

ทฤษฎีและทบทวนผลงานในอดีตที่เกี่ยวข้อง

2.1 วิธีการก่อสร้างอุโมงค์โดยใช้หัวเจาะ (Shield Tunnel)

2.1.1 ประวัติการก่อสร้างอุโมงค์โดยใช้หัวเจาะ (Shield Tunnel)

การก่อสร้างอุโมงค์ในชั้นดินอ่อนโดยใช้วิธี Shield Tunnelling ได้เริ่มขึ้นในประเทศอังกฤษในปี ค.ศ. 1825 โดย Marc Brunel ได้ประดิษฐ์หัว shield ตัวแรกขึ้นมีขนาดกว้าง 38 ฟุต และสูง 22 ฟุต และใช้ในการก่อสร้างอุโมงค์ลอดใต้แม่น้ำเทมส์ในกรุงลอนดอน หลังจากนั้นวิธีการก่อสร้างอุโมงค์ในชั้นดินอ่อนก็ได้รับการพัฒนาและปรับปรุงมาตามลำดับ เนื่องจากอุโมงค์ในชั้นดินอ่อนนั้นมักจะเป็นอุโมงค์ที่อยู่ในระดับตื้น (ประมาณ 10-15 เมตรจากผิวดิน) และมักจะทำ การก่อสร้างในเขตชุมชน ผลกระทบที่เกิดจากการก่อสร้างอุโมงค์ต่อสิ่งปลูกสร้างข้างเคียงจึงเกิดขึ้นได้ง่ายและมูลค่าความเสียหายที่เกิดแก่ชีวิตและทรัพย์สินนั้นจะมีมากตามไปด้วย การก่อสร้าง จึงจำเป็นต้องทำด้วยความระมัดระวังอย่างสูงและเป็นไปตามหลักการทางวิชาการที่ถูกต้อง การก่อสร้างอุโมงค์ด้วยวิธี Shield Tunnelling นั้นได้รับการยอมรับกันว่าเป็นระบบการก่อสร้างที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการก่อสร้างอุโมงค์ในชั้นดินอ่อน

2.1.2 โครงสร้างและส่วนประกอบของหัวเจาะ (Shield Tunnel)

ตัวหัวเจาะของระบบการก่อสร้าง Shield Tunnelling นั้นมีลักษณะเป็นท่อทรงกระบอกขนาดใหญ่ โดยมีศัพท์เรียกทางเทคนิคว่า “skin” (ผิว) สามารถแบ่งส่วนประกอบของตัว skin ออกได้เป็น 3 ส่วนด้วยกัน ตามหน้าที่และวัตถุประสงค์ในการใช้งาน กล่าวคือ

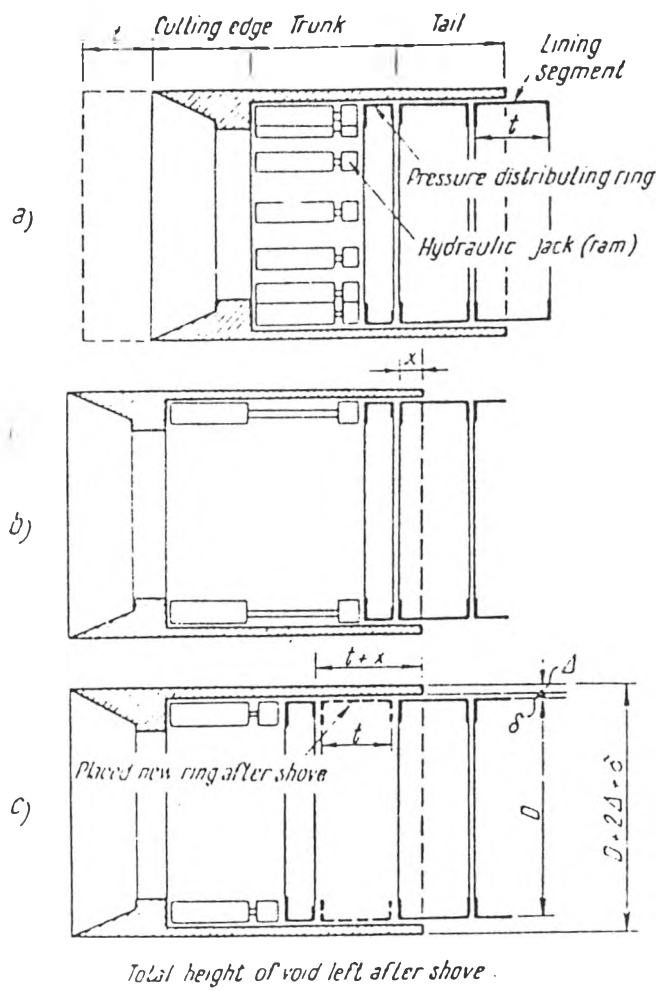
- 1) Front หรือ Cutting Edge เป็นบริเวณที่ต้องการความแข็งแรงมากที่สุด โดยต้องทำหน้าที่เป็นตัวป้องกันการถล่มของดิน และเป็นที่ยึดสำหรับผู้ที่ปฏิบัติงานในอุโมงค์ โดยที่บริเวณ Front นี้จะทำการติดตั้งระบบต่างๆที่จะทำการขุดเจาะดินบริเวณด้านหน้าออกไป เช่นในกรณีของ Blind shield ด้านหน้า (Front) นี้จะถูกปิดด้วยแผ่นเหล็กหนา และมีช่องเปิดเปิด เพื่ออนุญาตให้ดินอ่อนไหลเข้ามาได้เมื่อแรงดันดินมีค่าถึงจุดที่ต้องการ

- 2) Trank Part เป็นบริเวณของ skin ที่จะเป็นส่วนที่อุปกรณ์ในการผลักดันหัวเจาะถูกติดตั้งอยู่ เช่น Hydraulic Jack ,High Pressure Pump เป็นต้น
- 3) Tail Part เป็นบริเวณที่จะทำการติดตั้งคาคอโมงค์ ความยาวของส่วนนี้ควรจะมากพอที่จะติดตั้งคาคอโมงค์ได้ 2 แถว

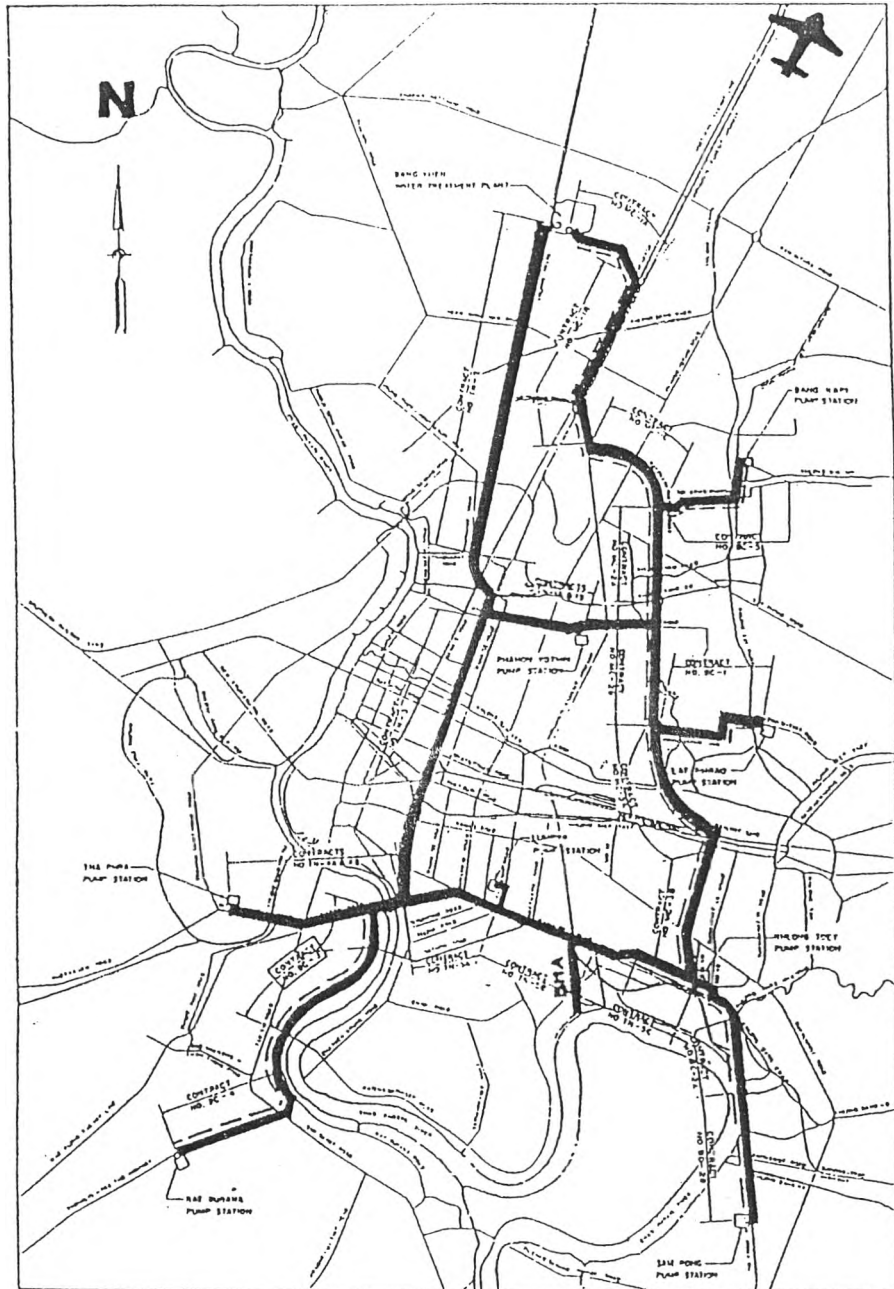
บริเวณด้านหลังหัวเจาะที่ได้ทำการติดตั้งคาคอโมงค์เรียบร้อยแล้ว จะต้องมีการติดตั้งอุปกรณ์อื่นๆ อีกที่จำเป็น เช่น รางสำหรับขนย้ายเศษดินที่เกิดจากการขุด Platform สำหรับทำงานของผู้ปฏิบัติการ เครื่องมือที่ใช้ในการ Grouting และติดตั้ง Secondary Lining เป็นต้น (สุพจน์ เดชวรสินสกุล, 1998) รูปที่ 2.1 เป็นรูปแสดง ความสัมพันธ์ของส่วนต่างๆของหัวเจาะในการขุดเจาะอุโมงค์โดยวิธีหัวเจาะ (PRINCIPLE OF SHIELD TUNNELLING) หลังจากที่ทำการติดตั้งคาคอโมงค์เสร็จเรียบร้อยแล้ว Hydraulic Jack จะทำการผลักดันหัวเจาะไปด้านหน้าโดยอาศัย Lining Segment ด้านหลังเป็น reaction frame ในขณะที่หัวเจาะถูกดันไปด้านหน้านั้น หัวตัดที่อยู่บริเวณ Front ก็จะไปตัดเอาดินด้านหน้าออกมา แล้วส่งออกไปตาม Truck ด้านหลัง เมื่อหัวเจาะเคลื่อนที่ไปได้ตามระยะที่ต้องการแล้ว (โดยทั่วไปในหนึ่งจังหวะของการเคลื่อนที่นั้นจะมีความยาวประมาณเท่า กว้างของตัว Segment Liner) ดังรูปที่ 2.1 (b) ส่วน Ram ของ Hydraulic Jack จะถูกหกดกลับเข้ามา แล้วจึงทำการติดตั้ง Segment วงใหม่อีก 1 วง ดังรูปที่ 2.1 (c) วงจรเช่นนี้จะซ้ำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งการขุดเจาะอุโมงค์เสร็จสมบูรณ์

2.2 อุโมงค์ในกรุงเทพฯที่ก่อสร้างมาแล้วโดยใช้หัวเจาะ

การก่อสร้างอุโมงค์ใต้ดินในกรุงเทพฯได้เริ่มทำมานานกว่า 20 ปีแล้ว โดยมีความยาวประมาณ 94 กิโลเมตร (Thongyot ,1996) ดังรูปที่ 2.2 โดยอุโมงค์ส่วนใหญ่จะเป็นอุโมงค์ส่งน้ำของการประปานครหลวงขนาดตั้งแต่ 2.0 - 3.4 เมตร และอุโมงค์ระบายน้ำของกรุงเทพฯ ขนาด 3.3 เมตรอุโมงค์ที่มีในกรุงเทพฯมีทั้งที่อยู่ระดับตื้นในดินเหนียวอ่อน และระดับลึกที่อยู่ในดินเหนียวแข็ง การก่อสร้างในอดีตที่ผ่านมานั้นหัวเจาะที่ใช้มักเป็นหัวเจาะประเภท Blind Shield ซึ่งก่อให้เกิดการเคลื่อนตัวของดินค่อนข้างสูง



รูปที่ 2.1 รูปแสดงพื้นฐานการขุดเจาะอุโมงค์โดยวิธีหัวเจาะ



— BORED TUNNEL

- - - CUT-COVER TUNNEL

TUNNELS IN BANGKOK DIAMETER MORE THAN 2 M.

