically Trapped Alkali Gas
Using Feynman Path Integration
By Mr. Natthapon Nakpathomkun
Department Physics
Thesis Advisor Professor Virulh Sa-yakanit

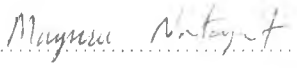
Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial
Fulfillment of the Requirements for the Master 's Degree

..... Deputy Dean for Administrative Affairs
(Associate Professor Pipat Karntiang, Ph. D.) Acting Dean, Faculty of Science

THESIS COMMITTEE

..... Chairman
(Assistant Professor Pisista Ratanavararaksa, Ph. D.)

..... Thesis Advisor
(Professor Virulh Sa-yakanit, F. D.)

..... Member
(Associate Professor Mayuree Natenapit, Ph. D.)

..... Member
(Chaisingh Poo-Rakkiat, Ph. D.)

ณัฐพล นาคปฐมกุล : สมบัติที่สถานะพื้นของอัลคาไลแก๊สที่ถูกกักแบบขึ้นกับทิศทางโดยวิธีการอินทิเกรตตามวิถีของฟายน์แมน. (GROUND-STATE PROPERTIES OF AN ANISOTROPICALLY TRAPPED ALKALI GAS USING FEYNMAN PATH INTEGRATION) อ. ที่ปรึกษา : ศ.ดร.วิรุฬห์ สายคณิต, 98 หน้า. ISBN 974-17-0267-1.

อัลคาไลแก๊สแบบเจือจางที่มีอันตรกิริยาอย่างอ่อนถูกค้นพบเป็นครั้งแรกที่สามารถทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟสที่เรียกว่า การควบแน่นโบส-ไอน์สไตน์ ในการทดลองของกลุ่มไวแมนในปี ค.ศ. 1995 ในงานนี้ได้ศึกษาสมบัติที่สถานะพื้นของรูบิเดียมแก๊สที่ถูกกักด้วยสนามแม่เหล็กชนิดขึ้นกับทิศทางโดยอาศัยวิธีเชิงแปรผันในรูปนัยนิยมอินทิกรัลตามวิถี ได้พิจารณาอันตรกิริยาระหว่างอะตอมเป็นฟังก์ชันเดลต้าซึ่งเป็นศักย์แบบพิสัยสั้น เมทริกซ์ความหนาแน่นประมาณที่คำนวณได้ทำให้หาพลังงานสถานะพื้นและฟังก์ชันคลื่นได้ พลังงานสถานะพื้นถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีการสนามเฉลี่ย ซึ่งพบว่าผลที่ได้ตรงกับการคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ และผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้เบี่ยงเบนเพียงเล็กน้อย ส่วนฟังก์ชันคลื่นของสถานะพื้นหาได้จากเวกเตอร์ฟังก์ชัน เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์แปรผันในฟังก์ชันคลื่นพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้ใกล้เคียงกับผลที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลข

ภาควิชาฟิสิกส์.....ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชาฟิสิกส์.....ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา 2544

4172281023 : MAJOR PHYSICS

KEY WORD: BOSE-EINSTEIN CONDENSATION / VARIATION PATH INTEGRATION / PSEUDOPOTENTIAL

NATTHAPON NAKPATHOMKUN : GROUND-STATE PROPERTIES OF AN ANISOTROPICALLY TRAPPED ALKALI GAS USING FEYNMAN PATH INTEGRATION .

THESIS ADVISOR : PROFESSOR VIRULH SA-YAKANIT, F. D., 98 pp. ISBN 974-17-0267-1.

The dilute weakly interacting alkali gas was shown to exhibit the phase transition called Bose-Einstein condensation for the first time in the experiment of Wieman's group in 1995. In this thesis, the ground state properties of the alkali gas trapped in an anisotropic magnetic field are investigated by using the variational method in path integral formalism. The interatomic interaction is approximated by the delta function which is short-range potential. The approximated density matrix is derived. Consequently the ground state energy and wavefunction are obtained. The ground state energy is then compared to the result obtained by the mean field approach both analytically and numerically. The result is shown to equivalent to the variational mean field approach. In addition, a comparison between path integral approach and the numerical mean field approach is shown to give no significant difference. The ground state wavefunction is extracted from the weighting function. Substitute the variational parameters into the expression of wavefunction one can see that the result is close to the numerical method.

Department Physics..... Student's signature.....
Virulh Sa-yakanit

Field of study. Physics..... Advisor's signature.....
Virulh Sa-yakanit

Academic year 2001



Acknowledgements

First of all I like to express my deeply love to my father and mother for their love and support. Also I owed a lot to my sisters and brothers. I want to mention my sincere gratitude to my advisor, Professor Virulh Sa-yakanit. Many thanks to Assoc. Prof. Mayuree Natenapit, Asst. Prof. Pisistha Ratanavararaksa and Dr.Chaisingh Poo-Rakkiat for criticizing the manuscript. Any errors in this thesis is my sole responsibility.

