บทที่ 2
ทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบความเที่ยงตรงของวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอนุกรมเวลาเมื่อมีค่าผิดปกติ โดยในการวิจัยครั้งนี้ได้เสนอวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ 4 ตัว คือ วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข (Conditional Least Squares Method : CLS) วิธีประมาณร่วมพารามิเตอร์ตัวแบบและผลกระทบของค่าผิดปกติ (Joint Estimation of Model Parameters and Outliers Effect : JEMPOE) วิธีประมาณแบบเอ็ม (M-Method : M) และวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยบูทสแทร็พ (Bootstrap Weighted Least Squares Method : BWLS) ซึ่งในแต่ละวิธีนั้นมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 **วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข** (Conditional Least Squares Method : CLS)

สำหรับหลักการโดยทั่วไปของการประมาณด้วยวิธีนี้ คือ การ ทำให้ผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองมีค่าต่ำสุด ภายใต้พารามิเตอร์ของตัวแบบ $\underset{\sim}{\beta}$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขมีค่าต่ำสุด โดยฟังก์ชันผลรวมค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง มีรูปแบบคือ

$$S(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$$

โดยกำหนดเงื่อนไขคือ $a_0, a_{-1}, a_{-2}, ... = 0$ และ $\underset{\sim}{\beta}$ เป็นพารามิเตอร์ของตัวแบบอนุกรมเวลา โดยในลำดับต่อไปนั้นจะขออธิบายในรายละเอียดของวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไข ที่จะนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบ AR(1) MA(1) และ ARMA(1,1) ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1) กรณีตัวแบบ AR(1)

จากสมการตัวแบบ $z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + a_t$ เมื่อ $c = \mu(1-\phi_1)$ และ ฟังก์ชัน $S(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$ เมื่อ $\underset{\sim}{\beta} = (\mu, \phi)^T$ โดยฟังก์ชัน a_t เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้น (linear function) ซึ่งมีรูปแบบคือ $a_t = z_t - c - \phi_1 z_{t-1}$ ดังนั้นจึงทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์สามารถกระทำได้โดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบสามัญ (Ordinary Least Squares Method : OLS) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้ คือ จากสมการตัวแบบ AR(1) พิจารณาสมการที่ $t = 1, ..., n$ ดังนี้

$$z_1 = c + \phi_1 z_0 + a_1$$
$$z_2 = c + \phi_1 z_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$z_n = c + \phi_1 z_{n-1} + a_n$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = \bar{z}$ [1]จากนั้นให้

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times 2} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} c \\ \phi \end{bmatrix}_{2\times 1} \quad \underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

ต้องการหาตัวประมาณ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ของ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ทำให้ $S(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2 = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{a}$ มีค่าต่ำสุด เมื่อ $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}$

ดังนั้น $$S(\underset{\sim}{\beta}) = (\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})^T(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta})$$
$$= \underset{\sim}{y}^T\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\beta}^T X^T \underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}^T X \underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}^T X^T X \underset{\sim}{\beta}$$

(เนื่องจาก $\underset{\sim}{y}^T X \underset{\sim}{\beta} = (\underset{\sim}{y}^T X \underset{\sim}{\beta})^T = \underset{\sim}{\beta}^T X^T \underset{\sim}{y}$)

$$= \underset{\sim}{y}^T\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\beta}^T X^T \underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\beta}^T X^T X \underset{\sim}{\beta}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S(\underset{\sim}{\beta})\right|_{\beta = \hat{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

ได้ $$-2X^T\underset{\sim}{y} + 2X^T X \hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

จากนั้นจะได้ว่าค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X^T X)^{-1}(X^T \underset{\sim}{y})$ โดยที่ $X^T X$ ต้องไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix) นั่นคือสามารถหาเมทริกซ์ผกผันของ $X^T X$ ได้ และเมื่อคำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ จากเมทริกซ์ที่กำหนดจะได้

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n} z_{t-1} \\ \sum_{t=1}^{n} z_{t-1} & \sum_{t=1}^{n} z_{t-1}^2 \end{bmatrix}_{2\times 2}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} z_t \\ \sum_{t=1}^{n} z_t z_{t-1} \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_{2\times 2}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

นั่นคือ $\hat{c} = \left[\frac{1}{AD - BC}\right][DE - BF]$ และ $\hat{\phi} = \left[\frac{1}{AD - BC}\right][AF - CE]$ จากนั้นประมาณค่า $\hat{\mu}$ โดยอาศัยความสัมพันธ์ที่ว่า $\hat{c} = \hat{\mu}(1 - \hat{\phi})$ จะได้ $\hat{\mu} = \frac{\hat{c}}{1 - \hat{\phi}}$

---

[1] Willian W.S. Wei ,Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods,Addison Wesley Publishing, P 138

2) กรณีตัวแบบ MA(1)

จากสมการตัวแบบ $z_t = \mu - \theta a_{t-1} + a_t$ และ ฟังก์ชัน $S(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$ เมื่อ $\underset{\sim}{\beta} = (\mu, \theta)^T$ และ $a_t = z_t - \mu + \theta a_{t-1}$ โดยกำหนดเงื่อนไข $a_0 = 0$ แต่เนื่องจาก a_t นั้นเป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_t &= z_t - \mu + \theta a_{t-1} \quad \text{แต่เนื่องจาก} \quad a_{t-1} = z_{t-1} - \mu + \theta a_{t-2} \quad \text{ดังนั้น} \\
&= z_t - \mu + \theta\left[z_{t-1} - \mu + \theta a_{t-2}\right] \\
&= z_t + \theta z_{t-1} + \theta^2 a_{t-2} - \mu(1+\theta) \quad \text{แต่เนื่องจาก} \quad a_{t-2} = z_{t-2} - \mu + \theta a_{t-3} \\
&= \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

จากนั้นนำ $S(\underset{\sim}{\beta})$ มาหาค่าอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S(\underset{\sim}{\beta})$ ได้ สมการปกติจำนวน 2 สมการ คือ

$$\sum_{t=1}^{n} (z_t - \hat{\mu} + \hat{\theta} a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} (z_t - \hat{\mu} + \hat{\theta} a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=\hat{\mu}} = 0$$

แต่เนื่องสมการปกติที่ได้นั้นไม่สามารถแก้สมการหาค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\hat{\mu}, \hat{\theta})^T$ ได้โดยตรง ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะใช้วิธี Gauss-Newton ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> กำหนดค่าเริ่มต้น $\mu^{(0)}$ และ $\theta^{(0)}$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> คำนวณเวกเตอร์ $\Delta \hat{\underset{\sim}{\beta}}$

$$\Delta \hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \Delta \mu^{(0)} \\ \Delta \theta^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1,t} x_{2,t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1,t} x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2,t}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t x_{1,t} \\ \sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t x_{2,t} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\hat{a}_t = z_t - \mu^{(0)} + \theta^{(0)} \hat{a}_{t-1}$

$$x_{1,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \mu} = 1 + \theta^{(0)} x_{1,t-1}$$

$$x_{2,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \theta} = \theta^{(0)} x_{2,t-1} - \hat{a}_{t-1}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> คำนวณค่า $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = \underset{\sim}{\beta}^{(0)} + \Delta \hat{\underset{\sim}{\beta}}$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์ที่ได้ ถ้า $\frac{|\mu^{(1)} - \mu^{(0)}|}{\mu^{(0)}} < 0.001$ และ $\frac{|\theta^{(1)} - \theta^{(0)}|}{\theta^{(0)}} < 0.001$ ให้หยุดการทำซ้ำ แต่ถ้าค่าที่ได้นั้นยังไม่ถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนดไว้ให้กำหนด $\mu^{(0)} = \mu^{(1)}$ และ $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$ จากนั้นย้อนกลับไปเริ่มขั้นตอนที่ 2 ใหม่

สำหรับการกำหนดค่าเริ่มต้น $\mu^{(0)}$ และ $\theta^{(0)}$ ในขั้นตอนที่ 1 นั้นในการวิจัยครั้งนี้นั้น จะใช้วิธีประมาณ $\mu^{(0)}$ ด้วย $\bar{z}$ จากนั้นแปรค่า $\theta^{(0)}$ ตั้งแต่ -0.999 ถึง 0.999 เพื่อหาค่า $\theta^{(0)}$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $S(\underset{\sim}{\beta})$ มีค่าต่ำสุด

3) กรณีตัวแบบ ARMA(1,1)

จากสมการตัวแบบ $z_t = \mu(1-\phi) + \phi z_{t-1} - \theta a_{t-1} + a_t$ และ ฟังก์ชัน $S(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2$ เมื่อ $\underset{\sim}{\beta} = (\mu, \phi, \theta)^T$ และ $a_t = z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}$ โดยกำหนดเงื่อนไข $a_0 = 0$ แต่เนื่องจาก a_t นั้นเป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$a_t = z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}$$
$$= (z_t - \mu) - \phi(z_{t-1} - \mu) + \theta a_{t-1}$$

แต่เนื่องจาก $a_{t-1} = (z_{t-1} - \mu) - \phi(z_{t-2} - \mu) + \theta a_{t-2}$ ดังนั้น

$$= (z_t - \mu) - \phi(z_{t-1} - \mu) + \theta\left[(z_{t-1} - \mu) - \phi(z_{t-2} - \mu) + \theta a_{t-2}\right]$$
$$= (z_t - \mu) - (\phi - \theta)(z_{t-1} - \mu) - \phi\theta(z_{t-2} - \mu) + \theta^2 a_{t-2}$$

