บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

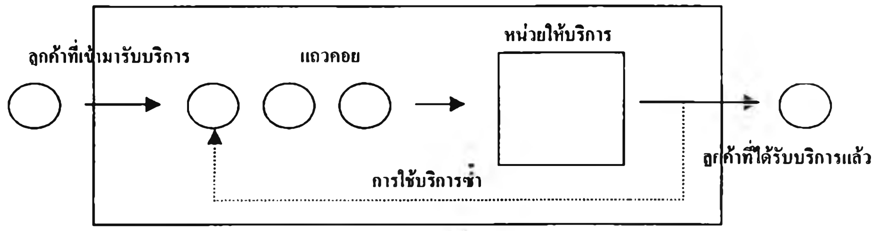
2.1 ทฤษฎีแถวคอย

2.1.1 ตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบสามัญ

เป็นตัวแบบแถวคอยซึ่งลูกค้าที่ได้รับบริการเสร็จแล้ว สามารถย้อนกลับไปรับบริการซ้ำได้ โดยแบ่งนโยบายการให้บริการออกเป็น

2.1.1.1 นโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (FIFO)

ลักษณะของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบสามัญ ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน



รูปที่ 2.1 แสดงโครงสร้างของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำ ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน

ตัวแบบแถวคอยนี้ลูกค้าที่วนซ้ำจะได้รับบริการตามลำดับเวลาที่เข้ารับบริการ นั่นคือ ลูกค้าที่วนซ้ำจะเข้ารอรับบริการที่ท้ายแถวของแถวคอย (เสมือนเป็นลูกค้าที่เข้ามารับบริการรอบแรก)

คุณลักษณะของแถวคอย

1. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการในร้านอาหารมีลักษณะเป็นกระบวนการปัวส์ซอง (Poisson Process) โดยมีพารามิเตอร์ คือ อัตราการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าโดยเฉลี่ยต่อหน่วยเวลา (λ) หรืออีกนัยหนึ่งเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการของลูกค้าคนที่ i กับลูกค้าคนที่ i – 1 (A_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ และเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i

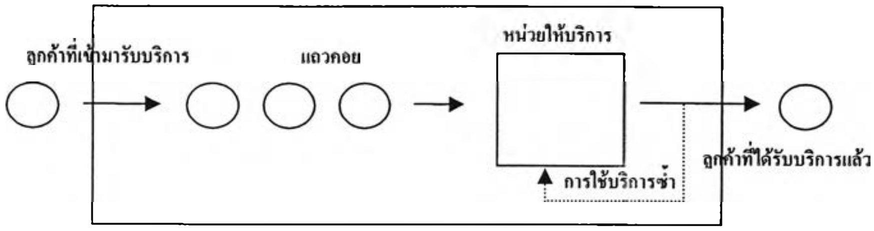
2. เวลาในการให้บริการในร้านอาหารต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการคนที่ i (S_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มและเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i โดยมีพารามิเตอร์ คือ เวลาในการให้บริการในร้านอาหารโดยเฉลี่ยต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละคน $\left(\frac{1}{\mu}\right)$
3. สัดส่วนของลูกค้าที่ใช้บริการซ้ำ (p)
4. มีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย

โดยมีสมมติฐาน ดังนี้

1. ลูกค้าเข้ามารับบริการทีละคน
2. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีจำนวนไม่จำกัด
3. ความยาวแถวคอยไม่จำกัด
4. ลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยจะรอคอยจนกว่าจะได้รับบริการ
5. เวลาระหว่างการเข้ามาของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
6. เวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม
7. ถ้าลูกค้ามีการใช้บริการซ้ำ จะซ้ำได้ไม่เกิน 1 รอบ
8. การให้บริการเป็นแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (FIFO)
9. เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการโดยเฉลี่ยของลูกค้ามากกว่าเวลาในการให้บริการโดยเฉลี่ยของหน่วยให้บริการ

2.1.1.2 นโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (Priority)

ลักษณะของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบสามัญ ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน



รูปที่ 2.2 แสดงโครงสร้างของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำ ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน

ตัวแบบแถวคอยนี้ลูกค้าที่วนซ้ำจะได้รับการบริการทันที โดยไม่ต้องรอคอยที่แถวคอย

คุณลักษณะของแถวคอย

1. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการในร้านอาหารมีลักษณะเป็นกระบวนการปัวส์ซอง (Poisson Process) โดยมีพารามิเตอร์ คือ อัตราการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าโดยเฉลี่ยต่อหน่วยเวลา (λ) หรืออีกนัยหนึ่งเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการของลูกค้าคนที่ i กับลูกค้าคนที่ i – 1 (A_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ และเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i
2. เวลาในการให้บริการในร้านอาหารต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการคนที่ i (S_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มและเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i โดยมีพารามิเตอร์ คือ เวลาในการให้บริการในร้านอาหารโดยเฉลี่ยต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละคน $\left(\frac{1}{\mu}\right)$
3. สัดส่วนของลูกค้าที่ใช้บริการซ้ำ (p)
4. มีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย

โดยมีสมมติฐาน ดังนี้

1. ลูกค้าเข้ามารับบริการทีละคน
2. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีจำนวนไม่จำกัด
3. ความยาวแถวคอยไม่จำกัด
4. ลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยจะรอคอยจนกว่าจะได้รับบริการ
5. เวลาระหว่างการเข้ามาของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
6. เวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม
7. ถ้าลูกค้ามีการใช้บริการซ้ำ จะซ้ำได้ไม่เกิน 1 รอบ
8. การให้บริการเป็นแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (FIFO)
9. เวลาระหว่างการเข้ามารับบริการโดยเฉลี่ยของลูกค้ามากกว่าเวลาในการให้บริการโดยเฉลี่ยของหน่วยให้บริการ

การวัดประสิทธิภาพการให้บริการ

ค่าที่ใช้วัดประสิทธิภาพการให้บริการ คือ เวลาคอยเฉลี่ยต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละคน (W) โดยที่ W_i คือ เวลาคอยสำหรับลูกค้าคนที่ i

จะได้ $$\sum_{i=1}^{n}\frac{W_i}{n} = \overline{W}_n$$ และ

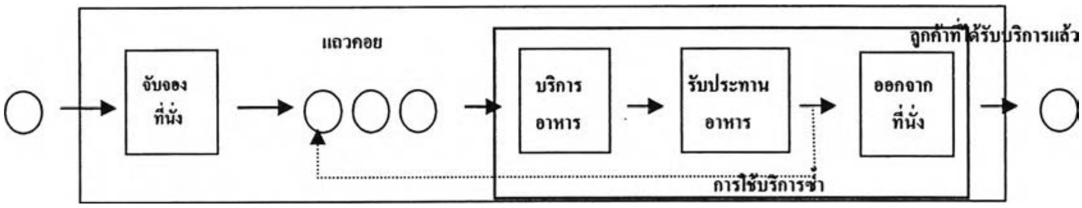
$$\lim_{n\to\infty}\overline{W}_n = W \quad \text{with probability 1}$$

การทำการศึกษาตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบสามัญ เพื่อจะนำไปสู่ความเข้าใจของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหารได้ดีขึ้น

2.1.2 ตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร

2.1.2.1 นโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (FIFO)

ลักษณะของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน



รูปที่ 2.3 แสดงโครงสร้างของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน

ตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อนนี้ เมื่อลูกค้าเข้ามาในร้านอาหารจะมีการจับจองที่นั่งทานอาหาร แล้วสั่งอาหาร พ่อครัวก็จะทำตามรายการอาหารที่ลูกค้าสั่งตามลำดับก่อนหลัง เมื่อลูกค้าได้รับอาหารก็จะรับประทาน แต่ถ้าหากลูกค้าสั่งอาหารซ้ำ พ่อครัวก็จะทำตามรายการอาหารของลูกค้าที่สั่งอาหารซ้ำตามลำดับก่อนหลังรายการอาหารที่ลูกค้าสั่ง นั่นคือ ลูกค้าที่สั่งอาหารซ้ำจะเข้ารอรับบริการที่ท้ายแถวของแถวคอย (เสมือนเป็นลูกค้าที่เข้ามารับบริการรอบแรก) เมื่อรับประทานอาหารเสร็จก็จะชำระเงิน ลุกออกจากที่นั่ง แล้วออกจากร้านอาหารไป

คุณลักษณะของแถวคอย ได้แก่

1. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการในร้านอาหารมีลักษณะเป็นกระบวนการปัวส์ซอง (Poisson Process) โดยมีพารามิเตอร์ คือ อัตราการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าโดยเฉลี่ยต่อหน่วยเวลา (λ) หรืออีกนัยหนึ่งเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการของลูกค้าคนที่ i กับลูกค้าคนที่ i – 1 (A_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ และเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i
2. เวลาในการให้บริการในร้านอาหารต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการคนที่ i (S_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มและเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i โดยมีพารามิเตอร์ คือ เวลาในการให้บริการในร้านอาหารโดยเฉลี่ยต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละคน $\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$
3. สัดส่วนของลูกค้าที่ใช้บริการซ้ำ (p)

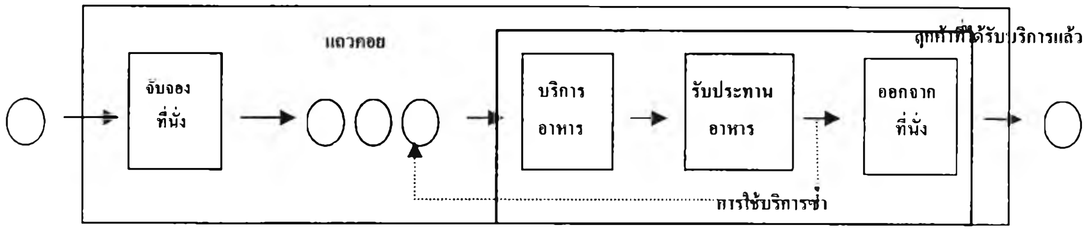
4. เวลาในการรับประทานอาหารของลูกค้าที่เข้ามารับบริการคนที่ i (E_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลและเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i โดยมีพารามิเตอร์ คือ เวลาในการรับประทานอาหารโดยเฉลี่ยต่อลูกค้าแต่ละคน $\left(\frac{1}{\mu_2}\right)$
5. จำนวนที่นั่งคงที่ เท่ากับ K
6. มีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย

โดยมีสมมติฐาน ดังนี้

1. ลูกค้าเข้ามารับบริการทีละคน
2. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีจำนวนไม่จำกัด
3. ถ้าไม่มีที่นั่ง ลูกค้าจะจากไปโดยไม่ได้รับบริการ (Balking)
4. ลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยจะรอคอยจนกว่าจะได้รับบริการ
5. เวลาระหว่างการเข้ามาของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
6. เวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม
7. เวลารับประทานอาหารของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
8. ถ้าลูกค้ามีการใช้บริการซ้ำ จะซ้ำได้ไม่เกิน 1 รอบ
9. การให้บริการเป็นแบบไม่กำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (FIFO)

2.1.2.2 นโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (Priority)

ลักษณะของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน



รูปที่ 2.4 แสดงโครงสร้างของตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน

ตัวแบบแถวคอยวนซ้ำแบบข่ายงานร้านอาหาร ซึ่งมีนโยบายการให้บริการแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อนนี้ เมื่อลูกค้าเข้ามาในร้านอาหารจะมีการจับจองที่นั่งทานอาหาร แล้วสั่ง

อาหาร พ่อครัวก็จะทำตามรายการอาหารที่ลูกค้าสั่งตามลำดับก่อนหลัง เมื่อลูกค้าได้รับอาหารก็จะรับประทาน แต่ถ้าหากลูกค้าสั่งอาหารซ้ำ พ่อครัวก็จะทำตามรายการอาหารของลูกค้าที่สั่งอาหารซ้ำก่อนทันที หลังจากทำอาหารที่กำลังทำอยู่เสร็จสิ้น นั่นคือ ลูกค้าที่สั่งอาหารซ้ำจะเข้ารอรับบริการที่หัวแถวของแถวคอย เมื่อรับประทานอาหารเสร็จก็จะชำระเงิน ลุกออกจากที่นั่ง แล้วออกจากร้านอาหารไป

คุณลักษณะของแถวคอย ได้แก่

1. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการในร้านอาหารมีลักษณะเป็นกระบวนการปัวส์ซอง (Poisson Process) โดยมีพารามิเตอร์ คือ อัตราการเข้ามาใช้บริการของลูกค้าโดยเฉลี่ยต่อหน่วยเวลา (λ) หรืออีกนัยหนึ่งเวลาระหว่างการเข้ามารับบริการของลูกค้าคนที่ i กับลูกค้าคนที่ i – 1 (A_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลที่มีค่าเฉลี่ย $\frac{1}{\lambda}$ และเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i
2. เวลาในการให้บริการในร้านอาหารต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการคนที่ i (S_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มและเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i โดยมีพารามิเตอร์ คือ เวลาในการให้บริการในร้านอาหารโดยเฉลี่ยต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละคน $\left(\frac{1}{\mu_1}\right)$
3. สัดส่วนของลูกค้าที่ใช้บริการซ้ำ (p)
4. เวลาในการรับประทานอาหารของลูกค้าที่เข้ามารับบริการคนที่ i (E_i) เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลและเป็นอิสระต่อกัน ทุกๆ i โดยมีพารามิเตอร์ คือ เวลาในการรับประทานอาหารโดยเฉลี่ยต่อลูกค้าแต่ละคน $\left(\frac{1}{\mu_2}\right)$
5. จำนวนที่นั่งคงที่ เท่ากับ K
6. มีหน่วยให้บริการ 1 หน่วย

โดยมีสมมติฐาน ดังนี้

1. ลูกค้าเข้ามารับบริการทีละคน
2. จำนวนลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีจำนวนไม่จำกัด
3. ถ้าไม่มีที่นั่ง ลูกค้าจะจากไปโดยไม่ได้รับบริการ (Balking)
4. ลูกค้าที่อยู่ในแถวคอยจะรอคอยจนกว่าจะได้รับบริการ
5. เวลาระหว่างการเข้ามาของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
6. เวลาในการให้บริการมีการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม
7. เวลารับประทานอาหารของลูกค้ามีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล
8. ถ้าลูกค้ามีการใช้บริการซ้ำ จะซ้ำได้ไม่เกิน 1 รอบ

9. การให้บริการเป็นแบบกำหนดความสำคัญการให้บริการก่อน (Priority) กรณีไม่ถูกขัดจังหวะ (Nonpreemptive)

การวัดประสิทธิภาพการให้บริการ

ค่าที่ใช้วัดประสิทธิภาพการให้บริการ คือ เวลาคอยเฉลี่ยต่อลูกค้าที่เข้ามารับบริการแต่ละคน (W) โดยที่ W_i คือ เวลาคอยสำหรับลูกค้าคนที่ i

จะได้ $\sum_{i=1}^{n} \frac{W_i}{n} = \overline{W}_n$ และ

$$\lim_{n \to \infty} \overline{W}_n = W \quad \text{with probability 1}$$

2.2 ทฤษฎีการจำลอง

2.2.1 ตัวแบบจำลอง

ตัวแบบจำลองเป็นระบบที่เราสร้างขึ้นเพื่อใช้ศึกษาระบบการทำงานจริงที่เราต้องการศึกษาและตัวแบบที่เราจะใช้ในการจำลองนี้เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตัวแบบจำลองที่ใช้ในการจำลองแบบ ที่นิยมใช้ในการสร้างตัวแบบ โดยอาศัยคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือในการหาผลลัพธ์จะเป็นตัวแบบจำลองที่เรียกว่า ตัวแบบจำลองมอนติคาร์โล

2.2.2 ตัวแบบจำลองมอนติคาร์โล

ตัวแบบจำลองมอนติคาร์โล เป็นตัวแบบจำลองที่สร้างขึ้น โดยการจำลองแบบปัญหาขึ้นมาโดยสร้างข้อมูลใหม่จากข้อมูลในอดีตของระบบงานจริง แล้ววิเคราะห์ตัวแบบปัญหาจากข้อมูลที่สร้างขึ้น การสร้างข้อมูลด้วยวิธีมอนติคาร์โลนี้ต้องอาศัยเลขสุ่ม ซึ่งได้จากตารางเลขสุ่ม แต่ต่อมาได้มีผู้ค้นคิดวิธีการผลิตเลขสุ่มเทียมหรือเลขคล้ายสุ่มขึ้น

ขั้นตอนการศึกษาการจำลองโดยใช้วิธีมอนติคาร์โล มีดังนี้

1. กำหนดปัญหาหรือระบบในสิ่งที่สนใจจะทำการจำลอง
2. ระบุองค์ประกอบของความไม่แน่นอนในปัญหานั้น
3. หาการแจกแจงความน่าจะเป็นขององค์ประกอบที่มีความไม่แน่นอน
4. กำหนดค่าตัวเลขสุ่ม
5. สร้างตัวแบบการจำลองทางคณิตศาสตร์ให้เข้ากับปัญหาตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้
6. ทำการทดสอบตัวแบบดังกล่าวว่าได้ผลตามเป้าหมายที่วางไว้หรือไม่

7. เมื่อผลการทดสอบเป็นไปตามเป้าหมายแล้ว จะกำหนดความยาวนานหรือจำนวนครั้งในการจำลอง
8. ทำการจำลองเพื่อหาผลที่ต้องการศึกษา

2.2.3 ความยาวนานของการจำลอง

สำหรับตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีค่าคาดหมาย $E(X)=\theta$ เราสามารถจำลองตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ของ X ได้ (ซึ่ง $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบเดียวกัน) จากตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ นำมาหาค่าประมาณของ θ ซึ่งอาจหาค่าประมาณแบบจุดหรือแบบช่วงของ θ ดังนั้นคุณภาพของค่าประมาณจะขึ้นอยู่กับปัจจัยปลายประการ ปัจจัยที่สำคัญปัจจัยหนึ่ง คือ ขนาดตัวอย่าง หรือความยาวนานของการจำลองว่าควรจะจำลอง X_i จำนวนเท่าใด

โดยทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorem) กล่าวว่า ถ้า $X_1, X_2, ..., X_n$ เป็นอิสระกัน และมีการแจกแจงเหมือนกัน โดยมีค่าเฉลี่ย θ และความแปรปรวน σ^2 เป็นค่าจำกัด ดังนั้น $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ย θ และความแปรปรวน $\frac{\sigma^2}{n}$ เมื่อ n มีขนาดใหญ่

การใช้ค่า $\frac{\sigma^2}{n}$ โดยปกติจะมีปัญหาที่ว่า ไม่ทราบค่าแปรปรวนประชากร σ^2 ในกรณีนี้ จะต้องประมาณค่า σ^2 โดยใช้ตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ตัวประมาณที่ใช้กันโดยทั่วไปสำหรับ σ^2 คือ $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง และทฤษฎีบทสลัทสกี ได้ว่า

$$\frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{S} \sim N(0,1) \quad \text{โดยประมาณ}$$

ซึ่งได้ $$P\left(-Z_{\alpha/2} \le \frac{(\overline{X}-\theta)\sqrt{n}}{S} \le Z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha$$

หรือ $$P\left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \theta \le \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$$

จะได้ ตัวประมาณแบบช่วงสำหรับ θ คือ

$$\left[\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \; , \; \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$ ด้วยระดับความเชื่อมั่น 100(1-α)%

โดยมีขนาดของช่วงความเชื่อมั่น เท่ากับ $2Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ หรือ ขนาดของครึ่งช่วงความเชื่อมั่น (Confidence interval half width) เท่ากับ $Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ ซึ่งถ้าเพิ่ม n จะทำให้ขนาดของครึ่งช่วงความเชื่อมั่นแคบลง

ดังนั้น ในการจำลอง จะทำการจำลองยาวนานจนกว่าขนาดของครึ่งช่วงความเชื่อมั่นจะแคบตามต้องการภายใต้ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนด

2.2.4 การหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร ด้วยหลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่ม (Method of Batch means)

ในบางกรณีตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, ..., W_n$ ที่ได้จากการจำลองไม่เป็นอิสระกัน หากเราคำนวณหาค่าเฉลี่ย $\overline{W_n}$ และ ค่าแปรปรวนตัวอย่าง S^2 จาก $W_1, W_2, ..., W_n$ แล้วนำไปคำนวณหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากรโดยตรงเช่นเดียวกับในกรณีตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, ..., W_n$ ที่เป็นอิสระกันนั้น จะทำให้ได้ช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากรที่ไม่ถูกต้อง วิธีที่จะสามารถจัดการกับปัญหานี้โปรแกรมจำลองเชิงพาณิชย์ (Simulation with Arena) จะใช้หลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่ม (Method of Batch means) โดยมีวิธีการดังนี้

1. จำลองตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, ..., W_n$
2. จับกลุ่ม $W_1, W_2, ..., W_n$ ให้มี k กลุ่ม กลุ่มละขนาด m ซึ่ง n = km

กลุ่ม	**ตัวอย่างสุ่ม**
1	$W_1, W_2, ..., W_m$
2	$W_{m+1}, W_{m+2}, ..., W_{2m}$
•	•
•	•
•	•
k	$W_{(k-1)m+1}, W_{(k-1)m+2}, ..., W_{km}$

3. คำนวณค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม (Batch mean)

กลุ่ม	**ค่าเฉลี่ย**
1	$\overline{W}_1(m) = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i}{m}$
2	$\overline{W}_2(m) = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_{m+i}}{m}$
•	•
•	•
•	•
k	$\overline{W}_k(m) = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_{(k-1)m+i}}{m}$

4. คำนวณค่าเฉลี่ยตัวอย่างรวม (Overall sample mean)

$$\overline{\overline{W}}(k,m) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\overline{W}_j(m)}{k}$$

5. คำนวณค่าแปรปรวนตัวอย่างรวม (Overall sample variance)

$$\overline{\overline{V}}(k,m) = \frac{\sum_{j=1}^{k}(\overline{W}_j(m) - \overline{\overline{W}}(k,m))^2}{k-1}$$

6. หาค่า m ที่มีขนาดใหญ่เพียงพอ ซึ่งเมื่อ m มีขนาดใหญ่ โดยทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของลูกโซ่มาร์คอฟ (ถ้าผ่านคุณสมบัติบางประการที่ Shane G. Henderson , Goldsman , D. and G. Tokal ได้กล่าวไว้) จะทำให้ค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม $\overline{W}_j(m)$ เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติ $N(W,\sigma^2)$ เหมือนกัน [6] โดยประมาณ และจะได้ว่า

$$\frac{(\overline{\overline{W}}(k,m) - W)}{\sqrt{\overline{\overline{V}}(k,m)/k}} \text{ จะมีการแจกแจงแบบ } t_{\alpha/2,n-1}$$

โดยที่ $E(\overline{\overline{W}}(k,m)) \approx W$

7. ช่วงความเชื่อมั่น 100(1-α)% ของค่าเฉลี่ยประชากร หาได้จาก

$$[\overline{\overline{W}}(k,m) - t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{\overline{\overline{V}}(k,m)}{k}},\ \overline{\overline{W}}(k,m) + t_{\alpha/2,n-1}\sqrt{\frac{\overline{\overline{V}}(k,m)}{k}}]$$

2.3 การทดสอบสมมติฐาน

2.3.1 ขั้นตอนการทดสอบสมมติฐาน

การทดสอบสมมติฐานไม่สามารถทำได้โดยตรงจากการเปรียบเทียบสมมติฐานหรือความเชื่อที่ต้องการทดสอบกับข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวแทนของประชากรที่เกี่ยวข้องกับสมมติฐานนั้น จะต้องใช้วิธีการทางสถิติเข้ามาช่วยในการทดสอบ ซึ่งมีขั้นตอนที่สำคัญดังต่อไปนี้

1. ตั้งสมมติฐานเพื่อการทดสอบ สมมติฐานเพื่อการทดสอบประกอบด้วยสมมติฐานว่าง (null hypothesis) เขียนแทนด้วย H_0 และสมมติฐานแย้ง (alternative hypothesis)เขียนแทนด้วย H_1
2. กำหนดตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบ (test statistic) ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบมักจะสร้างขึ้นจากตัวประมาณของพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ
3. กำหนดระดับนัยสำคัญหรือโอกาสที่จะยอมให้เกิดความผิดพลาดในการทดสอบสมมติฐาน คือ ปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ตั้งขึ้น ทั้งที่สมมติฐานว่างเป็นจริง ระดับนัยสำคัญ เขียนแทนด้วย α

4. หาขอบเขตในการยอมรับและปฏิเสธสมมติฐานว่าง หรือค่าวิกฤต (critical value) ซึ่งเป็นค่าที่แบ่งค่าที่เป็นไปได้ของตัวสถิติทดสอบออกเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งคือส่วนที่ประกอบด้วยค่าต่างๆ ที่จะทำให้ยอมรับสมมติฐานว่าง อีกส่วนหนึ่งจะประกอบด้วยค่าที่จะทำให้ปฏิเสธสมมติฐานว่าง
5. คำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบ โดยการแทนค่าข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวแทนหรือตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรที่เกี่ยวข้องกับสมมติฐานนั้น ค่าสถิติที่คำนวณได้นี้จะมีความถูกต้องเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นสำคัญ

เปรียบเทียบค่าสถิติที่คำนวณได้จากข้อ 5. กับค่าวิกฤตที่หาได้จากข้อ 4. ได้ค่าสถิติตกอยู่ในขอบเขตของการยอมรับ แสดงว่าต้องยอมรับสมมติฐานว่าง แต่ถ้าค่าสถิติตกอยู่ในขอบเขตของการปฏิเสธ แสดงว่าต้องปฏิเสธสมมติฐานว่าง

2.3.2 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากร

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากร เป็นการทดสอบว่าค่าเฉลี่ยของลักษณะที่ต้องการทดสอบของสองประชากรมีความแตกต่างกันหรือไม่

ถ้าให้ μ_1 แทนค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 1 และ μ_2 แทนค่าเฉลี่ยของประชากรที่ 2 ที่นำมาทดสอบสมมติฐาน ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 \;:\; \mu_1 = \mu_2$

$H_1 \;:\; \mu_1 \neq \mu_2$

หรือ $H_1 \;:\; \mu_1 < \mu_2$

หรือ $H_1 \;:\; \mu_1 > \mu_2$

หาได้ดังนี้

ให้ $\overline{X}_1$ แทนค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างขนาด n_1 ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_1 และความแปรปรวน σ_1^2

$\overline{X}_2$ แทนค่าเฉลี่ยจากตัวอย่างขนาด n_2 ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_2 และความแปรปรวน σ_2^2

$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\mu_1 - \mu_2$ และความแปรปรวน $\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$

และ $\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน 1

นั่นคือ จะได้สถิติทดสอบ $Z = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

เนื่องจากโดยทั่วๆ ไป ผู้ทดสอบมักจะไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองจึงต้องประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองด้วยค่าความแปรปรวนจากตัวอย่าง (S_1^2 และ S_2^2) แต่การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรด้วยค่าความแปรปรวนจากตัวอย่างมีผลทำให้การแจกแจงของตัวสถิติ

$$\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

เปลี่ยนจากการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Z) ไปเป็นการแจกแจงแบบที (t) ที่มีองศาความเป็นอิสระ v เมื่อ

$$v = \frac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

สำหรับในกรณีที่ความแปรปรวนของประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบไม่เท่ากัน $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

แต่สำหรับกรณีที่ความแปรปรวนของประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบเท่ากัน $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 = \sigma^2$ ตัวสถิติเพื่อการทดสอบ

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} \sim N(0,1)$$

เมื่อประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร (σ^2) ด้วยค่าความแปรปรวนรวมจากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสอง ซึ่งเขียนแทนด้วย S_p^2

S_p^2 = ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของค่าแปรปรวนจากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสอง

$$= \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

การแจกแจงของ $\dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}}$ จะเป็นแบบที ที่องศาความเป็นอิสระ $n_1 + n_2 - 2$

นั่นคือ ตัวสถิติเพื่อการทดสอบ

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

ในกรณีที่จำนวนตัวอย่างซึ่งสุ่มมาจากประชากรที่นำมาทดสอบสมมติฐานมีขนาดใหญ่ ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$) อาจใช้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Z) ประมาณการแจกแจงแบบที (t) ได้ เนื่องจาก ค่าของการแจกแจงทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันมาก เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่พอ

2.3.3 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างความแปรปรวนของสองประชากร

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากร เราต้องทราบก่อนว่าประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ ซึ่งการทดสอบว่าความแปรปรวนของสองประชากรแตกต่างกันหรือไม่ มีสมมติฐานเพื่อการทดสอบ คือ

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

เมื่อ σ_1^2 แทนความแปรปรวนของประชากรที่ 1 และ σ_2^2 แทนความแปรปรวนของประชากร ที่ 2

กำหนดให้ S_1^2 แทนความแปรปรวนของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากรที่ 1 และ S_2^2 แทนความแปรปรวนของตัวอย่างที่เลือกมาจากประชากร ที่ 2

จะได้ว่า

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$ จะมีการแจกแจงแบบ F ที่องศาความเป็นอิสระ $(n_1 - 1)$ และ $(n_2 - 1)$

หรือ $$\frac{S_2^2 / \sigma_2^2}{S_1^2 / \sigma_1^2}$$ จะมีการแจกแจงแบบ F ที่องศาความเป็นอิสระ $(n_2 - 1)$ และ $(n_1 - 1)$

2.3.4 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองนโยบาย ด้วยหลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่ม (Method of Batch means)

จากหลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่มที่ได้กล่าวในหัวข้อที่ 2.2.9 ซึ่งใช้ในการแก้ปัญหาการหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากร กรณีตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, ..., W_n$ ที่ได้จากการจำลองไม่เป็นอิสระกัน หลักการหาค่าเฉลี่ยแบบจับกลุ่มนี้ ยังสามารถนำมาใช้ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ

ผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองนโยบาย ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่ม $W_1, W_2, ..., W_n$ ของทั้งสองนโยบายที่ได้จากการจำลองไม่เป็นอิสระกันได้อีกด้วย ซึ่งเมื่อขนาดของตัวอย่างสุ่มในแต่ละกลุ่ม (m) มีขนาดใหญ่ โดยทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลางของลูกโซ่มาร์คอฟ (ถ้าผ่านคุณสมบัติบางประการที่ Shane G.Henderson , Goldsman , D. and G. Tokal ได้กล่าวไว้) จะทำให้ค่าเฉลี่ยในแต่ละกลุ่ม $\overline{W}_j(m)$ เป็นอิสระต่อกัน และมีการแจกแจงแบบปกติ $N(W, \sigma^2)$ เหมือนกัน โดยประมาณ

กำหนดให้ นโยบายที่ 1

$\overline{W}_{1,j}(m)$ เป็นเวลาคอยเฉลี่ยในกลุ่มที่ j จากนโยบายที่ 1 โดยที่ j = 1 , 2 , ... , k_1

ซึ่ง $W_1 = \lim_{m\to\infty} \overline{W}_{1,j}(m)$

จะได้ว่า

$$X_1 = \overline{W}_{1,1}(m) \sim N(W_1, \sigma_1^2)$$
$$X_2 = \overline{W}_{1,2}(m) \sim N(W_1, \sigma_1^2)$$
$$\bullet \quad \bullet$$
$$\bullet \quad \bullet$$
$$\bullet \quad \bullet$$
$$X_{k_1} = \overline{W}_{1,k_1}(m) \sim N(W_1, \sigma_1^2)$$

นโยบายที่ 2

$\overline{W}_{2,j}(m)$ เป็นเวลาคอยเฉลี่ยในกลุ่มที่ j จากนโยบายที่ 2 โดยที่ j = 1 , 2 , ... , k_2

ซึ่ง $W_2 = \lim_{m\to\infty} \overline{W}_{2,j}(m)$

จะได้ว่า

$$X_1 = \overline{W}_{2,1}(m) \sim N(W_2, \sigma_2^2)$$
$$X_2 = \overline{W}_{2,2}(m) \sim N(W_2, \sigma_2^2)$$
$$\bullet \quad \bullet$$
$$\bullet \quad \bullet$$
$$\bullet \quad \bullet$$
$$X_{k_2} = \overline{W}_{2,k_2}(m) \sim N(W_2, \sigma_2^2)$$

สมมติฐานสำหรับการทดสอบ คือ

$H_0 : W_1 = W_2$

$H_1 : W_1 \neq W_2$

หรือ $H_1 : W_1 < W_2$

หรือ $H_1 : W_1 > W_2$

สำหรับขั้นตอนและการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองนโยบาย สามารถทำการทดสอบได้ตามหัวข้อที่ 2.3.1 และ หัวข้อที่ 2.3.2