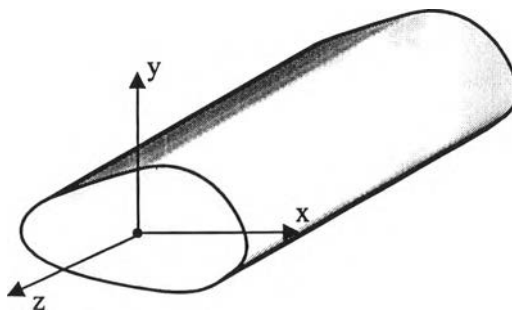


## การปรับปรุงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง

### ความนำ

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหรือวิธีการหาค่าตอบโดยประมาณที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ค่าคุณลักษณะการแพร่กระจาย (propagation characteristic) ของท่อนำคลื่น โดยเหตุผลจากโครงสร้างของท่อนำคลื่นที่มีรูปร่างไม่เจาะจงและมีความหลากหลายของท่อนำคลื่น เช่น ท่อนำคลื่นที่มีตัวกลางไม่เอกพันธ์หรือตัวกลางแอนไอโซทรอปิก เป็นต้น ในโครงสร้างของท่อนำคลื่นที่มีความซับซ้อนแบบนี้ การวิเคราะห์โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์หรือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบอื่นจะกระทำได้อย่างยากและยังมีข้อจำกัด ค่าคุณลักษณะการแพร่กระจายเป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญที่ใช้ในการออกแบบท่อนำคลื่นที่ใช้งานย่านความถี่ไมโครเวฟ ในบทความกล่าวถึงการปรับปรุงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ สามส่วน คือ ส่วนที่หนึ่งคือการแสดงสมการพื้นฐานของการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น ส่วนที่สองคือการแสดงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่มีนิพจน์แปรผันในพจน์ของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางและการปรับปรุงฟังก์ชันรูปร่างโดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ และส่วนที่สามคือการแสดงผลการเปรียบเทียบความแม่นยำของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่น่าเสนอ ในกรณีตัวอย่างของท่อนำคลื่นคือ ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมและท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก

### สมการพื้นฐานของการวิเคราะห์ท่อนำคลื่น



รูปที่ 2.1 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นรูปร่างไม่เจาะจงและมีความเป็นเอกรูป (uniform) ตลอดแนวแกน  $z$

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าฮาร์โมนิกเชิงเวลา (time harmonic electromagnetic field) ที่เกิดขึ้นภายในท่อนำคลื่นที่ไม่มีแหล่งกำเนิด (sourcefree) และมีความเป็นเอกรูปของโครงสร้างตลอดแนวแกน  $z$  ดังรูปที่ 2.1 โดยตัวกลางภายในท่อนำคลื่นมีคุณสมบัติเป็นตัวกลางแอนไอโซทรอปิกที่ไม่มีการสูญเสียจะต้องสอดคล้องกับสมการของแมกซ์เวลล์ในโดเมนความถี่ ดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega[\boldsymbol{\mu}] \cdot \mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega[\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbf{E} \quad (2.2)$$

ในที่นี้

$\mathbf{E}$  และ  $\mathbf{H}$  คือ ความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในรูปของเวกเตอร์  
 $[\boldsymbol{\mu}]$  และ  $[\boldsymbol{\varepsilon}]$  คือ เทนเซอร์ความซึมได้และเทนเซอร์สภาพยอมในรูปของเฮอริมิเซียน  
 $\omega$  คือ ความถี่เชิงมุมของคลื่น

เทนเซอร์ความซึมได้และเทนเซอร์สภาพยอมในรูปของเฮอริมิเซียนสามารถแสดงได้ในรูปของเมทริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  ได้ดังนี้

$$[\boldsymbol{\mu}] = \begin{bmatrix} [\mu_{rr}] & [\mu_{rz}] \\ [\mu_{rz}] & [\mu_{zz}] \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} [\varepsilon_{rr}] & [\varepsilon_{rz}] \\ [\varepsilon_{rz}] & [\varepsilon_{zz}] \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

โดยที่ดรรชนีล่าง  $rr$ ,  $rz$ ,  $rz$  และ  $zz$  แสดงขนาดเมทริกซ์ย่อยที่มีขนาด  $2 \times 2$ ,  $2 \times 1$ ,  $1 \times 2$  และ  $1 \times 1$  ตามลำดับ เมื่อแยกองค์ประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้า, ความเข้มสนามแม่เหล็กและตัวดำเนินการเดล ( $\nabla$ ) เป็นสององค์ประกอบ คือ องค์ประกอบในแนวตามขวางและองค์ประกอบในแนวตามแกนตามทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น (แนวแกน  $z$ ) แล้วสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นเมื่อพิจารณาตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสียสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t + E_z \mathbf{a}_z) \exp(-j\beta z) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_t + H_z \mathbf{a}_z) \exp(-j\beta z) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \\ \nabla_t &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y \end{aligned} \quad (2.7)$$

ในที่นี้  $\mathbf{E}$ , และ  $\mathbf{H}$ , คือองค์ประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในแนวขวางตามลำดับ,  $E_z$  และ  $H_z$  คือความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในแนวตามแกนตามลำดับ,  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  และ  $\mathbf{a}_z$  คือเวกเตอร์หน่วยในทิศทางแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ  $\nabla_t$ , คือตัวดำเนินการเดลในแนวตามขวาง  $\beta$  คือค่าคงตัวเฟส เมื่อแทนความสัมพันธ์ตามสมการ (2.5) ถึง (2.7) ลงในสมการ (2.1) และสมการ (2.2) ผลคือ

$$\omega[\mu_z] \cdot \mathbf{H}_t + \omega[\mu_z] \cdot H_z \mathbf{a}_z - j(\nabla_t \times \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{a}_z) - \beta(\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t) = 0 \quad (2.8a)$$

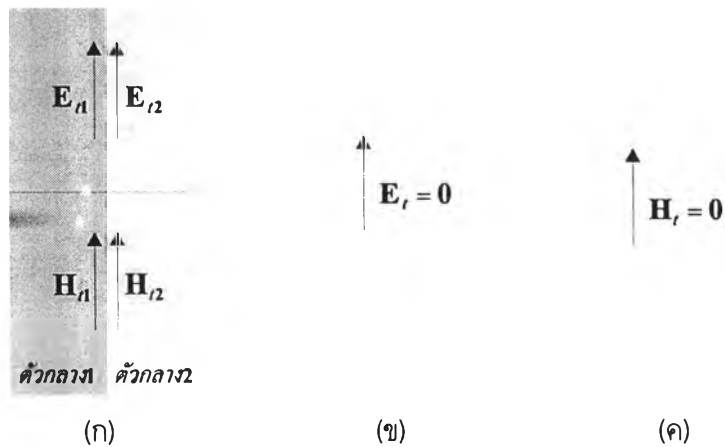
$$\omega[\epsilon_z] \cdot \mathbf{E}_t + \omega[\epsilon_z] \cdot E_z \mathbf{a}_z + j(\nabla_t \times \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{a}_z) + \beta(\mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_t) = 0 \quad (2.8b)$$

โดยที่ความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กในแนวตามแกน  $z$  แสดงในรูปองค์ประกอบของสนามในแนวตามขวางดังนี้

$$E_z \mathbf{a}_z = \frac{1}{j\omega[\epsilon_z]} (\nabla_t \times \mathbf{H}_t - j\omega[\epsilon_z] \cdot \mathbf{E}_t) \quad (2.9a)$$

$$H_z \mathbf{a}_z = \frac{-1}{j\omega[\mu_z]} (\nabla_t \times \mathbf{E}_t + j\omega[\mu_z] \cdot \mathbf{H}_t) \quad (2.9b)$$

ในการหาคำตอบของสมการ (2.8a), (2.8b), (2.9a) และ (2.9b) ภายในก่อนำคลื่นจำเป็นต้องทราบเงื่อนไขขอบเขต มีอยู่ 3 ลักษณะ คือ เงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางสองชนิด, เงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และเงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 เงื่อนไขขอบเขต (ก) เงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางสองชนิด  
(ข) เงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (ค) เงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์

เงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางสองชนิด คือ ตัวกลางที่ 1 และ ตัวกลางที่ 2 คือ

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t)_1 = \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t)_2 \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (E_z \mathbf{a}_z)_1 = \mathbf{a}_z \cdot (E_z \mathbf{a}_z)_2 \quad (2.10b)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_t)_1 = \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_t)_2 \quad (2.10c)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (H_z \mathbf{a}_z)_1 = \mathbf{a}_z \cdot (H_z \mathbf{a}_z)_2 \quad (2.10d)$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ คือ

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t) = 0 \quad (2.11)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (E_z \mathbf{a}_z) = 0$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ คือ

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_t) = 0 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (H_z \mathbf{a}_z) = 0$$