แต่เนื่องจาก $a_{t-2} = (z_{t-2} - \mu) - \phi(z_{t-3} - \mu) + \theta a_{t-3}$ ดังนั้น

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

จากนั้นหาค่าอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S(\underset{\sim}{\beta})$ ได้ สมการปกติจำนวน 3 สมการ คือ

$$\sum_{t=1}^{n} (z_t - \hat{\mu}(1-\hat{\phi}) - \hat{\phi} z_{t-1} + \hat{\theta} a_{t-1}) \left.\frac{\partial a_t}{\partial \phi}\right|_{\phi=\hat{\phi}} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} (z_t - \hat{\mu}(1-\hat{\phi}) - \hat{\phi} z_{t-1} + \hat{\theta} a_{t-1}) \left.\frac{\partial a_t}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} (z_t - \hat{\mu}(1-\hat{\phi}) - \hat{\phi} z_{t-1} + \hat{\theta} a_{t-1}) \left.\frac{\partial a_t}{\partial \mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0$$

แต่เนื่องสมการปกติที่ได้นั้นไม่สามารถแก้สมการหาค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (\hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\theta})^T$ ได้โดยตรง ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้จะใช้วิธี Gauss-Newton ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> กำหนดค่าเริ่มต้น $\mu^{(0)}, \phi^{(0)}$ และ $\theta^{(0)}$ และ $z_0 = \bar{z}$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> คำนวณเวกเตอร์ $\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

$$\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \Delta\mu^{(0)} \\ \Delta\phi^{(0)} \\ \Delta\theta^{(0)} \end{bmatrix}_{3x3} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1,t}x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} x_{1,t}x_{3,t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1,t}x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{2,t}x_{3,t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1,t}x_{3,t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2,t}x_{3,t} & \sum_{t=1}^{n} x_{3,t}^2 \end{bmatrix}_{3x3}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t x_{1,t} \\ \sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t x_{2,t} \\ \sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t x_{3,t} \end{bmatrix}_{3x3}$$

เมื่อ $\hat{a}_t = (z_t - \mu^{(0)}) - \phi^{(0)}(z_{t-1} - \mu^{(0)}) + \theta^{(0)}\hat{a}_{t-1}$

$$x_{1,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \mu} = (1 - \phi^{(0)}) + \theta^{(0)} x_{1,t-1}$$

$$x_{2,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \phi} = (z_{t-1} - \mu^{(0)}) + \theta^{(0)} x_{2,t-1}$$

$$x_{3,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \theta} = \theta^{(0)} x_{3,t-1} - \hat{a}_{t-1}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> คำนวณค่า $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = \underset{\sim}{\beta}^{(0)} + \Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์ที่ได้ ถ้า $\frac{|\mu^{(1)} - \mu^{(0)}|}{\mu^{(0)}} < 0.001$ และ $\frac{|\phi^{(1)} - \phi^{(0)}|}{\phi^{(0)}} < 0.001$ และ $\frac{|\theta^{(1)} - \theta^{(0)}|}{\theta^{(0)}} < 0.001$ ให้หยุดการทำซ้ำ แต่ถ้าค่าที่ได้นั้นยังไม่ถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนดไว้ให้กำหนด $\mu^{(0)} = \mu^{(1)}, \phi^{(0)} = \phi^{(1)}$, $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$ และ $z_0 = \mu^{(1)}$ จากนั้นย้อนกลับไปเริ่มขั้นตอนที่ 2 ใหม่

สำหรับการกำหนดค่าเริ่มต้น $\mu^{(0)}$ $\phi^{(0)}$ และ $\theta^{(0)}$ ในขั้นตอนที่ 1 นั้นในการวิจัยครั้งนี้นั้น จะใช้วิธีประมาณ $\mu^{(0)}$ ด้วย $\bar{z}$ จากนั้นแปรค่า $\phi^{(0)}$ และ $\theta^{(0)}$ ตั้งแต่ -0.999 ถึง 0.999 เพื่อหาค่า $\phi^{(0)}$ และ $\theta^{(0)}$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $S(\underset{\sim}{\beta})$ มีค่าต่ำสุด

สำหรับการวนซ้ำใน ตัวแบบ MA(1) และ ARMA(1,1) นั้นจะกำหนดรอบที่วนสูงสุดเอาไว้ล่วงหน้า โดยการวิจัยครั้งนี้กำหนดไว้ 10 รอบ ถ้าภายใน 10 รอบค่าที่ได้นั้นยังไม่ลู่เข้า ก็จะทำการปรับปรุงค่าเริ่มต้นโดยอาจจะบวกเพิ่มหรือปรับให้ลดลงเล็กน้อย เพื่อให้เกิดการลู่เข้าและได้ค่าของตัวประมาณ

2.3.2 **วิธีประมาณร่วมของพารามิเตอร์ตัวแบบและผลกระทบของค่าผิดปกติ** (Joint Estimation of Model Parameters and Outliers Effect)

วิธีนี้อาศัยกระบวนการวนซ้ำในการตรวจหาข้อมูลที่ผิดปกติ และเมื่อตรวจพบจึงค่อยทำการปรับปรุงข้อมูล ซึ่งกระบวนการเหล่านี้มีหลักการคือให้ z_t เป็นอนุกรมเวลาตัวแบบ ARMA(p,q)

$$\phi(B)(z_t - \mu) = \theta(B)a_t$$

เมื่อ $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p)$

$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q)$

ดังนั้น $z_t = \mu(1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p) + \phi_1 z_{t-1} + \ldots.. + \phi_p z_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \ldots.. - \theta_q a_{t-q} + a_t$

จากนั้นกำหนดตัวแบบอนุกรมเวลาที่มีปัจจัยภายนอกเข้ามากระทบ หรือ อนุกรมเวลาที่มีค่าผิดปกติเกิดขึ้น k ครั้ง ณ เวลา $t_1, t_2, \ldots, t_k$ คือ

$$z_t^* = z_t + \sum_{j=1}^{k} \omega_t \frac{\theta(B)}{\phi(B)} I_t(t_j)$$ [2]

เมื่อ z_t^*	คือ	ข้อมูลที่ผิดปกติ
ω	คือ	ขนาดของผลกระทบค่าผิดปกติ (magnitude outlier effect)
$I_t(t_j)$	คือ	ฟังก์ชันดัชนี มีค่าเป็น 0 เมื่อ $t \neq t_j$ และ
		มีค่าเป็น 1 เมื่อ $t = t_j$

จากตัวแบบข้างบนจะเห็นว่านอกจากจะต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบอนุกรมเวลาแล้ว ยังมีสิ่งที่จะต้องหาเพิ่มอีกคือ ตำแหน่งเวลาที่เกิดขึ้นมูลผิดปกติขึ้น และ ค่า ω แต่ปัญหาในทางปฏิบัตินั้น คือเราจะไม่ทราบ ค่า ω และเป็นการยากที่เราจะทราบว่าเกิดค่าผิดปกติขึ้นกี่ตัว และ เกิดขึ้น ณ ตำแหน่งเวลาใดบ้าง ดังนั้น Chen และ Lui จึงได้เสนอกระบวนการในการวนซ้ำเพื่อ ตรวจหาตำแหน่งของค่าผิดปกติ ปรับปรุงข้อมูลที่ผิดปกติ และประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบ โดยการประมาณพารามิเตอร์ตัวแบบ นั้นจะใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least Squares Method : LS)[3] ซึ่งคำนวณจากข้อมูลที่มีการปรับปรุงแล้ว โดยกระบวนการวนซ้ำของ Chen และ Lui มีรายละเอียดในแต่

---

[2] George E.P. Box and Gwilym M. Jenkins,Time Series Analysis Forecasting and Control(Prentice-Hall,1994),p470

[3] วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล,"การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบอนุกรมเวลา",(วิทยานิพนธ์ ปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย),2546.

ละขั้นตอนดังนี้ โดยกำหนดให้ $\hat{\beta}_{LS} = (\mu, \phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)^T$ แทนค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะความควรจะเป็นสูงสุด

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ในขั้นตอนนี้มีจุดประสงค์หลักคือ ประมาณค่า $\hat{\beta}_{LS}$ ในเบื้องต้น และ ค้นหาตำแหน่งที่อาจจะเกิดค่าผิดปกติขึ้น

1.1 ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบ $\hat{\beta}_{LS}$ ด้วยวิธีภาวะความควรจะเป็นสูงสุด โดยอาศัยข้อมูลจาก ค่า z_t เดิม ที่ยังไม่มีการปรับปรุง จากนั้นหาค่าส่วนตกค้าง (residuals) $\hat{a}_t$ โดย

$$\hat{a}_t = z_t - \hat{\mu}(1 - \hat{\phi}_1 - \ldots - \hat{\phi}_p) - \hat{\phi}_1 z_{t-1} - \ldots - \hat{\phi}_p z_{t-p} + \hat{\theta}_1 \hat{a}_{t-1} + \ldots + \hat{\theta}_q \hat{a}_{t-q}$$

และ คำนวณค่า $\hat{\sigma}_a = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} \hat{a}_t^2}{n}}$

1.2 คำนวณค่า $\tau(t)$ ซึ่งเสนอโดย Chang Tao และ Chen (1988) และสามารถประมาณด้วย

$$\hat{\tau}(t) = \frac{\hat{\omega}_t}{\sqrt{Var(\hat{\omega})}} = \frac{\hat{a}_t}{\hat{\sigma}_a} \quad \text{เมื่อ} \quad t = 1, \ldots, n$$