รูปที่ 2.2 เครือข่ายอุโมงค์ในกรุงเทพฯ ในปัจจุบัน

2.3 การทรุดตัวของดินเนื่องมาจากการก่อสร้างอุโมงค์โดยใช้หัวเจาะ

การประมาณและคาดการณ์ปริมาณการทรุดตัวของแผ่นดินอันเนื่องมาจากการขุดเจาะอุโมงค์นั้นเป็นเรื่องที่ทำได้ยากมาก ทั้งนี้เพราะการทรุดตัวดังกล่าวถูกควบคุมด้วยปัจจัยหลายประการ ได้แก่

- 1) คุณภาพของการก่อสร้าง
- 2) ประเภทของเครื่องมือเครื่องจักรที่ใช้ในการก่อสร้าง
- 3) ลักษณะทางธรณีวิทยาของบริเวณที่ทำการก่อสร้าง
- 4) พฤติกรรมของชั้นดินในสภาวะการลดแรง
- 5) วิธีการที่ใช้ในการคาดการณ์ปริมาณการทรุดตัว

จะเห็นว่าปัจจัยข้อที่ 1 และ 2 เป็นปัจจัยที่อยู่นอกเหนือการควบคุมของวิศวกรผู้ทำการคาดการณ์ปริมาณการทรุดตัวของแผ่นดิน ในส่วนที่จะทำการศึกษาในงานวิจัยนี้ได้แก่การศึกษาในส่วนของหัวข้อที่ 4 และ 5

2.3.1 การคาดคะเนการทรุดตัวของผิวดินเหนืออุโมงค์

จากการรวบรวมข้อมูลการทรุดตัวของอุโมงค์รางเดี่ยวที่ผ่านมา ซึ่งให้เห็นว่า เราสามารถแสดงข้อมูลการทรุดตัวของพื้นผิวดินที่วัดจากจุดศูนย์กลางของอุโมงค์เป็นระยะทางต่างๆได้ตามสมการที่ 2.1 (PECK และ SCHMIDT, 1969)

$$s = s_{\max} \exp \left[-\frac{x^2}{2i^2} \right] \quad (2.1)$$

- โดย s คือ ค่าการทรุดตัวของผิวดินที่ระยะตามขวางที่ x ใดๆ จากศูนย์กลางอุโมงค์
 s_{\max} คือ ค่าการทรุดตัวมากที่สุดของผิวดินที่ระยะ x มีค่าเป็น 0.0 เมตร
 x คือ ระยะตามแนวราบจากจุดศูนย์กลางของอุโมงค์
 i คือ ตำแหน่งที่ชั้นที่สุดของค่าการทรุดตัว หรือ ตำแหน่งที่มีความโค้งงอมากที่สุด

รูปที่ 2.3 แสดงความสัมพันธ์การทรุดตัวของดินที่ระดับผิวดินกับการสูญเสียมวลดิน (Ground loss, V_L) การเปลี่ยนแปลงปริมาตรของมวลดิน (Volume change , ΔV) และการวิบัติของโครงสร้างข้างเคียงเนื่องจาก differential settlement การสูญเสียมวลดิน (Ground loss) นั้นสามารถประมาณได้จากสมการ

$$V_L = V_S + \Delta V \quad (2.2)$$

โดยที่ V_L คือ Ground loss
 V_S คือ ปริมาตรที่เกิดขึ้นเนื่องจากการทรุดตัวของดินที่ผิวดิน
 ΔV คือ การเปลี่ยนแปลงปริมาตร
 (+) เมื่อเป็น Contraction
 (-) เมื่อเป็น delation

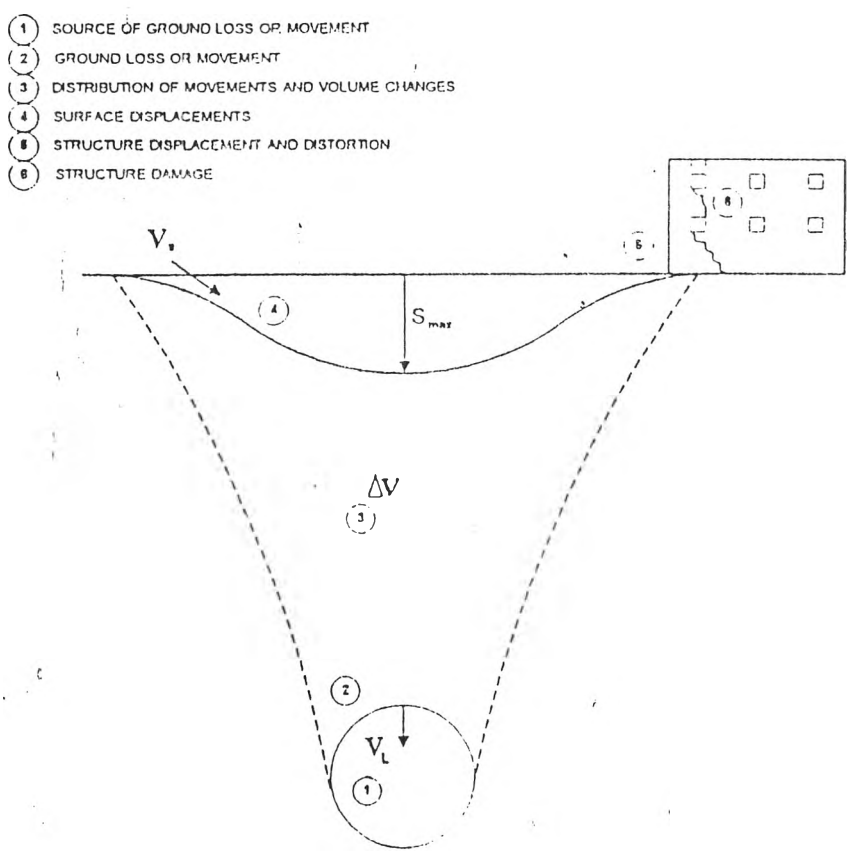
โดยทั่วไปค่าปริมาตร V_S เมื่อประมาณจาก Error Function แล้วจะมีค่าประมาณ $2.5i\delta_{MAX}$ ดังแสดงรูปที่ 2.4

โดยที่ δ_{MAX} คือ maximum ground surface settlement (m)
 V_S คือ Volume of settlement trough (m^3/m)
 i คือ Width of settlement trough (m)

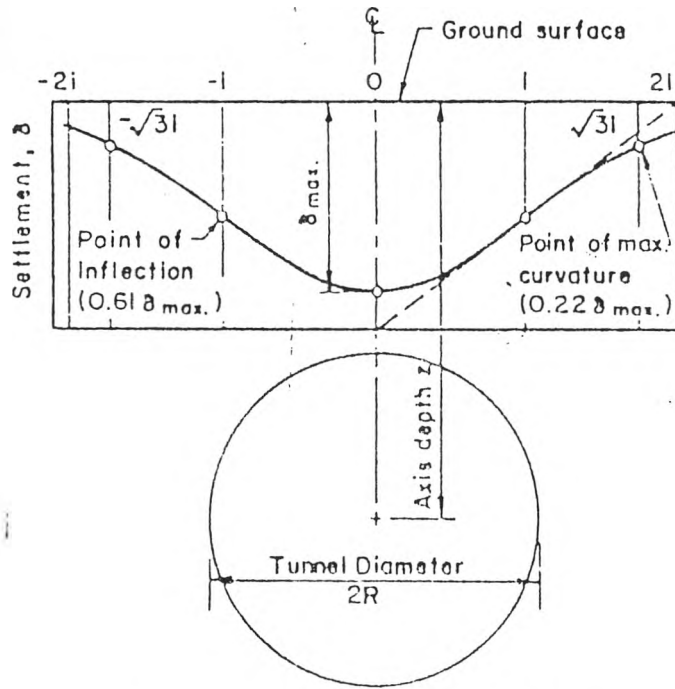
2.3.1.1 การประเมินค่า i

1) PECK (1969)

จากข้อมูลการทรุดตัวที่รวบรวมไว้มากมายได้นำมาทำเส้นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างของความโค้งการทรุดตัว ((i/R) , เมื่อ R คือ รัศมีของอุโมงค์) กับ ขนาดความลึกของแนวแกนอุโมงค์ (Z/R) ดังแสดงในรูปที่ 2.5 สำหรับการขุดอุโมงค์ในดินชนิดต่างๆ

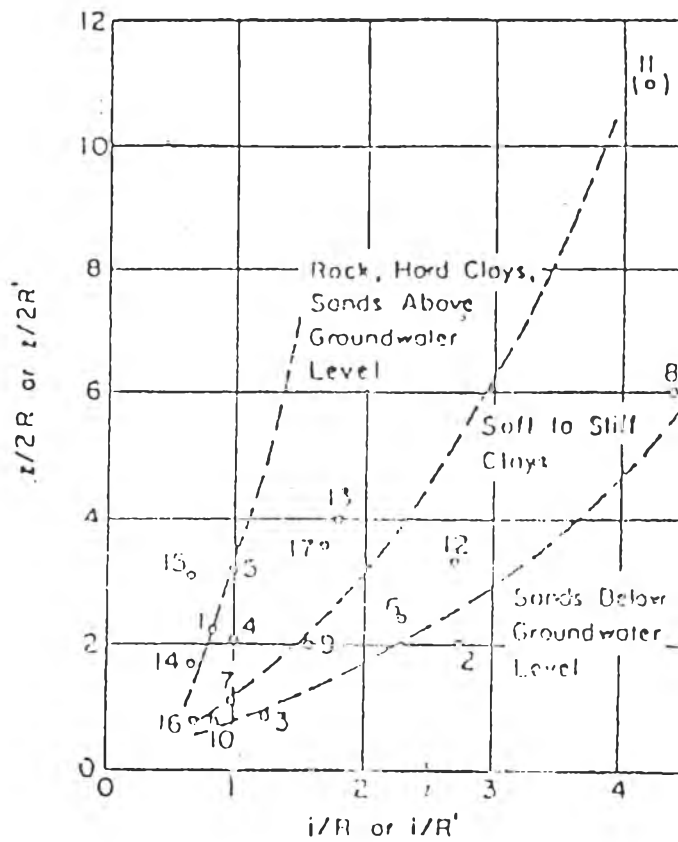


รูปที่ 2.3 การประมาณค่าการเคลื่อนตัวของมวลดิน



Ratio $\frac{l}{R}$ is function of $\frac{z}{2R}$ and soil conditions
 Volume of trough $\approx 2.5 l \delta_{max}$.