เมื่อ  $\mathbf{n}$  คือ เวกเตอร์หน่วยที่ตั้งฉากกับผิวของเงื่อนไขขอบเขต

### นิพจน์แปรผันในพจน์ของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวาง

วิธีไฟไนต์อีลิเมนต์เป็นวิธีที่ประมาณคำตอบของปัญหาค่าขอบเขต (boundary-value problem) ที่มีสมการเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) และมีเงื่อนไขขอบเขต โดยการแทนโดเมนที่ต่อเนื่องทั้งหมดของปัญหาที่พิจารณาด้วยการแบ่งเป็นโดเมนย่อย (subdomains) โดเมนย่อยจะเป็น เส้น พื้นที่ หรือปริมาตรขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาเป็นหนึ่งมิติ สองมิติหรือสามมิติ ซึ่งในแต่ละโดเมนย่อยหรือที่เรียกว่า อีลิเมนต์ (element) คำตอบโดยประมาณภายในแต่ละอีลิเมนต์จะถูกสร้างขึ้นด้วยฟังก์ชันรูปร่างง่าย อาทิเช่น ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) หรือที่เรียกว่า ฟังก์ชันทดลอง (trial function) ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างหรืออาจจะเรียกว่าฟังก์ชันเบซิส (basis function) กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของแต่ละอีลิเมนต์ การหาคำตอบโดยประมาณของปัญหาค่าขอบเขตจึงเป็นการหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจำนวนหนึ่งที่เป็นจำนวนจำกัด การหาค่าของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าสามารถใช้วิธีแปรผัน (variational method) ซึ่งยังผลให้สามารถแสดงปัญหาในรูปของสมการระบบ (system of linear equations) เมื่อหาคำตอบของสมการระบบก็จะได้คำตอบของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

การหาผลเฉลยของโมดเฉพาะจงในท่อนำคลื่นที่สอดคล้องกับสมการ (2.8a) และ (2.8b) สามารถทำได้จากการพิจารณาจุดนิ่ง (stationary point) ของนิพจน์แปรผันของค่าคงตัวเฟสซึ่งอยู่ในรูปขององค์ประกอบความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง (Angkaew et al., 1987) ดังนี้

$$\beta(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t) = \frac{\sum_{e=1}^m A(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)}{\sum_{e=1}^m B(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t)} \quad (2.13)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} A(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t) = & \iint_e [\mathbf{E}_t^* \cdot \omega[\epsilon_{zz}] \cdot \mathbf{E}_t + \mathbf{H}_t^* \cdot \omega[\mu_{zz}] \cdot \mathbf{H}_t \\ & - \frac{1}{\omega[\mu_{zz}]} (\nabla_t \times \mathbf{E}_t + j\omega[\mu_{zz}] \cdot \mathbf{H}_t)^* \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t + j\omega[\mu_{zz}] \cdot \mathbf{H}_t) \\ & - \frac{1}{\omega[\epsilon_{zz}]} (\nabla_t \times \mathbf{H}_t - j\omega[\epsilon_{zz}] \cdot \mathbf{E}_t)^* \cdot (\nabla_t \times \mathbf{H}_t - j\omega[\epsilon_{zz}] \cdot \mathbf{E}_t)] dx dy \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$B(\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t) = \iint_e [\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{E}_t^* \times \mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t^* \times \mathbf{E}_t)] dx dy \quad (2.15)$$

ในที่นี้  $\sum_{e=1}^m$  คือ การรวมปริมาณจากทุก ๆ อีลีเมนต์ที่มีอยู่ทั้งหมดบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นตั้งแต่อีลีเมนต์หมายเลขที่ 1 ถึงอีลีเมนต์หมายเลขที่  $m$ ,  $\iint_e dx dy$  หมายถึง การหาปริพันธ์ (integrate) บนโดเมนของแต่ละอีลีเมนต์และสัญลักษณ์  $*$  คือ สัญลักษณ์เชิงซ้อน

ฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางที่จะแทนในสมการ (2.13) จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต ดังนี้

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t) = \text{เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องตรงรอยต่อระหว่างอีลีเมนต์} \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_t) = \text{เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องตรงรอยต่อระหว่างอีลีเมนต์} \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_t) = 0 \text{ ตรงรอยต่อระหว่างอีลีเมนต์กับตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์} \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_t) = 0 \text{ ตรงรอยต่อระหว่างอีลีเมนต์กับตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์} \quad (2.16d)$$

ฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางในแต่ละอีลีเมนต์สามารถแสดงให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันรูปร่างและตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ดังนี้

$$\mathbf{E}_l = \sum_{m=1}^M \mathbf{N}_m(x,y) \phi_m \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{H}_l = \sum_{m=1}^M \mathbf{N}_m(x,y) \psi_m \quad (2.17b)$$

ในที่นี้  $M$  คือจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าต่อหนึ่งอีลีเมนต์,  $\mathbf{N}_m(x,y)$  คือฟังก์ชันรูปร่าง,  $\phi_m$  และ  $\psi_m$  คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางในอีลีเมนต์ตามลำดับ

เมื่อแทนฟังก์ชันทดลองของแต่ละอีลีเมนต์ตามสมการ (2.17a) และ (2.17b) ลงในสมการ (2.14) และสมการ (2.15) แล้วจากนั้นก็หาปริพันธ์ในพจน์ของ  $A(\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l)$  และ  $B(\mathbf{E}_l, \mathbf{H}_l)$  ตามลำดับผลที่ได้คือ

$$A = \{\xi\}_e^T [P]_e \{\xi\}_e \quad (2.18a)$$

$$B = \{\xi\}_e^T [Q]_e \{\xi\}_e \quad (2.18b)$$

ในที่นี้ ทรานสพอน  $T$  คือ ตัวดำเนินการสลับเปลี่ยน (transpose operator),  $\{\xi\}$  คือ เวกเตอร์แนวตั้ง (column vector) ที่ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในแต่ละอีลีเมนต์  $[P]_e$  และ  $[Q]_e$  คือ เมทริกซ์จัตุรัสขนาด  $(2M \times 2M)$  ที่ประกอบด้วยค่าสภาพยอม, ความขบขี้มได้และฟังก์ชันรูปร่างของแต่ละอีลีเมนต์ เมื่อรวม  $A$  และ  $B$  ของทุกอีลีเมนต์บนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นและพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตตามสมการ (2.16a) ถึง (2.16d) แล้วนิพจน์แปรผันตามสมการ (2.13) ก็สามารถแสดงได้ในรูปของเมทริกซ์ ดังนี้

$$\beta = \frac{\{\xi\}'^T [P] \{\xi\}}{\{\xi\}'^T [Q] \{\xi\}} \quad (2.19)$$

$$\{\xi\} = \begin{bmatrix} \{\phi\} \\ \{\psi\} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ในที่นี้  $\{\xi\}$  คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น เมทริกซ์  $[P]$  คือเมทริกซ์รูปของเฮอรัลมิเซียน เมทริกซ์  $[Q]$  คือเมทริกซ์สมมาตรจำนวนจริงและเป็นแบบเอกฐาน (singular)

เมื่อพิจารณาจุดนิ่งของนิพจน์แปรผันของค่าคงตัวเฟสตามสมการ (2.19) แล้ว ผลที่ได้คือปัญหาค่าเจาะจงที่มีสมการ ดังนี้

$$[Q] \{\xi\} = \frac{1}{\beta} [P] \{\xi\} \quad (2.21)$$

เมื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าเจาะจงของสมการ (2.21) แล้วจะทราบค่าคงตัวเฟส ( $\beta$ ) และเวกเตอร์เจาะจงโดยเวกเตอร์เจาะจงนี้ สามารถนำไปใช้หาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในท่อนำคลื่นได้

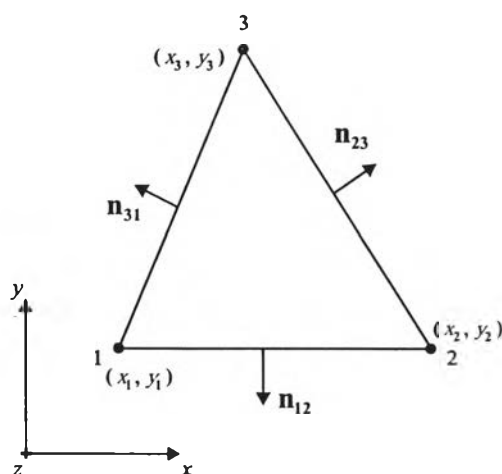
### ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น

ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นที่เสนอโดย Angkaew et al. (1987) เพื่อสร้างฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางในแต่ละอีลีเมนต์มีทั้งหมด 6 ตัวแปรต่อหนึ่งอีลีเมนต์ดังความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=1}^6 \mathbf{N}_m(x,y)\phi_m \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{m=1}^6 \mathbf{N}_m(x,y)\psi_m \quad (2.22b)$$

ในที่นี้  $\mathbf{N}_m(x,y)$  คือฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น (linear vector shape function) ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างนี้เขียนในรูปของฟังก์ชันรูปร่างสเกลาร์และมีทิศทางของเวกเตอร์หน่วยในทิศตั้งฉากกับอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมและพิกัดโนด

จากอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมประกอบด้วยโนด (node) ลำดับที่หนึ่ง, สอง และสามโดยเรียงลำดับในทิศทางหมุนทวนเข็มนาฬิกา มีตำแหน่งพิกัด  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  และ  $(x_3, y_3)$  ตามลำดับ กำหนดให้เวกเตอร์หน่วยตั้งฉากที่แต่ละด้านของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม เป็น  $\mathbf{n}_{12}$ ,  $\mathbf{n}_{23}$  และ  $\mathbf{n}_{31}$  ซึ่งสอดคล้องกับด้านที่หนึ่ง, สอง และสาม โดยมีโนดที่ตำแหน่งปลายของด้านเป็น โนด 1-2, โนด 2-3 และโนด 3-1 ตามลำดับ ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์เชิงเส้นนี้เขียนได้ดังนี้

$$N_{2i-1} = \frac{n_{ij}}{a_z \cdot (n_{ki} \times n_{ij})} N_i, \quad (i=1,2,3) \quad (2.23a)$$

$$N_{2i} = \frac{n_{ki}}{a_z \cdot (n_{ij} \times n_{ki})} N_i, \quad (i=1,2,3) \quad (2.23b)$$

$$N_i = \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3} \quad (2.23c)$$

โดยที่  $i, j$  และ  $k$  มีการลำดับแบบโมดูล 3

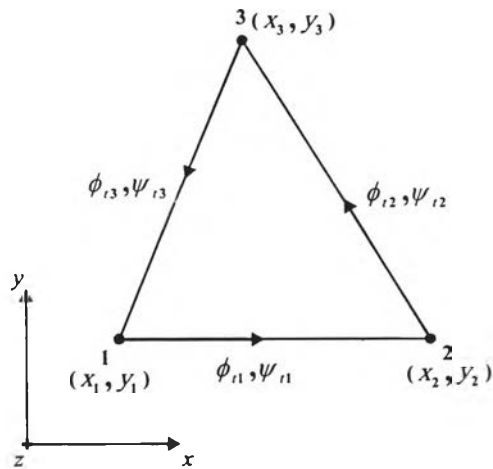
### ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเป็นฟังก์ชันรูปร่างที่เสนอโดย Bossavit (1988) ฟังก์ชันรูปร่างนี้มีลักษณะที่สำคัญคือมีการกำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ที่ตำแหน่งขอบบนแต่ละด้านของอีลีเมนต์ และเป็นเวกเตอร์ที่หมุนวนและมีทิศทางสัมผัสแต่ละด้านของอีลีเมนต์ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้มีความสะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต นอกจากนี้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบยังมีคุณสมบัติปลอดไดเวอร์เจนซ์ (divergence free) ซึ่งจะทำให้ไม่เกิดผลเฉลยปลอมเทียม วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบอันดับต่ำสุดวิเคราะห์ปัญหาที่อ่อนาคลื่นจะมีความถูกต้องของผลเฉลยจำกัดที่ค่าหนึ่ง ๆ ดังนั้นในปัจจุบันวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบอันดับสูงจึงได้มีการพัฒนาขึ้นเพื่อความถูกต้องผลเฉลย มีการนำเสนอหลายรูปแบบ เช่น งานวิจัยของ Lee, Sun and Cendes (1991) และงานวิจัยของ Cendes (1991) เป็นต้น

ข้อเด่นของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบนี้กล่าวโดยสรุป (Lee et al., 1991) คือ

1. สามารถทำให้ฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามไฟฟ้าหรือความเข้มสนามแม่เหล็กมีความต่อเนื่องที่ขอบของอีลีเมนต์ได้สะดวก
2. มีความต่อเนื่องของความหนาแน่นฟลักซ์ในแนวตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์ โดยไม่ต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพิ่มเติม
3. การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนผนังที่อ่อนาคลื่นสามารถกระทำได้อย่างง่าย





รูปที่ 2.4 อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามบนตำแหน่งขอบทั้ง 3 ด้าน

### ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่ (Jin, 1993) เป็นสมการรูปของเวกเตอร์อันดับต่ำสุด (lowest order) หรืออาจจะเรียกว่า อีลีเมนต์วิตนีส (Whitney elements) โดยกำหนดให้องค์ประกอบของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางหรือความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางอยู่ ณ ตำแหน่งขอบของสามเหลี่ยมและในแนวสัมผัสกับด้านสามเหลี่ยมหมุนวนเป็นรอบ ไม่มีองค์ประกอบของสนามแนวตั้งฉากกับด้านสามเหลี่ยมดังรูปที่ 2.4 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่มีความต่อเนื่องของเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางที่อยู่ติดกันในแนวสัมผัสแต่ไม่มีความต่อเนื่องขององค์ประกอบสนามในแนวตั้งฉาก มีสมการดังนี้

$$\mathbf{N}_1 = (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) l_1 \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{N}_2 = (L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2) l_2 \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{N}_3 = (L_3 \nabla L_1 - L_1 \nabla L_3) l_3 \quad (2.24c)$$

เมื่อ  $l_1$ ,  $l_2$  และ  $l_3$  แทนความยาวของด้านที่โนด 1-2, โนด 2-3 และโนด 3-1 ตามลำดับ  $L_1$ ,  $L_2$  และ  $L_3$  คือ พิกัดเชิงพื้นที่ (area coordinates) จาก Silvester and Ferrari (1991) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_c} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

โดยที่

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \quad (2.26a)$$

$$b_k = y_l - y_m \quad (2.26b)$$

$$c_k = x_m - x_l \quad (2.26c)$$

โดยที่  $(k,l,m)$  จะเป็นการเรียงลำดับแบบโมดูล 3 พิกัด  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  และ  $(x_3, y_3)$  คือพิกัดของ โหนด 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมตามลำดับ  $A_e$  คือพื้นที่ของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามารถหาได้จากการหาดีเทอร์มิแนนต์ของพิกัดที่โหนดทั้งสามของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม ดังนี้

$$A_e = 0.5 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

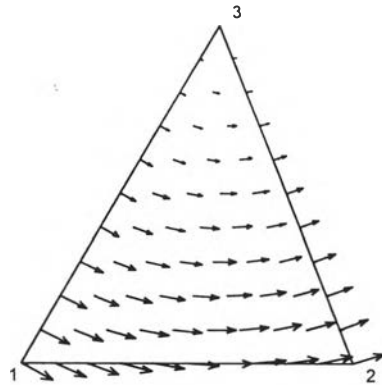
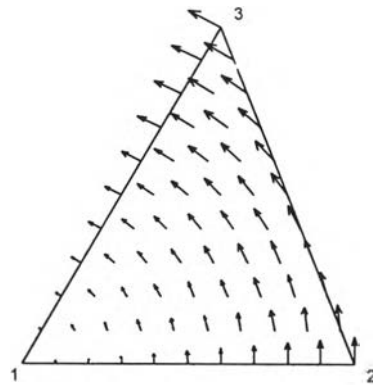
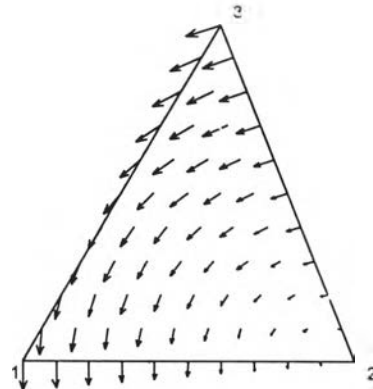
ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่บนแต่ละด้านของอีลีเมนต์ตามสมการ (2.24a), (2.24b) และ (2.24c) นี้เป็นสมการเวกเตอร์ 2 มิติที่เปลี่ยนแปลงตามพิกัด  $(x, y)$  ภายในบริเวณอีลีเมนต์ดังรูปที่ 2.5 เมื่อพิจารณา ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_1$  โดยกำหนดให้  $t_1, t_2$  และ  $t_3$  คือเวกเตอร์หน่วยในแนวสัมผัสกับด้านที่โหนด 1-2, โหนด 2-3 และโหนด 3-1 ตามลำดับ การหาผลคูณจุดของ  $N_1 \cdot t_1$  จะได้ขนาดที่คงที่ตลอดแนวสัมผัสด้านที่โหนด 1-2 คือ  $N_1 \cdot t_1 = 1$  ส่วนด้านที่โหนด 2-3 ค่าของ  $N_1 \cdot t_2 = 0$  และด้านที่โหนด 3-1 ค่าของ  $N_1 \cdot t_3 = 0$  เวกเตอร์จะตั้งฉากกับด้านที่ไม่มีเวกเตอร์ในแนวสัมผัสที่ด้านจึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชันรูปร่าง  $N_1$  จะมีเวกเตอร์ในแนวสัมผัสเพียงด้านเดียวและสองด้านที่เหลือเวกเตอร์จะตั้งฉากกับทุก ๆ จุดบนด้าน จึงเรียกฟังก์ชันรูปร่างนี้ว่าอีลีเมนต์ขอบคงที่ การพิจารณาฟังก์ชันรูปร่าง  $N_2$  และฟังก์ชันรูปร่าง  $N_3$  จะมีลักษณะที่เหมือนกับฟังก์ชันรูปร่าง  $N_1$  ดังที่กล่าวมาข้างต้น

เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แล้ว ฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวาง สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=1}^3 N_m(x, y) \phi_m \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{m=1}^3 N_m(x, y) \psi_m \quad (2.28b)$$

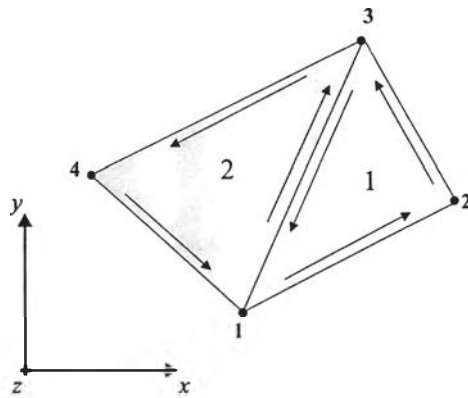
ในที่นี้  $\phi_m$  และ  $\psi_m$  คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางที่ตำแหน่งขอบของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมตามลำดับ

(ก) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_1$ (ข) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_2$ (ค) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_3$ 

รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ในแนวสัมผัสบนแต่ละด้านของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม

(ก) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_1$  (ข) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_2$  (ค) ฟังก์ชันรูปร่าง  $N_3$

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตระหว่างอีลีเมนต์ มีลักษณะที่สำคัญคือสนามต้องมีความต่อเนื่องในแนวสัมผัส ตัวอย่างเช่น ระหว่างอีลีเมนต์ที่ 1 และ 2 ดังรูปที่ 2.6 โดยระหว่างรอยต่อของอีลีเมนต์ความเข้มสนามในแนวสัมผัสต้องมีความต่อเนื่องกัน และบนหนึ่งด้านของอีลีเมนต์จะมีความเข้มสนามในแนวสัมผัสร่วมกันมีเพียงเวกเตอร์เดียวและมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามเพียงหนึ่งค่าเท่านั้น กล่าวคือระหว่างโนด 3 และโนด 1 ของอีลีเมนต์ 1 และ 2 ทิศทางเวกเตอร์ตรงกันข้ามกัน ดังนั้นเวกเตอร์แนวสัมผัสระหว่างโนด 3 และโนด 1 จึงต้องกำหนดทิศทางของเวกเตอร์ในทิศเดียวกัน แสดงเป็นสมการคือ  $E'_1 = \pm E'_2$  และ  $H'_1 = \pm H'_2$  ในที่นี้ 1 และ 2 คืออีลีเมนต์ 1 และ 2 ที่มีเงื่อนไขขอบเขตระหว่างอีลีเมนต์และ  $\pm$  แสดงถึงทิศทางสนาม โดยจะเป็นบวกเมื่อสนามแนวสัมผัสระหว่างอีลีเมนต์มีทิศทางเดียวกันและมีเครื่องหมายเป็นลบเมื่อมีทิศทางตรงกันข้ามกัน



รูปที่ 2.6 เงื่อนไขขอบเขตระหว่างอีลีเมนต์

### ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น ผู้เสนอวิทยานิพนธ์ได้นำฟังก์ชันรูปร่างที่เสนอโดยงานวิจัยของ Savage and Peterson (1996) ที่เป็นฟังก์ชันรูปร่างมีสมการรูปของเวกเตอร์อันดับสูงกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่ โดยกำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางหรือความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางอยู่ ณ ตำแหน่งขอบของสามเหลี่ยมจำนวน 6 ตัวแปร และนอกจากนี้มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามแนวตั้งฉากกับ 2 ด้านใด ๆ อีก 2 ตัวแปรโดยมีฟังก์ชันการเปลี่ยนแปลงแบบกำลังสอง (quadratic) ดังรูปที่ 2.7 มีสมการดังนี้

ฟังก์ชันรูปร่างของสนามแนวสัมผัสด้านอีลีเมนต์ 6 ตัวแปร คือ

$$N_1 = (L_1 \nabla L_2) I_1 \quad (2.29a)$$

$$N_2 = (L_2 \nabla L_3) I_2 \quad (2.29b)$$

$$\mathbf{N}_3 = (L_3 \nabla L_1) l_3 \quad (2.29c)$$

$$\mathbf{N}_4 = (-L_2 \nabla L_1) l_1 \quad (2.29d)$$

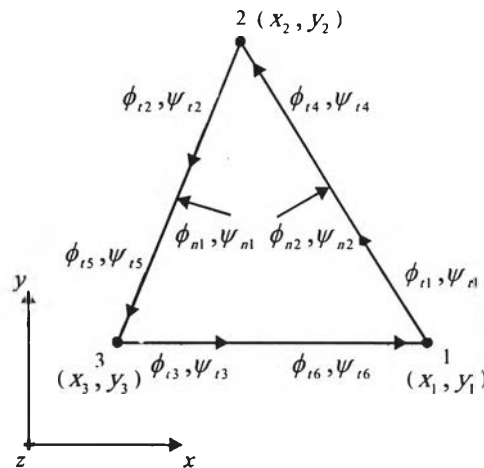
$$\mathbf{N}_5 = (-L_3 \nabla L_2) l_2 \quad (2.29e)$$

$$\mathbf{N}_6 = (-L_1 \nabla L_3) l_3 \quad (2.39f)$$

ฟังก์ชันรูปร่างของสนามแนวตั้งฉากด้านอีลีเมนต์ 2 ตัวแปรโดยสามารถเลือก 2 ด้านใด ๆ คือ

$$\mathbf{g}_1 = (-L_2 L_3 \nabla L_1) l_2 \quad \text{ที่ด้าน 2-3 ของอีลีเมนต์} \quad (2.29g)$$

$$\mathbf{g}_2 = (-L_2 L_1 \nabla L_3) l_1 \quad \text{ที่ด้าน 1-3 ของอีลีเมนต์} \quad (2.29h)$$



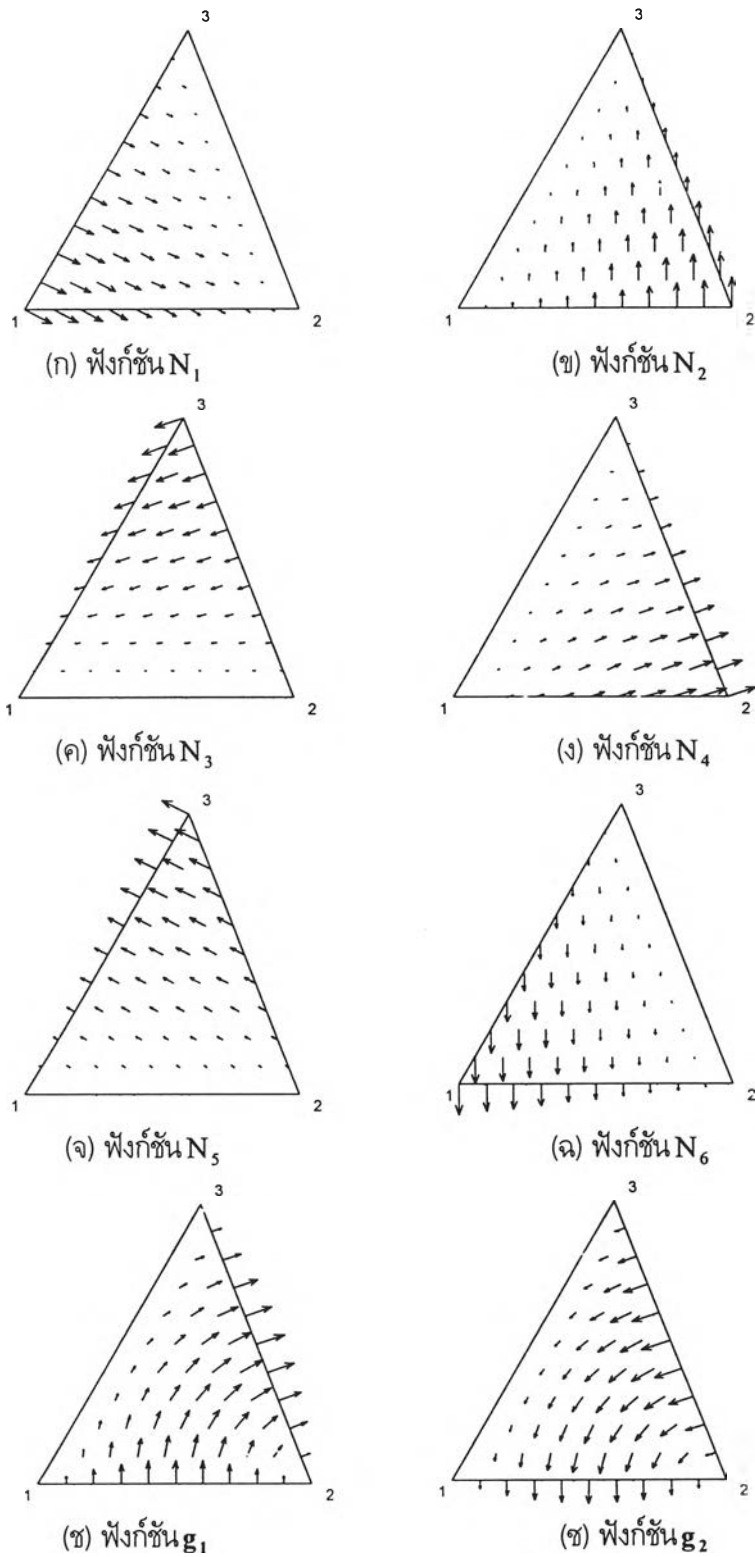
รูปที่ 2.7 อีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามที่ตำแหน่งขอบ 6 ตัวแปร และมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามในแนวตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์ 2 ตัวแปร