1.3 ตรวจสอบดูว่าพบค่า $\max\{|\hat{\tau}(t)|\} > 3.5$ หรือไม่ ถ้าไม่พบให้ข้ามไปที่ 1.4 แต่ถ้าพบแสดงว่าอนุกรมเวลาชุดนี้มีค่าผิดปกติเกิดขึ้น ดังนั้นจึงให้ทำการปรับปรุงข้อมูลและส่วนตกค้าง ซึ่งมีวิธีการคือ $\tilde{z}_{t+k} = z_{t+k} - (\hat{\omega}_t \hat{\psi}_k)$ เมื่อ $k \geq 0$ และ $\tilde{a}_t = \hat{a}_t - \hat{\omega}_t = 0$ ซึ่ง ค่า $\hat{\psi}_k$ นั้นจะมีค่าแยกตามแต่ละตัวแบบดังนี้[4] คือ

ในตัวแบบ AR(1) จะมีค่าเป็น $\hat{\psi}_k = \hat{\phi}^k$ เมื่อ $k \geq 0$

ในตัวแบบ MA(1) จะมีค่าเป็น $\hat{\psi}_0 = 1$, $\hat{\psi}_1 = -\hat{\theta}$ และ $\hat{\psi}_k = 0$ เมื่อ $k \geq 2$

ในตัวแบบ ARMA(1,1) จะมีค่าเป็น $\hat{\psi}_0 = 1$ และ $\hat{\psi}_k = \hat{\phi}^{k-1}(\hat{\phi} - \hat{\theta})$ เมื่อ $k \geq 1$

จากนั้นทำการประมาณ $\hat{\sigma}_a$ ใหม่โดยใช้ค่าส่วนตกค้างที่ปรับปรุงแล้ว จากนั้นกลับไปทำขั้นตอนที่ 1.2 และ 1.3 ใหม่ โดยใช้ $\hat{\beta}_{LS}$ ตัวเดิม จาก 1.1 ทำซ้ำจนกระทั่งไม่พบตำแหน่งเวลา t ที่เกิดค่าผิดปกติเพิ่ม

1.4 ถ้าไม่พบค่าผิดปกติซ้ำในการทำซ้ำรอบแรกแสดงว่าอนุกรมเวลาไม่มีค่าผิดปกติให้หยุดกระบวนการและใช้ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_{LS}$ ที่ได้ไปใช้งานต่อไป แต่ ถ้าพบค่าผิดปกติก็ให้ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_{LS}$ โดยใช้ค่าสังเกตที่ปรับปรุงแล้ว ($\tilde{z}_t$) จากนั้นให้ไปทำต่อในขั้นตอนที่ 2

---

[4] Willian W.S. Wei ,Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods,Addison Wesley Publishing,P53-55

<u>ขั้นตอนที่2</u>

2.1 สมมุติว่าจากขั้นตอนที่ 1 ตรวจพบค่าผิดปกติทั้งหมดจำนวน k ค่า ณ ตำแหน่งเวลา $t_1,\dots,t_k$ ให้คำนวณค่า $\hat{\omega}_j = \hat{a}_j$ เมื่อ $j = 1,\dots,k$ (คือเลือกเอาเฉพาะ $\hat{a}_t$ ที่มาจากตำแหน่งเวลาที่เกิดค่าผิดปกติขึ้นเท่านั้น)

2.2 คำนวณค่า $\hat{\tau}_j = \dfrac{\hat{\omega}_j}{\sqrt{Var(\hat{\omega})}}$ เมื่อ $j = 1,\dots,k$ ถ้า $\min\{|\hat{\tau}_j|\} = \hat{\tau}_r < 3.5$ ให้ตัดค่าที่ t_r ออกจากรายการของค่าผิดปกติ ดังนั้นจะเหลือจำนวนข้อมูลที่ผิดปกติอยู่อีก k-1 ตัว จากนั้นย้อนกลับไปทำที่ 2.1 ใหม่ แต่ถ้า $\min\{|\hat{\tau}_j|\} = \hat{\tau}_r > 3.5$ ก็ให้ไปทำ ที่ขั้นตอน 2.3

2.3 ใช้ค่า $\hat{\omega}_j$ ตัวล่าสุดไปปรับปรุงข้อมูล ณ ตำแหน่งนั้น โดยวิธีการปรับเหมือน 1.3

2.4 ใช้ข้อมูลที่ปรับปรุงแล้วมาคำนวณ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{LS}$ จากนั้นลองเปรียบเทียบดูว่าค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ได้ในรอบนี้ กับรอบก่อนหน้ามากกว่า 0.001 หรือไม่ถ้าเกินให้กลับไปทำที่ 2.1 ใหม่ แต่ในทางกลับกันถ้าน้อยกว่า ให้หยุดกระบวนการ และถือว่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{LS}$ ตัวล่าสุดที่ได้เป็นค่าประมาณพารามิเตอร์ของวิธีนี้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_{JEMPOE}$

2.3 **วิธีประมาณแบบเอ็ม** (M-Method)

หลักการทั่วไปของวิธีประมาณแบบเอ็ม คือ การทำให้ผลรวมของฟังก์ชันความสูญเสีย $\rho(.)$ ภายใต้พารามิเตอร์ตัวแบบอนุกรมเวลา $\underset{\sim}{\beta}$ มีค่าต่ำสุด หรือ

$$\min_{\underset{\sim}{\beta}} \sum_{t=1}^{n} \rho\left(\frac{a_t}{\sigma_a}\right)$$

โดย σ_a คือ สเกลพารามิเตอร์ (Scale Parameter) ของการแจกแจงค่าความผิดพลาดสุ่ม และ $\rho(u_t)$ เมื่อ $u_t = \dfrac{a_t}{\sigma_a}$ เป็นฟังก์ชันความสูญเสียของ Huber ซึ่งมีรูปแบบฟังก์ชันคือ

$$\begin{aligned} \rho(u_t) &= \frac{1}{2}u_t^2 && \text{เมื่อ } |u_t| \le c_h \\ &= c_h|u_t| - \frac{1}{2}c_h^2 && \text{เมื่อ } |u_t| > c_h \end{aligned}$$

ค่า c_h เป็นค่า Tuning constant โดยมีหลักเกณฑ์ในการกำหนดคือ การกำหนดค่านั้น c_h จะขึ้นอยู่กับการแจกแจงของ a_t กล่าวคือถ้าการแจกแจงของ a_t มีสัดส่วนการปลอมปนของค่าผิดปกติมากค่า c_h ที่ดีก็ควรจะมีค่าน้อย ๆ แต่ในทางกลับกันถ้า a_t มีการแจกแจงที่มีสัดส่วนการปลอมปนน้อย ๆ เช่น การแจกแจงแบบปกติ ค่า c_h ที่ดีก็ควรจะมีค่ามาก แต่ปัญหาในทางปฏิบัติก็คือเราไม่ทราบการ

แจกแจงที่แท้จริงของ a_t ดังนั้นหลักในการกำหนดค่า c_h ที่ดีนั้นควรจะเป็นค่าที่ทำให้ตัวประมาณที่ได้สามารถใช้การได้ดีในกรณี a_t ไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติ และ ไม่สูญเสียประสิทธิภาพมากจนเกินไปในกรณี a_t มีการแจกแจงแบบปกติ เกณฑ์อันหนึ่งที่สอดคล้องกับแนวคิดในข้างต้นและนิยมใช้กันคือกำหนดค่า c_h ที่ทำให้ตัวประมาณที่ได้นั้นให้ค่า asymptotic relative efficiency (ARE) 95 % เมื่อเทียบกับตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดภายใต้สถานการณ์ a_t มีการแจกแจงแบบปกติ ในขั้นต้น Huber ได้ให้คำแนะนำว่าค่า c_h นั้นควรจะมีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง 2 ต่อมา สำหรับวิธีประมาณเอ็ม Allende ได้กำหนดค่า c_h ที่ให้ค่า ARE 95 % คือ 2 ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้จะกำหนด $c_h = 2$ และ จะประมาณ σ ด้วย ตัวประมาณ แบบมัธยฐานของค่าสัมบูรณ์ของความเบี่ยงเบน (Median Absolute Deviation : MAD) ซึ่งเสนอโดย Mosteller และ Tukey (1977) และจะถูกปรับด้วยค่าคงที่ 1.4826 ซึ่งจะทำให้ $\hat{\sigma}$ ที่ได้นั้นเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงเมื่อ ขนาดตัวอย่างมีค่ามาก และ $\hat{\sigma}$ มีสูตรคำนวณคือ $\hat{\sigma} = 1.4826\left[Med(|\,\hat{a}_t - Med(\hat{a}_t)\,|)\right]$ เมื่อ $t = 1,\dots,n$

ลำดับต่อไปนั้นจะขออธิบายในรายละเอียดของวิธีประมาณแบบเอ็ม ที่จะนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบ AR(1) MA(1) และ ARMA(1,1) ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1) กรณีตัวแบบ AR(1)

สมการตัวแบบ AR(1) $z_t = c + \phi z_{t-1} + a_t$ ฟังก์ชัน a_t จะเป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้นซึ่งมีรูปแบบคือ $a_t = z_t - c - \phi z_{t-1}$ เมื่อ $c = \mu(1-\phi)$ จากนั้นเช่นเดียวกับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบมีเงื่อนไขพิจารณาสมการที่ $t = 1,\dots,n$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
z_1 &= c + \phi_1 z_0 + a_1 \\
z_2 &= c + \phi_1 z_1 + a_2 \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
z_n &= c + \phi_1 z_{n-1} + a_n
\end{aligned}
$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $z_0 = \bar{z}$ จากนั้นสมการข้างบนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ คือ

$$
\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ z_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ . & . \\ 1 & z_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times 2} \quad \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} c \\ \phi \end{bmatrix}_{2\times 1} \quad \underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}
$$