I also thanks people at the Physics Department for a good atmosphere. I am indebted to Mr.Kobchai Tayatanasanti for his suggestion and discussion. Mr.Pornjuk Srepusharawoot for his help in numerical calculation and Mr.Boonlit Krunavakarn for mathematical advises. Last but not least I like to give thanks to Ms.Kamonporn Klappong for her supporting and being beside me.

Contents

Abstract in Thai	iv
Abstract in English	v
Acknowledgements	vi
Contents.....	vii
List of Figures.....	ix
List of Tables.....	xi
Chapter 1 Bose-Einstein Condensation: An Overview	1
Chapter 2 Feynman Path Integration.....	11
2.1 Path Integration in Nonrelativistic Quantum Mechanics.....	11
2.2 Examples	21
2.3 Statistical Mechanics via Path Integral.....	26
2.4 Variational Method	29
Chapter 3 Bose-Einstein Condensation:	
The Theoretical Aspects	33
3.1 Ideal Bose Gas in the Harmonic Trap	33
3.2 The Interacting Case.....	37

Contents (cont.)

Chapter 4 Results.....	51
Chapter 5 Conclusions and Discussion.....	63
References	66
Appendices	72
Appendix A: Trotter Product Formula	73
Appendix B: Pseudopotential	76
Appendix C: Gross-Pitaevskii Equation	81
Appendix D: Baym's Work.....	83
Appendix E: Numerical Program.....	86
Vitae	87

List of Figures

Figure		Page
Figure 1.1	Generic phase-diagram common to all atoms.	3
Figure 1.2	(a) A typical magneto-optical trap configuration.	5
Figure 1.3	Schematic of evaporative cooling.	6
Figure 1.4	Schematics of the evaporative cooling process in a magnetic trap configuration.	7
Figure 1.5	Observation of BEC in rubidium by JILA group.	9
Figure 1.6	Observations of BEC in sodium atoms achieved in the MIT group. These pictures are obtained as those presented in Fig. 1.5 ...	10
Figure 2.1	The two paths in the double-slit experiment.	13
Figure 2.2	(a) The three paths for a triple-slit experiment.	13
Figure 2.3	The sum over paths is defined as a limit, in which at first the path is specified by giving only its coordinate x at a large number of specified times separated by very small intervals ϵ	15
Figure 2.4	One way the sum over all paths can be taken is by first summing over paths which go through the point at x_c and time t_c	16
Figure 2.5	The difference between the classical path $\bar{x}(t)$ and some possible alternative path $x(t)$ is the function $y(t)$	23
Figure 2.6	Path in the complex time plane.	28
Figure 2.7	Geometrical interpretation of $\langle e^{-f} \rangle \geq e^{\langle -f \rangle}$	31

List of Figures (cont.)

- Figure 3.1 Condensate wavefunction, at $T = 0$, obtained by solving numerically the stationary GP equation in a spherical trap and with attractive interaction among the atoms ($a < 0$). 42
- Figure 3.2 Condensate wavefunction, at $T = 0$, obtained by solving numerically the stationary GP equation Eq. (3.35) in a spherical trap and with repulsive interaction among the atoms ($a > 0$). 42
- Figure 3.3 Ground state wavefunction for ^{87}Rb along the x axis (upper part) and z axis (lower part). 44
- Figure 3.4 Comparison of the release energy as a function of interaction strength from the stationary GP equation (solid line) and the experimental measurements (solid circles). 46
- Figure 3.5 Release energy of the condensate as a function of the number of condensed atoms in the MIT trap with sodium atoms. 46
- Figure 3.6 Energy per particle, in units of $\hbar\omega_{\text{ho}}$, for atoms in a spherical trap interacting with attractive forces, as a function of the effective width ϖ in the Gaussian model of Eq. (3.46) - Eq. (3.47). 50
- Figure 4.1 The ground state wavefunctions are obtained from Eq. (4.42). Distances are in units of a_{\perp} in accord with [49]. 61

List of Tables

Table	Page
Table 3.1	45
<p>Results for the ground state of ^{87}Rb atoms in a trap with $\lambda = \sqrt{8}$. The subscript kin., ho., and int. refer to kinetic, harmonic and interaction energy. μ_1 and E_1 are chemical potential and energy are in units $\hbar\omega_{\perp}$, with $\omega_z/2\pi = 220$ Hz. Length is in units a_{\perp}, from [49].</p>	
Table 4.1	60
<p>The ground state energies are evaluated from Eq. (4.35). Energy are in units of $\hbar\omega_{\perp}$ in accord with [49].</p>	
Table 5.1	64
<p>The percent deviation of our results compare with Dalfovo and Stringari [49]. The numbers in the parenthesis are taken from Table 3.1.</p>	