รูปที่ 2.4 คุณสมบัติของสมการการหาค่าการทรุดตัวของผิวดิน



รูปที่ 2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างของการทรุดตัว (i/R) กับความลึกของอุโมงค์ ($Z/2R$) สำหรับการขุดเจาะอุโมงค์ในดินชนิดต่าง ๆ (PECK, 1969)

2) SCHMIDT (1969)

การหาค่า i สำหรับการขุดเจาะอุโมงค์ในดินเหนียวสามารถทำได้ดังนี้

$$\frac{i}{a} = \left[\frac{Z}{2a} \right]^{0.8} \quad (2.3)$$

โดย a คือ รัศมีของอุโมงค์

Z คือ ความลึกจากจุดศูนย์กลางของอุโมงค์

ในรูปที่ 2.6 สำหรับดินเหนียว และ รูปที่ 2.7 สำหรับดินเม็ดหยาบ

3) NORGROVE, COOPER และ ATTEWELL (1979)

$$\frac{i}{R} = K \left[\frac{Z}{2R} \right]^n \quad (2.4)$$

โดย $K = 1$ และ $n = 1$ สำหรับดินเหนียว

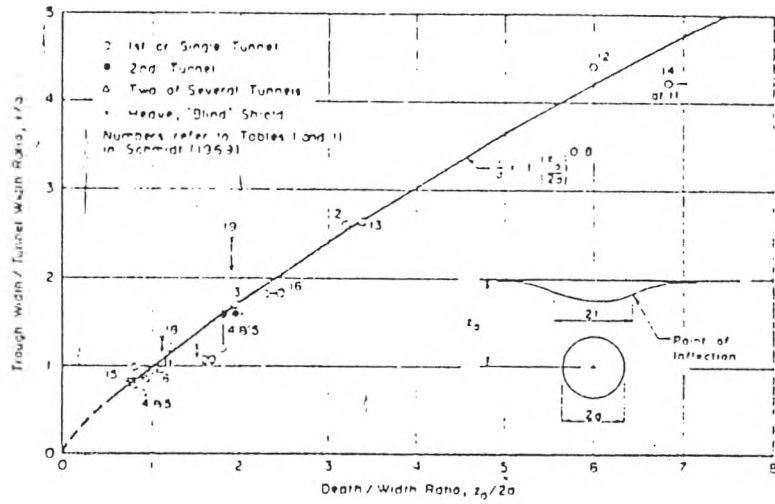
$K = 0.74$ และ $n = 0.90$ สำหรับดินเม็ดหยาบ

4) O'REILLY และ NEW (1982)

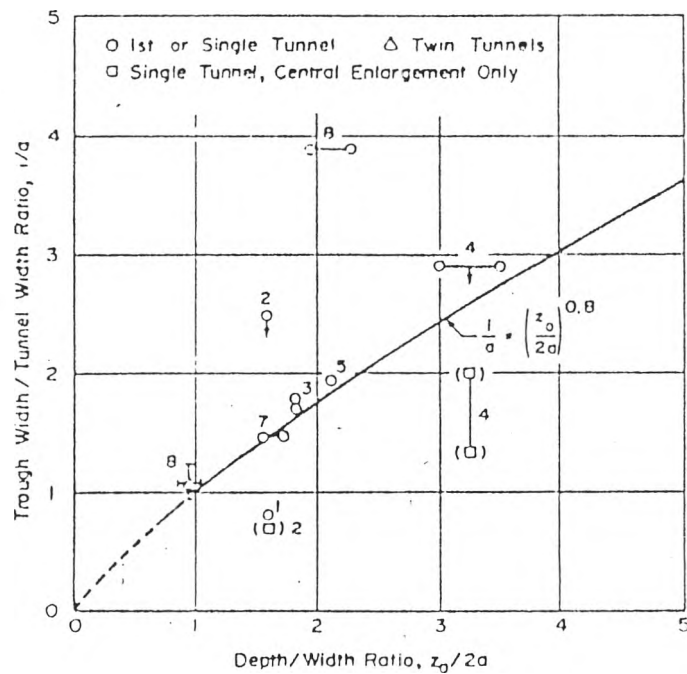
$$i = KZ \quad (2.5)$$

โดย $K = 0.50$ สำหรับดินเหนียว

$K = 0.25$ สำหรับดินเม็ดหยาบ



รูปที่ 2.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างของการทรุดตัว (i/a) กับความลึกของอุโมงค์ ($Z_0/2a$) ในดินเหนียว (Schmidt, 1969)



รูปที่ 2.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้างของการทรุดตัว (i/a) กับความลึกของอุโมงค์ ($Z_0/2a$) ในดินเม็ดหยาบ (Schmidt, 1969)

2.3.1.2 การประเมินค่าการทรุดตัวมากที่สุด (S_{max})

$$V_s = \int_{-\alpha}^{\alpha} S dX = \int_{-\alpha}^{\alpha} S_{max} \exp\left[-\frac{X^2}{2i^2}\right] dX \quad (2.6)$$

$$\approx 2.5 i S_{max}$$

$$S_{max} = \frac{V_s}{2.5i} \quad (2.7)$$

โดย V_s คือ ปริมาณการทรุดตัวต่อหน่วยความยาวของอุโมงค์

V_L คือ ปริมาณการสูญเสียมวลดินเนื่องจากการขุดอุโมงค์

V_{exe} คือ ปริมาณการขุดอุโมงค์

1) PECK (1969)

ขนาดของปริมาณการสูญเสียมวลดินในการขุดเจาะอุโมงค์ขึ้นอยู่กับค่า ตัวเลขเสถียรภาพ (Stability Number , N)

$$V_L = f(N) = f\left[\frac{P_z - P_a}{S_u}\right] \quad (2.8)$$

โดยที่ P_z คือ แรงดันรวมในแนวตั้งที่ความลึก Z ณ จุดศูนย์กลางอุโมงค์ (total vertical pressure at depth Z of center of tunnel)

P_a คือ แรงดันอากาศที่อัด (air pressure above atmospheric)

S_u คือ กำลังรับแรงเฉือนแบบไม่ระบายน้ำของดินเหนียว (undrained shear strength of clay)

2) SCHMIDT (1969)

ในช่วงไม่ยึดหยุ่นสามารถแสดงความสัมพันธ์ของปริมาตรมวลดินที่สูญเสียได้ดังนี้
เมื่อมีแรงดันภายใน (P_i , internal pressure)

$$V_L = \frac{\Delta V}{V_0} = 2S_u \frac{1+\nu}{E_u} \exp\left(\frac{\sigma_{v0}}{S_u} - 1\right) \quad (2.9)$$

เมื่อไม่มีแรงดันภายใน (P_i , internal pressure)

$$V_L = \frac{\Delta V}{V_0} = m \exp\left(\frac{\sigma_{v0}}{S_u} - 1\right) \quad (2.10)$$

สำหรับ σ_{v0}/S_u มากกว่าหรือเท่ากับ 1

$$V_L = \frac{\Delta V}{V_0} = m \left(\frac{\sigma_{v0}}{S_u} - 1\right) \quad (2.11)$$

สำหรับ σ_{v0}/S_u น้อยกว่า 1

โดยที่ m มีค่าระหว่าง 0.006 ถึง 0.02

สำหรับในสถานะยึดหยุ่นค่าความสูญเสียของมวลดินน้อยมากอยู่ในช่วง 0.2 ถึง 0.6 % ของปริมาตรการขุด

3) NORGROVE, COOPER และ ATTEWELL (1979)

$$\frac{V_s}{V_{exc}} = m \quad (2.12)$$

โดย $m = 2.5\%$ สำหรับดินเหนียว

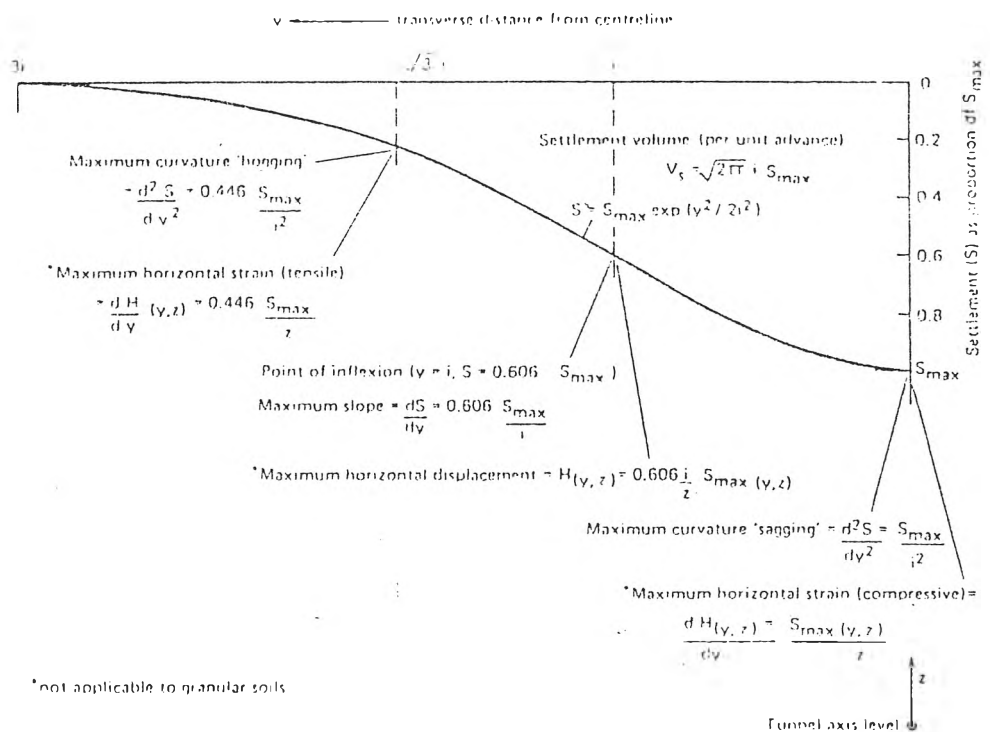
$m = 5\%$ สำหรับดินเม็ดหยาบ

4) O'REILLY และ NEW (1982)

$$\frac{V_s}{V_{exc}} = m \tag{2.13}$$

- โดย $m = 0.5-3\%$ สำหรับ Stiff fissured clay ; shield หรือ ไม่มี shield
 $m = 2-2.5\%$ สำหรับ Glacial deposits ; shield ใน free air
 $m = 1-1.25\%$ สำหรับ Glacial deposits ; shield ใน compress air
 $m = 30-45\%$ สำหรับ Silty clay ,Cu = 10-40 kN/m²; shield ใน free air
 $m = 5-20\%$ สำหรับ Silty clay ,Cu = 10-40 kN/m²; shield ใน compress air

รูปที่ 2.8 แสดงค่าการทรุดตัวตามสมการของ (O'REILLY และ NEW ,1982)



รูปที่ 2.8 แสดงภาพตัดของการทรุดตัวของผิวดิน (O'REILLY และ NEW , 1982)

2.4 ลักษณะทั่วไปของชั้นดินอ่อนกรุงเทพฯ

ในที่ราบลุ่มภาคกลางของเมืองไทยโดยเฉพาะในเขตกรุงเทพฯ ภายใต้อันดินเป็นดินที่เกิดจากการตกตะกอนทับถมขึ้นมา(sedimentation) ส่วนมากเป็นพวก soft highly plastic marine clay จากการศึกษาทั่วไปเกี่ยวกับ geotechnical properties ของชั้นดินในเขตกรุงเทพฯ พบว่าสามารถแบ่งชั้นดินต่างๆที่เกิดขึ้นได้เป็น 4 ชั้น คือ

ก).Weathered crust เป็นชั้นดินบนสุดมีความหนาของชั้นดินระหว่าง 0.5 เมตร ถึง 3.0 เมตร ส่วนมากเป็นพวก dark grey clay ซึ่งมักพบรอยแตก (crack) อยู่ในเนื้อดิน เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงกลับไปกลับมาของขบวนการwetting และ drying ในชั้นดินนี้ ผิวดินอยู่ประมาณ 1.5 เมตรเหนือระดับน้ำทะเล

ข).Very soft to medium dark grey clay ดินในชั้นนี้เป็นดินเหนียวอ่อนที่เรียกกันว่าดินเหนียวอ่อนกรุงเทพฯ (soft Bangkok clay) อยู่ถัดจากชั้น Weathered crust ลงมา มีความหนาเปลี่ยนแปลงจาก 2.8 เมตร ถึง 8 เมตร

ค).Stiff to hard light grey และ yellow – brown clay ดินในชั้นนี้เป็นดินเหนียวแข็งซึ่งพบอยู่ถัดลงมาจกชั้นดินเหนียวอ่อนกรุงเทพฯ มีความหนาเปลี่ยนแปลงจาก 1.0 เมตร ถึง 7.0 เมตร

ง).Dense sand และ gravel layer ลึกลงไปจากดินแข็งเป็นชั้นทรายซึ่งมักพบว่ามีความหนาของชั้นนี้ อย่างน้อยที่สุดประมาณ 1.5 เมตร ลักษณะของชั้นดินอ่อนกรุงเทพฯใน ชั้นดิน ก,ข และ ค ได้มาจาก Balasubramaniam และคณะ(1976) ตารางที่ 2.1 แสดงลักษณะของชั้นดินอ่อนในกรุงเทพฯ (Oonchittikul ,1989)

2.5 พฤติกรรมของดินจากการทดสอบ

2.5.1 คำนิยาม และแนวความคิดพื้นฐานของดิน

2.5.1.1 ความเค้นในดิน (Stress in a Soil mass)

ที่จุดๆหนึ่งในมวลดินมีหน่วยแรงกระทำในลักษณะ 3 มิติสภาพของหน่วยแรงในมวลดินที่จุดนั้นจะประกอบด้วยหน่วยแรงตั้งฉาก(Normal stress) 3 หน่วย (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) และ

ตารางที่ 2.1 คุณสมบัติทั่วไปของชั้นดินกรุงเทพฯ (Oonchitikul , 1989)

LAYER	w (%)	LL (%)	PL (%)	PI	LI	γ_t (kN/m ³)	e	Gs	K	OCR	Su (kN/m ³)	C (kN/m ³)	ϕ (deg.)	E (kN/m ³)
weathered clay	30-100	30-40	20-35	15-50	0.2-2.0	1.55-1.9	-	2.6-2.7	0.58-0.7	6.0-13.0	20	0	17-37	8,200
soft clay	40-110	40-120	20-40	20-85	0.2-2.0	1.45-1.75	1.3-3.8	2.7	0.57-0.69	1.5-3.3	6-27.1	0	21-24	3,000
1 st stiff clay	15-40	23-90	15-40	10.0-50	0.25-0.50	1.8-2.15	0.4-1.2	2.7-2.8	0.55-0.69	1.0-5.0	30-270	0	22-23	700-1,000
1 st sand	17-25	17-25	-	-	-	1.9-2.3	0.7	2.7	-	-	-	0	30-40	23,800-36,500
2 nd stiff clay	15-35	30-70	15-35	15-45	0.35-0.75	2.02-2.08	0.8-1.3	2.7	-	1-1.6	60-210	-	-	-

หน่วยแรงเฉือน (Shear stress) 6 หน่วย ($\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$) โดยหน่วยแรงที่กระทำต่อมวลดินเกิดจาก 2 สาเหตุ คือ

- 1) หน่วยแรงที่กระทำเนื่องจากน้ำหนักของดินที่ทับถม
- 2) หน่วยแรงที่กระทำเนื่องจากแหล่งภายนอก

TERAGHI(1923) ให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงรวมและความดันน้ำในโพรงที่จุดๆหนึ่งในมวลดินดังนี้

$$\sigma = \sigma' + u \quad (2.14)$$

โดยที่ $\sigma =$ หน่วยแรงรวมตามแนวแกน

$\sigma' =$ หน่วยแรงประสิทธิผล

$u =$ ความดันน้ำในโพรง

ในการทดสอบในห้องปฏิบัติการนั้นมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำให้สภาพของหน่วยแรงมีความยุ่งยากน้อยลง กล่าวคือจำเป็นต้องควบคุมสภาพของหน่วยแรงให้ง่ายต่อการทดสอบและการแปรผลถึงแม้ว่าผลการทดสอบที่ได้จะไม่สามารถจำลองสภาพจริงได้อย่างแน่นอนก็ตาม ในการทดสอบโดยอาศัยเครื่องมือ Triaxial นั้นจะสมมติให้หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในตัวอย่างดินเป็นหน่วยแรงหลักทั้งสาม (Principle Stress) โดยไม่มีหน่วยแรงเฉือนมากระทำกับตัวอย่างดิน นอกจากนี้แล้ว เพื่อให้สามารถทำการทดสอบได้ง่ายยิ่งขึ้น หน่วยแรงหลัก 2 หน่วยแรงจะถูกบังคับให้มีค่าเท่ากับค่าของ Confining stress ที่ใช้ โดยสภาพของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นสามารถจำแนกตามวิธีการทดสอบได้ดังนี้

- 1) Triaxial compression test ในกรณีเช่นนี้ หน่วยแรงหลักจะมีสภาพดังนี้คือ

$$\sigma_1 = \sigma_v = \text{หน่วยแรงตามแนวตั้ง}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c = \text{Confining Stress}$$

- 2) Triaxial extension test ในกรณีจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือในกรณีที่ตัวอย่างดินนั้นมีหน่วยแรงเริ่มต้นเป็นแบบ isotropic แล้วนั้น

$$\sigma_3 = \sigma_v = \text{หน่วยแรงตามแนวตั้ง}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_c = \text{Confining Stress}$$

ในกรณีที่ตัวอย่างดินนั้นมีหน่วยแรงเริ่มต้นเป็นแบบ anisotropic จะมีการหมุนเปลี่ยนทิศของหน่วยแรงหลักเป็นมุม 90 องศา ดังนี้

เมื่อ $\sigma_v > \sigma_c$

$$\sigma_1 = \sigma_v = \text{หน่วยแรงตามแนวแกน}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c = \text{Confining Stress}$$

เมื่อ $\sigma_v < \sigma_c$

$$\sigma_3 = \sigma_v = \text{หน่วยแรงตามแนวแกน}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_c = \text{Confining Stress}$$

3) Lateral unloading เป็นการทดสอบโดยการลดค่า Confining Stress ลงแล้วคงค่า Vertical stress ให้คงที่ไว้ในกรณีเช่นนี้หน่วยแรงหลักจะมีค่าดังนี้ คือ

$$\sigma_1 = \sigma_v = \text{หน่วยแรงตามแนวดิ่ง}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_c = \text{Confining Stress}$$

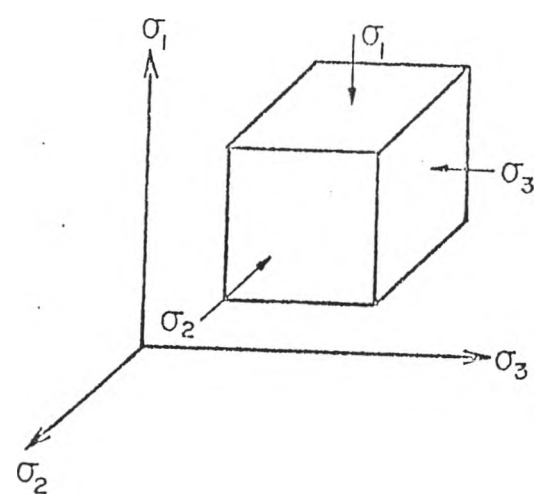
รูปที่ 2.9 แสดงทิศทางของหน่วยแรง (stress path) ที่เกิดขึ้นจากการทดสอบ Triaxial แบบต่างๆกัน

ตัวแปรของหน่วยแรง (stress parameter) ที่มักใช้ในการแปรผลการทดสอบแบบ Triaxial นั้นมีอยู่หลายวิธีด้วยกันเช่น

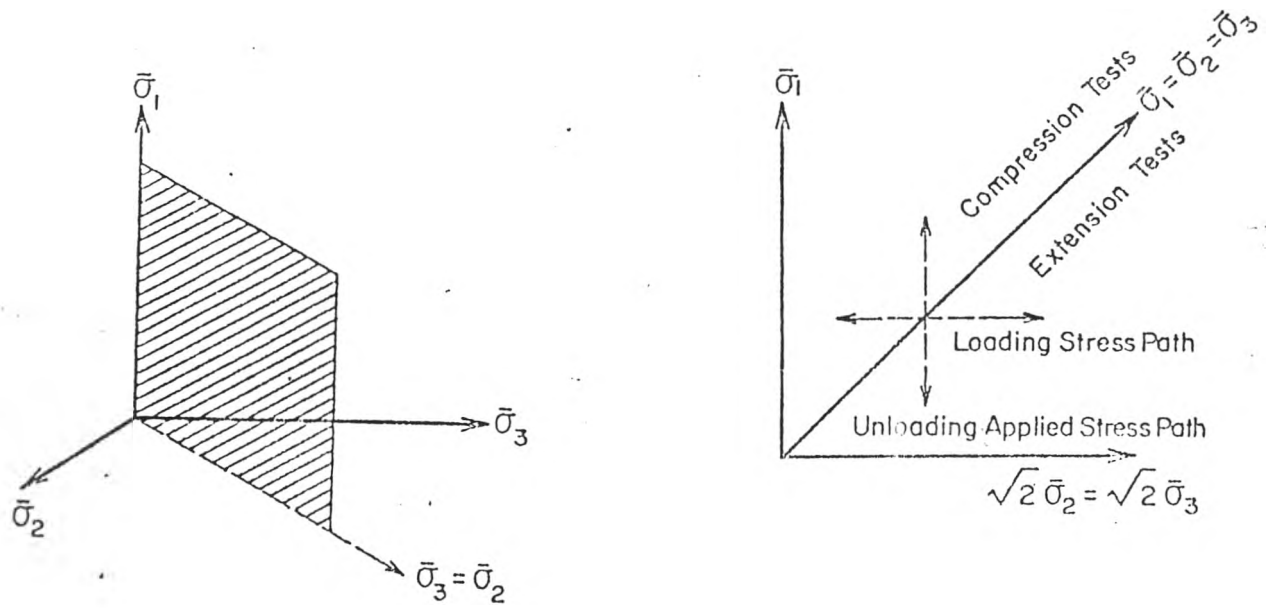
ค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุด (Maximum Shear Stress) จะอยู่บนระนาบที่ทำมุม 45 องศา กับระนาบของ σ_1

$$\sigma_{45} = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \quad (2.15)$$

$$\tau_{45} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \quad (2.16)$$



รูปที่ 2.9 (ก) แสดงสถานะของความเค้นในมวลดิน



รูปที่ 2.9 (ข) แสดงความสัมพันธ์สภาพของหน่วยแรงในการทดสอบ Triaxial

จากกลุ่มการวิจัยของ MIT ได้เสนอวิธีการใช้ p-q ไคอะแกรมและทางเดินของหน่วยแรง
ดังนี้

$$q = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \quad (2.17)$$

โดยที่ q คือ ค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในมวลดินที่จุดนั้น

p คือ ค่าหน่วยแรงในแนวตั้งฉากบนระนาบทำมุม 45 องศากับระนาบของ σ_1

$$p = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \quad (2.18)$$

และเขียนอยู่ในรูปหน่วยแรงประสิทธิผลได้ดังนี้

$$p' = \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \right) = p - u \quad (2.19)$$

$$q' = \left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \right) = q \quad (2.20)$$