จากฟังก์ชัน $\sum_{i=1}^{n}\rho(\frac{a_i}{\sigma_a})$ ซึ่งจากเมทริกซ์ข้างบนกำหนดให้เท่ากับ $\sum_{i=1}^{n}\rho(\frac{y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\underset{\sim}{\beta}}{\sigma_a})$ โดย $\underset{\sim}{x}_i^T=(1,x_{i1})_{1x2}$ จากนั้นหาค่าอนุพันธ์ของ $\sum_{i=1}^{n}\rho(\frac{y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\underset{\sim}{\beta}}{\sigma_a})$ โดยกำหนดให้ $\psi(\frac{y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\underset{\sim}{\beta}}{\sigma_a})=\rho(\frac{y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\underset{\sim}{\beta}}{\sigma_a})'$ เมื่อ

$$
\begin{aligned}
\psi(u_i) &= u_i & \text{เมื่อ } & -c_h\le u_i\le c_h\\
&= c_h & \text{เมื่อ } & u_i>c_h\\
&= -c_h & \text{เมื่อ } & u_i<-c_h
\end{aligned}
$$

โดย $u_i=\frac{y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\underset{\sim}{\beta}}{\sigma_a}$ จะได้สมการปกติจำนวน 2 สมการ คือ

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\psi(\frac{y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\hat{\underset{\sim}{\beta}}}{\sigma_a})=0 \qquad \text{เมื่อ} \qquad j=1,\dots,2$$

และจากวิธีคำนวณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบ (The Iterative Reweighed Least Square : IRWLS) ซึ่งเสนอโดย Beaton และ Tukey (1964) ซึ่งได้กำหนดให้ w_i เป็นค่าถ่วงน้ำหนักมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งมีรูปแบบคือ $w_i=\frac{\psi\left((y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\hat{\underset{\sim}{\beta}})/\sigma_a\right)}{(y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\hat{\underset{\sim}{\beta}})/\sigma_a}$ ดังนั้นสมการปกติที่ได้ก็จะมีค่าเท่ากับ

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}w_i(y_i-\underset{\sim}{x}_i^T\hat{\underset{\sim}{\beta}})=0\\
&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}w_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_{ij}w_i\underset{\sim}{x}_i^T\hat{\underset{\sim}{\beta}}=0\\
&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}w_i\underset{\sim}{x}_i^T\hat{\underset{\sim}{\beta}}=\sum_{i=1}^{n}x_{ij}w_iy_i
\end{aligned}
$$

ซึ่งเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น $X^TWX\hat{\underset{\sim}{\beta}}=X^TW\underset{\sim}{y}$ เมื่อ $W=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0\\ 0 & w_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ . & . & . & w_n\end{bmatrix}_{nxn}$ ดังนั้นจะได้ว่าค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}=(X^TWX)^{-1}X^TW\underset{\sim}{y}$ แต่เนื่องจากเมทริกซ์ W นั้นขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงการประมาณเสียใหม่ โดยใช้การวนซ้ำ โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(0)}$ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด จากนั้นนำ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(0)}$ มาคำนวณเมทริกซ์ $W^{(0)}$ จากนั้นคำนวณค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(1)}=(X^TW^{(0)}X)^{-1}X^TW^{(0)}\underset{\sim}{y}$ ซึ่งเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ในรอบใหม่ เมื่อใช้กระบวนการวนซ้ำนี้ไปเรื่อย ๆ จะสรุปเป็นสูตรคำนวณได้ดังนี้

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}}^{(k+1)}=(X^TW^{(k)}X)^{-1}X^TW^{(k)}\underset{\sim}{y} \quad \text{เมื่อ} \quad k=0,1,2,\dots$$

ในการคำนวณนั้นจะทำจนกระทั่งค่าที่ได้ในรอบปัจจุบันกับรอบก่อนหน้ามีค่าไม่ต่างกันมากนัก และจากกล่าวมานั้นสามารถสรุปเป็นขั้นตอนวิธีการคำนวณได้ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = (c^{(0)}, \phi^{(0)})^T$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด และ $z_0 = \bar{z}$

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณหาค่า $\hat{a}_t = z_t - c^{(0)} - \phi^{(0)} z_{t-1}$ และ $\sigma_a^{(0)}$ เมื่อ $t = 1, \ldots, n$

ขั้นตอนที่ 3 คำนวณค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & w_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & w_n \end{bmatrix}_{n \times n}$ ค่า w_t คำนวณจาก ฟังก์ชัน $\dfrac{\psi(u_t)}{u_t}$ เมื่อ $u_t = \dfrac{\hat{a}_t}{\sigma_a^{(0)}}$ โดย w_t คือ น้ำหนักของค่าสังเกตที่ t และมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณค่า $\underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้ำสุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = (X^T W X)^{-1} (X^T W \underset{\sim}{y})$ เมื่อกำหนดให้

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ z_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{และ} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ . & . \\ 1 & z_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times 2}$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการเปรียบเทียบค่าโดย ดูว่า $\dfrac{|c^{(0)} - c^{(1)}|}{c^{(0)}} < 0.001$ และ $\dfrac{|\phi^{(0)} - \phi^{(1)}|}{\phi^{(0)}} < 0.001$ หรือไม่ ถ้าไม่ ให้กำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = \underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ และ $z_0 = \mu^{(1)} = \dfrac{c^{(1)}}{1 - \phi^{(1)}}$ จากนั้นเริ่มต้นขั้นตอนที่ 2 ใหม่ เพื่อที่จะเข้าสู่การทำซ้ำรอบใหม่ต่อไป แต่ ถ้าใช่ ให้หยุดการทำซ้ำ จากนั้น กำหนดให้ $\hat{\phi}_M = \phi^{(1)}$ และ คำนวณหาค่า $\hat{\mu}_M = \dfrac{c^{(1)}}{1 - \phi^{(1)}}$ แล้วนำ $\hat{\mu}_M$ และ $\hat{\phi}_M$ ที่ได้เป็นค่าของตัวประมาณเอ็ม

2) กรณีตัวแบบ MA(1)

จากสมการตัวแบบ MA(1) จะได้ว่า $a_t = z_t - \mu + \theta a_{t-1}$ จากนั้นหาค่าอนุพันธ์ของ $\sum_{t=1}^{n} \rho(\dfrac{a_t}{\sigma_a})$ โดยกำหนดให้ฟังก์ชัน $\psi(u_t) = \rho'(u_t)$ ซึ่งมีรูปแบบฟังก์ชัน คือ

$$\begin{aligned} \psi(u_t) &= u_t && \text{เมื่อ } -c_h \le u_t \le c_h \\ &= c_h && \text{เมื่อ } u_t > c_h \\ &= -c_h && \text{เมื่อ } u_t < -c_h \end{aligned}$$

เมื่อ $u_t = \dfrac{a_t}{\sigma_a}$ ก็จะได้สมการ 2 สมการดังนี้

$$\sum_{t=1}^{n}\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})\left(\frac{\partial a_t}{\partial\theta}\right)=0$$
$$\sum_{t=1}^{n}\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})\left(\frac{\partial a_t}{\partial\mu}\right)=0$$

และจากวิธีการของ Beaton และ Tukey จากสมการปกติกำหนดค่าถ่วงน้ำหนัก $w_t=\frac{\psi(u_t)}{u_t}$ โดย $0<w_t<1$ จากนั้นแทนค่า w_t ในสมการจะได้เป็น

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})}{(\frac{a_t}{\sigma_a})}(\frac{a_t}{\sigma_a})\left(\frac{\partial a_t}{\partial\theta}\right)=0 \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{t=1}^{n}w_t a_t\frac{\partial a_t}{\partial\theta}=0$$

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})}{(\frac{a_t}{\sigma_a})}(\frac{a_t}{\sigma_a})\left(\frac{\partial a_t}{\partial\mu}\right)=0 \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{t=1}^{n}w_t a_t\frac{\partial a_t}{\partial\mu}=0$$

จากสมการข้างบนนั้นจะเห็นว่าค่าของ w_t นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ a_t ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงใช้วิธีคำนวณแบบกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบ ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> กำหนดค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}=(\mu^{(0)},\theta^{(0)})^T_{1\times 2}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> คำนวณหาค่า $\hat{a}_t=z_t-\mu^{(0)}+\theta^{(0)}\hat{a}_{t-1}$ และ $\sigma^{(0)}$ เมื่อ $t=1,\ldots,n$ โดยกำหนด $\hat{a}_0=0$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> คำนวณค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $W=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0\\ 0 & w_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & w_n\end{bmatrix}_{n\times n}$ ค่า w_t คำนวณจากฟังก์ชัน $\frac{\psi(u_t)}{u_t}$ เมื่อ $u_t=\frac{\hat{a}_t}{\sigma_a^{(0)}}$ โดย w_t คือ น้ำหนักของค่าสังเกตที่ t และมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> คำนวณค่าเวกเตอร์ $\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}=(X^TWX)^{-1}(X^TW\underset{\sim}{a}_0)$ เมื่อ

$$X^T=\begin{bmatrix}-x_{1,1} & -x_{1,2} & . & -x_{1,n}\\ -x_{2,1} & -x_{2,2} & . & -x_{2,n}\end{bmatrix}_{2\times n} \quad \underset{\sim}{a}_0=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ .\\ \hat{a}_n\end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{จะได้}$$

$$\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{2,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{2,t}^2 \end{bmatrix}_{2x2}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{1,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{2,t} \end{bmatrix}_{2x1}$$