การกระจายของฟังก์ชันรูปร่างบนแต่ละด้านอีลีเมนต์ตามสมการ (2.29) ดังรูปที่ 2.8 ฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางและฟังก์ชันทดลองของความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวางมีสมการดังนี้

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=1}^6 \mathbf{N}_m(x, y) \phi_{tm} + \mathbf{g}_1 \phi_{n1} + \mathbf{g}_2 \phi_{n2} \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{m=1}^6 \mathbf{N}_m(x, y) \psi_{tm} + \mathbf{g}_1 \psi_{n1} + \mathbf{g}_2 \psi_{n2} \quad (2.30b)$$

จากสมการ (2.30a) และ (2.30b) ฟังก์ชันทดลองประกอบด้วยผลคูณของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นและตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม ณ ตำแหน่งขอบบนด้านทั้งสามของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.8 ฟังก์ชันรูปร่างอีลิเมนต์ขอบเชิงเส้นในแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากบนอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

(ก) ฟังก์ชัน  $N_1$  (ข) ฟังก์ชัน  $N_2$  (ค) ฟังก์ชัน  $N_3$  (ง) ฟังก์ชัน  $N_4$

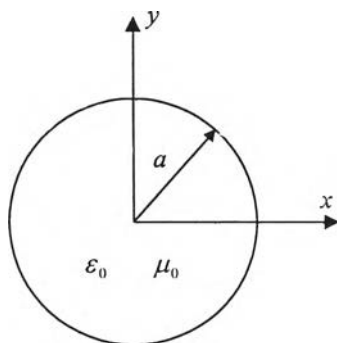
(จ) ฟังก์ชัน  $N_5$  (ฉ) ฟังก์ชัน  $N_6$  (ช) ฟังก์ชัน  $g_1$  (ซ) ฟังก์ชัน  $g_2$

### ตัวอย่างผลการทดสอบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

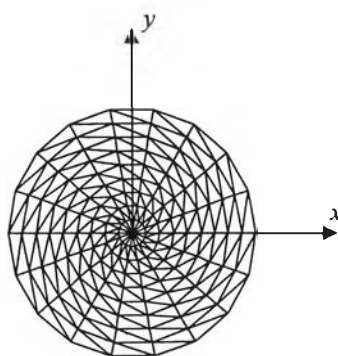
ในการทดสอบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางมีฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ ได้กำหนดท่อนำคลื่นแบบง่าย 2 แบบ คือ ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมและท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก โดยต้องการแสดงผลการวิเคราะห์ 2 ประการ ประการแรกเปรียบเทียบความแม่นยำของโมดเจาะจงระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับผลเฉลยแม่นยำตรง จำนวนเวลาในการคำนวณต่อหนึ่งค่าโมดเจาะจงและนอกจากนี้ในกรณีของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก ได้แสดงผลการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของโมดเจาะจงจากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างทั้งสองนี้กับฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์เชิงเส้นและฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์กำลังสอง (quadratic vector shape function) ประการสุดท้ายการพิจารณาว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ได้มีการปรับปรุงฟังก์ชันรูปร่างแล้วมีผลเฉลยปลอมเทียมว่าเกิดขึ้นหรือไม่ โดยจะแสดงผลให้ทราบจากกราฟดิสเพอร์ชัน มีรายละเอียดดังนี้

#### 1. ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมมีรัศมีเท่ากับ  $a$  มีผนังท่อนำคลื่นเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์และภายในเป็นอวกาศว่างดังรูปที่ 2.9



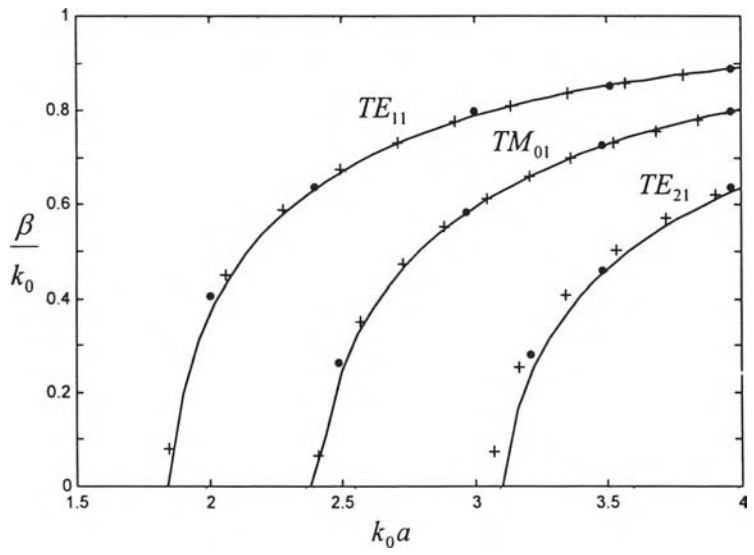
รูปที่ 2.9 ท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม



รูปที่ 2.10 การแบ่งอีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นกลวงที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

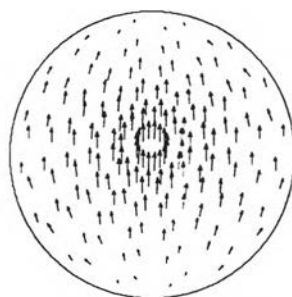
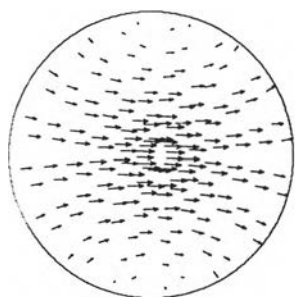
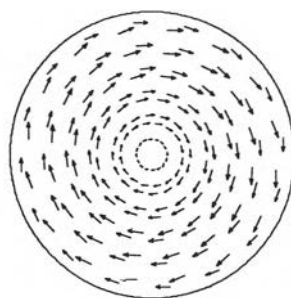
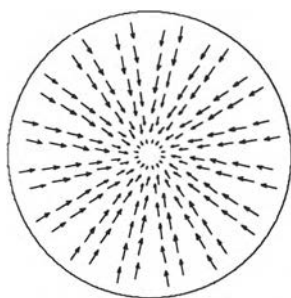
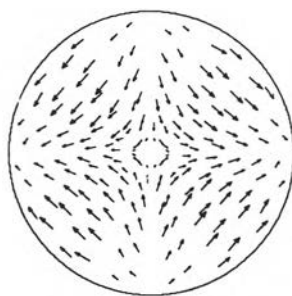
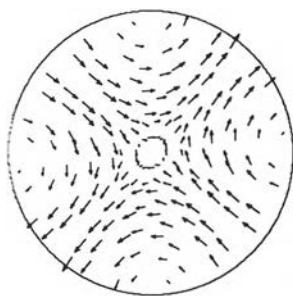
แบ่งอิลีเมนต์ย่อย ๆ เป็นอิลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ 2.10 โดยในที่นี้จะกำหนดเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่ 1 การแบ่งอิลีเมนต์จำนวน 306 อิลีเมนต์ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอิลีเมนต์ขอบคงที่ โดยมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามก่อนกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและหลังกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเท่ากับ 468 และ 450 ตามลำดับ กรณีที่ 2 การแบ่งอิลีเมนต์จำนวน 100 อิลีเมนต์ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอิลีเมนต์ขอบเชิงเส้นมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามก่อนกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและหลังกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเท่ากับ 520 และ 480 ตามลำดับเนื่องจากท่อนำคลื่นเป็นชนิดไอโซทรอปิกจึงสามารถลดขนาดของเมทริกซ์เจาะจงได้ครึ่งหนึ่ง

รูปที่ 2.11 แสดงกราฟดิสเปอร์ชันของค่าคงตัวเฟสที่เปลี่ยนแปลงตามรัศมีและความถี่ของท่อนำคลื่นที่เกิดขึ้นใน 3 โหมดแรก ผลการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ปรากฏว่าในโหมดพื้นฐานมีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ Helszajn (1989) มากโดยเฉพาะเมื่อเราใช้ฟังก์ชันรูปร่างอิลีเมนต์ขอบเชิงเส้น อย่างไรก็ตาม ที่โหมดอันดับสูงยังคงมีความผิดพลาดอยู่ การลดผิดพลาดอันนี้โดยการแบ่งจำนวนอิลีเมนต์ให้มากขึ้น และจากกราฟนี้ไม่เกิดผลเฉลยปลอมเทียม แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็กบนภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่ค่า  $k_0 a = 4.0$  ของ 3 โหมดแรก ดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.11 กราฟดิสเปอร์ชันของท่อนำคลื่นกลางมีภาคตัดขวางรูปร่างกลม เมื่อ + แทนผลเฉลยแม่นยำตรง Helszajn (1989) - แทนวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอิลีเมนต์ขอบคงที่ • แทนวิธีไฟไนต์อิลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอิลีเมนต์ขอบเชิงเส้น