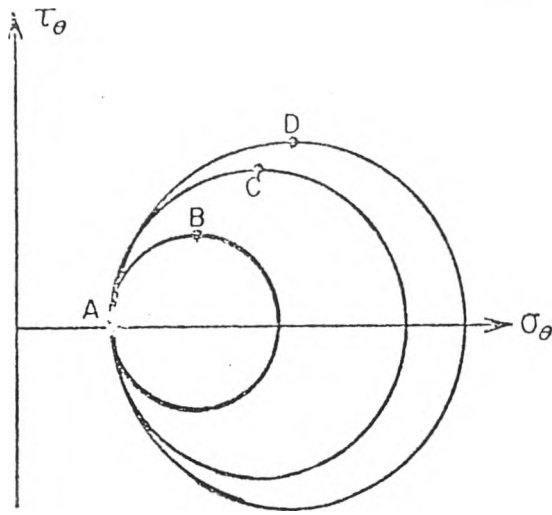
ดังแสดงในรูปที่ 2.11 (ก) และ (ข)

ROSCOE, SCHOFIELD และ WROTH (1958) ได้เสนอการเปลี่ยนแปลงของค่าหน่วย
แรงในรูปของ first และ second invariants ของหน่วยแรง ดังนี้

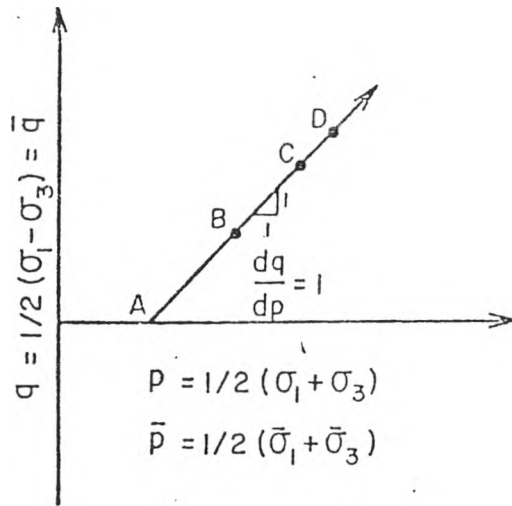
$$p^* = \frac{1}{3} (\sigma'_1 + 2\sigma'_3) \quad (2.21)$$

$$q^* = (\sigma'_1 - \sigma'_3) \quad (2.22)$$

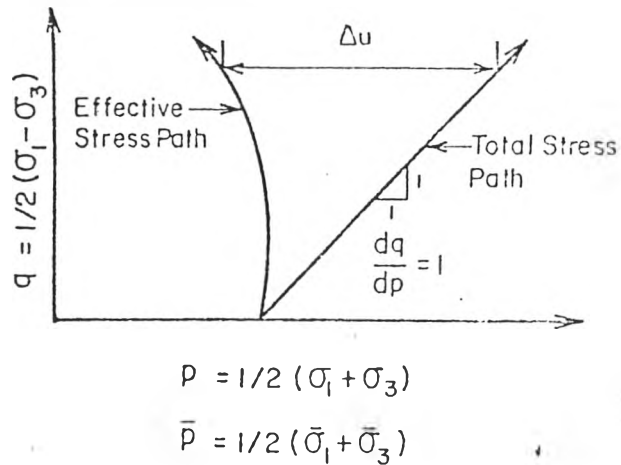
โดยการกำหนดค่า p^*, q^* ในรูปของหน่วยแรงประสิทธิผล ดังแสดงในรูปที่ 2.12



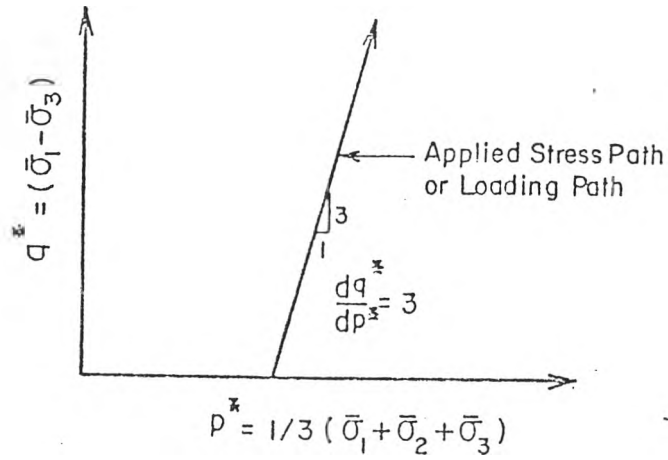
รูปที่ 2.10 แสดงหน่วยแรงของ Mohr's circle



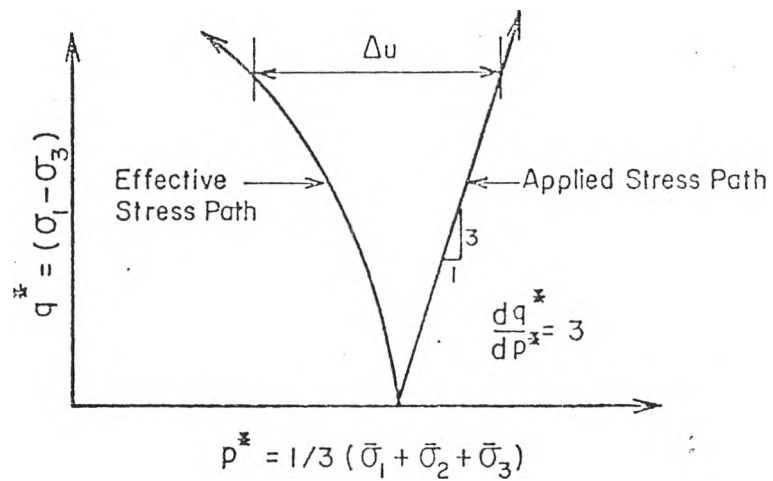
รูปที่ 2.11 (ก) แสดงตำแหน่งของ (p, q)



รูปที่ 2.11 (ข) แสดงแนวทางเดินของหน่วยแรงรวมและหน่วยแรงประสิทธิผล



รูปที่ 2.12 (ก) การประยุกต์แนวทางการเคลื่อนของหน่วยแรงในการทดสอบแบบ Drained



รูปที่ 2.12 (ข) การประยุกต์แนวทางการเคลื่อนของหน่วยแรงรวมและหน่วยแรงประสิทธิภาพในการทดสอบแบบ Undrained

2.5.1.2 ความเครียด (Strain)

เมื่อมีการเพิ่มขึ้นของหน่วยแรงหลัก $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ ทำให้ค่าความเครียดหลักเพิ่มขึ้นด้วย $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ ปริมาตรความเครียดเพิ่มขึ้น $d\varepsilon_v$ และ ความเครียดที่เกิดจากหน่วยแรงเฉือนเพิ่มขึ้น $d\varepsilon$ ในตัวอย่างการทดสอบ Triaxial กำหนดได้ดังนี้ (ROSCOE, SCHOFIELD และ WROTH (1958))

$$d\varepsilon_v = (d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3) \quad (2.23)$$

โดยที่ $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$ และ

$$d\varepsilon = \frac{2}{3}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) \quad (2.24)$$

การเพิ่มขึ้นของค่า dV และ $d\varepsilon$ แสดงด้วยสมการ ของ first และ second invariants ของการเพิ่มของ strain tensor ดังนี้

$$\sigma'_1 d\varepsilon_1 + 2\sigma'_3 d\varepsilon_3 = (p^* dv + q^* d\varepsilon) \quad (2.25)$$

ก) ความเครียดธรรมชาติ (Natural strains)

พิจารณาจากตัวอย่างดินรูปทรงกระบอกความสูงของตัวอย่างเท่ากับ L และปริมาตรเท่ากับ V เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงในดินก็จะเกิดการเปลี่ยนแปลงของความสูงและปริมาตรของตัวอย่างดินขึ้นในทันที (dL และ dV) ดังนี้

$$d\varepsilon_1 = -\frac{dL}{L} \quad (2.26)$$

และ

$$d\varepsilon_v = -\frac{dV}{V} \quad (2.27)$$

ค่าความเครียดในแนวแกน (ϵ_l) และปริมาตรความเครียด (ϵ_v) หามาได้โดยการ Integration ดังนี้

$$\epsilon_l = \int_{L_0}^L -\frac{dL}{L} = \ln \frac{L_0}{L} \quad (2.28)$$

และ

$$\epsilon_v = \int_{V_0}^V -\frac{dV}{V} = \ln \frac{V_0}{V} \quad (2.29)$$

โดยที่ L_0 และ V_0 เป็นค่าความสูงเริ่มต้นและปริมาตรเริ่มต้นของตัวอย่างดินภายใต้ Stress free condition

ข) ความเครียดสะสม (Cumulative strains)

ความเครียดสะสมกำหนดได้โดยอัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของความสูงหรือปริมาตรของตัวอย่างดินกับความสูงเริ่มต้นหรือปริมาตรเริ่มต้น ดังนี้

$$\epsilon_l^* = -\frac{L_0 - L}{L_0} \quad (2.30)$$

$$V^* = -\frac{V_0 - V}{V_0} \quad (2.31)$$

ที่ค่าความเครียดต่ำเราสามารถมองข้ามความแตกต่างระหว่างค่าความเครียดธรรมชาติกับความเครียดสะสมได้

2.5.1.3 ทฤษฎี Continuum

เนื่องจากดินเป็นวัสดุที่ประกอบด้วย เม็ดดิน, อากาศ, น้ำ และ สารอินทรีย์ ดังนั้นพฤติกรรมของดินจริงๆ แล้วควรจะพิจารณาพฤติกรรมของแต่ละองค์ประกอบที่เกี่ยวข้องกัน ซึ่งวิธีการนี้ค่อนข้างยุ่งยาก และไม่เหมาะสมสำหรับการใช้งานจริง ซึ่งไม่ต้องการความละเอียดมากนัก ดัง

นั้น ผลของแต่ละอย่างนี้จะถูกเฉลี่ย และมองเสมือนเป็นวัสดุต่อเนื่อง (Continuum) ซึ่งเป็นสาขาของวิชา กลศาสตร์ของแข็ง

2.5.1.4 ชนิดของ Plasticity

วัสดุที่กลับคืนสู่รูปร่างเดิมเมื่อแรงกระทำเป็นศูนย์ จะเรียก elastic material โดยทฤษฎีของ

elasticity ที่เกี่ยวข้อง มักใช้ Hooke type หรือ Cauchy type ซึ่งค่อนข้างจะแม่นยำสำหรับวัสดุดังกล่าวแต่สำหรับ plastic material ไม่สามารถใช้ทฤษฎีข้างต้นได้ เนื่องจากไม่สามารถบอก plastic deformation เมื่อลดแรงจึงมีการใช้ Deformation theory of plasticity ประกอบ

ในรูปที่ 2.13 แสดงถึงความสัมพันธ์แบบ elastic ซึ่งเมื่อนำแรงกระทำออกวัสดุจะกลับมายังรูปร่างเดิม ซึ่งวัสดุที่มีพฤติกรรมแบบนี้จะเรียกว่า Elastic body

ในรูปที่ 2.14 แสดงถึงความสัมพันธ์ของ วัสดุ Perfectly plastic เมื่อหน่วยแรงเพิ่มจากจุด A ไปยังจุด B (หรือ ลดลงจาก จุด B ไปยังจุด A) จะให้ความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง โดยเมื่อหน่วยแรงถึงจุดๆหนึ่งซึ่งในรูปคือจุด C วัสดุจะเกิดการ yield โดยที่หน่วยแรงคงที่ และจะมี deformation เพิ่มขึ้น เมื่อถึงจุด D ทำการลดแรงไปยังจุด F (หรือเพิ่มแรงจากจุด F ไปยังจุด E หรือ จุด D) จะให้ความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง

ในรูปที่ 2.15 แสดงถึงความสัมพันธ์ของ วัสดุ Elasto - plastic จะประกอบด้วยช่วง elastic ในช่วงแรก และ ช่วง plastic ในช่วงหลังโดยในช่วงหลังนี้จะเกิดทั้ง elastic และ plastic deformation เกิดขึ้นพร้อมกัน

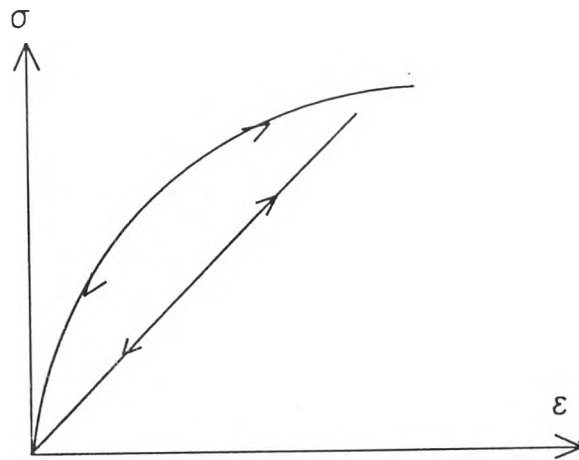
2.5.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด

2.5.2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดแบบ elastic

1) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดแบบ linear elastic

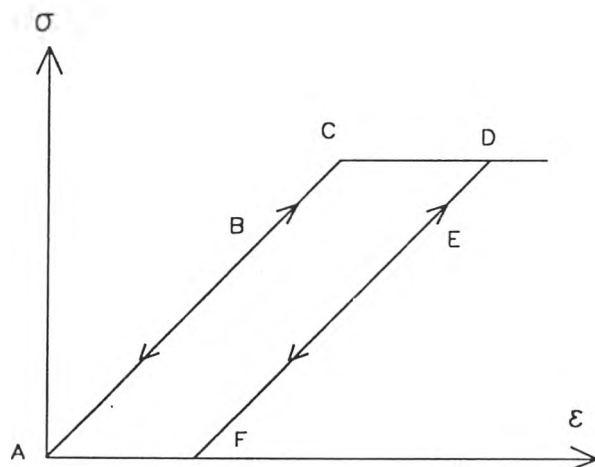
กฎของ Hooke ดังนี้

$$[\sigma] = [C] \{ \varepsilon \} \quad (2.32)$$



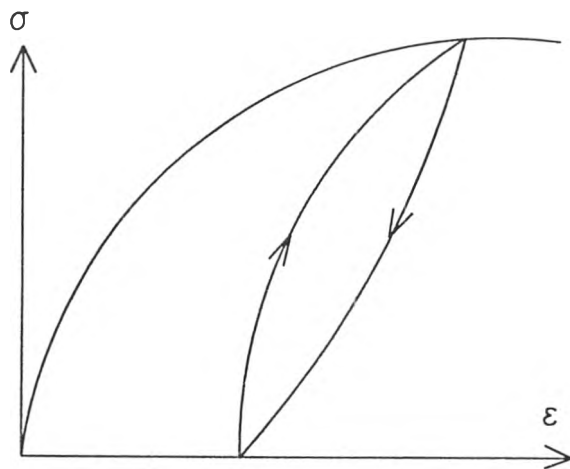
Linear and Non - linear elastic material

รูปที่ 2.13 แสดงถึงความสัมพันธ์ของวัสดุแบบ elastic



Perfectly plastic material

รูปที่ 2.14 แสดงถึงความสัมพันธ์ของวัสดุแบบ Perfectly plastic



Elasto - plastic material

รูปที่ 2.15 แสดงถึงความสัมพันธ์ของวัสดุแบบ Elasto - plastic

ถ้าเป็น Plane Stress condition ค่า $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ และสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างค่า Stress – Strain ในรูปเมตริก ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

ถึงแม้ว่าใน Plane Stress condition ค่า $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = 0$ หรือ $\gamma_{31} = \gamma_{23} = 0$ แต่ค่า ε_{33} จะไม่เป็นศูนย์ซึ่งสามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.34)$$

ถ้าเป็น Plane Strain condition ค่า $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0$ หรือ $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma_{33} = 0$ และสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างค่า Stress – Strain ในรูปเมตริก ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

ถ้าเป็น Axisymmetric condition สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างค่า Stress – Strain ในรูปเมตริก ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & \nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

โดยที่ E คือค่า Young's modulus และ ν คือค่า Poisson's ratio

ความเครียดหลัก ε_{11} , ε_{33} ในรูปของหน่วยแรงหลัก σ_{11} , σ_{33} ในตัวอย่างดินรูปทรงกระบอกโดยการทดสอบแบบ Extension ถูกกำหนดตามสมการที่ใช้ในทฤษฎีความยืดหยุ่นโดยค่า σ_{22} มีค่าเท่ากับ σ_{33} ได้ ดังนี้

$$\varepsilon_{11} = -\frac{1}{E}[\sigma_{11} - 2\nu\sigma_{33}] \quad (2.37)$$

และ

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \quad (2.38)$$

จากรูปที่ 2.16 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ของค่าความเค้นกับความเครียด สำหรับ Normally consolidated clay ในการทดสอบ Triaxial แบบไม่ระบายน้ำ

2) ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดแบบ Nonlinear elastic

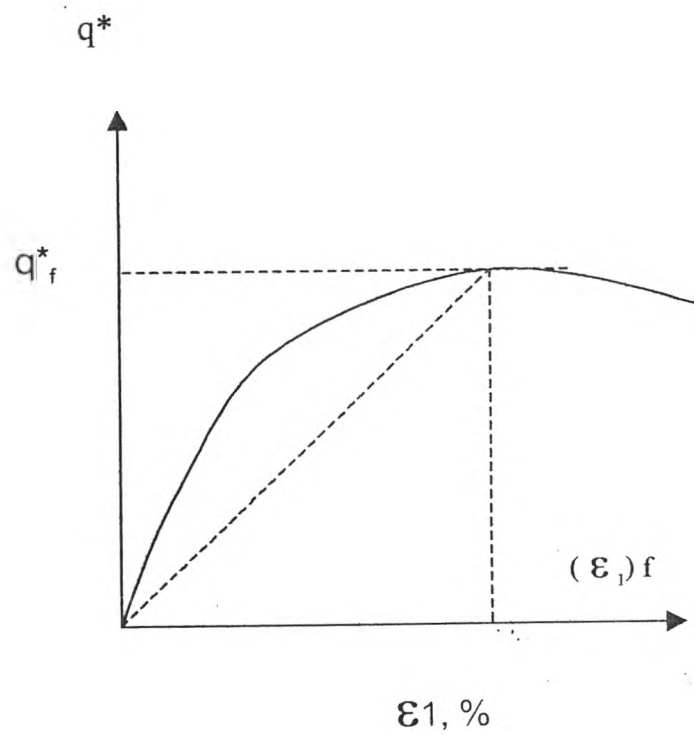
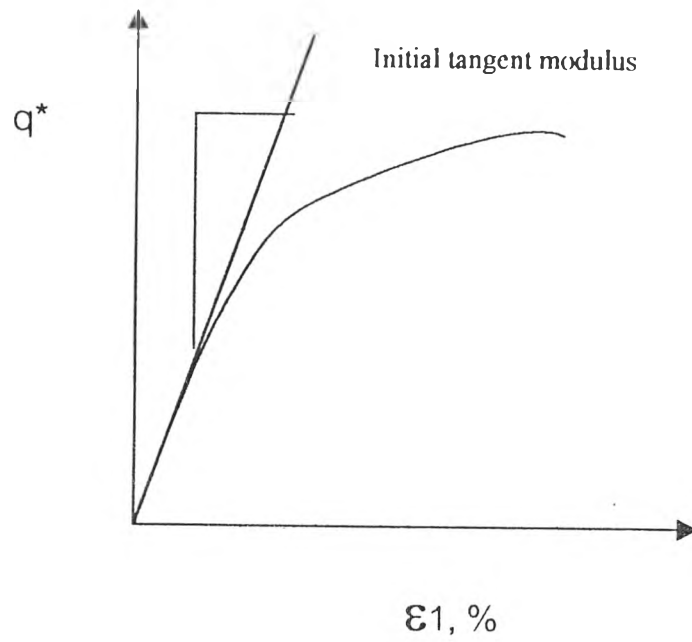
เนื่องจากความสัมพันธ์ของค่าความเค้นกับความเครียดเป็นแบบ Nonlinear ดังนั้นค่า Tangent modulus โดยที่ค่า ν เท่ากับ 0.5 ได้ดังนี้

$$E_{\text{tan}} = -\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} \quad (2.39)$$

และ ค่า Secant modulus ได้จาก

$$E_{\text{sec}} = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\varepsilon_1} \quad (2.40)$$

ค่า Tangent modulus และ ค่า Secant modulus ขึ้นอยู่กับค่า Deviator stress



รูปที่ 2.16 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของค่าความเค้นกับความเครียดสำหรับ Normally consolidated Clay ในการทดสอบ Triaxial แบบ Undrained

2.5.2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดแบบ Hyperbolic (KONDNER,1963)

KONDNER(1963) ได้เสนอการหาค่าความสัมพันธ์ของค่าความเค้นและความเครียดของค่าดินเหนียวอิ่มน้ำภายใต้สภาวะแบบไม่ระบายน้ำ ν เท่ากับ 0.5 จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = -\frac{\varepsilon_1}{a_1 + b\varepsilon_1} \quad (2.41)$$

โดยที่ a_1 เป็นค่าที่เกี่ยวข้องกับ tangent modulus เริ่มต้น

b เป็นค่าที่เกี่ยวข้องกับ shear strength ของดินเหนียว

2.5.2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดแบบ elasto – plastic

ประกอบด้วย 4 ส่วนคือ

- 1) Yield function ของวัสดุ
- 2) Flow rule ของวัสดุ
- 3) Hardening rule ของวัสดุ
- 4) ความสัมพันธ์ระหว่างค่า ทิศทาง ของการเพิ่มขึ้นของ principle plastic strain และ principle stresses

1) Yield function ของวัสดุ

yield surface คือ พื้นผิวใน stress space ที่แบ่งแยกบริเวณที่ดินมีพฤติกรรมเป็นแบบ elastic และ plastic ออกจากกัน ซึ่งจะแทนด้วยสมการดังนี้

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (2.42)$$

โดย σ_{ij} = Stress Tensor

ε_{ij}^p = Plastic Strain

k = Hardening Parameter

สถานะต่อไปนี้จะระบุถึงพฤติกรรม (ซึ่งจะเห็นได้ว่า Stress state ของดินจะไม่อยู่นอก yield surface)

$$f = 0, \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (2.43)$$

สำหรับ elastic – plastic behavior

$$f < 0 \quad \text{or} \quad f = 0, \quad df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (2.44)$$

สำหรับ elastic behavior initial yield surface เป็นการบอกถึงจุดเริ่มของ plasticity คือจุดที่ความสัมพันธ์แบบ elastic เริ่มใช้ไม่ได้ โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาหน่วยแรงซึ่งภายใต้หน่วยแรงนั้นจะเกิด plastic strain และ เพื่อแยกช่วงที่มีพฤติกรรม elastic กับ plastic ออกจากกัน

2) Flow rule ของวัสดุ

Flow rule คือความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางของ plastic strain, $d\varepsilon_{ij}^p$ และ state of stress, σ_{ij} ในขณะนั้นโดยความสัมพันธ์นี้สามารถหาได้จากการใช้หลักการ “plastic potential function(g)”

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.45)$$

โดยที่

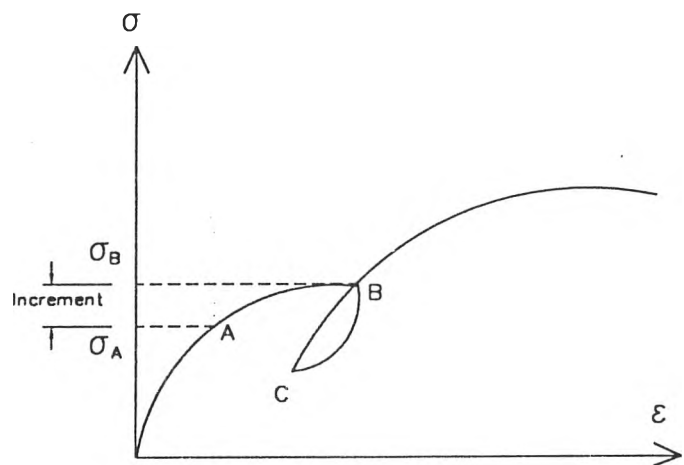
$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k)$$

$d\lambda$ คือค่า positive scalar of proportionality

จะใช้ความเกี่ยวข้องของ flow rule เฉพาะกรณีที่มี plastic potential function(g) เท่ากับ yield surface ขณะนั้นดังสมการนี้

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.46)$$

ทฤษฎี elasto – plastic มีค่า yield stress ไม่คงที่ และสามารถเปลี่ยนค่าได้ รูปที่ 2.17 เป็นการแสดงหลักการพื้นฐานของ work – hardening , การเกิด yield ครั้งแรกจะเกิดเมื่อ stress ถึงจุด A ถ้าดำเนินการให้แรงต่อไปจนถึงจุด B ใดๆเมื่อทำการปล่อยแรง ค่า stress จะลดลงถึงจุด C โดยขณะนั้น Stress point จะเคลื่อนเข้าไปใน yield surface ดังนั้นพฤติกรรมจึงเป็นแบบ purely elastic เมื่อทำการให้แรงอีกครั้งจากจุด C ไปยังจุด B จะเห็นได้ว่าดินจะ yield เมื่อ stress ถึงจุด B จะ



Basic of Work Hardening

รูปที่ 2.17 แสดงหลักการพื้นฐานของ work - hardening

เห็นได้ว่าคุณค่า initial yield stress (จุด A) จะมีค่าน้อยกว่า further yield stress (จุด B) เสมอ ลักษณะการเพิ่มขึ้นของคุณค่า yield stress นี้เรียกว่า “ work – hardening “

ในทฤษฎี elasto – plastic ค่า total strain increment ประกอบด้วย elastic strain increment และ plastic strain increment ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\varepsilon_{ij}^t = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e \quad (2.47)$$

ดังได้กล่าวในข้างต้นจะเห็นได้ว่าค่า plastic strain increment ($d\varepsilon_{ij}^p$) ซึ่งอธิบายโดย Flow rule และค่า ε_{ij}^e ซึ่งได้จากการทดสอบ จะมีผลต่อค่า ε_{ij}^c ซึ่งเกี่ยวข้องกับ stress increment ($d\sigma_{ij}$) โดยอาศัยค่า stiffness matrix (C_{ijkl}) ดังนี้

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e \quad (2.48)$$

แทนสมการที่ 2.45 ลงในสมการที่ 2.46 จะได้,

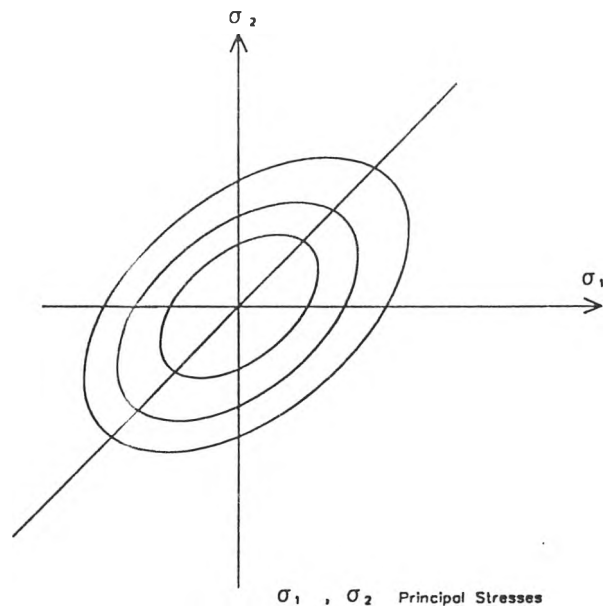
$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl}^t - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (2.49)$$

3) Hardening rule ของวัสดุ

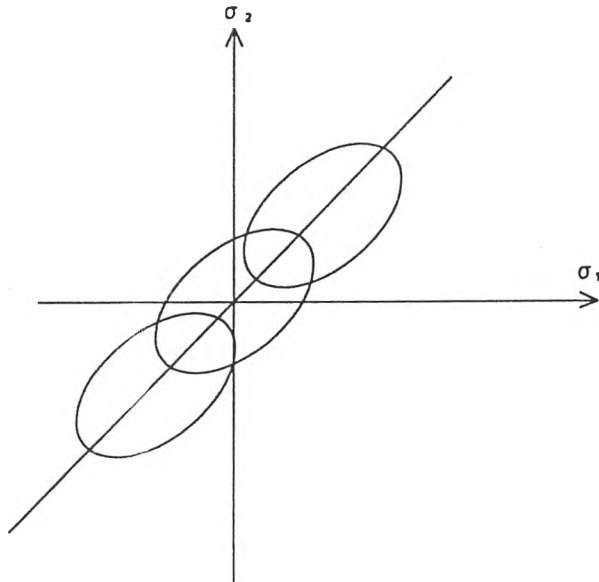
Hardening rule ก็คือ การที่ yield surface มีเปลี่ยนแปลงขนาด, รูปร่างและตำแหน่งในระหว่างขบวนการการเพิ่มขึ้นของ plastic deformation

พฤติกรรมของ Hardening rule มีด้วยกัน 3 แบบ ดังนี้

- ก) Isotropic hardening ถูกนำมาพิจารณาในช่วงการขยายตัวอย่างสม่ำเสมอของ loading surface เมื่อมีการเพิ่มแรงจนวัสดุเริ่ม yield แล้ววัสดุจะเริ่มมีพฤติกรรมแบบ plastic กล่าวคือ เริ่มเกิด plastic strain ค่า plastic strain เหล่านี้รวมกับ stress condition ณ จุดดังกล่าวจะทำให้ yield surface ขยายตัวออก กล่าวคือ yield stress จะเพิ่มขึ้นสำหรับ load step ถัดไป แต่อย่างไรก็ตามเมื่อมีการลดแรง (unload) yield surface จะไม่หดตัวลงและวัสดุจะมีพฤติกรรมแบบ elastic ดังแสดงในรูปที่ 2.18
- ข) Kinematic hardening อนุญาตให้ loading surface มีการเคลื่อนย้าย เสมือนเป็น rigid body ปริมาณของ plastic strain จะคำนวณจากระยะทางที่ yield surface ที่เคลื่อนตัวไป ดังแสดงในรูปที่ 2.19
- ค) Mixed hardening เกิดขึ้นทั้ง 2 แบบรวมกัน ซึ่งโดยทั่วไปใช้กับ Monotonic loading



รูปที่ 2.18 วัสดุที่มีพฤติกรรมการแบบ Isotropic hardening



รูปที่ 2.19 วัสดุที่มีพฤติกรรมการแบบ Kinematic hardening

2.5.3 ค่า Modulus ของ Elasticity (E)

ค่า Modulus ของ Elasticity เป็นค่าพารามิเตอร์ที่สำคัญมากที่ใช้ในการวิเคราะห์โดยวิธีการ Finite element ดังนั้น การคำนวณหาค่า Modulus ของ Elasticity ให้ถูกต้องจึงเป็นสิ่งที่สำคัญ ค่า Modulus ของ Elasticity สามารถหาได้จากในห้องทดลอง หรือได้จากประสบการณ์ในการ observed ในสนาม ณ ที่ตำแหน่งต่างๆ

LADD(1964) พบว่าค่า Modulus of Elasticity ที่ได้จากการทดสอบ triaxial เป็นสมการของค่า degree ของ overconsolidation และขึ้นอยู่กับขนาดของ applied shear stress, อิทธิพลของเวลาและความแตกต่างของชนิด stress system

จากประสบการณ์และการพัฒนาของ BJERRUM (1964) จะใช้ค่า

$$E = (250 \text{ ถึง } 500) S_u \quad (2.50)$$

โดยที่ S_u คือค่า Undrained shear strength ที่ได้จากการทดสอบ unconfined compression กลุ่มผู้วิจัยของ MIT (1969) เสนอให้ใช้ ดังนี้

$$\frac{E}{\sigma_{vc}} = (200 \text{ to } 400) \quad (2.51)$$

JANBU(1963) พบว่าค่า E initial tangent Modulus ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ของค่า stress-strain ของดิน และค่า confining pressure ดังนี้

$$E_i = K P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (2.52)$$

โดยที่ E_i คือ ค่า initial tangent Modulus

σ_3 คือ ค่า minor principal stress

P_a คือ ค่า atmospheric pressure

K คือ ค่า modular number

n ถูกกำหนดโดยอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่า E_i กับ σ_3

2.6 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากความสัมพันธ์ของค่าความเค้นกับค่าความเครียดของดินจะเห็นได้ว่าไม่เป็นแบบ linearly elastic สำหรับทุกช่วงการกระทำของแรงในทางปฏิบัติ ในความเป็นจริงพฤติกรรมของดินมีความซับซ้อนมากและจะมีพฤติกรรมที่แตกต่างกันไปเมื่ออยู่ในสถานะที่ต่างกัน ดังนั้นจึงไม่มีแบบจำลองใดที่สามารถทำนายพฤติกรรมของดินภายใต้ทุกสภาพได้ การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของดินจึงขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ที่จะนำไปใช้งาน

2.6.1 แบบจำลอง Perfect Plasticity

Failure criteria มีทฤษฎีหลักๆ ดังนี้

1) Mohr Coulomb Theory

Failure จะเกิดเมื่อค่า Shear stress (τ) และ normal stress (σ) ที่กระทำต่อ element จะสอดคล้องกับสมการที่ 2.51 และ criterion แสดงในรูปที่ 2.20

$$|\tau| = C + \sigma \tan \Phi \quad (2.53)$$

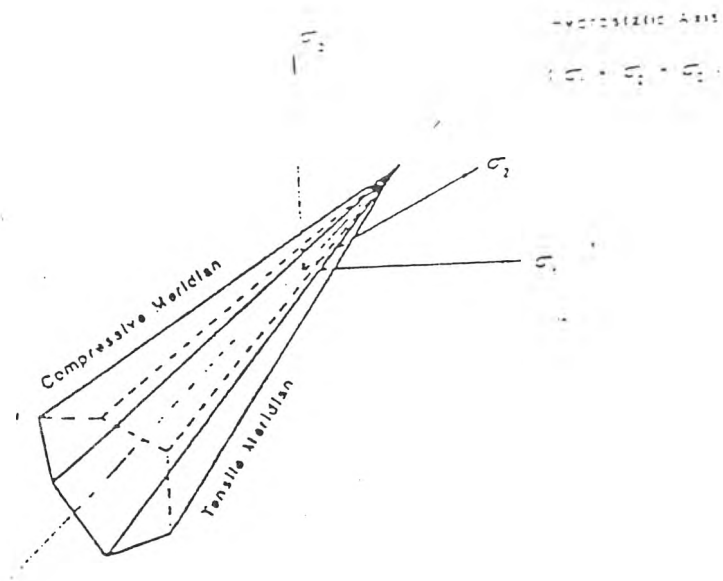
โดยที่ C คือ cohesion

Φ คือ angle of internal friction

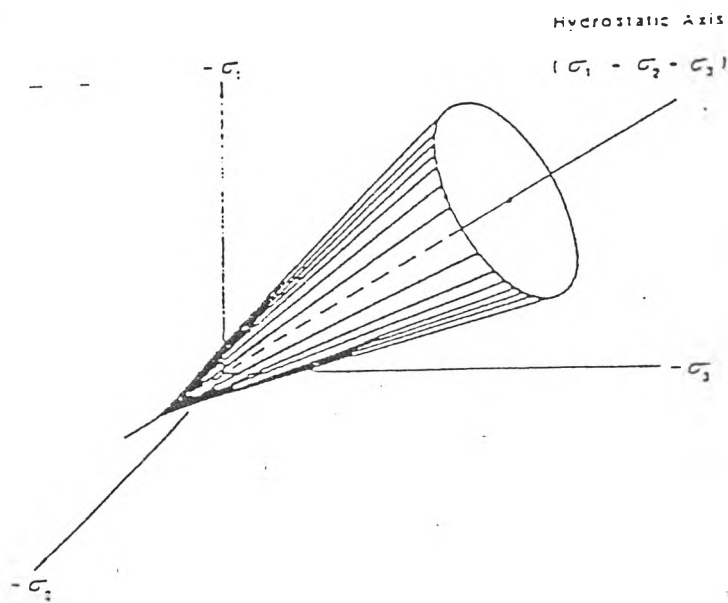
2) Drucker – Prager Theory

$$f = \alpha I_1 + J_2 = K \quad (2.54)$$

โดยที่ α และ K จะสัมพันธ์กับค่า C และ Φ ของวัสดุ และ criterion แสดงในรูปที่ 2.21



รูปที่ 2.20 Mohr Coulomb criterion



รูปที่ 2.21 Drucker-Prager criterion

3) Tresca Criterion

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{I_1 + C_1} = C_2 \quad (2.55)$$

และ criterion แสดงในรูปที่ 2.22

4) Von – Mises Theory

$$\frac{\sqrt{J_2}}{I_1 + C_3} = C_4 \quad (2.56)$$

และ criterion แสดงในรูปที่ 2.23

โดยที่ I_1 คือ Invariance ของ Stress tensor (ผลรวมของ normal stress)

$$I_1 = \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.57)$$

J_2 คือ Invariance ของ deviatoric stress tensor

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) \quad (2.58)$$

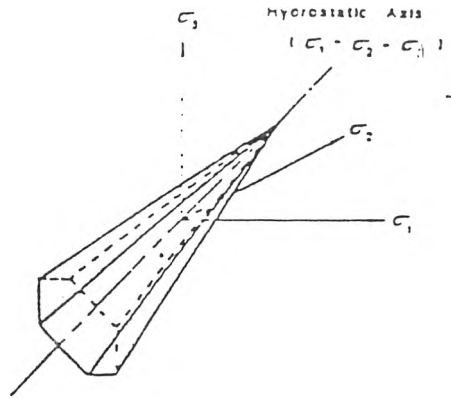
S_{ij} คือ Deviatoric stress tensor

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - P \delta_{ij} \quad (2.59)$$

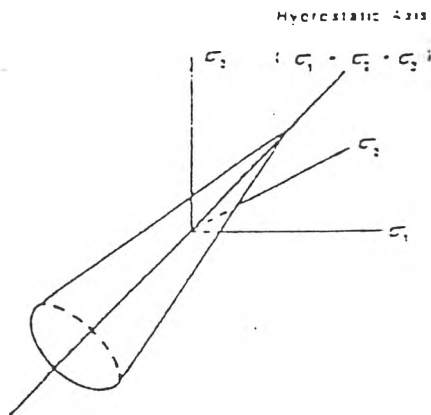
P คือ mean stress

$$P = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.60)$$

C_1, C_2, C_3 และ C_4 เป็นค่าคงที่



รูปที่ 2.22 Tresca criterion



รูปที่ 2.23 Von Mises criterion

2.6.2 แนวความคิด critical state

Roscoe, Schofield และ Wroth (1958) ได้เสนอ locus ของ critical state ดังนี้

$$q = M p' \quad (2.61)$$

และ

$$V = \Gamma - \lambda \ln p' \quad (2.62)$$

โดยที่ M, λ, Γ เป็นค่าคงที่

M คือ ค่าคงที่ของ critical state frictional

λ คือ ค่า gradient ของ virgin compression เส้นกราฟระหว่าง $V, \ln p'$

Γ คือ ค่า ordinate ของ critical state line เมื่อ $p' = 1 \text{ kN/m}^2$

2.6.3 แบบจำลอง Cam-clay

แบบจำลอง Cam-clay เป็นแบบจำลอง isotropic work hardening elasto – plastic พัฒนาโดย ROSCOE, SCHOFIELD และ THURAIRAJAH (1963) โดยใช้พื้นฐานของ critical state การพิจารณาสภาพของดินในสภาวะ critical state ณที่มีการกระจายของพลังงาน (dW_{cs}) สอดคล้องตามสมการดังนี้

$$dW_{cs} = q_{cs} d\epsilon_{cs} = M p'_{cs} d\epsilon_{cs} \quad (\text{cs คือ critical state}) \quad (2.63)$$

โดยที่ $d\epsilon_{cs}$ คือ ค่า incremental shear stain ณ critical state

ROSCOE และคณะ (1963) ได้สมมุติ ให้ค่าการกระจายของพลังงานที่ทุกๆค่า shearing ดังนี้

$$dW = M p' d\epsilon \quad (2.64)$$

หลักการสมดุลของงานและการกระจายของพลังงานของดิน โดยใช้ flow rule มีดังนี้

$$\frac{d\varepsilon}{dV^p} = \frac{1}{M-\eta} \quad (2.65)$$

โดยที่ η คือ q/p' เป็นอัตราส่วนของค่า deviator stress กับ effective mean normal stress

$$dV^p = \frac{(\lambda - \kappa) dp'_v}{p'_v} \quad (2.66)$$

โดยที่ p'_0 คือ ค่า intercept ของ yield locus บนแกน p รูปที่ 2.24 แสดง Cam-clay yield locus และ Modified Cam-clay yield locus

2.6.4 แบบจำลอง Modified Cam-clay

จากสมมุติฐานที่สำคัญที่ได้จากแบบจำลอง Cam-clay ในสภาวะ critical state และ shear strain ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ระหว่าง isotropic normal consolidation และ ค่า $d\varepsilon/dV^p$ มีค่ามาก ณ อัตราส่วนของ stress ต่ำๆ

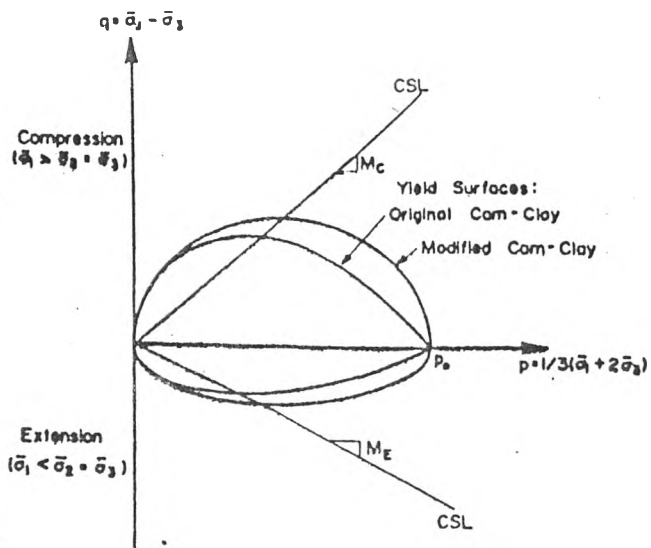
ROSCOE และ BURLAND (1968) ได้สมมุติว่าค่าความสัมพันธ์ของการกระจายของพลังงานที่เกิดขึ้นดังนี้

$$dW = p' \left| \left(dV^p \right)^2 + (M d\varepsilon)^2 \right|^{\frac{1}{2}} \quad (2.67)$$

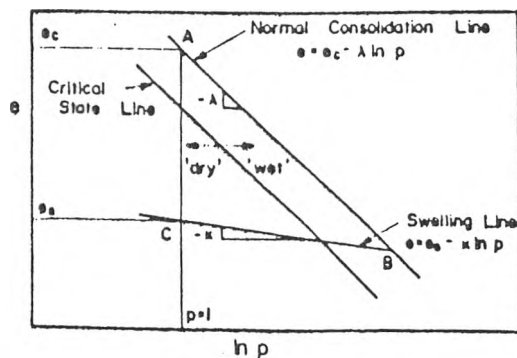
และ

$$\frac{d\varepsilon}{dV^p} = \frac{2\eta}{M^2 - \eta^2} \quad (2.68)$$

รูปที่ 2.25 แสดง Isotropic consolidation and Swelling behavior



รูปที่ 2.24 แสดง Cam - Clay yield locus และ Modified Cam - Clay yield locus



รูปที่ 2.25 Isotropic consolidation and Swelling behavior