เมื่อ $x_{1,t} = -\dfrac{\partial \hat{a}_t}{\partial \mu} = 1 + \theta^{(0)} x_{1,t-1}$

$x_{2,t} = -\dfrac{\partial \hat{a}_t}{\partial \theta} = \theta^{(0)} x_{2,t-1} - \hat{a}_{t-1}$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ปรับปรุงค่าประมาณ โดย $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = \underset{\sim}{\beta}^{(0)} + \Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์ที่ได้ ถ้า $\dfrac{|\mu^{(1)} - \mu^{(0)}|}{\mu^{(0)}} < 0.001$ และ $\dfrac{|\theta^{(1)} - \theta^{(0)}|}{\theta^{(0)}} < 0.001$ ให้หยุดการทำซ้ำ และกำหนด $\underset{\sim}{\hat{\beta}}_M = \underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ และถือว่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}}_M$ ที่ได้เป็นค่าประมาณพารามิเตอร์ของวิธีนี้ แต่ถ้าค่าที่ได้นั้นยังไม่ถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนดไว้ให้กำหนด $\mu^{(0)} = \mu^{(1)}$ และ $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$ จากนั้นย้อนกลับไปเริ่มขั้นตอนที่ 2 ใหม่

3) ตัวแบบ ARMA(1,1)

จากสมการตัวแบบ ARMA(1,1) จะได้ว่า $a_t = z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}$ จากนั้นหาค่าอนุพันธ์ของ $\sum_{t=1}^{n} \rho(\frac{a_t}{\sigma_a})$ โดยกำหนดให้ $\psi(.) = \rho'(.)$ เช่นเดียวกับตัวแบบ MA(1) จะได้สมการ 3 สมการ

$$\sum_{t=1}^{n} \psi(\frac{a_t}{\sigma_a}) \left(\frac{\partial a_t}{\partial \phi} \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} \psi(\frac{a_t}{\sigma_a}) \left(\frac{\partial a_t}{\partial \theta} \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} \psi(\frac{a_t}{\sigma_a}) \left(\frac{\partial a_t}{\partial \mu} \right) = 0$$

และจากวิธีการของ Beaton และ Tukey จากสมการปกติกำหนดค่าถ่วงน้ำหนัก $w_t = \dfrac{\psi(u_t)}{u_t}$ โดย $0 < w_t < 1$ จากนั้นแทนค่า w_t ในสมการจะได้เป็น

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})}{(\frac{a_t}{\sigma_a})} (\frac{a_t}{\sigma_a}) \left(\frac{\partial a_t}{\partial \phi} \right) = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{t=1}^{n} w_t a_t \frac{\partial a_t}{\partial \phi} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})}{(\frac{a_t}{\sigma_a})}(\frac{a_t}{\sigma_a})\left(\frac{\partial a_t}{\partial\theta}\right)=0 \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{t=1}^{n}w_t a_t\frac{\partial a_t}{\partial\theta}=0$$

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\psi(\frac{a_t}{\sigma_a})}{(\frac{a_t}{\sigma_a})}(\frac{a_t}{\sigma_a})\left(\frac{\partial a_t}{\partial\mu}\right)=0 \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{t=1}^{n}w_t a_t\frac{\partial a_t}{\partial\mu}=0$$

จากสมการข้างบนนั้นจะเห็นว่าค่าของ w_t นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ a_t ดังนั้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ จึงใช้วิธีคำนวณแบบกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบ ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังต่อไปนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> กำหนดค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}=(\mu^{(0)},\phi^{(0)},\theta^{(0)})^T_{1\times3}$ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด และ $z_0=\overline{z}$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> คำนวณหาค่า $\hat{a}_t=(z_t-\mu^{(0)})-\phi^{(0)}(z_{t-1}-\mu^{(0)})+\theta^{(0)}\hat{a}_{t-1}$ และ $\sigma_a^{(0)}$ เมื่อ $t=1,\dots,n$ โดยกำหนด $\hat{a}_0=0$ และ

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> คำนวณค่าเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $W=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0\\ 0 & w_2 & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & w_n\end{bmatrix}_{n\times n}$ ค่า w_t คำนวณจากฟังก์ชัน $\dfrac{\psi(u_t)}{u_t}$ เมื่อ $u_t=\dfrac{\hat{a}_t}{\sigma_a^{(0)}}$ โดย w_t คือ น้ำหนักของค่าสังเกตที่ t และมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> คำนวณค่าเวกเตอร์ $\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}=(X^TWX)^{-1}(X^TW\underset{\sim}{a}_0)$ เมื่อ

$$X^T=\begin{bmatrix} -x_{1,1} & -x_{1,2} & . & -x_{1,n}\\ -x_{2,1} & -x_{2,2} & . & -x_{2,n}\\ -x_{3,1} & -x_{3,2} & . & -x_{3,n}\end{bmatrix}_{3\times n} \quad \text{และ} \quad \underset{\sim}{a}_0=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ .\\ \hat{a}_n\end{bmatrix}_{n\times1}$$

จะได้ว่า $$\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}=\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n}w_t x_{1,t}^2 & \sum_{t=1}^{n}w_t x_{1,t}x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n}w_t x_{1,t}x_{3,t}\\ \sum_{t=1}^{n}w_t x_{1,t}x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n}w_t x_{2,t}^2 & \sum_{t=1}^{n}w_t x_{2,t}x_{3,t}\\ \sum_{t=1}^{n}w_t x_{1,t}x_{3,t} & \sum_{t=1}^{n}w_t x_{2,t}x_{3,t} & \sum_{t=1}^{n}w_t x_{3,t}^2\end{bmatrix}^{-1}_{3\times3}\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n}w_t\hat{a}_t x_{1,t}\\ \sum_{t=1}^{n}w_t\hat{a}_t x_{2,t}\\ \sum_{t=1}^{n}w_t\hat{a}_t x_{3,t}\end{bmatrix}_{3x1}$$

เมื่อ $x_{1,t} = -\dfrac{\partial \hat{a}_t}{\partial \mu} = (1-\phi^{(0)}) + \theta^{(0)} x_{1,t-1}$

$$x_{2,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \phi} = (z_{t-1} - \mu^{(0)}) + \theta^{(0)} x_{2,t-1}$$

$$x_{3,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \theta} = \theta^{(0)} x_{3,t-1} - \hat{a}_{t-1}$$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ปรับปรุงค่าประมาณ โดย $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = \underset{\sim}{\beta}^{(0)} + \Delta\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์ที่ได้ ถ้า $\dfrac{|\mu^{(1)} - \mu^{(0)}|}{\mu^{(0)}} < 0.001$ และ $\dfrac{|\phi^{(1)} - \phi^{(0)}|}{\phi^{(0)}} < 0.001$ และ $\dfrac{|\theta^{(1)} - \theta^{(0)}|}{\theta^{(0)}} < 0.001$ ให้หยุดการทำซ้ำและกำหนด $\hat{\underset{\sim}{\beta}}_M = \underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ โดยถือว่า $\underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ ที่ได้เป็นค่าประมาณพารามิเตอร์ของวิธีนี้ แต่ถ้าค่าที่ได้นั้นยังไม่ถึงเกณฑ์การลู่เข้าที่กำหนดไว้ให้กำหนด $\mu^{(0)} = \mu^{(1)}, \phi^{(0)} = \phi^{(1)}$, $\theta^{(0)} = \theta^{(1)}$ และ $z_0 = \mu^{(1)}$ จากนั้นย้อนกลับไปเริ่มขั้นตอนที่ 2 ใหม่

สำหรับการวนซ้ำในทุก ๆ ตัวแบบนั้นจะกำหนดรอบที่วนสูงสุดเอาไว้ล่วงหน้า โดยการวิจัยครั้งนี้กำหนดไว้ 10 รอบ ถ้าภายใน 10 รอบค่าที่ได้นั้นยังไม่ลู่เข้า ก็จะทำการปรับปรุงค่าเริ่มต้นโดยอาจจะบวกเพิ่มหรือปรับให้ลดลงเล็กน้อย เพื่อให้เกิดการลู่เข้าและได้ค่าของตัวประมาณ

2.4 **วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยบูทสแทร็พ** (Bootstrap Weighted Least Squares Method)

ในปี 2544 Claudio Agostinelli ได้เสนอวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบอนุกรมเวลากรณีที่มีค่าผิดปกติเกิดขึ้น โดยวิธีนี้มีหลักการคือการทำให้ฟังก์ชันผลรวมความผิดพลาดยกกำลังสองแบบถ่วงน้ำหนักมีค่าต่ำสุด ภายใต้พารามิเตอร์ของตัวแบบ $\underset{\sim}{\beta}$ โดยฟังก์ชันผลรวมความผิดพลาดยกกำลังสองโดยมีรูปแบบฟังก์ชันคือ

$$S_w(\underset{\sim}{\beta}) = \sum_{t=1}^{n} w_t a_t^2$$

โดย w_t เป็นค่าถ่วงน้ำหนักที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งมีรูปแบบคือ $w_t = \min\{1, \dfrac{[A(\delta_t)+1]^+}{\delta_t + 1}\}$

เมื่อ $A(\delta_t)$ คือ ฟังก์ชัน Hellinger Residual Adjust ซึ่งมีรูปแบบคือ $A(\delta_t) = 2\left(\sqrt{(\delta_t + 1)} - 1\right)$

δ_t คือ ค่า Pearson Residuals โดย δ_t มีรูปแบบคือ $\delta_t = \dfrac{f^*(a_t, \hat{F}_n)}{m^*(a_t; \sigma_a^2)} - 1$