(ก) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TE_{11}$ (ข) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TE_{11}$ (ค) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TM_{01}$ (ง) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TM_{01}$ (จ) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TE_{21}$ (ฉ) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TE_{21}$ 

รูปที่ 2.12 แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าและความเข้มสนามแม่เหล็ก

ที่  $k_0 a = 4.0$  ของท่อนำคลื่นทรงกลมมีภาคตัดขวางรูปวงกลม

(ก) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TE_{11}$  (ข) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TE_{11}$

(ค) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TM_{01}$  (ง) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TM_{01}$

(จ) แบบรูปความเข้มสนามไฟฟ้าโหมด  $TE_{21}$  (ฉ) แบบรูปความเข้มสนามแม่เหล็กโหมด  $TE_{21}$

ตารางที่ 2.1 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 3 โหมดแรกของท่อนำคลื่นกลวงมีภาคตัดขวางรูปวงกลมด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่มีฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่กับผลเฉลยแม่นยำตรง (Helszajn, 1989)

จำนวนอีลีเมนต์	จำนวนตัวแปร	เวลา (วินาที)	โหมด $TE_{11}$	โหมด $TM_{01}$	โหมด $TE_{21}$
176	256	25.65	0.892162	0.804273	0.636333
198	288	37.29	0.891867	0.803154	0.639670
242	352	69.81	0.891507	0.801820	0.643690
286	416	116.28	0.891303	0.801080	0.645939
308	448	144.67	0.891232	0.800829	0.646709
352	512	215.03	0.891130	0.800463	0.647830
396	576	311.21	0.891059	0.800216	0.648592
540	792	826.74	0.889714	0.800123	0.646146
570	836	946.47	0.889687	0.800029	0.646435
ผลเฉลยแม่นยำตรง			0.887766	0.799094	0.645738

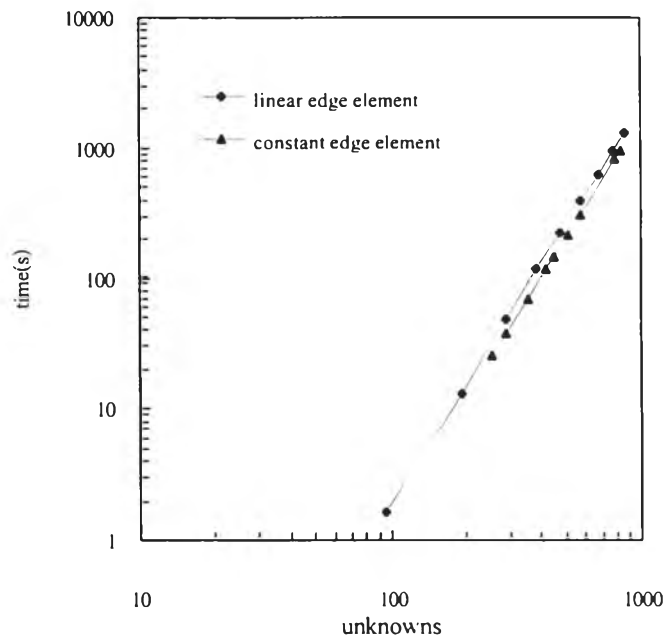
ตารางที่ 2.2 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 3 โหมดแรกของท่อนำคลื่นกลวงมีภาคตัดขวางรูปวงกลมด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่มีฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำตรง (Helszajn, 1989)

จำนวนอีลีเมนต์	จำนวนตัวแปร	เวลา (วินาที)	โหมด $TE_{11}$	โหมด $TM_{01}$	โหมด $TE_{21}$
20	96	1.65	0.869109	0.804910	0.688412
40	192	13.08	0.880765	0.786416	0.613351
60	288	48.99	0.884012	0.792516	0.630319
80	384	115.94	0.885523	0.795261	0.637018
100	480	224.42	0.886294	0.796650	0.640252
120	576	394.58	0.886735	0.797438	0.642046
140	672	631.70	0.887007	0.797926	0.643144
160	768	944.93	0.887187	0.798247	0.643862
180	864	1330.40	0.887312	0.798470	0.644357
ผลเฉลยแม่นยำตรง			0.887766	0.799094	0.645738

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 3 โมดแรกของท่อนำคลื่นคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่แบ่งจำนวนอีลีเมนต์อยู่ในช่วง 176 ถึง 540 และมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ในช่วง 256 ถึง 792 เป็นขนาดของเมทริกซ์เจาะจง การเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ทำให้ค่าที่คำนวณโดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีความผิดพลาดจากผลเฉลยแม่นยำลง การลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำของโมดเจาะจงจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะเริ่มที่ค่ามากกว่าผลเฉลยแม่นยำและค่าจะค่อย ๆ ลดลงหรือลู่เข้าเมื่อเราเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์

ตารางที่ 2.2 เป็นการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น แบ่งจำนวนอีลีเมนต์อยู่ในช่วง 20 ถึง 180 และมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ในช่วง 96 ถึง 864 การเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ทำให้มีความผิดพลาดจากผลเฉลยแม่นยำลง การลู่เข้าหาผลเฉลยแม่นยำของโมดเจาะจงจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะเริ่มที่ค่าน้อยกว่าผลเฉลยแม่นยำและค่าจะค่อย ๆ เพิ่มมากขึ้นหรือการลู่เข้าเมื่อมีจำนวนอีลีเมนต์เพิ่มขึ้น

การพิจารณาเวลาในการคำนวณของเมทริกซ์เจาะจงของทั้ง 2 ตาราง เมื่อจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามหรือขนาดของเมทริกซ์เจาะจงเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า มีผลให้เวลาในการคำนวณเมทริกซ์เจาะจงเพิ่มขึ้นประมาณ 8 เท่า เช่น จากตารางที่ 1 จำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามเพิ่มขึ้นจาก 256 เป็น 512 เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นจาก 25.65 เป็น 215.03 วินาที หรือ จากตารางที่ 2 จำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามเพิ่มขึ้นจาก 288 เป็น 576 เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นจาก 48.99 เป็น 394.58 วินาที เป็นต้น



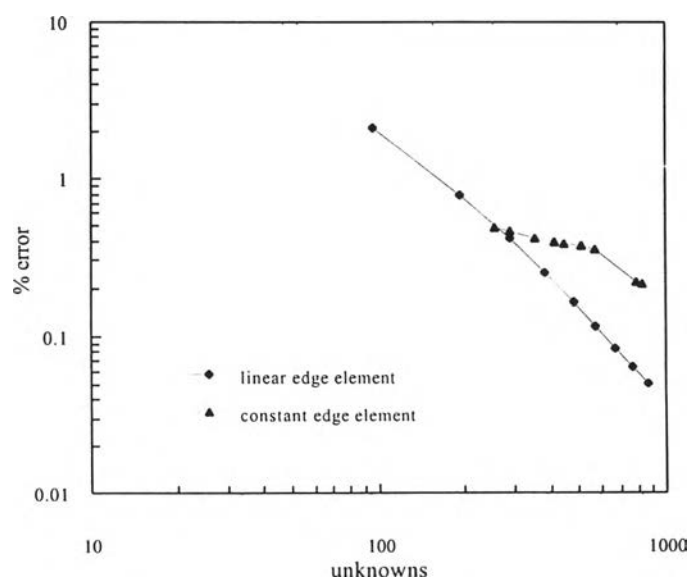
รูปที่ 2.13 เปรียบเทียบเวลาในการคำนวณที่เปลี่ยนแปลงตามจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่และอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

รูปที่ 2.13 แสดงการเปรียบเทียบเวลาในการคำนวณค่าคงตัวเฟสที่  $k_0 a = 4.0$  ของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่และฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นที่ขึ้นอยู่กับจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม โดยจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามนี้คือขนาดเมทริกซ์เจาจง  $[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\}$  มีขนาดอยู่ระหว่าง 100 ถึง 1000 การเปรียบเทียบผลที่วิเคราะห์ได้ทำให้ทราบว่า ที่จำนวนขนาดเมทริกซ์เจาจงเท่ากันเวลาในการคำนวณของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นจะใช้เวลามากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบขอบคองที่ ผลอันนี้เกิดขึ้นมาจากสมาชิกของเมทริกซ์เจาจงของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นมีจำนวนสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์น้อยกว่าหรือหนาแน่น (dense) มากกว่าเมทริกซ์เจาจงของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่แต่ความแตกต่างของเวลาไม่มากนัก

รูปที่ 2.14 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของโหมด  $TE_{11}$  โดยในที่นี้เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด คือค่าสัมบูรณ์ของอัตราส่วนที่เป็นผลต่างของผลเฉลยจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับผลเฉลยแม่นยำตรงจากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ต่อผลเฉลยแม่นยำตรงจากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ที่มีสมการดังนี้

$$\% \text{error} = \left| \frac{\text{FEM} - \text{exact}}{\text{exact}} \right| \times 100$$

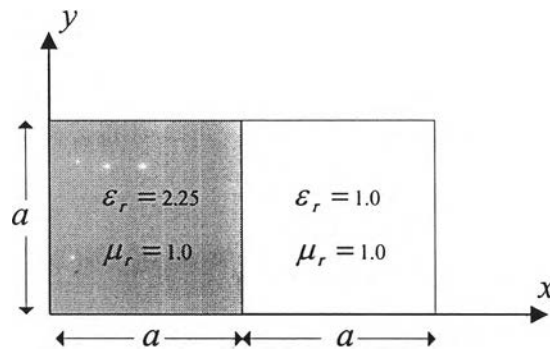
ขนาดของเมทริกซ์เจาจงที่ประมาณต่ำกว่า 300 จะมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นสูงกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่ เพราะว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นถ้าการแบ่งอีลีเมนต์มีจำนวนน้อยหรือมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามจำนวนน้อย จะมีผลทำให้เงื่อนไขขอบเขตที่ผนังท่อนำคลื่นของการแบ่งอีลีเมนต์มีแตกต่างจากผนังท่อนำคลื่นจริงมาก แต่ถ้าการแบ่งอีลีเมนต์หรือมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามไม่ต่ำจนเกินไปมีขนาดเมทริกซ์สูงกว่า 300 การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดต่ำกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่



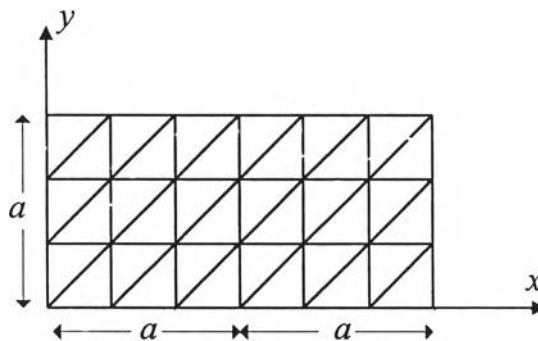
รูปที่ 2.14 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่เปลี่ยนแปลงตามจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม

## 2. ท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก

ท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกมีขนาดความยาวมากกว่าความกว้างเป็น 2 เท่าคือ  $(2a \times a)$  มีครึ่งหนึ่งเป็นวัสดุไดอิเล็กทริกมีค่าสภาพยอมสัมพัทธ์เท่ากับ 2.25 และที่เหลือเป็นอวกาศว่าง ผนังท่อนำคลื่นเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 ภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก



รูปที่ 2.16 การแบ่งอีลีเมนต์ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก

แบ่งอีลีเมนต์ย่อย ๆ เป็นรูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ 2.16 ผลการวิเคราะห์ดังตารางที่ 2.3 แสดงการเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  เทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์โดย Tuptim Angkaew, "Numerical Analysis of Electromagnetic fields by the Finite Element and Finite Difference Methods " (Doctoral dissertation, Graduate School of Engineering, Osaka University, 1989) ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแตกต่างกัน แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม โดยเป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ทั้งสองกลุ่ม กลุ่มแรกคือ ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นมีจำนวนตัวแปรอิสระต่อหนึ่งอีลีเมนต์เท่ากับ 12 และฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์กำลังสองมีจำนวนตัวแปรอิสระต่อหนึ่งอีลีเมนต์เท่ากับ 24 ที่ได้นำเสนอมาแล้วในอดีตโดย Angkaew et al., (1987) และกลุ่มที่สองคือ

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบมีจำนวนตัวแปรอิสระต่อหนึ่งอีลีเมนต์เท่ากับ 6 และ 16 ตามลำดับ ในวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวางดังได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น กำหนดให้มีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามประมาณ 384

ตารางที่ 2.3 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 4.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่มีฟังก์ชันรูปร่างแตกต่างกันกับผลเฉลยแม่นยำตรงจาก Tuptim Angkaew, "Numerical Analysis of Electromagnetic fields by the Finite Element and Finite Difference Methods " (Doctoral dissertation, Graduate School of Engineering, Osaka University, 1989)

โมด	*ผลเฉลยแม่นยำตรง	*ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น	*ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์กำลังสอง	**ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่	**ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น
$LSE_{10}$	1.35913	1.35508	1.35903	1.37467	1.36014
%error		0.30%	0.0074%	1.143%	0.0743%
$LSM_{11}$	1.22746	1.21560	1.22691	1.26171	1.22990
%error		0.97%	0.045%	2.790%	0.19%
$LSE_{11}$	1.10923	1.08726	1.10792	1.14680	1.11280
%error		2.0%	0.12%	3.387%	0.321%
$LSE_{20}$	0.92412	0.89710	0.92159	0.95874	0.92730
%error		2.9%	0.27%	3.746%	0.344%

\* : Tuptim Angkaew, "Numerical Analysis of Electromagnetic fields by the Finite Element and Finite Difference Methods " (Doctoral dissertation, Graduate School of Engineering, Osaka University, 1989)

\*\* : วิทยานิพนธ์นี้

การเปรียบเทียบความแม่นยำของคำตอบจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแตกต่างกันของตารางที่ 2.3 เริ่มจากพิจารณาอันดับต่ำสุดของฟังก์ชันรูปร่างทั้งสองกลุ่ม (ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่) ผลการวิเคราะห์ของการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่จะมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของคำตอบมากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น เมื่อนำผลการวิเคราะห์ของการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นเปรียบเทียบกับฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น ผลที่ได้คือการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้นจะมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของคำตอบมากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น และสุดท้ายผลของการวิเคราะห์ของการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นเปรียบเทียบกับฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์กำลังสอง

ผลที่ได้คือการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นจะมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของคำตอบมากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์กำลังสอง

จากผลการเปรียบเทียบที่แสดงมาข้างต้น จึงกล่าวได้ว่าลำดับความแม่นยำของคำตอบที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแตกต่างกันโดยเรียงลำดับจากคำตอบที่มีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดต่ำสุดถึงมากที่สุด คือ ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์กำลังสอง, ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น, ฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์เชิงเส้น และฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่ โดยมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามต่อหนึ่งอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 24, 16, 12 และ 6 ตามลำดับ เราจึงสรุปได้ว่าความแม่นยำของคำตอบจะขึ้นกับจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามต่อหนึ่งอีลีเมนต์ โดยการเพิ่มขึ้นของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามสอดคล้องกับการประมาณฟังก์ชันรูปร่าง

ตารางที่ 2.4 แสดงการเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 3.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่เมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) แบ่งจำนวนอีลีเมนต์อยู่ในช่วง 64 ถึง 576 และมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ในช่วง 84 ถึง 828 จากตารางแสดงให้เห็นว่าการแบ่งจำนวนอีลีเมนต์มากขึ้น ความถูกต้องของคำตอบมีค่าความผิดพลาดน้อยลงเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง และเมื่อเราเลือกการแบ่งอีลีเมนต์เท่ากับ 576 มีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม 828 ความถูกต้องของคำตอบทั้ง 4 โมดของท่อนำคลื่นมีความถูกต้องประมาณทศนิยม 2 ตำแหน่ง ซึ่งถือว่ามีความถูกต้องของคำตอบไม่สูงนัก

ตารางที่ 2.4 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 3.0$  ใน 4 โมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่มีฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่กับผลเฉลยแม่นยำตรง (Balanis, 1989)

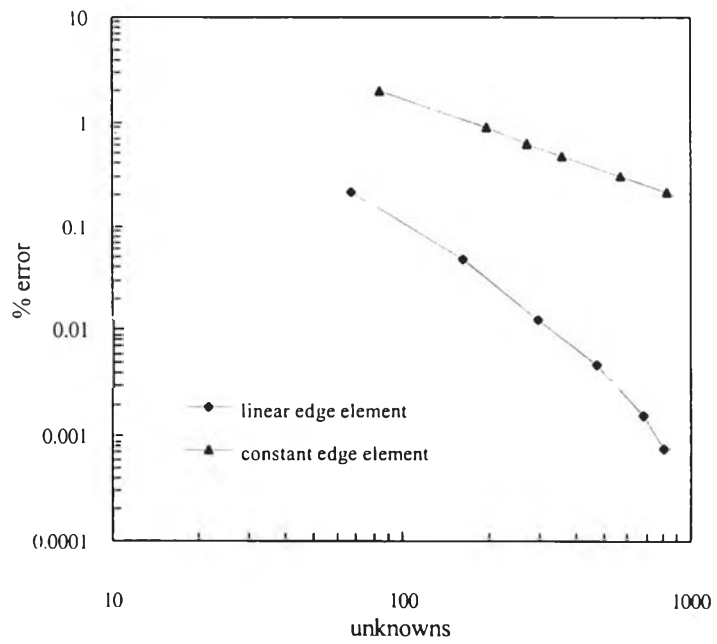
จำนวนอีลีเมนต์	จำนวนตัวแปร	เวลา (วินาที)	โมด $LSE_{10}$	โมด $LSM_{11}$	โมด $LSE_{11}$	โมด $LSE_{20}$
64	84	1.64	1.30201	1.03559	0.78201	0.65112
144	198	18.51	1.28709	0.99937	0.75136	0.61881
196	273	43.72	1.28403	0.99190	0.74519	0.61212
256	360	126.22	1.28207	0.98709	0.74125	0.60782
400	570	646.36	1.27978	0.98146	0.73667	0.60278
576	828	1244.73	1.27855	0.97842	0.73420	0.60006
ผลเฉลยแม่นยำตรง			1.27576	0.97154	0.72865	0.59390

ตารางที่ 2.5 แสดงการเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 3.0$  ใน 4 โหมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงวิเคราะห์ (Balanis, 1989) แบ่งจำนวนอีลีเมนต์อยู่ในช่วง 16 ถึง 168 และมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามอยู่ในช่วง 68 ถึง 800 จากตารางเมื่อเราเลือกแบ่งอีลีเมนต์เพียง 36 อีลีเมนต์ โดยมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม 162 ความถูกต้องของคำตอบทั้ง 4 โหมดของท่อนำคลื่นมีความถูกต้องทศนิยม 2 ตำแหน่ง เมื่อเรากลับไปพิจารณาในตารางที่ 2.4 ค่าความถูกต้องทศนิยม 2 ตำแหน่งนี้จะต้องมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามถึง 828 และถ้าเลือกการแบ่งอีลีเมนต์ 168 หรือมีจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม 800 ความถูกต้องของคำตอบมีทศนิยม 3 ถึง 4 ตำแหน่ง

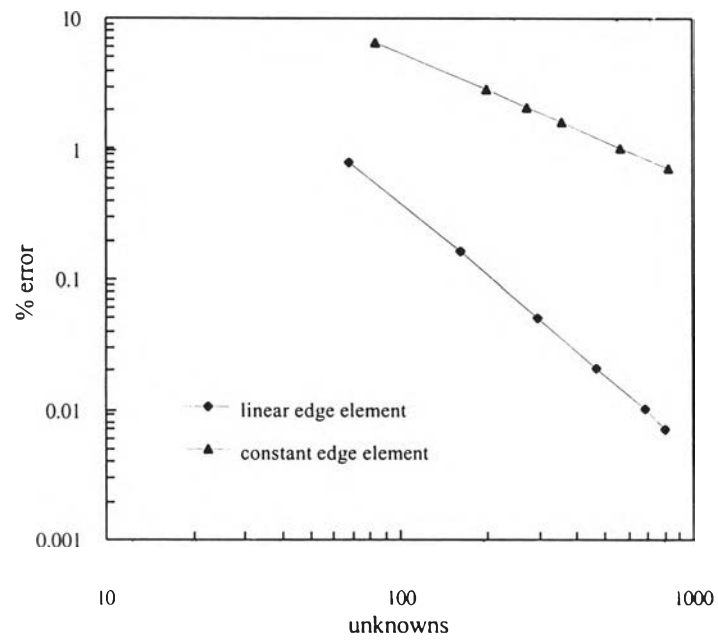
ตารางที่ 2.5 การเปรียบเทียบค่า  $\beta/k_0$  ที่  $k_0 a = 3.0$  ใน 4 โหมดแรกของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่มีฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นกับผลเฉลยแม่นยำ (Balanis, 1989)

จำนวนอีลีเมนต์	จำนวนตัวแปร	เวลา (วินาที)	โหมด $LSE_{10}$	โหมด $LSM_{11}$	โหมด $LSE_{11}$	โหมด $LSE_{20}$
16	68	1.31	1.27853	0.97913	0.73437	0.59422
36	162	11.20	1.27637	0.97313	0.72983	0.59419
64	296	64.59	1.27592	0.97204	0.72905	0.59401
100	470	243.32	1.27582	0.97174	0.72881	0.59394
144	684	756.27	1.27578	0.97164	0.72873	0.59392
168	800	2214.76	1.27577	0.97161	0.72871	0.59391
ผลเฉลยแม่นยำ			1.27576	0.97154	0.72865	0.59390

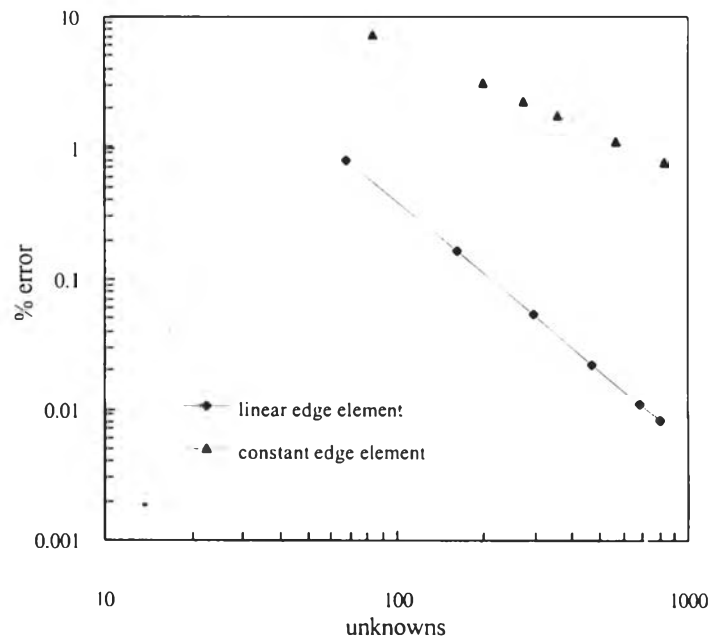




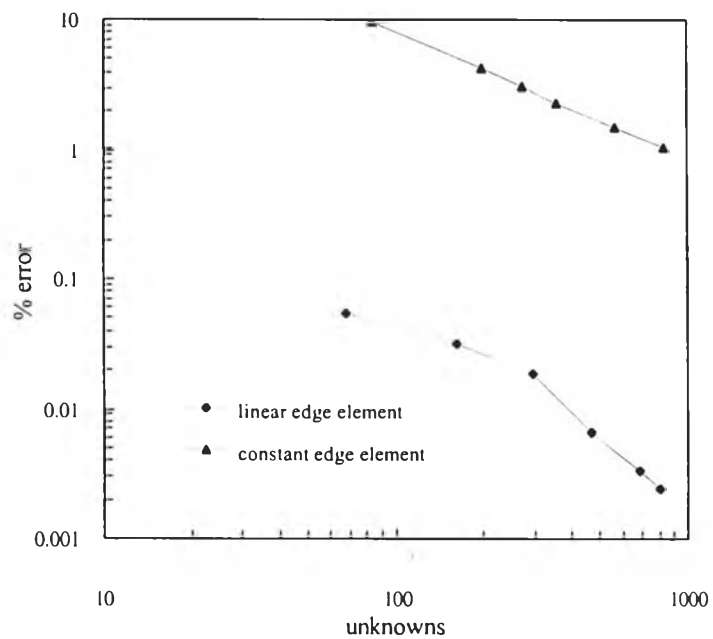
(ก) เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่โมด  $LSE_{10}$



(ข) เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่โมด  $LSM_{11}$



(ค) เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่โมด  $LSE_{11}$



(ง) เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่โมด  $LSE_{20}$

รูปที่ 2.17 การเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่เปลี่ยนแปลงตามจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม ที่  $k_0 a = 3.0$  ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก

รูปที่ 2.17 แสดงการเปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่เปลี่ยนแปลงตามจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนาม ใน 4 โมดแรกที่  $k_0 a = 3.0$  ของท่อนำคลื่นที่บรรจุด้วยวัสดุไดอิเล็กทริก จากกราฟเมื่อเราพิจารณาทั้ง 4 โมด คือ โมด  $LSE_{10}$ , โมด  $LSM_{11}$ , โมด  $LSE_{11}$  และ โมด  $LSE_{20}$  จะพบว่าโมดพื้นฐานของท่อนำคลื่นมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดต่ำที่สุด และนอกจากนี้แสดงให้เห็นว่าเมื่อเรากำหนดจำนวนตัวแปรไม่ทราบค่ามีจำนวนเท่ากัน เปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่มีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่สูงกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น ตัวอย่างเช่น ที่โมดพื้นฐาน เลือกจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของสนามเท่ากันประมาณ 800 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคองที่มีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด 0.2186 เปอร์เซ็นต์ แต่ถ้าใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นมีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด 0.0007 เปอร์เซ็นต์ เท่านั้น

จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบที่กล่าวมานี้ แสดงให้เห็นว่าเป็นวิธีหนึ่งที่มีเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดในขอบเขตที่ยอมรับได้และไม่เกิดผลเฉลยปลอมเทียมในการวิเคราะห์ปัญหาท่อนำคลื่น ดังนั้นผู้เสนอวิทยานิพนธ์จึงนำวิธีการนี้วิเคราะห์โมดเจาะจงและการหมุนพาราเดย์ของท่อนำคลื่นโรแมกเนติกโดยนำเสนอผลการวิเคราะห์ในบทที่ 3 ต่อไป