

กิ่งกลุ่มซึ่ง ไป-ไอคิลเป็นควอซี-ไอคิล

นายสารวม บัวประดิษฐ์



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2542

ISBN 974-334-486-1

ลิขสิทธิ์ของ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I19466365

# SEMIGROUPS WHOSE BI-IDEALS ARE QUASI-IDEALS

Mr. Samruam Baupradist

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

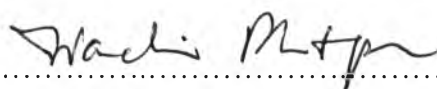
Academic Year 1999

ISBN 974-334-486-1

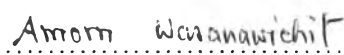
Thesis Title      Semigroups Whose Bi-ideals Are Quasi-ideals  
By                    Mr. Samruam Baupradist  
Department        Mathematics  
Thesis Advisor    Associate Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.

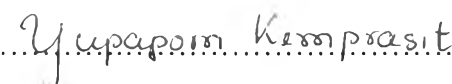
---

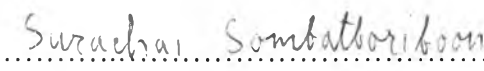
Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial  
Fulfillment of the Requirements of the Master's Degree

.....Dean of Faculty of Science  
(Associate Professor Wanchai Phothiphichitr, Ph.D.)

Thesis Committee

.....Chairman  
(Assistant Professor Amorn Wasanawichit, Ph.D.)

.....Thesis Advisor  
(Associate Professor Yupaporn Kemprasit, Ph.D.)

.....Member  
(Assistant Professor Surachai Sombathoriboon, M.Sc.)

สำรวจ บัวประดิษฐ์ : กึ่งกลุ่มซึ่งไบ-ไอดีลเป็นควอซี-ไอดีล  
 ( SEMIGROUPS WHOSE BI-IDEALS ARE QUASI-IDEALS )  
 อ. ที่ปรึกษา: รศ. ดร. อุฬารณ์ เข้มประสิทธิ์, 32 หน้า. ISBN 974-334-486-1

ให้  $N$  และ  $R$  แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และเซตของจำนวนจริงทั้งหมด ตามลำดับ สำหรับ  $n \in N$  ให้  $(Z_n, \cdot)$  แทนกึ่งกลุ่มของจำนวนเต็มมอดุโล  $n$  ภายใต้การคูณ จะกล่าวว่า  $n \in N$  เป็นจำนวนเต็มกำลังสอง-อิสระ ถ้า  $n$  ไม่สามารถหารได้ด้วยกำลังสองของจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1

ให้  $S$  เป็นกึ่งกลุ่ม จะเรียกสับเซต  $Q$  ของ  $S$  ซึ่งไม่ใช่เซตว่างว่า ควอซี-ไอดีล ของ  $S$  ถ้า  $SQ \cap QS \subseteq Q$  และเรียกสับเซต  $B$  ของ  $S$  ซึ่งไม่ใช่เซตว่างว่า ไบ-ไอดีล ของ  $S$  ถ้า  $BS^1B \subseteq B$

ไบ-ไอดีลเป็นนัยทั่วไปของควอซี-ไอดีล ให้  $BQ$  แทนหมู่ของกึ่งกลุ่มซึ่งเซตของไบ-ไอดีล และควอซี-ไอดีลเป็นเซตเดียวกัน

สำหรับเซต  $X$  ใดๆ ให้  $M_X$  และ  $E_X$  แทนกึ่งกลุ่มของการแปลงแบบหนึ่งต่อหนึ่งของ  $X$  ทั้งหมด และกึ่งกลุ่มของการแปลงแบบทั่วถึงของ  $X$  ทั้งหมด ตามลำดับ สำหรับช่วง  $I$  บน  $R$  ซึ่ง  $|I| > 1$  ให้  $C_I$  และ  $D_I$  แทนกึ่งกลุ่มของฟังก์ชันต่อเนื่องทั้งหมดและกึ่งกลุ่มของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้จาก  $I$  ไป  $I$  ภายใต้ทอพอโลยีปกติบน  $I$  ทั้งหมด ตามลำดับ

ผลสำคัญของการวิจัยมีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 สำหรับกึ่งกลุ่มช่วง  $S$  บน  $R$  ภายใต้การคูณ  $S \in BQ$  ก็ต่อเมื่อ  $S$  เป็นหนึ่งในช่วงต่อไปนี้  $R, \{0\}, \{1\}, (0, \infty)$  และ  $[0, \infty)$

ทฤษฎีบท 2 สำหรับกึ่งกลุ่มช่วง  $S$  บน  $R$  ภายใต้การบวก  $S \in BQ$  ก็ต่อเมื่อ  $S = R$  หรือ  $S = \{0\}$

ทฤษฎีบท 3 สำหรับ  $n \in N, (Z_n, \cdot) \in BQ$  ก็ต่อเมื่อ  $n = 4$  หรือ  $n$  เป็นจำนวนเต็มกำลังสอง-อิสระ

ทฤษฎีบท 4 สำหรับเซต  $X$  ใดๆ,  $M_X \in BQ$  ก็ต่อเมื่อ  $X$  เป็นเซตจำกัด

ทฤษฎีบท 5 สำหรับเซต  $X$  ใดๆ,  $E_X \in BQ$  ก็ต่อเมื่อ  $X$  เป็นเซตจำกัด

ทฤษฎีบท 6  $C_I \notin BQ$  สำหรับทุกๆ ช่วง  $I$  บน  $R$  ซึ่ง  $|I| > 1$

ทฤษฎีบท 7  $D_I \notin BQ$  สำหรับทุกๆ ช่วง  $I$  บน  $R$  ซึ่ง  $|I| > 1$

ภาควิชา ..... ภาควิชาคณิศร ..... ลายมือชื่อนิสิต ..... ศิวารมย์ บัวประดิษฐ์ .....  
 สาขาวิชา ..... ภาควิชาคณิศร ..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ..... ผศ.ดร.ศรินทร์ทิพย์ .....  
 ปีการศึกษา ..... 2543 ..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ..... - .....

Let  $N$  and  $R$  denote the set of all positive integers and the set of all real numbers, respectively. For  $n \in N$ , let  $(Z_n, \cdot)$  denote the multiplicative semigroup of integers modulo  $n$ . For  $n \in N$ ,  $n$  is said to be *square-free* if  $n$  is not divisible by the square of any integer greater than 1.

Let  $S$  be a semigroup. A nonempty subset  $Q$  of  $S$  is called a *quasi-ideal* of  $S$  if  $SQ \cap QS \subseteq Q$ . We call a nonempty subset  $B$  of  $S$  a *bi-ideal* of  $S$  if  $BS^1B \subseteq B$ .

Bi-ideals are a generalization of quasi-ideals. Let  $BQ$  be the class of all semigroups whose sets of bi-ideals and quasi-ideals coincide.

For a set  $X$ , let  $M_X$  and  $E_X$  denote the semigroup of all one-to-one transformations of  $X$  and the semigroup of all onto transformations of  $X$ , respectively. For an interval  $I$  on  $R$  with  $|I| > 1$ , let  $C_I$  and  $D_I$  be the semigroup of all continuous functions and the semigroup of all differentiable functions of  $I$  into itself under the usual topology on  $I$ , respectively.

The main results of this research are as follows:

**Theorem 1.** For a multiplicative interval semigroup  $S$  on  $R$ ,  $S \in BQ$  if and only if  $S$  is one of the following intervals :  $R$ ,  $\{0\}$ ,  $\{1\}$ ,  $(0, \infty)$  and  $[0, \infty)$ .

**Theorem 2.** For an additive interval semigroup  $S$  on  $R$ ,  $S \in BQ$  if and only if  $S = R$  or  $S = \{0\}$ .

**Theorem 3.** For  $n \in N$ ,  $(Z_n, \cdot) \in BQ$  if and only if either  $n = 4$  or  $n$  is square-free.

**Theorem 4.** For a set  $X$ ,  $M_X \in BQ$  if and only if  $X$  is finite.

**Theorem 5.** For a set  $X$ ,  $E_X \in BQ$  if and only if  $X$  is finite.

**Theorem 6.**  $C_I \notin BQ$  for every interval  $I$  on  $R$  with  $|I| > 1$ .

**Theorem 7.**  $D_I \notin BQ$  for every interval  $I$  on  $R$  with  $|I| > 1$ .

ภาควิชา..... ภาควิชาคณิตศาสตร์..... ปลายมือชื่อนิสิต ..... ศาสตราจารย์..... วิทยาลัย.....  
 สาขาวิชา..... ภาควิชาคณิตศาสตร์..... ปลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..... ศาสตราจารย์..... ภาควิชาคณิตศาสตร์.....  
 ปีการศึกษา..... 2543..... ปลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม.....

## ACKNOWLEDGEMENT



I am greatly indebted to Assoc. prof. Dr. Yupaporn Kemprasit, my thesis advisor, for her untired offering me some thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, I would like to express my gratitude to my family and friends for their encouragement throughout my graduate study.

## CONTENTS

	Page
<b>ABSTRACT IN THAI.....</b>	iv
<b>ABSTRACT IN ENGLISH.....</b>	v
<b>ACKNOWLEDGEMENT.....</b>	vi
<b>INTRODUCTION.....</b>	1
<b>CHAPTER</b>	
<b>I.    PRELIMINARIES.....</b>	3
<b>II.   INTERVAL SEMIGROUPS OF REAL           NUMBERS.....</b>	7
<b>III.  MULTIPLICATIVE SEMIGROUPS OF           INTEGERS MODULO POSITIVE           INTEGERS.....</b>	11
<b>IV.   TRANSFORMATION SEMIGROUPS....</b>	15
<b>REFERENCES.....</b>	31
<b>VITA.....</b>	32