สำหรับ $f^*(a_t, \hat{F}_n)$ คือ ตัวประมาณ nonparametric kernel density มีรูปแบบคือ

$$f^*(a_t, \hat{F}_n) = \int k(a_t; g) d\hat{F}_n(\underset{\sim}{\beta})$$

เมื่อ $k(a_t; g)$ เป็น kernel density และ g เป็นค่า bandwidth

และสำหรับ $m^*(a_t; \sigma_a^2)$ คือ smoothed model มีรูปแบบคือ

$$m^*(a_t; \sigma_a^2) = \int k(a_t; g) dM(\sigma_a^2)$$

เมื่อ $M(\sigma_a^2)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสม และ g เป็นค่า bandwidth

จากงานวิจัยที่ Agostinelli ได้ศึกษา เขาได้ใช้ฟังก์ชัน

$$d_t = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(\dfrac{-(a_t - a_j)^2}{2(g)} \right)}{n}$$

ในการประมาณ $f^*(a_t, \hat{F}_n)$ เมื่อ ฟังก์ชัน kernel คือ Gaussian kernel และ $g = 0.03\sigma_a^2$

$$rm_t = \frac{1}{\sqrt{g}} \exp\left(\frac{-a_t^2}{2(g)} \right)$$

ในการประมาณ $m^*(a_t; \sigma_a^2)$ ฟังก์ชัน kernel คือ Gaussian kernel และ $g = 1.03\sigma_a^2$

เมื่อ $t = 1, \ldots, n$

ลำดับต่อไปนั้นจะขออธิบายในรายละเอียดของวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยบูทสแทร็พ ที่จะนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบ AR(1) MA(1) และ ARMA(1,1) ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1) กรณีตัวแบบ AR(1)

ในกรณีตัวแบบ AR(1) ฟังก์ชัน $a_t = z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1}$ เป็นฟังก์ชันแบบเชิงเส้น ดังนั้นในการคำนวณค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (\hat{c}, \hat{\phi})^T_{1x2}$ จึงสามารถทำได้ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้ จากตัวแบบ AR(1)

$$z_t = c + \phi z_{t-1} + a_t \quad \text{เมื่อ} \quad c = \mu(1-\phi)$$

พิจารณาสมการที่ $t = 1, \ldots., n$ ดังนี้

$$\begin{aligned} z_1 &= c + \phi z_0 + a_1 \\ z_2 &= c + \phi z_1 + a_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ z_n &= c + \phi z_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

เมื่อกำหนด $z_0 = \bar{z}$ จากนั้นนำสมการข้างบนมาเขียนในรูปของเมทริกซ์ ได้

$$\underset{\sim}{y}=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad X=\begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & z_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times 2} \quad \underset{\sim}{\beta}=\begin{bmatrix} c \\ \phi \end{bmatrix}_{2\times 1} \quad \underset{\sim}{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

ต้องการหาตัวประมาณ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ของ $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ทำให้ $S_w(\underset{\sim}{\beta})=\sum_{t=1}^{n} w_t a_t^2 = \underset{\sim}{a}^T W \underset{\sim}{a}$ มีค่าต่ำสุด เมื่อ

$\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta}$ และ $W=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & w_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & w_n \end{bmatrix}_{n\times n}$ โดย W เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก

ดังนั้น

$$\begin{aligned} S_w(\underset{\sim}{\beta}) &= (\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta})^T W(\underset{\sim}{y}-X\underset{\sim}{\beta}) \\ &= \underset{\sim}{y}^T W\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\beta}^T X^T W\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y}^T WX\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\beta}^T X^T WX\underset{\sim}{\beta} \\ &= \underset{\sim}{y}^T W\underset{\sim}{y} - 2\underset{\sim}{\beta}^T X^T W\underset{\sim}{y} + \underset{\sim}{\beta}^T X^T WX\underset{\sim}{\beta} \end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \underset{\sim}{\beta}} S_w(\underset{\sim}{\beta})\right|_{\underset{\sim}{\beta}=\hat{\underset{\sim}{\beta}}} = \underset{\sim}{0}$$

ได้

$$-2X^T W\underset{\sim}{y} + 2X^T WX\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

จากนั้นจะได้ว่าค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X^T WX)^{-1}(X^T W\underset{\sim}{y})$

แต่เนื่องจากเมทริกซ์ W นั้นขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ ดังนั้นจึงทำการปรับปรุงการประมาณเสียใหม่ โดยใช้การวนซ้ำ โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $\beta^{(0)}$ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด จากนั้นนำ $\beta^{(0)}$ มาคำนวณเมทริกซ์ $W^{(0)}$ จากนั้นหาคำนวณค่า $\beta^{(1)} = (X^T W^{(0)} X)^{-1}(X^T W^{(0)} \underset{\sim}{y})$ ซึ่งเป็นค่าประมาณพารามิเตอร์ในรอบใหม่ เมื่อใช้กระบวนการวนซ้ำนี้ไปเรื่อย ๆ จะสรุปเป็นสูตรคำนวณได้ดังนี้

$$\beta^{(k+1)} = (X^T W^{(k)} X)^{-1}(X^T W^{(k)} \underset{\sim}{y}) \text{ เมื่อ } k=0,1,\ldots$$

ในการคำนวณนั้นจะทำจนกระทั่งค่าที่ได้ในรอบปัจจุบันกับรอบก่อนหน้ามีค่าไม่ต่างกันมากนัก

Agostinelli ได้แนะนำว่ามีความเป็นไปได้ที่ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณนั้นอาจจะมีมากกว่า 1 คำตอบดังนั้น ในแก้ปัญหานี้ เขาจึงได้เสนอว่าให้กำหนดค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ สำหรับการวนซ้ำในกระบวนการ IRWLS ด้วยวิธีบูทสแทร็พ (Bootstrap) โดยมีวิธีคือให้ทำการสร้าง ค่าสังเกตเทียม (presudo observation) ขึ้นมาหลาย ๆ ชุด โดยอาศัยหลักการของบูทสแทร็พ จากนั้นนำค่าสังเกตเทียมเหล่านั้นมาประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด ผลที่ได้คือเราจะได้ ค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ เป็นจำนวนหลาย ๆ ค่า จากนั้นจึงนำค่าที่ได้เหล่านี้ไปเป็นค่าเริ่มต้นในกระบวนการ IRWLS

จากที่กล่าวมาทั้งหมดในข้างต้นสามารถสรุปวิธีคำนวณในตัวแบบ AR(1) ได้ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> การหาค่าเริ่มต้นในการวนซ้ำด้วยวิธีบูทสแทร็พ

1.1 คำนวณค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (\hat{c},\hat{\phi})^T$ โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

1.2 คำนวณค่า $\hat{a}_t = z_t - \hat{c} - \hat{\phi} z_{t-1}$ เมื่อ $t = 1,..,n$ และ $z_0 = \bar{z}$

1.3 ทำการสุ่ม $\hat{a}_t$ แบบใส่คืนจำนวน n ค่า จะได้ $\hat{a}_t^*$ เมื่อ $t = 1,..,n$ เช่น ในครั้งแรกสุ่มได้ $\hat{a}_5$ ดังนั้น $\hat{a}_1^*$ เท่ากับ $\hat{a}_5$ จากนั้น สุ่มต่อในครั้งที่ 2 ได้ $\hat{a}_8$ ดังนั้น $\hat{a}_2^*$ เท่ากับ $\hat{a}_8$ ทำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งครบ n ค่า โดยค่าที่เราสุ่มได้นั้นมีความเป็นไปได้ว่าอาจจะเป็นที่ที่เราเคยสุ่มได้แล้วก็ได้ ไม่เป็นไร

1.4 นำ $\hat{a}_t^*$ มาสร้าง z_t^* โดยอาศัยตัวแบบ $z_t^* = \hat{c} + \hat{\phi} z_{t-1}^* + \hat{a}_t^*$ เมื่อ $t = 2,..,n$ กำหนด $z_1^* = z_1$

1.5 นำ z_t^* มาประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด จะได้ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (\hat{c}^*,\hat{\phi}^*)^T$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เข้าสู่กระบวนการวนซ้ำ

2.1 กำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = (c^{(0)},\phi^{(0)})^T$ ให้มีค่าเท่ากับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (\hat{c}^*,\hat{\phi}^*)^T$ โดยจะใช้ $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ นี้เป็นค่าเริ่มต้นในการวนซ้ำ

2.2 คำนวณหาค่า $\hat{a}_t = z_t - c^{(0)} - \phi^{(0)} z_{t-1}$, $\sigma_a^{(0)} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{\hat{a}_t^2}{n-2}}$ เมื่อ $t = 1,...,n$

และ $z_0 = \mu^{(0)} = \dfrac{c^{(0)}}{1-\phi^{(0)}}$

2.3 นำค่า $\hat{a}_t$ มาคำนวณค่าถ่วงน้ำหนัก w_t เมื่อ w_t คือ น้ำหนักของค่าสังเกตที่ t

2.4 นำ w_t มาสร้างเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & w_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & w_n \end{bmatrix}_{n\times n}$

2.5 คำนวณค่า $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = (c^{(1)},\phi^{(1)})^T$ ด้วยวิธีกำลังสองน้ำสุดแบบถ่วงน้ำหนัก

$\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = (X^T W X)^{-1}(X^T W \underset{\sim}{y})$ เมื่อกำหนดให้

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ . \\ z_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{และ} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & z_1 \\ . & . \\ 1 & z_{n-1} \end{bmatrix}_{n\times 2}$$

