



## บทที่ 2

# วิธีปรับจูนการป้อนกลับวนซ้ำ

### 2.1 บทนำ

การควบคุมแบบปรับตัวได้มีการวิจัยตั้งแต่ปี ค.ศ.1950 เพื่อหาค่าต่ำสุดของดัชนีสมรรถนะ ต่อมาการวิเคราะห์ถึงเสถียรภาพมีบทบาทเริ่มประมาณในปี ค.ศ.1980 จนถึงปัจจุบัน การควบคุมแบบปรับตัวมีใช้อย่างแพร่หลายและเพิ่มความคงทนให้กับระบบควบคุมยิ่งขึ้น หลังจากนั้นก็มีงานวิจัยที่นำเสนอการออกแบบตัวควบคุม โดยการหาเอกลักษณ์ของระบบวงปิดด้วยการวนซ้ำ การหาเอกลักษณ์ของระบบอยู่บนพื้นฐานว่าระบบที่มีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าและพลวัตค่อนข้างซับซ้อน ต่อมา มีการปรับปรุงและพัฒนาการออกแบบ เป็นรูปแบบที่เรียกว่า วิธีปรับจูนการป้อนกลับวนซ้ำ วัตถุประสงค์ของวิธีปรับจูนการป้อนกลับวนซ้ำ เพื่อสังเคราะห์ตัวควบคุมตัวควบคุมโดยที่ระบบมีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า หลักการทั่วไปของวิธีนี้ จะเป็นการหาตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุด โดยมีรูปแบบปัญหาเป็นการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเกาส์เซียนกำลังสองเชิงเส้น เมื่อประยุกต์วิธีเกาส์-นิวตัน เราจึงพัฒนาระเบียบวิธีเพื่อออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดได้

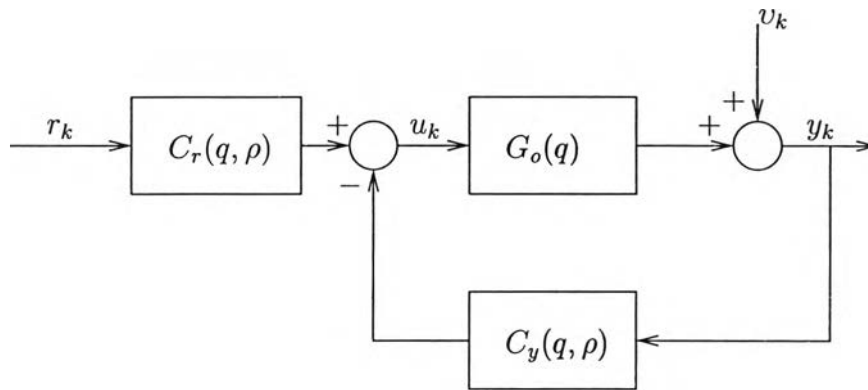
บทนี้ประกอบด้วยรูปแบบของการออกแบบตัวควบคุมพลวัตด้วยวิธีปรับจูนการป้อนกลับวนซ้ำ เราจะอธิบายถึงวิธีการหาค่าตอบด้วยการวนซ้ำโดยใช้ขั้นตอนวิธีของเกาส์-นิวตัน เพื่อหาค่าตอบของปัญหาการหาค่าต่ำสุด รวมถึงจะอธิบายนิยามเกรเดียนต์ของสัญญาณออกและเกรเดียนต์ของสัญญาณเข้า ที่มาของการหาเกรเดียนต์เพื่อเป็นแนวทางพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณออกและสัญญาณเข้า นอกจากนี้ยังจะอธิบายการประมาณเฮสเซียนเมทริกซ์โดยวิธี BFGS และการหาขนาดความยาวของการค้นหาด้วยวิธีการตามรอยถอยหลัง และสุดท้ายจะอธิบายในส่วนของเงื่อนไขการลู่เข้าของคำตอบ

### 2.2 รูปแบบปัญหาการออกแบบ

พิจารณาระบบสัญญาณเข้าเดียวสัญญาณออกเดียว เวลาไม่ต่อเนื่อง

$$y_k = G_o(q)u_k + v_k \quad (2.1)$$

โดยที่  $G_o(q)$  เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา มีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าและมีความไม่แน่นอน  $q$  เป็นตัวดำเนินการเลื่อน  $v_k$  เป็นสัญญาณรบกวนที่ไม่สามารถวัดค่าได้ แต่กำหนดเป็นกระบวนการเพิ่มสุ่ม (Stochastic process) มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (Zero mean)  $u_k \in R$  เป็นสัญญาณเข้าควบคุม (Input signal) และ  $y_k \in R$  เป็นสัญญาณออก (Output signal) ของระบบ  $k$  แทนด้วยเวลาไม่ต่อเนื่อง



รูปที่ 2.1: ระบบวงปิด

กำหนดให้ระบบนี้มีการควบคุมด้วยตัวควบคุมแบบสององศาเสรี (Two degree of freedom controllers) มีความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้าควบคุมดังนี้

$$u_k = C_r(q, \rho)r_k - C_y(q, \rho)y_k \quad (2.2)$$

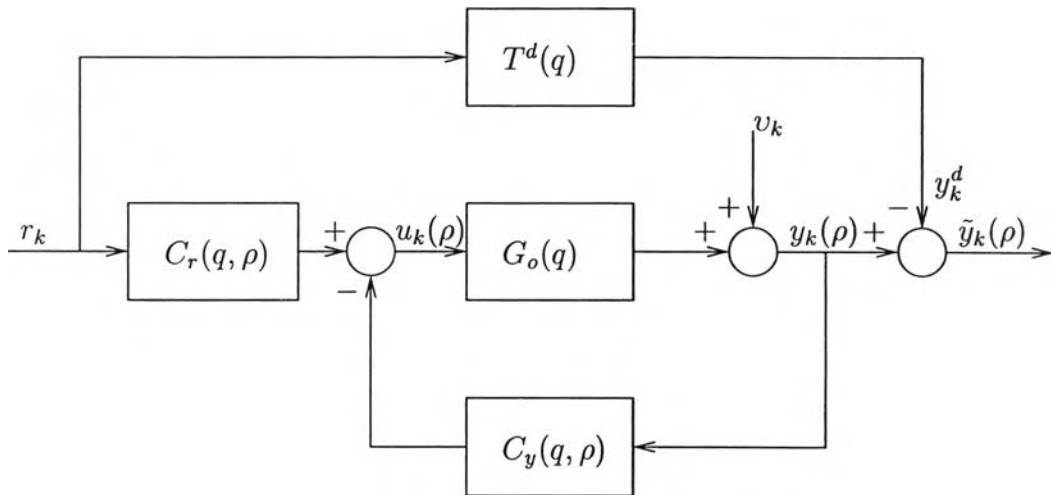
ตัวควบคุม  $C_r(q, \rho)$  และ  $C_y(q, \rho)$  เป็นฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) แบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (Linear time-invariant) ซึ่งกำหนดด้วย  $\rho \in R^{n_r}$  พารามิเตอร์ของตัวควบคุม (Controller parameters) ตัวอย่างเช่น ตัวควบคุมพีดี (PD controller)  $C(q, \rho) = \rho_1 + \rho_2 q^{-1}$   $r_k \in R$  เป็นสัญญาณเข้าอ้างอิง (Reference input) อิศระจากการรบกวน แผนภาพระบบวงปิดแสดงในรูปที่ 2.1 สัญญาณเข้าอ้างอิงและสัญญาณออกของระบบ ผ่านตัวควบคุม  $C_r(q, \rho)$  และ  $C_y(q, \rho)$  ตามลำดับ สัญญาณควบคุมที่ป้อนเข้า  $G_o(q)$  คำนวณได้จากผลต่างของสัญญาณที่ออกจากตัวควบคุมทั้งสอง ในที่นี้สัญญาณเข้าควบคุมและสัญญาณออกของระบบที่ผ่านการดำเนินการของตัวควบคุม เราจะพิจารณาสัญญาณทั้งสองด้วยการใช้  $\rho$  อาร์กิวเมนต์ (Argument) เพื่อให้เกิดความชัดเจน สัญญาณเข้าควบคุมจะเขียนแทนด้วย  $u_k(\rho) \in R$  และสัญญาณออกของระบบจะเขียนแทนด้วย  $y_k(\rho) \in R$  นอกจากนี้สัญญาณที่ออกจากตัวควบคุม จะสมมุติให้เป็นสัญญาณที่สามารถหาอนุพันธ์ (Differentiable) ได้เมื่อเทียบกับ  $\rho$

รูปที่ 2.2 แสดงการควบคุมโครงสร้างแบบปรับตัวอ้างอิงแบบจำลอง (Model reference adaptive control) สัญญาณออกของระบบจะตามรอยสัญญาณเข้าอ้างอิง ซึ่งเป็นสัญญาณออกที่ต้องการ (Desired output signal) จากรูป  $y_k^d \in R$  เป็นสัญญาณออกที่ต้องการ กำหนดได้ด้วยสัญญาณที่ออกจากแบบจำลองอ้างอิง  $T^d(q)$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงเส้น ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา สัญญาณออกที่ต้องการกำหนดโดย

$$y_k^d = T^d(q)r_k \quad (2.3)$$

ค่าความผิดพลาด (Error) ระหว่างสัญญาณออกของระบบกับสัญญาณออกที่ต้องการคือ

$$\tilde{y}_k(\rho) = y_k(\rho) - y_k^d \quad (2.4)$$



รูปที่ 2.2: การควบคุมแบบปรับตัวโดยอ้างอิงแบบจำลอง

กำหนดให้  $T_o(\rho)$  และ  $S_o(\rho)$  เป็นฟังก์ชันระบบวงปิด (Closed-loop function) และฟังก์ชันความไว (Sensitivity function) ตามลำดับ มีค่าดังนี้

$$T_o(q, \rho) = \frac{C_r(q, \rho)G_o(q)}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} \quad (2.5)$$

และ

$$S_o(q, \rho) = \frac{1}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} \quad (2.6)$$

ดังนั้น ค่าความผิดพลาดระหว่างสัญญาณออกของระบบกับสัญญาณออกที่ต้องการคือ

$$\tilde{y}_k(\rho) = \left( \frac{C_r(q, \rho)G_o(q)}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} - T^d(q) \right) r_k + \frac{1}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} v_k \quad (2.7)$$

การออกแบบตัวควบคุม โดยมี  $\rho$  เป็นพารามิเตอร์ที่มีโครงสร้างคงที่ เรามักพิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ในรูปเกาส์เซียนกำลังสองเชิงเส้น

$$J(\rho) = \frac{1}{2N} E \left[ \sum_{k=1}^N (L_y \tilde{y}_k(\rho))^2 + \lambda \sum_{k=1}^N (L_u u_k(\rho))^2 \right] \quad (2.8)$$

$E[\cdot]$  หมายถึงค่าคาดหวัง (Expectation)  $\lambda \in R$  เป็นตัวประกอบของนอร์ม (Norm) กำลังสองของสัญญาณเข้าควบคุม พจน์แรกเป็นนอร์มกำลังสองของค่าความผิดพลาดระหว่างสัญญาณออกของระบบกับสัญญาณออกที่ต้องการ ผ่านตัวกรอง  $L_y$  พจน์ที่สองเป็นนอร์มกำลังสองของสัญญาณเข้าควบคุม ผ่านตัวกรอง  $L_u$  โดยทั่วไปสามารถปรับตัวกรอง  $L_y$  และ  $L_u$  ได้ตามความเหมาะสม

จากฟังก์ชันจุดประสงค์  $\rho$  ค่าเหมาะที่สุด (Optimal) กำหนดโดย

$$\rho^* = \arg \min_{\rho} J(\rho) \quad (2.9)$$

สมมุติให้สัญญาณเข้าอ้างอิงเป็นอิสระจากสัญญาณรบกวน ดังนั้นฟังก์ชันจุดประสงค์คือ

$$J(\rho) = \frac{1}{2N} E \left[ \sum_{k=1}^N (L_y (T_o(q, \rho) - T^d(q)) r_k)^2 \right] + \frac{1}{2N} E \left[ \sum_{k=1}^N (L_y S_o(\rho) v_k)^2 \right] + \lambda \frac{1}{2N} E \left[ \sum_{i=1}^N (L_u u_k(\rho))^2 \right] \quad (2.10)$$

พจน์แรกเป็นค่าความผิดพลาดของการตามรอย (Tracking) ยกตัวอย่างให้กำหนด  $T^d(q)$  เท่ากับ 1 ฟังก์ชันจุดประสงค์ก็จะอยู่ในรูปเกาส์เซียนกำลังสองเชิงเส้นที่เป็นปัญหาการตามรอย พจน์ที่สองเป็นส่วนเพิ่มจากสัญญาณรบกวน และพจน์ที่สามเป็นส่วนปรับจากสัญญาณเข้าควบคุม

### 2.3 คำตอบของปัญหาการหาค่าต่ำสุด

กำหนดให้สัมประสิทธิ์ตัวกรอง  $L_y$  และ  $L_u$  มีค่าเท่ากับ 1 ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ได้จากเงื่อนไขการหาค่าเหมาะที่สุด (Optimality condition) นั่นคือ เกรเดียนต์ของฟังก์ชันจุดประสงค์เทียบกับ  $\rho$  มีค่าเท่ากับ 0

$$\frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{N} E \left[ \sum_{k=1}^N \tilde{y}_k(\rho) \frac{\partial \tilde{y}_k(\rho)}{\partial \rho} + \lambda \sum_{k=1}^N u_k(\rho) \frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho} \right] = 0 \quad (2.11)$$

ถ้าสมการ (2.11) มีคำตอบ เราสามารถหาคำตอบได้จากวิธีวนซ้ำเกาส์-นิวตัน

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i B_i^{-1} \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} \quad (2.12)$$

โดยที่  $B_i^{-1} \in R^{n_\rho \times n_\rho}$  เป็นเฮสเซียนของฟังก์ชันจุดประสงค์  $\gamma_i \in R$  เป็นขนาดความยาวของการค้นหา และ  $i$  แทนด้วยครั้งที่ทำการค้นหา ทั้งนี้  $B_i^{-1} \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho}$  เป็นทิศทางการค้นหาคำตอบ

สัญญาณรบกวนที่ไม่สามารถวัดค่าได้ เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นอีกอย่างหนึ่ง แต่ปัญหานี้แก้ไขได้โดยการใช้ขั้นตอนวิธีประมาณค่าการ फैนสุ่ม (Stochastic approximation) [27] ทำให้การหาค่า  $\rho$  ได้จากการประมาณค่าไม่เอนเอียง (Unbias estimate)

ในการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ เราจำเป็นต้องมีข้อมูลดังต่อไปนี้

1. ค่าความผิดพลาดระหว่างสัญญาณออกของระบบกับสัญญาณออกที่ต้องการ และสัญญาณเข้าควบคุม
2. ค่า  $\frac{\partial \tilde{y}_k(\rho)}{\partial \rho}$  และ  $\frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho}$
3. ค่าประมาณไม่เอนเอียงของ  $\tilde{y}_k(\rho) \frac{\partial \tilde{y}_k(\rho)}{\partial \rho}$  และ  $u_k(\rho) \frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho}$

การคำนวณในข้อที่ 2 และ 3 มักจะเป็นปัญหาในการคำนวณหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์อยู่เสมอ งานวิจัย [11] เสนอวิธีการคำนวณคำตอบของปัญหา โดยการแทนค่าดังกล่าวด้วยสัญญาณที่วัดได้จริงจากระบบวงปิด

### 2.3.1 ความสัมพันธ์ของสัญญาณออก

เกรเดียนต์ของค่าความผิดพลาดระหว่างสัญญาณออกของระบบ มาจากการดำเนินการของตัวควบคุมกับสัญญาณออกที่ต้องการ เทียบกับ  $\rho$  นั่นคือ

$$\frac{\partial \tilde{y}_k(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial y_k(\rho) - y_k^d}{\partial \rho} = \frac{\partial y_k(\rho)}{\partial \rho} \quad (2.13)$$

จากความสัมพันธ์ของระบบวงปิดกับสัญญาณออกของระบบ

$$y_k(\rho) = \frac{C_r(q, \rho)G_o(q)}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} r_k + \frac{1}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} v_k \quad (2.14)$$

สามารถพิสูจน์ได้ว่าเกรเดียนต์ของสัญญาณออกของระบบคือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_k(\rho)}{\partial \rho} &= \frac{G_o(q)}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} r_k - \frac{C_r(q, \rho)G_o(q)^2}{(1 + C_y(q, \rho)G_o(q))^2} \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} r_k \\ &\quad - \frac{G_o(q)}{(1 + C_y(q, \rho)G_o(q))^2} \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} v_k \end{aligned} \quad (2.15)$$

และเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอย่างง่าย จะได้ว่า

$$\frac{\partial y_k(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{C_r(q, \rho)} \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} T_o(q, \rho) r_k - \frac{1}{C_r(q, \rho)} \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} [(T_o(q, \rho))^2 r_k + T_o(q, \rho) S_o(q, \rho) v_k] \quad (2.16)$$

$T_o(q, \rho)$  และ  $S_o(q, \rho)$  เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าและมีการเปลี่ยนแปลง จึงไม่สามารถคำนวณได้ ดังนั้นการหาค่าดังกล่าว เราจึงใช้วิธีวัดสัญญาณจากการทดลองจริงของระบบวงปิด

นอกจากนี้เรายังสังเกตเห็นว่า สัญญาณออกของระบบวงปิดกับสัญญาณเข้าอ้างอิง มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$y_k(\rho) = T_o(q, \rho) r_k + S_o(q, \rho) v_k \quad (2.17)$$

และพิสูจน์ได้ว่า

$$T_o(q, \rho) y_k(\rho) = (T_o(q, \rho))^2 r_k + T_o(q, \rho) S_o(q, \rho) v_k \quad (2.18)$$

เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับพจน์สุดท้ายของสมการ (2.16) จะได้

$$\frac{\partial y_k(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{C_r(q, \rho)} \left[ \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} T_o(q, \rho) r_k - \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} T_o(q, \rho) y_k(\rho) \right] \quad (2.19)$$

และสามารถเขียนและจัดรูปแบบสมการใหม่ เป็นดังนี้

$$\frac{\partial y_k(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{C_r(q, \rho)} \left[ \left( \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} \right) T_o(q, \rho) r_k + \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} T_o(q, \rho) (r_k - y_k(\rho)) \right] \quad (2.20)$$

พจน์สุดท้ายที่เปรียบเทียบกับแล้วนั้น จะเห็นว่าเป็นการนำสัญญาณออกของระบบวงปิดในครั้งหนึ่ง มาหักล้างกับสัญญาณเข้าอ้างอิง และนำสัญญาณค่าความผิดพลาดนี้มาใช้เป็นสัญญาณเข้าอ้างอิงในครั้งต่อไป จากการสังเกตดังกล่าวนำไปสู่ วิธีการป้อนกลับแบบวนซ้ำ

ต่อไปจะนำเสนอแนวทางการคำนวณจากการทดลอง 3 ครั้ง โดยให้ค่า  $\rho$  คงที่ และดำเนินการไปพร้อมๆกับระบบจริง  $N$  เป็นช่วงเวลาทั้งหมดที่เก็บสะสมข้อมูล  $r_k^j$  เป็นสัญญาณเข้าอ้างอิงของการทดลอง

ครั้งที่  $j$   $v_k^j$  เป็นสัญญาณรบกวนจากการทดลองครั้งที่  $j$  สมมติให้สัญญาณรบกวนจากการทดลองแต่ละครั้ง เป็นอิสระต่อกัน  $y_k^j(\rho_i)$  เป็นสัญญาณออกของระบบของการทดลองครั้งที่  $j$  และ  $i$  เป็นครั้งที่วนซ้ำ

$$r_k^1 = r_k, \quad y_k^1(\rho_i) = T_o(q, \rho_i)r_k + S_o(q, \rho_i)v_k^1 \quad (2.21)$$

$$r_k^2 = r_k - y_k^1(\rho_i), \quad y_k^2(\rho_i) = T_o(q, \rho_i)(r_k - y_k^1(\rho_i)) + S_o(q, \rho_i)v_k^2 \quad (2.22)$$

$$r_k^3 = r_k, \quad y_k^3(\rho_i) = T_o(q, \rho_i)r_k + S_o(q, \rho_i)v_k^3 \quad (2.23)$$

กำหนดให้การทดลองครั้งแรก เป็นสัญญาณออกของระบบที่มีความถูกต้องใกล้เคียงเป็นความจริงที่สุด ดังนั้น

$$\tilde{y}_k(\rho_i) = y_k^1(\rho_i) - y_k^d \quad (2.24)$$

เมื่อนำผลที่ได้จากการทดลองทั้ง 3 ครั้ง เปรียบเทียบกับสมการ (2.20) จะได้ว่า

$$\text{est} \left[ \frac{\partial y_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right] \triangleq \frac{1}{C_r(q, \rho_i)} \left[ \left( \frac{\partial C_r(q, \rho_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} \right) y_k^3(\rho_i) + \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} y_k^2(\rho_i) \right] \quad (2.25)$$

โดยที่  $\text{est}[\cdot]$  เป็นค่าประมาณ จากการเปรียบเทียบกับ การทดลองทั้ง 3 ครั้งข้างต้น ถ้าเราพิจารณารวมกับ สัญญาณรบกวนรบกวนเข้าไปด้วย จะได้ว่า

$$\frac{\partial y_k(\rho_i)}{\partial \rho} = \text{est} \left[ \frac{\partial y_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right] + \frac{S_o(q, \rho_i)}{C_r(q, \rho_i)} \left[ \left( \frac{\partial C_r(q, \rho_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} \right) v_k^3 + \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} v_k^2 \right] \quad (2.26)$$

อนึ่งมีสิ่งที่จะต้องทราบ 2 ประการคือ ประการแรก เราจะไม่คำนึงถึงสัญญาณรบกวนจากการทดลอง ครั้งแรกและสัญญาณออกจากระบบของการทดลองนี้ เพื่อหาค่าความผิดพลาดของสัญญาณออกของระบบ กับสัญญาณออกที่ต้องการ ประการที่สอง สัญญาณออกของระบบที่รวมสัญญาณรบกวนแล้วนั้น จะนำมา ใช้เป็นสัญญาณอ้างอิงของการทดลองครั้งที่สองด้วย

### 2.3.2 ความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้า

เช่นเดียวกับสัญญาณออกของระบบ สัญญาณเข้าควบคุมยังคงมาจากการทดลองทั้ง 3 ครั้งที่ผ่านมา สัญญาณเข้าควบคุมมีความสัมพันธ์กับสัญญาณเข้าอ้างอิง ดังนี้

$$u_k(\rho) = \frac{C_r(q, \rho)}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} r_k - \frac{C_y(q, \rho)}{1 + C_y(q, \rho)G_o(q)} v_k \quad (2.27)$$

สามารถจัดรูปใหม่เป็น

$$u_k(\rho) = S_o(q, \rho)(C_r(q, \rho)r_k - C_y(q, \rho)v_k) \quad (2.28)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho} = S_o(q, \rho) \left[ \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} r_k - \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} v_k \right] + \frac{\partial S_o(q, \rho)}{\partial \rho} [C_r(q, \rho)r_k - C_y(q, \rho)v_k] \quad (2.29)$$

โดยที่เกรเดียนต์ของฟังก์ชันความไวเมื่อเทียบกับ  $\rho$  คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_o(q, \rho)}{\partial \rho} &= -\frac{G_o(q, \rho)}{(1 + C_y(q, \rho)G_o(q))^2} \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} \\ &= -\frac{1}{C_r(q, \rho)} T_o(q, \rho) S_o(q, \rho) \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho}\end{aligned}\quad (2.30)$$

เมื่อแทนค่าเกรเดียนต์ของฟังก์ชันความไวเทียบกับพจน์สุดท้ายของสมการ (2.29) จะได้ว่า

$$\frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho} = S_o(q, \rho) \left[ \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} r_k - \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} (T_o(q, \rho)r_k + S_o(q, \rho)v_k) \right] \quad (2.31)$$

และ

$$\frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho} = S_o(q, \rho) \left[ \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} r_k - \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} y_k(\rho) \right] \quad (2.32)$$

สุดท้ายสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\partial u_k(\rho)}{\partial \rho} = S_o(q, \rho) \left[ \left( \frac{\partial C_r(q, \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} \right) r_k + \frac{\partial C_y(q, \rho)}{\partial \rho} (r_k - y_k(\rho)) \right] \quad (2.33)$$

พจน์สุดท้ายเป็นการนำสัญญาณออกของระบบวงปิดในครั้งหนึ่ง มาหักล้างกับสัญญาณเข้าอ้างอิง จะเห็นว่าการทดลองทั้ง 3 ครั้งจะเหมือนกับการทดลองก่อนหน้านี้นี้ ให้ค่า  $\rho$  คงที่ และดำเนินการไปพร้อมๆกับระบบจริง  $N$  เป็นช่วงเวลาทั้งหมดที่เก็บสะสมข้อมูล  $r_k^j$  เป็นสัญญาณเข้าอ้างอิงของการทดลองครั้งที่  $j$   $v_k^j$  เป็นสัญญาณรบกวนจากการทดลองครั้งที่  $j$  สมมติให้สัญญาณรบกวนจากการทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน  $u_k^j(\rho_i)$  เป็นสัญญาณเข้าควบคุมของการทดลองครั้งที่  $j$  และ  $i$  เป็นครั้งที่วนซ้ำ

$$r_k^1 = r_k, \quad u_k^1(\rho_i) = S_o(q, \rho_i) [(C_r(q, \rho_i)r_k - C_y(q, \rho_i)v_k^1)] \quad (2.34)$$

$$r_k^2 = r_k - y_k^1(\rho_i), \quad u_k^2(\rho_i) = S_o(q, \rho_i) [(C_r(q, \rho_i)(r_k - y_k^1(\rho_i)) - C_y(q, \rho_i)v_k^2)] \quad (2.35)$$

$$r_k^3 = r_k, \quad u_k^3(\rho_i) = S_o(q, \rho_i) [(C_r(q, \rho_i)r_k - C_y(q, \rho_i)v_k^3)] \quad (2.36)$$

กำหนดให้การทดลองในครั้งแรก เป็นสัญญาณเข้าควบคุมที่มีความถูกต้องใกล้เคียงเป็นความจริงที่สุด

$$u_k(\rho_i) = u_k^1(\rho_i) \quad (2.37)$$

เมื่อนำผลที่ได้การทดลองทั้ง 3 ครั้ง มาเปรียบเทียบกับสมการ (2.33) จะได้ว่า

$$\text{est} \left[ \frac{\partial u_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right] \triangleq \frac{1}{C_r(q, \rho_i)} \left[ \left( \frac{\partial C_r(q, \rho_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} \right) u_k^3(\rho_i) + \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} u_k^2(\rho_i) \right] \quad (2.38)$$

จากการเปรียบเทียบกับกรทดลองทั้ง 3 ครั้งข้างต้น ถ้าเราพิจารณารวมกับสัญญาณรบกวนเข้าไปด้วย จะได้ว่า

$$\frac{\partial u_k(\rho_i)}{\partial \rho} = \text{est} \left[ \frac{\partial u_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right] - \frac{C_y(q, \rho_i)S_o(q, \rho_i)}{C_r(q, \rho_i)} \left[ \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} v_k^2 + \left( \frac{\partial C_r(q, \rho_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_y(q, \rho_i)}{\partial \rho} \right) v_k^3 \right] \quad (2.39)$$

จากที่กล่าวมาทั้งหมดในการทดลอง เราจะได้ค่า  $\frac{\partial y_k(\rho_i)}{\partial \rho}$  และ  $\frac{\partial u_k(\rho_i)}{\partial \rho}$  ถ้าให้สัญญาณรบกวนที่เข้ามาในระบบเป็นการประมาณค่าเฟ้นสุ่มและตัวประมาณค่าไม่เอนเอียง ค่าเกรเดียนต์จะไม่พิจารณารวมกับสัญญาณรบกวน

## 2.4 เฮสเซียนเมทริกซ์และขนาดความยาวของการค้นหา

มีวิธีมากมายสำหรับการเลือกเฮสเซียนเมทริกซ์ในการวนซ้ำแต่ละครั้ง เมทริกซ์เอกลักษณะก็เป็นทางเลือกหนึ่ง ซึ่งผลที่ได้จะเป็นเกรเดียนต์ทิศทางลบ ทางเลือกที่น่าสนใจสำหรับการประมาณเฮสเซียนเมทริกซ์ ได้แก่

$$B_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left( \text{est} \left[ \frac{\partial \tilde{y}_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right] \text{est} \left[ \frac{\partial \tilde{y}_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right]^T + \lambda \text{est} \left[ \frac{\partial u_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right] \text{est} \left[ \frac{\partial u_k(\rho_i)}{\partial \rho} \right]^T \right) \quad (2.40)$$

จะเห็นว่าการประมาณเฮสเซียนเมทริกซ์ยังคงได้มาจากการทดลอง ที่ได้ดำเนินการมาก่อนหน้านี้แล้ว  $B_i$  ก็ยังคงเป็นเฮสเซียนของฟังก์ชันจุดประสงค์

ตัวอย่างอื่นๆ ในการประมาณเฮสเซียนเมทริกซ์ที่มีการทดลองในงานวิจัย [28] เช่น BFGS และ แนวทางสู่บริเวณทรัสต์ (Trust region approach) ก็สามารถนำมาใช้ได้ เมื่อเรากำหนดหาทิศทางการค้นหาแล้ว สิ่งที่เราต้องการทราบต่อไปก็คือ ขนาดความยาวของการค้นหาในแต่ละครั้ง ขนาดความยาวสามารถหาได้ภายใต้เงื่อนไขที่เพียงพอ

$$J(\rho_i + \gamma_i p_i) < J(\rho_i) \quad (2.41)$$

โดย  $p_i \in R^{n_p}$  เป็นทิศทางการค้นหาที่ทราบค่าแล้ว หากขนาดความยาวในแต่ละครั้งสอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว เราสามารถประกันได้ว่าฟังก์ชันจุดประสงค์มีค่าลดลง การคำนวณขนาดความยาวนี้ทำได้โดยหลายๆ วิธี

### 2.4.1 การประมาณเฮสเซียนเมทริกซ์ด้วยวิธีนิวตัน-เสมือน

ส่วนใหญ่แล้ววิธีนิวตัน-เสมือนอาจจะนำไปใช้สำหรับการหาค่าเหมาะที่สุดของระบบไม่เชิงเส้น วิธีนี้มักจะประสบความสำเร็จทั้งในทางทฤษฎีและในทางปฏิบัติ วิธีนี้จึงได้รับการพัฒนาไว้ในซอฟต์แวร์ที่ใช้สำหรับคำนวณหาค่าเหมาะที่สุด ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีที่ค่าของตัวแปรเป็นตัวเลขที่มีค่ามาก ถ้าเป็นวิธีทั่วไปมักจะมีความผิดพลาดสูง แต่วิธีนิวตัน-เสมือนจะช่วยลดความผิดพลาดที่เกิดจากค่าตัวเลขมากๆ ของตัวแปรได้

มีวิธีอยู่หลายๆ วิธีในการหาวิธีนิวตัน-เสมือน [29] แต่วิธีทั้งหมดจะขึ้นอยู่กับพื้นฐานเดียวกันคือ การประมาณค่าเฮสเซียนเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์อื่น เช่น เมทริกซ์  $B_i$  ที่สามารถทำให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ลดลงได้ เมื่อกำหนดให้ทิศทางการค้นหาสามารถหาค่าตอบได้ จะได้ว่า

$$B_i p_i = - \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} \quad (2.42)$$

จากวิธีวนซ้ำนิวตัน

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \left( \frac{\partial^2 J(\rho_i)}{\partial \rho^2} \right)^{-1} \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} \quad (2.43)$$

กำหนดให้  $B_i \in R^{n_p \times n_p}$  เป็นเฮสเซียนเมทริกซ์ ส่วน  $p_i \in R^{n_p}$  เป็นทิศทางการค้นหา ถ้า  $B_i$  เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (Positive definite) สมการ (2.43) จะสมมูลกับปัญหาการหาค่าต่ำสุดซึ่งมีรูปแบบเป็นโปรแกรม



กำลังสอง (Quadratic program) นั่นคือ

$$\min_p J(\rho) + \frac{\partial J(\rho)^T}{\partial \rho} p + \frac{1}{2} p^T B_i p \quad (2.44)$$

วิธีนิวตัน-เสมือนเป็นวิธีวางนัยทั่วไป มาจากวิธีการแก้ปัญหาที่เรียกว่า วิธีเส้นตัด (Secant method) การประมาณค่าด้วยวิธีเส้นตัดเริ่มต้นจาก

$$\frac{\partial^2 J(\rho_i)}{\partial \rho} (\rho_i - \rho_{i-1}) \approx \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial J(\rho_{i-1})}{\partial \rho} \quad (2.45)$$

จากนั้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปการประมาณค่าวิธีนิวตัน-เสมือน ด้วยการประมาณเมทริกซ์  $B_i$  ขึ้นมา

$$B_i(\rho_i - \rho_{i-1}) = \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} - \frac{\partial J(\rho_{i-1})}{\partial \rho} \quad (2.46)$$

โดยสมการดังกล่าวเป็นเงื่อนไขเส้นตัด (Secant condition) สำหรับปัญหา  $n$ -มิติ ( $n$ -dimension) เงื่อนไขนี้จะมีเซตของสมการ  $n$  สมการ ที่จะต้องสอดคล้องกับเมทริกซ์  $B_i$  แต่อย่างไรก็ตาม เมทริกซ์  $B_i$  มีสมาชิกทั้งหมด  $n^2$  ตัว ดังนั้นเงื่อนไขนี้ไม่เพียงพอที่จะกำหนดให้เมทริกซ์  $B_i$  เป็นคำตอบเดียว (Unique solution) ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติม เพื่อที่จะกำหนดวิธีนิวตัน-เสมือนเฉพาะ

ต่อไปจะกล่าวถึงเวกเตอร์ที่จะใช้ในการหาวิธีนิวตัน-เสมือน โดยกำหนดให้

$$s_i = \rho_{i+1} - \rho_i, \quad z_i = \frac{\partial J(\rho_{i+1})}{\partial \rho} - \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} \quad (2.47)$$

ดังนั้นเงื่อนไขเส้นตัดสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$B_i s_{i-1} = z_{i-1} \quad (2.48)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปง่ายขึ้น

$$B_{i+1} s_i = z_i \quad (2.49)$$

เมื่อกำหนดให้  $\rho_{i+1} = \rho_i - \gamma_i p_i$  โดยที่  $\gamma_i$  และ  $p_i$  เป็นขนาดความยาวของการค้นหาและทิศทางการค้นหาตามลำดับ ในกรณีนี้  $s_i = \gamma_i p_i$  ตัวอย่างของการประมาณค่าเมทริกซ์  $B_i$  ด้วยวิธีนิวตัน-เสมือน

$$B_{i+1} = B_i + \frac{(z_i - B_i s_i)(z_i - B_i s_i)^T}{(z_i - B_i s_i)^T s_i} \quad (2.50)$$

โดยที่พจน์หลังของสมการ (2.50) มาจากผลคูณภายนอก (Outer product) ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์และเป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด  $n \times n$  ตัวอย่างข้างต้นอธิบายถึงคุณสมบัติต่างๆ ไปของการประมาณค่าเมทริกซ์  $B_i$  ด้วยวิธีนิวตัน-เสมือนได้ 3 ข้อด้วยกัน

1. เงื่อนไขเส้นตัดจะต้องสอดคล้องกับการประมาณค่าเมทริกซ์  $B_i$  ดังตัวอย่างข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} B_{i+1} s_i &= B_i s_i + \frac{(z_i - B_i s_i)(z_i - B_i s_i)^T}{(z_i - B_i s_i)^T s_i} s_i \\ &= B_i s_i + \frac{(z_i - B_i s_i)((z_i - B_i s_i)^T s_i)}{(z_i - B_i s_i)^T s_i} \\ &= B_i s_i + (z_i - B_i s_i) = z_i \end{aligned} \quad (2.51)$$

2. ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_{i+1}$  มาจากการคำนวณค่าประมาณเมทริกซ์  $B_i$  ดังนั้นจะต้องมีการกำหนดค่าเริ่มต้นของค่าประมาณเมทริกซ์  $B_0$  โดยส่วนใหญ่แล้วมักจะให้ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_0$  เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) แต่การกำหนดค่าเริ่มต้นของค่าประมาณเมทริกซ์  $B_0$  ให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงจะทำให้ค่าประมาณประมาณเมทริกซ์  $B_i$  ถัดไปมีความถูกต้องมากขึ้น
3. ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_{i+1}$  ที่ได้จากการคำนวณค่าประมาณเมทริกซ์  $B_i$  จะใช้การคำนวณเป็น  $O(n^2)$  ฟลอปส์ (Flop) เมื่อค่าความแตกต่างระหว่าง  $B_{i+1}$  กับ  $B_i$  มาจากการคูณของเวกเตอร์เท่านั้น

ในวิทยานิพนธ์นี้จะขอยกตัวอย่างที่ใช้กันอย่างแพร่หลายนั่นคือ BFGS ซึ่งเป็นสูตรการปรับ (Update formula) อย่างหนึ่ง [17] ที่มีคุณสมบัติของการประมาณค่าเมทริกซ์  $B_i$  ด้วยวิธีนิวตัน-เสมือน

$$B_{(i+1)} = B_i + \frac{z_i(z_i)^T}{(z_i)^T s_i} - \frac{B_i s_i (s_i)^T B_i}{(s_i)^T B_i s_i} \quad (2.52)$$

โดยที่ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_{i+1}$  จะเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ถ้า  $z_i^T s_i > 0$

BFGS มาจากการตั้งชื่อของ Broyden, Fletcher, Goldfarb, และ Shannon ซึ่งเป็นสูตรการปรับชนิดหนึ่งที่ทำให้ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_{i+1}$  เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน โดยมีที่มาจาก

$$B_{(i+1)} = B_i + \frac{z_i(z_i)^T}{(z_i)^T s_i} - \frac{B_i s_i (s_i)^T B_i}{(s_i)^T B_i s_i} + \phi (s_i^T B_i s_i) u_i u_i^T \quad (2.53)$$

$\phi \in R$  เป็นค่าจริงใดๆ และ

$$u_i = \frac{z_i}{(z_i)^T s_i} - \frac{B_i s_i}{(s_i)^T B_i s_i} \quad (2.54)$$

ถ้าในกรณีที่  $\phi = 0$  สูตรการปรับจะให้ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_{i+1}$  เป็นแบบ BFGS แต่ถ้า  $\phi = 1$  สูตรการปรับจะให้ค่าประมาณเมทริกซ์  $B_{i+1}$  เป็นแบบ DFP (Davidon-Fletcher-Powell)

ตอนนี้จะขอก้าวถึงข้อดีและข้อเสียของวิธีนิวตัน-เสมือน ข้อดีประการแรกคือการประมาณค่าเมทริกซ์  $B_i$  สามารถหาค่าได้โดยใช้เพียงค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งเท่านั้น ข้อดีประการที่สองคือทิศทางการค้นหาสามารถคำนวณได้โดยปรับ  $O(n^2)$  ฟลอปส์ ส่วนข้อเสียก็คือวิธีนี้ไม่ลู่ออกแบบกำลังสอง แต่จะลู่ออกเชิงเส้นแบบยิ่งยวด (Super-linear) และวิธีนี้ยังต้องการเก็บข้อมูลขนาดใหญ่อยู่ จึงเหมาะกับคอมพิวเตอร์ที่มีความจุสูงๆ

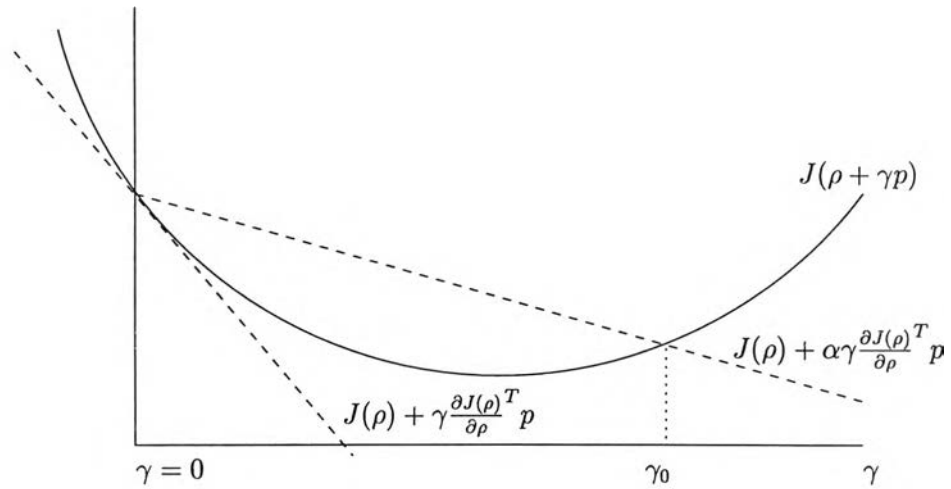
#### 2.4.2 การหาช่วงก้าวของการค้นหาค่าตอบด้วยวิธีการตามรอยถอยหลัง

ขั้นตอนที่จะอธิบายต่อไปนี้เป็นวิธีการหาค่าตอบของปัญหาการหาค่าต่ำสุด

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \gamma_i p_i \quad (2.55)$$

โดยที่  $\gamma_i$  และ  $p_i$  เป็นขนาดความยาวของการค้นหาและทิศทางการค้นหาที่ได้กล่าวมาแล้ว โดยทั่วไปแล้วเราจะพิจารณาวิธีเดสเซนต์ด้วยเงื่อนไข

$$J(\rho_{i+1}) < J(\rho_i) \quad (2.56)$$



รูปที่ 2.3: เงื่อนไขการเลือกขนาดความยาวของการค้นหาด้วยการตามรอยถอยหลัง

จากคุณสมบัติคอนเวกซ์ (Convexity) ของ  $J(\rho)$  เราทราบว่า

$$\frac{\partial J(\rho_i)^T}{\partial \rho} (\rho_y - \rho_i) \geq 0 \rightarrow J(\rho_y) \geq J(\rho_i) \quad (2.57)$$

โดยที่  $\rho_y \in R^{n_p}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในเซตคอนเวกซ์ (Convex set) ดังนั้นทิศทางการค้นหาในวิธีเดสเซนต์จะต้องสอดคล้องกับ

$$\frac{\partial J(\rho_i)^T}{\partial \rho} p_i < 0 \quad (2.58)$$

เราเรียกทิศทางการค้นหาในวิธีเดสเซนต์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวว่า ทิศทางเดสเซนต์ (Descent direction)

ในวิทยานิพนธ์นี้จะนำเสนอเฉพาะเพียงการเลือกขนาดความยาวของการค้นหา นั่นคือความยาวในการค้นหาตามเส้นทางที่ตรงกับเงื่อนไขของวิธีเดสเซนต์ โดยมากแล้วในทางปฏิบัติการเลือกขนาดความยาวของการค้นหาจะไม่แม่นยำ (Inexact) ขนาดความยาวของการค้นหาจะถูกเลือกโดยการประมาณค่าการหาค่าตอบของปัญหาการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ วิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นการเลือกขนาดความยาวที่เรียกว่า การตามรอยถอยหลัง [30]

วิธีการตามรอยถอยหลังมีพารามิเตอร์ที่ต้องกำหนด 2 ตัวคือ  $\alpha$  และ  $\beta$  โดยที่  $0 < \alpha < 0.5$  และ  $0 < \beta < 1$  วิธีนี้ถูกเรียกว่าการตามรอยถอยหลัง เนื่องจากเริ่มต้นกำหนดขนาดความยาวของการค้นหาเท่ากับ 1 แล้วค่อยๆ ลดขนาดลงด้วยค่าสัมประสิทธิ์  $\beta$  จนกว่าจะสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$J(\rho + \gamma p) < J(\rho) + \alpha \gamma \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} p \quad (2.59)$$

ขณะที่  $p$  เป็นทิศทางเดสเซนต์ นั่นคือ  $\frac{\partial J(\rho_i)^T}{\partial \rho} p < 0$  ดังนั้นสำหรับค่าขนาดความยาวของการค้นหาใดๆ จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไข

$$J(\rho + \gamma p) \approx J(\rho) + \gamma \frac{\partial J(\rho)^T}{\partial \rho} p < J(\rho) + \alpha \gamma \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} p \quad (2.60)$$

เงื่อนไขของการตามรอยถอยหลังดังแสดงในรูปที่ 2.3 แสดงให้เห็นว่าวิธีการเลือกขนาดความยาวของการค้นหาด้วยการตามรอยถอยหลังที่สอดคล้องกับเงื่อนไข  $J(\rho + \gamma p) < J(\rho) + \alpha \gamma \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} p$  จะอยู่ในช่วง  $(0, \gamma_0]$  ซึ่งหมายความว่า ขนาดความยาวของการค้นหาด้วยการตามรอยถอยหลังสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\gamma = 1, \quad \gamma \in (\beta \gamma_0, \gamma_0] \quad (2.61)$$

ในทางปฏิบัติวิธีเดสเซนต์มักมีโครงสร้างที่เหมือนๆ กัน แต่อาจมีความแตกต่างกันบ้างในส่วนของการเกณฑ์การหยุด (Stopping criterion) ซึ่งมักจะตรวจสอบทิศทางเดสเซนต์ โดยการคำนวณไปเรื่อยๆ จนกว่าเงื่อนไข  $\| \frac{\partial J(\rho_i)}{\partial \rho} \|_2 \leq \eta$  โดยที่  $\eta \in R$  เป็นค่าบวกน้อยๆ

## 2.5 การลู่เข้าของคำตอบ

ในการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์เมื่อเทียบกับ  $\rho$  นั้น จำเป็นต้องทราบถึงเงื่อนไขการลู่เข้าของคำตอบ เพื่อปรับจูนค่า  $\rho$

ข้อสมมุติฐาน สำหรับการลู่เข้าของคำตอบเป็นดังนี้ ให้  $D$  เป็นเซตคอนเวกซ์ที่คอมแพค (Convex compact set) และเป็นเซตย่อยของ  $R^n$

1. ในการทดลองแต่ละครั้ง ลำดับของสัญญาณรบกวน  $v_k, k = 1, \dots, N$  เป็นตัวแปรสุ่มประกอบด้วยค่าเฉลี่ยศูนย์ที่มีขอบเขต  $|v_k| \leq C, \forall k$  โดย  $C \in R$  เป็นค่าคงที่ใดๆ ลำดับของสัญญาณรบกวนจากการทดลองในแต่ละครั้งนั้น ต้องเป็นอิสระต่อกัน
2. มี  $O \in R^n$  ค่าจริงใดๆบน  $D$  ที่ทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมมีความต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ได้เมื่อเทียบกับ  $\rho$
3. สมาชิกทุกตัวของฟังก์ชันถ่ายโอน  $C_r(\rho), C_y(\rho), \frac{\partial C_r(\rho)}{\partial \rho}, \frac{\partial C_y(\rho)}{\partial \rho}, \frac{\partial^2 C_r(\rho)}{\partial \rho^2}$  และ  $\frac{\partial^2 C_y(\rho)}{\partial \rho^2}$  มีขีดและศูนย์ที่มีขอบเขตเอกรูป (Uniformly bounded) ออกห่างจากวงกลมหนึ่งหน่วยบน  $D$
4. ระบบวงปิดที่เป็นระบบเชิงเส้นและไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา เป็นระบบที่เสถียรและมีขีดที่มีขอบเขตเอกรูป ออกห่างจากวงกลมหนึ่งหน่วยบน  $D$
5. สมาชิกลำดับขนาดความยาวค้นหา  $\gamma_i$  สอดคล้องกับ  $\gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \infty$  และ  $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 < \infty$

**ทฤษฎีบท 2.1** [25] พิจารณาขั้นตอนวิธีปรับจูนการป้อนกลับวนซ้ำ โดยสมมุติให้เงื่อนไขข้อ 1-5 เป็นจริง กำหนดให้  $B_i$  เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มาจากผลการทดลอง ในครั้งที่  $i$  และสอดคล้องกับ  $\frac{1}{I} \geq B_i I \geq \delta I, \exists \delta > 0$  ดังนั้น

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i = D_c \triangleq \left\{ \rho : \frac{\partial J(\rho)}{\partial \rho} = 0 \right\} \quad (2.62)$$

บนเซต  $A = \{ \rho_i \in D, \forall i \}$  เงื่อนไขอย่างง่ายสำหรับการลู่เข้าคือ สัญญาณยังคงมีขอบเขตในการวนซ้ำทุกครั้ง จนกระทั่งผลตอบลู่เข้าสู่เซต  $A$

## 2.6 สรุป

วิธีปรับจูนการป้อนกลับวนซ้ำกล่าวโดยสรุปประกอบด้วย กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ แล้วใช้ความสัมพันธ์ของเกรเดียนต์กับสัญญาณของระบบวงปิดเพื่อออกแบบตัวควบคุม วิธีนี้มีทั้งข้อดีและข้อเสีย โดยมีข้อดีคือ วิธีนี้สามารถออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุดภายใต้ระบบที่มีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า ส่วนข้อเสียคือ วิธีนี้เป็นการหาตัวควบคุมที่มีบริเวณ (Space) ของ  $\rho$  ในช่วงแคบๆ จึงต้องปรับจูนตัวควบคุมทุกครั้งเมื่อมีการเปลี่ยนแปลง นั่นหมายถึงว่าจะต้องกลับไปทดลองและวัดสัญญาณทั้งหมดใหม่ การประยุกต์ใช้ก็มีการใช้กันในหลายๆ ระบบ ส่วนใหญ่จะใช้กับระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์