2.6 ทำการเปรียบเทียบค่าโดย ดูว่า $\dfrac{|c^{(0)} - c^{(1)}|}{c^{(0)}} < 0.001$ และ $\dfrac{|\phi^{(0)} - \phi^{(1)}|}{\phi^{(0)}} < 0.001$ หรือไม่

<u>ถ้าไม่</u> ให้คำนวณ $\hat{a}_t = z_t - \hat{c}^{(1)} - \hat{\phi}^{(1)} z_{t-1}$ เมื่อ $t = 1,...,n$ และ $\sigma_a^{(1)} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{w_t \hat{a}_t^2}{\bar{w}n-2}}$ โดย $\bar{w} = \sum_{t=1}^{n} \frac{w_t}{n}$ และกำหนด $\beta^{(0)} = \beta^{(1)}$ จากนั้นเริ่มต้นขั้นตอนที่ 2.3 ใหม่ เพื่อที่จะเข้าสู่การทำซ้ำรอบใหม่ต่อไป

<u>ถ้าใช่</u> ให้หยุดการทำซ้ำ จากนั้นกำหนด $\hat{\phi}^{(b)} = \phi^{(1)}$ และคำนวณหาค่า $\hat{\mu}^{(b)} = \dfrac{c^{(1)}}{1-\phi^{(1)}}$ แล้วนำ $\hat{\mu}^{(b)}$ และ $\hat{\phi}^{(b)}$ ที่ได้เป็นค่าของตัวประมาณ ในรอบที่ b เมื่อ b แทนรอบของบูทสแทร็พ โดย $b = 1,\dots,100$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> เก็บผลลัพธ์ที่ได้

3.1 ตรวจสอบดูว่าผลลัพธ์ของตัวประมาณที่ได้จาก 2.6 นั้นมีครบ 100 ค่าหรือไม่

<u>ถ้าไม่</u> ให้ย้อนกลับไปที่ 1.3 เพื่อเริ่มกระบวนการบูทสแทร็พในรอบใหม่ถัดไป

<u>ถ้าใช่</u> ให้นำผลลัพธ์ที่ได้มาหาค่าเฉลี่ยโดย $\hat{\mu}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \dfrac{\hat{\mu}^{(b)}}{100}$ และ $\hat{\phi}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \dfrac{\hat{\phi}^{(b)}}{100}$ โดยค่า $\hat{\mu}_{BWLS}$ และ $\hat{\phi}_{BWLS}$ ที่ได้จะเป็นค่าของตัวประมาณพารามิเตอร์วิธีบูทสแทร็พกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก

2) กรณีตัวแบบ MA(1)

จากสมการตัวแบบ MA(1) จะได้ว่า $a_t = z_t - \mu + \theta a_{t-1}$ เมื่อกำหนด $a_0 = 0$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นและจากฟังก์ชัน $S_w(\underset{\sim}{\beta})$ เมื่อ $\underset{\sim}{\beta} = (\mu,\theta)^T$ ทำการหาค่าอนุพันธ์ $\dfrac{\partial S_w(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}}$ ก็จะได้ระบบสมการ 2 สมการ คือ

$$\sum_{t=1}^{n} w_t (z_t - \mu + \theta a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \theta} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} w_t (z_t - \mu + \theta a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \mu} = 0$$

จากสมการข้างบนนั้นจะเห็นว่าค่าของ w_t นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ a_t ดังนั้นในการในการคำนวณจึงใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบ

เช่นเดียวกับตัวแบบ AR(1) Agostinelli ได้แนะนำว่ามีความเป็นไปได้ที่ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณนั้นอาจจะมีมากกว่า 1 คำตอบดังนั้น ในแก้ปัญหานี้ เขาจึงได้เสนอว่า ในการกำหนดค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ ให้กับการคำนวณวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบนั้น ให้กำหนดด้วยวิธีบูทสแทร็พ (Bootstrap) ผลที่ได้คือเราจะได้ ค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ เป็นจำนวนหลาย ๆ ค่า

จากที่กล่าวมาทั้งหมดในข้างต้นสามารถสรุปขั้นตอนวิธีคำนวณในตัวแบบ MA(1) ได้ดังนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> การหาค่าเริ่มต้นในการวนซ้ำด้วยวิธีบูทสแทร็พ

1.1 คำนวณค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\hat{\mu},\hat{\theta})^T$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

1.2 คำนวณค่า $\hat{a}_t = z_t - \hat{\mu} + \hat{\theta}\hat{a}_{t-1}$ กำหนด $a_0 = 0$ เมื่อ $t = 1,..,n$

1.3 ทำการสุ่ม $\hat{a}_t$ แบบใส่คืนจำนวน n ค่า จะได้ $\hat{a}_t^*$ เมื่อ $t = 1,..,n$ เช่น ในครั้งแรกสุ่มได้ $\hat{a}_5$ ดังนั้น $\hat{a}_1^*$ เท่ากับ $\hat{a}_5$ จากนั้น สุ่มต่อในครั้งที่ 2 ได้ $\hat{a}_8$ ดังนั้น $\hat{a}_2^*$ เท่ากับ $\hat{a}_8$ ทำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งครบ n ค่า โดยค่าที่เราสุ่มได้นั้นมีความเป็นไปได้ว่าอาจจะเป็นที่ที่เราเคยสุ่มได้แล้วก็ได้ ไม่เป็นไร

1.4 นำ $\hat{a}_t^*$ มาสร้าง z_t^* โดยอาศัยตัวแบบ $z_t^* = \hat{\mu} - \hat{\theta}\hat{a}_{t-1}^* + \hat{a}_t^*$ เมื่อ $t = 1,..,n$ กำหนด $\hat{a}_0^* = 0$

1.5 นำ z_t^* มาประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด จะได้ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (\hat{\mu}^*, \hat{\theta}^*)^T$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เข้าสู่กระบวนการวนซ้ำ

2.1 กำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = (\mu^{(0)}, \theta^{(0)})^T$ ให้มีค่าเท่ากับ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}^* = (\hat{\mu}^*, \hat{\theta}^*)^T$ โดยจะใช้ $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ นี้เป็นค่าเริ่มต้นในการวนซ้ำ

2.2 คำนวณหาค่า $\hat{a}_t = z_t - \hat{\mu}^{(0)} + \hat{\theta}^{(0)}\hat{a}_{t-1}$, $\sigma_a^{(0)} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{\hat{a}_t^2}{n-2}}$ เมื่อ $t = 1,...,n$

2.3 นำค่า $\hat{a}_t$ มาคำนวณค่าถ่วงน้ำหนัก w_t เมื่อ w_t คือ น้ำหนักของค่าสังเกตที่ t

2.4 นำ w_t มาสร้างเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & w_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & w_n \end{bmatrix}_{n\times n}$

2.5 คำนวณค่าเวกเตอร์ $\Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}} = (X^T W X)^{-1}(X^T W \underset{\sim}{a}_0)$ เมื่อ

$$X^T = \begin{bmatrix} -x_{1,1} & -x_{1,2} & . & -x_{1,n} \\ -x_{2,1} & -x_{2,2} & . & -x_{2,n} \end{bmatrix}_{2\times n} \quad \underset{\sim}{a}_0 = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ . \\ \hat{a}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{2,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{2,t}^2 \end{bmatrix}_{2\times 2}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{1,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{2,t} \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

เมื่อ $x_{1,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \mu} = 1 + \theta^{(0)} x_{1,t-1}$

$x_{2,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \theta} = \theta^{(0)} x_{2,t-1} - \hat{a}_{t-1}$

จากนั้นปรับปรุงค่าประมาณ โดย $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = \underset{\sim}{\beta}^{(0)} + \Delta\underset{\sim}{\hat{\beta}}$

2.6 ทำการเปรียบเทียบค่าโดย ดูว่า $\frac{|\mu^{(0)} - \mu^{(1)}|}{\mu^{(0)}} < 0.001$ และ $\frac{|\theta^{(0)} - \theta^{(1)}|}{\theta^{(0)}} < 0.001$ หรือไม่

<u>ถ้าไม่</u> ให้คำนวณ $\hat{a}_t = z_t - \hat{\mu}^{(1)} + \hat{\theta}^{(1)}\hat{a}_{t-1}$ เมื่อ $t = 1,...,n$ และ $\sigma_a^{(1)} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{w_t \hat{a}_t^2}{\bar{w}n - 2}}$ โดย $\bar{w} = \sum_{t=1}^{n} \frac{w_t}{n}$ และกำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = \underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ จากนั้นเริ่มต้นขั้นตอนที่ 2.3 ใหม่ เพื่อที่จะเข้าสู่การทำซ้ำรอบใหม่ต่อไป

<u>ถ้าใช่</u> ให้หยุดการทำซ้ำ จากนั้นกำหนด $\mu^{(b)} = \mu^{(1)}$ และ $\theta^{(b)} = \theta^{(1)}$ โดยเป็นค่าของตัวประมาณ ในรอบที่ b เมื่อ b แทนรอบของบูทสแทร็พ โดย $b = 1,...,100$

ขั้นตอนที่ 3 เก็บผลลัพธ์ที่ได้

3.1 ตรวจสอบดูว่าผลลัพธ์ของตัวประมาณที่ได้จาก 2.6 นั้นมีครบ 100 ค่าหรือไม่

ถ้าไม่ ให้ย้อนกลับไปที่ 1.3 เพื่อเริ่มกระบวนการบูทสแทร็พในรอบใหม่ถัดไป

ถ้าใช่ ให้นำผลลัพธ์ที่ได้มาหาค่าเฉลี่ยโดย $\hat{\mu}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \frac{\hat{\mu}^{(b)}}{100}$ และ $\hat{\theta}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \frac{\hat{\theta}^{(b)}}{100}$ โดยค่า $\hat{\mu}_{BWLS}$ และ $\hat{\theta}_{BWLS}$ ที่ได้จะเป็นค่าของตัวประมาณพารามิเตอร์วิธีบูทสแทร็พกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก

3) กรณีตัวแบบ ARMA(1,1)

จากสมการตัวแบบ ARMA(1,1) จะได้ว่า $a_t = z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบไม่เป็นเชิงเส้นและจากฟังก์ชัน $S_w(\underset{\sim}{\beta})$ เมื่อ $\underset{\sim}{\beta} = (\mu, \phi, \theta)^T$ ทำการหาค่าอนุพันธ์ $\frac{\partial S_w(\underset{\sim}{\beta})}{\partial \underset{\sim}{\beta}}$ ก็จะได้สมการ 3สมการ คือ

$$\sum_{t=1}^{n} w_t (z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \phi} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} w_t (z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \theta} = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} w_t (z_t - \mu(1-\phi) - \phi z_{t-1} + \theta a_{t-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \mu} = 0$$

จากสมการข้างบนนั้นจะเห็นว่าค่าของ w_t นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ a_t ดังนั้นในการในการคำนวณจึงใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบ

เช่นเดียวกับตัวแบบ AR(1) Agostinelli ได้แนะนำว่ามีความเป็นไปได้ที่ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณนั้นอาจจะมีมากกว่า 1 คำตอบดังนั้น ในแก้ปัญหานี้ เขาจึงได้เสนอว่า ในการกำหนดค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ ให้กับการคำนวณวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักหลายรอบนั้น ให้กำหนดด้วยวิธีบูทสแทร็พ (Bootstrap) ผลที่ได้คือเราจะได้ ค่าเริ่มต้น $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ เป็นจำนวนหลาย ๆ ค่า

จากที่กล่าวมาทั้งหมดในข้างต้นสามารถสรุปขั้นตอนวิธีคำนวณในตัวแบบ ARMA(1,1) ได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การหาค่าเริ่มต้นในการวนซ้ำด้วยวิธีบูทสแทร็พ

1.1 คำนวณค่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (\hat{\mu}, \hat{\phi}, \hat{\theta})^T$ โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

1.2 คำนวณค่า $\hat{a}_t = z_t - \hat{\mu}(1-\hat{\phi}) - \hat{\phi} z_{t-1} + \hat{\theta} \hat{a}_{t-1}$ เมื่อ $t = 1,..,n$ และ $z_0 = \hat{\mu}$

1.3 ทำการสุ่ม $\hat{a}_t$ แบบใส่คืนจำนวน n ค่า จะได้ $\hat{a}_t^*$ เมื่อ $t = 1,..,n$ เช่น ในครั้งแรกสุ่มได้ $\hat{a}_5$ ดังนั้น $\hat{a}_1^*$ เท่ากับ $\hat{a}_5$ จากนั้น สุ่มต่อในครั้งที่ 2 ได้ $\hat{a}_8$ ดังนั้น $\hat{a}_2^*$ เท่ากับ $\hat{a}_8$ ทำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งครบ n ค่า โดยค่าที่เราสุ่มได้นั้นมีความเป็นไปได้ว่าอาจจะเป็นที่ที่เราเคยสุ่มได้แล้วก็ได้ ไม่เป็นไร

1.4 นำ $\hat{a}_t^*$ มาสร้าง z_t^* โดยอาศัยตัวแบบ $z_t^* = \hat{\mu}(1-\hat{\phi}) + \hat{\phi} z_{t-1} - \hat{\theta}\hat{a}_{t-1}^* + \hat{a}_t^*$ เมื่อ $t = 2,..,n$ กำหนด $z_1^* = z_1$ และ $\hat{a}_0^* = 0$

1.5 นำ z_t^* มาประมาณด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุด จะได้ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^* = (\hat{\mu}^*, \hat{\phi}^*, \hat{\theta}^*)^T$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> เข้าสู่กระบวนการวนซ้ำ

2.1 กำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = (\mu^{(0)}, \phi^{(0)}, \theta^{(0)})^T$ ให้มีค่าเท่ากับ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}^* = (\hat{\mu}^*, \hat{\phi}^*, \hat{\theta}^*)^T$ โดยจะใช้ $\underset{\sim}{\beta}^{(0)}$ นี้เป็นค่าเริ่มต้นในการวนซ้ำ

2.2 คำนวณหาค่า $\hat{a}_t = z_t - \hat{\mu}(1-\hat{\phi})^{(0)} - \hat{\phi}^{(0)} z_{t-1} + \hat{\theta}^{(0)}\hat{a}_{t-1}$ เมื่อ $t = 1,...,n$ โดยกำหนด $z_0 = \mu^{(0)}$ จากนั้นคำนวณ $\sigma_a^{(0)} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{\hat{a}_t^2}{n-3}}$

2.3 นำค่า $\hat{a}_t$ มาคำนวณค่าถ่วงน้ำหนัก w_t เมื่อ w_t คือ น้ำหนักของค่าสังเกตที่ t

2.4 นำ w_t มาสร้างเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & w_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & w_n \end{bmatrix}_{n \times n}$

2.5 คำนวณค่าเวกเตอร์ $\Delta\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X^T W X)^{-1}(X^T W \underset{\sim}{a}_0)$ เมื่อ

$$X^T = \begin{bmatrix} -x_{1,1} & -x_{2,1} & . & -x_{n,1} \\ -x_{1,2} & -x_{2,2} & . & -x_{n,2} \\ -x_{1,3} & -x_{2,3} & . & -x_{n,3} \end{bmatrix}_{3 \times n} \quad \underset{\sim}{a}_0 = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ . \\ \hat{a}_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$ จะได้ว่า

$$\Delta\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{3,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{2,t} & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{3,t}^2 & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{2,t} x_{3,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t x_{1,t} x_{3,t} & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{2,t} x_{3,t} & \sum_{t=1}^{n} w_t x_{3,t}^2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{1,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{2,t} \\ \sum_{t=1}^{n} w_t \hat{a}_t x_{3,t} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

เมื่อ $$x_{1,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \mu} = (1-\phi^{(0)}) + \theta^{(0)} x_{1,t-1}$$

$$x_{2,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \phi} = (z_{t-1} - \mu^{(0)}) + \theta^{(0)} x_{2,t-1}$$

$$x_{3,t} = -\frac{\partial \hat{a}_t}{\partial \theta} = \theta^{(0)} x_{3,t-1} - \hat{a}_{t-1}$$

จากนั้นปรับปรุงค่าประมาณ โดย $\underset{\sim}{\beta}^{(1)} = \underset{\sim}{\beta}^{(0)} + \Delta\hat{\underset{\sim}{\beta}}$

2.6 ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์ที่ได้ว่า $\frac{|\mu^{(1)}-\mu^{(0)}|}{\mu^{(0)}}<0.001$ และ $\frac{|\phi^{(1)}-\phi^{(0)}|}{\phi^{(0)}}<0.001$ และ $\frac{|\theta^{(1)}-\theta^{(0)}|}{\theta^{(0)}}<0.001$ หรือไม่

ถ้าไม่ ให้คำนวณ $\hat{a}_t = z_t - \mu^{(1)} - \phi^{(1)} z_{t-1} + \theta^{(1)} \hat{a}_{t-1}$ เมื่อ $t = 1,...,n$ และ $\sigma_a^{(1)} = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{w_t \hat{a}_t^2}{\bar{w}n-3}}$ โดย $\bar{w} = \sum_{t=1}^{n} \frac{w_t}{n}$ และกำหนด $\underset{\sim}{\beta}^{(0)} = \underset{\sim}{\beta}^{(1)}$ จากนั้นเริ่มต้นขั้นตอนที่ 2.3 ใหม่ เพื่อที่จะเข้าสู่การทำซ้ำรอบใหม่ต่อไป

ถ้าใช่ ให้หยุดการทำซ้ำ จากนั้นกำหนด $\hat{\mu}^{(b)} = \mu^{(1)}$, $\hat{\phi}^{(b)} = \phi^{(1)}$ และ $\hat{\theta}^{(b)} = \theta^{(1)}$ โดยเป็นค่าของตัวประมาณ ในรอบที่ b เมื่อ b แทนรอบของบูทสแทร็พ โดย $b = 1,...,100$

ขั้นตอนที่ 3 เก็บผลลัพธ์ที่ได้

3.1 ตรวจสอบดูว่าผลลัพธ์ของตัวประมาณที่ได้จาก 2.6 นั้นมีครบ 100 ค่าหรือไม่

ถ้าไม่ ให้ย้อนกลับไปที่ 1.3 เพื่อเริ่มกระบวนการบูทสแทร็พในรอบใหม่ถัดไป

ถ้าใช่ ให้นำผลลัพธ์ที่ได้มาหาค่าเฉลี่ยโดย $\hat{\mu}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \frac{\hat{\mu}^{(b)}}{100}, \hat{\phi}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \frac{\hat{\phi}^{(b)}}{100}$ และ $\hat{\theta}_{BWLS} = \sum_{b=1}^{100} \frac{\hat{\theta}^{(b)}}{100}$

โดยค่า $\hat{\mu}_{BWLS}, \hat{\phi}_{BWLS}$ และ $\hat{\theta}_{BWLS}$ ที่ได้จะเป็นค่าของตัวประมาณพารามิเตอร์วิธีบูทสแทร็พกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก