

การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน  
โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม



นายเชตต์ พิศุรมานิต

# สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-53-2913-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

AN  $\mathcal{H}_\infty$  CONTROLLER DESIGN FOR ROTARY INVERTED PENDULUM USING  
LINEAR PARAMETER-VARYING CONTROL TECHNIQUE WITH FULL BLOCK MULTIPLIER



Mr. Khett Pitoonmanit

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2005

ISBN 974-53-2913-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์      การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยใช้เทคนิค  
การควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม

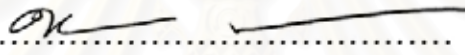
โดย                              นายเชตต์ พิฑูรมานิต

สาขาวิชา                      วิศวกรรมไฟฟ้า


อาจารย์ที่ปรึกษา              ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ


---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

.....  ..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....  ..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชรพงษ์ ไชวิฑูรกิจ)

.....  ..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

.....  ..... กรรมการ  
(อาจารย์ ดร.สมบูรณ์ แสงวงศ์วานิชย์)

เขตต์ พิชูรมานิต: การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนโดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม (AN  $H_\infty$  CONTROLLER DESIGN FOR ROTARY INVERTED PENDULUM USING LINEAR PARAMETER-VARYING CONTROL TECHNIQUE WITH FULL BLOCK MULTIPLIER), อ. ที่ปรึกษา: ผศ. ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ, 87 หน้า, ISBN 974-53-2913-4

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม จุดประสงค์ของการออกแบบตัวควบคุมคือสร้างเสถียรภาพให้กับเพนดูลัมในตำแหน่งแนวตั้ง โดยอาศัยการประมาณพลวัตบางส่วนของระบบให้เป็นเชิงเส้นรอบจุดศูนย์ เราสามารถสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน และใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็มได้ ผลการจำลองระบบแสดงให้เห็นว่าการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็มให้ผลลัพธ์การควบคุมที่ดีกว่าตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตาราง และตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรงที่เสนอในงานวิจัยก่อนหน้า

## สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา ..... วิศวกรรมไฟฟ้า .....  
สาขาวิชา ..... วิศวกรรมไฟฟ้า .....  
ปีการศึกษา ..... 2548 .....

ลายมือชื่อนิสิต ..... พิชูรมานิต .....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ..... มานพ วงศ์สายสุวรรณ .....

##4670234721: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: LINEAR PARAMETER VARYING SYSTEM/ LINEAR PARAMETER VARYING CONTROLLER/ FULL BLOCK MULTIPLIER / ROTARY INVERTED PENDULUM

KHETT PITOONMANIT: AN  $H_\infty$  CONTROLLER DESIGN FOR ROTARY INVERTED PENDULUM USING LINEAR PARAMETER-VARYING CONTROL TECHNIQUE WITH FULL BLOCK MULTIPLIER, THESIS ADVISOR: MANOP WONGSAISUWAN, Ph.D., 87 pp., ISBN 974-53-2913-4

This thesis presents controller design for a rotary inverted pendulum using linear parameter varying control technique with full block multiplier. The controller design objective is to stabilize the pendulums in up-ward positions. With linearization of some nonlinear dynamics terms, we can construct an LPV model and linear parameter varying control technique with full block multiplier can then be applied. Simulation results show that controller synthesis with full block multiplier yields better outcomes than gain scheduling  $H_\infty$  controller and fixed  $H_\infty$  controller proposed in former research.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department ..Electrical Engineering  
Field of study ..Electrical Engineering  
Academic year ..... 2005 .....

Student's signature ..*Khett Pitonmanit*.....  
Advisor's signature ..*Manop Wongsaisuan*.....

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยความช่วยเหลือของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่ได้สละเวลาให้คำปรึกษาและข้อคิดเห็นต่างๆที่ทำให้ผู้วิจัยเห็นแนวทางในการทำวิทยานิพนธ์ รวมถึงคำแนะนำ ความช่วยเหลือและโอกาสมากมายที่ให้กับข้าพเจ้าในการทำงานตลอดระยะเวลาสามปีที่ผ่านมา

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ ไชวิฑูรกิจ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่ได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์นี้สมบูรณ์มากขึ้น และยังได้ให้โอกาสข้าพเจ้าในการเป็นผู้ช่วยสอนรายวิชา 2102604 (Advanced Electrical Engineering Mathematics) ซึ่งทำให้ข้าพเจ้ามีโอกาสได้ฝึกการใช้ความคิดที่เป็นเหตุเป็นผลมากขึ้น

ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สมบูรณ์ แสงวงศ์วานิชย์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่ให้คำแนะนำและข้อคิดที่มีค่าอย่างยิ่งในงานวิจัยนี้ และความกรุณาที่มีต่อข้าพเจ้าเสมอมา

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ในสาขาระบบควบคุมทุกท่าน ที่ได้ถ่ายทอดความรู้วิชาทางระบบควบคุมแก่ข้าพเจ้า อีกทั้งข้อแนะนำและคำตักเตือนที่ช่วยให้ข้าพเจ้าใช้ชีวิตการเป็นนักศึกษาได้อย่างมีความสุข

ขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาสำหรับการเลี้ยงดูอบรมสั่งสอน ที่ทำให้ข้าพเจ้าประสบความสำเร็จในชีวิต รวมถึงความรักและความห่วงใยที่มีให้ข้าพเจ้าตลอดเวลา

ขอขอบคุณนายวาทัญญู คล้ายสงคราม นิสิตปริญญาเอกสาขาระบบควบคุม สำหรับคำแนะนำต่างๆ อีกทั้งความช่วยเหลือที่มีให้กับข้าพเจ้า ขอขอบคุณนายฐาปนา นามประดิษฐ์ นิสิตปริญญาเอกสาขาระบบควบคุมสำหรับความช่วยเหลือเรื่อง LMI ขอขอบคุณ นางสาวกมลวรรณ ทิพย์ถาวรนุกูล นิสิตเก่าสาขาระบบควบคุมที่ให้คำแนะนำแก่ข้าพเจ้าในงานวิจัยนี้

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สารบัญ

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฅ
สารบัญภาพ.....	ญ
<b>1 บทนำ.....</b>	<b>1</b>
1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา.....	4
1.2 วัตถุประสงค์.....	5
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	5
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....	5
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	6
1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์.....	6
<b>2 การวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้     ตัวคูณบล็อกเต็ม.....</b>	<b>7</b>
2.1 การวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์.....	7
2.1.1 ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์.....	7
2.1.2 รูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น.....	9
2.1.3 การวิเคราะห์สมรรถนะ $H_\infty$ คงทน.....	11
2.2 การคำนวณเงื่อนไขสมรรถนะคงทน.....	15
2.2.1 การกำหนดรูปแบบเซตตัวคูณ.....	15
2.2.2 ตัวอย่างเชิงเลข.....	17
2.3 การสังเคราะห์ตัวควบคุม.....	19
2.3.1 โครงสร้างตัวควบคุมที่ใช้.....	19
2.3.2 การสังเคราะห์ตัวควบคุม.....	20
2.4 ตัวอย่างการออกแบบ.....	28
2.5 สรุป.....	33

<b>3</b>	<b>การควบคุมเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน .....</b>	<b>35</b>
3.1	เพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน .....	35
3.2	แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ .....	36
3.3	การออกแบบตัวควบคุม .....	39
3.3.1	รูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น .....	39
3.3.2	โครงสร้างการควบคุม .....	41
3.4	ผลของการเลือกแบบจำลอง .....	42
3.5	ผลของตัวควบคุม .....	62
3.6	สรุป .....	66
<b>4</b>	<b>บทสรุปและข้อเสนอแนะ .....</b>	<b>67</b>
4.1	บทสรุป .....	67
4.2	ข้อเสนอแนะ .....	67
	<b>รายการอ้างอิง .....</b>	<b>69</b>
	<b>ภาคผนวก .....</b>	<b>71</b>
<b>ก</b>	<b>อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น .....</b>	<b>72</b>
ก.1	อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น .....	72
ก.2	สรุป .....	76
<b>ข</b>	<b>การสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาโดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น .....</b>	<b>77</b>
ข.1	การวิเคราะห์ระบบ .....	77
ข.1.1	รูปแบบปัญหา .....	77
ข.1.2	นอร์ม $H_\infty$ .....	78
ข.2	การสังเคราะห์ตัวควบคุม .....	79
ข.2.1	วิธีการเปลี่ยนตัวแปร ([1]) .....	80
ข.2.2	วิธีการกำจัดตัวแปร .....	83
ข.3	สรุป .....	86
	<b>ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....</b>	<b>87</b>



## สารบัญตาราง

2.1	ค่าดัชนีสมรรถนะที่ได้ในการควบคุมระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก .....	33
3.1	ค่าพารามิเตอร์ของเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน .....	37
3.2	สรุปผลของการควบคุมที่ได้จากตัวควบคุม $K_1$ , $K_2$ และ $K_3$ .....	61



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

2.1	การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน (รูป a) และการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่าง (รูป b) . . . . .	10
2.2	ผลการวิเคราะห์สมรรถนะ $H_\infty$ โดยใช้เซตตัวคูณ $P_2$ (เส้นทึบ), เซตตัวคูณ $P_1$ (เส้นประ) และเซตตัวคูณ $D$ (เส้นจุด) . . . . .	18
2.3	โครงสร้างตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ $K(\delta(t))$ . . . . .	20
2.4	ระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก . . . . .	29
2.5	โครงสร้างที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก . . . . .	32
2.6	(ก) เปรียบเทียบผลตอบระหว่างการใช้ตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นทึบ) และการใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ (เส้นประ) (ข) ภาพขยายช่วงการทำงานของตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในช่วงเวลา 100 ถึง 120 วินาที (ค) ภาพขยายสัญญาณควบคุมจากตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในช่วงเวลา 0 ถึง 20 วินาที (ง) ภาพขยายสัญญาณควบคุมจากตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในช่วงเวลา 100 ถึง 120 วินาที . . . . .	34
3.1	ระบบเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน . . . . .	36
3.2	โครงสร้างที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุม . . . . .	41
3.3	ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง $M_1$ (เส้นทึบ), $M_2$ (เส้นประ), $M_3$ (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec) . . . . .	43
3.4	ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง $M_1$ (เส้นทึบ), $M_2$ (เส้นประ), $M_3$ (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์ $\delta'_1$ (ค) พารามิเตอร์ $\delta'_2$ (ง) พารามิเตอร์ $\delta'_3$ . . . . .	44
3.5	ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง $M_1$ (เส้นทึบ), $M_2$ (เส้นประ), $M_3$ (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์ $\delta'_4$ (ข) พารามิเตอร์ $\delta'_5$ (ค) พารามิเตอร์ $\delta'_6$ (ง) พารามิเตอร์ $\delta'_7$ . . . . .	45
3.6	ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 2 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง $M_1$ (เส้นทึบ), $M_2$ (เส้นประ), $M_3$ (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec) . . . . .	46



3.16	ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 5 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง $M_1$ (เส้นทึบ), $M_2$ (เส้นประ), $M_3$ (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์ $\delta'_1$ (ค) พารามิเตอร์ $\delta'_2$ (ง) พารามิเตอร์ $\delta'_3$ .....	56
3.17	ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 5 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง $M_1$ (เส้นทึบ), $M_2$ (เส้นประ), $M_3$ (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์ $\delta'_4$ (ข) พารามิเตอร์ $\delta'_5$ (ค) พารามิเตอร์ $\delta'_6$ (ง) พารามิเตอร์ $\delta'_7$ .....	57
3.18	รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 2: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา) .....	58
3.19	รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 3: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา) .....	59
3.20	รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 4: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา) .....	60
3.21	รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 5: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา) .....	60
3.22	ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) .....	63
3.23	ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 2 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) .....	63
3.24	ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 3 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) .....	64
3.25	ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 4 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) .....	64
3.26	สัญญาณควบคุม (N-m) เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) กรณีที่ 1 (องศา) (ข) กรณีที่ 2 (ค) กรณีที่ 3 (ง) กรณีที่ 4 .....	65
ข.1	โครงสร้างการป้อนกลับของระบบ .....	77

# บทที่ 1

## บทนำ

ในการออกแบบระบบควบคุม เรามักใช้แบบจำลองเชิงเส้น (linear model) ในการอธิบายลักษณะทางกายภาพของระบบ เนื่องจากมีความง่ายและมีทฤษฎีในการวิเคราะห์เสถียรภาพและสมรรถนะของระบบมากมาย ส่วนแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear system) ถึงแม้ว่าจะอธิบายสมบัติทางกายภาพของระบบได้สมบูร์กกว่าแต่สมการทางคณิตศาสตร์ที่ได้ก็จะมี ความซับซ้อน การใช้แบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อวิเคราะห์สมบัติต่างๆของระบบจึงมีความยากกว่ากรณีที่ใช้แบบจำลองเชิงเส้น วิธีการหนึ่งที่ใช้เพื่อลดความซับซ้อนของแบบจำลองไม่เป็นเชิงเส้นลงคือการประมาณให้เป็นเชิงเส้น (linearization) รอบๆจุดทำงานของระบบ โดยกำหนดจุดทำงานให้ครอบคลุมช่วงการทำงานตามที่ต้องการ ผลลัพธ์ที่ได้คือวงศ์ (family) ของแบบจำลองเชิงเส้นและตัวแปรกำหนด (scheduling variable) ที่กำหนดว่าควรใช้แบบจำลองเชิงเส้นตัวใดในการประมาณลักษณะของระบบรอบจุดทำงานนั้นๆ เมื่อเรากำหนดจุดทำงานให้มีลักษณะเป็นฟังก์ชัน เราจะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นแบบเชิงเส้นที่มีพารามิเตอร์เป็นฟังก์ชันของตัวแปรกำหนดชุดหนึ่ง เราสามารถมองแบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอน (uncertain system) ในกรณีที่เราไม่สามารถวัดค่าของพารามิเตอร์ได้ หรืออาจมองเป็นระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ (linear parameter varying system, LPV) ในกรณีที่พารามิเตอร์ดังกล่าวสามารถวัดค่าได้หรือหาค่าได้

ในบางกรณี เราสามารถแยกตัวแปรสถานะบางตัวและเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นในแบบจำลองออกจากกันได้ ในกรณีนี้เราสามารถพิจารณาเทอมไม่เป็นเชิงเส้นที่แยกออกมาจากตัวแปรสถานะเป็นพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ และพิจารณาระบบไม่เชิงเส้นดังกล่าวเป็นระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ได้ ตัวอย่างเช่นถ้าเรามีระบบไม่เป็นเชิงเส้น

$$\dot{x} = x \sin(x)$$

เราสามารถคิดให้เทอม  $\sin(x)$  เป็นพารามิเตอร์แปรตามเวลา ผลลัพธ์ที่ได้คือแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์

$$\dot{x} = \theta x$$

โดยที่  $\theta = \sin(x)$  คือพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ ระบบเชิงเส้นที่ได้จากการรวมเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นและนิยามให้เป็นพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ เรียกว่าระบบกึ่งเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ (quasi-LPV) [3] แนวคิดนี้ทำให้เราสามารถพิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นบางระบบให้อยู่ในรูปแบบของระบบเชิงเส้น และใช้ทฤษฎีระบบควบคุมเชิงเส้นแทนการออกแบบโดยใช้ทฤษฎีระบบควบคุมไม่เชิงเส้นซึ่งมีความยากและซับซ้อนมากกว่า

การกำหนดรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์แปรตามเวลา กับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ สามารถทำได้ในสองรูปแบบใหญ่คือ รูปแบบพารามิเตอร์สัมพันธ์ (affine parameter dependent) และรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น (linear fractional transformation, LFT) ในวิทยานิพนธ์นี้เราเลือกรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นเนื่องจากรูปแบบดังกล่าวมีความง่ายในการวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุม นอกจากนี้การวิเคราะห์ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมจะอยู่ในรูปของการควบคุมคงทน (robust control) ซึ่งมีทฤษฎีการออกแบบตัวควบคุมคงทนหลายวิธีเช่นการควบคุม  $H_\infty$ , การวิเคราะห์และสังเคราะห์หิมิว ( $\mu$  analysis and synthesis) เป็นต้น

สำหรับการออกแบบตัวควบคุมของระบบในมุมมองของการควบคุมคงทนมีจุดประสงค์คือหาตัวควบคุม (controller) ที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะตามที่กำหนดสำหรับทุกๆ ค่าของความไม่แน่นอนภายใต้ขอบเขตที่กำหนด ทางเลือกหนึ่งในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์คือพิจารณาพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบเสมือนเป็นความไม่แน่นอน และใช้ตัวควบคุมแบบตรึง (fixed controller) เพื่อทำการควบคุมระบบภายใต้ทุกๆ แนววิถี (trajectory) ของพารามิเตอร์แปรตามเวลา อย่างไรก็ตามวิธีนี้จะทำให้ระบบวงปิด (closed-loop system) มีสมรรถนะที่ต่ำ ทางเลือกหนึ่งที่ใช้ในการปรับปรุงสมรรถนะผลตอบของระบบวงปิดคือ ใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ ในกรณีนี้พลวัตของตัวควบคุมจะถูกปรับเปลี่ยนตามพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ ใน [2] ได้เสนอโครงสร้างของตัวควบคุมในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นระหว่างตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลากับพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ การกำหนดโครงสร้างของตัวควบคุมในลักษณะดังกล่าวทำให้เราสามารถแยกพารามิเตอร์แปรตามเวลาในส่วนของตัวควบคุมออก และรวมเข้ากับพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบในรูปของเมทริกซ์บล็อกแนวทแยง ระบบวงปิดจะอยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นระหว่างระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลากับตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาและเมทริกซ์บล็อกแนวทแยงของพารามิเตอร์แปรตามเวลา การวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์จึงสามารถพิจารณาในรูปแบบของระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาภายใต้ความไม่แน่นอนที่แปรตามเวลาแทนได้

ขั้นตอนแรกในการพิจารณาปัญหาการควบคุมคงทนคือ การหาเงื่อนไขเสถียรภาพคงทน (robust stability) และสมรรถนะคงทน (robust performance) ของระบบ เงื่อนไขหนึ่งที่สามารถใช้ประกันเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนของระบบได้คือเงื่อนไขอัตราขยายขนาดเล็ก (small gain condition) อย่างไรก็ตามความไม่แน่นอนที่พิจารณาในเงื่อนไขดังกล่าวนี้เป็นความไม่แน่นอนแบบไร้โครงสร้าง (unstructured uncertainty) ขณะที่ความไม่แน่นอน (พารามิเตอร์แปรตามเวลา) ในโครงสร้างของการควบคุมที่กล่าวถึงเป็นความไม่แน่นอนที่มีโครงสร้าง (structured uncertainty) การใช้เงื่อนไขอัตราขยายขนาดเล็กโดยตรงจะเกิดความอนุรักษ์สูง ด้วยเหตุผลนี้จึงมีแนวคิดในการหาเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนในรูปแบบอื่นที่มีความอนุรักษ์น้อยลง เช่นการวิเคราะห์หิมิว ( $\mu$  analysis) [4], [5], การวิเคราะห์เสถียรภาพโดยใช้เล็บบูโนฟฟังก์ชันที่ขึ้นกับพารามิเตอร์ (parameter dependent Lyapunov function) [6], [7] เป็นต้น

C.W. Scherer [8] ได้เสนอการวิเคราะห์สมรรถนะคงทนสำหรับระบบโดยใช้ทฤษฎี  $S$ -procedure บล็อกเต็ม (full block  $S$ -procedure) โดยตัวคูณ (multiplier) จะเป็นตัวแปรที่ปรากฏในเงื่อนไขเสถียร

ภาพและสมรรถนะคงทน เมื่อเปรียบเทียบเงื่อนไขที่ได้กับแนวคิดของทฤษฎีการวิเคราะห์หิมพบว่าตัวคุณในเงื่อนไขเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบสามารถมองเป็นเมทริกซ์การสเกล (scaling matrix) ในแนวคิดของทฤษฎีค่ามิวได้ เมื่อเปรียบเทียบโครงสร้างของตัวคุณที่ใช้กับโครงสร้างของเมทริกซ์การสเกลแบบ  $D$  ( $D$  scaling) [4], [9], เมทริกซ์การสเกลแบบ  $D-G$  ( $D-G$  scaling) [5] พบว่าตัวคุณบล็อกเต็มมีการจำกัดลักษณะโครงสร้างที่น้อยกว่าเมทริกซ์การสเกลทั้งสองแบบ ดังนั้นผลลัพธ์จากการวิเคราะห์สมรรถนะคงทนโดยใช้ตัวคุณบล็อกเต็มจึงให้ผลที่มีความอนุรักษ์ต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับอีกสองแนวทางที่เหลือ

ขั้นตอนต่อไปหลังจากที่ได้เงื่อนไขสมรรถนะคงทนของระบบคือการสังเคราะห์ตัวควบคุม ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ข้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequalities) เป็นเครื่องมือหลัก การสังเคราะห์ตัวควบคุมจะเริ่มจากการวางเงื่อนไขสมรรถนะของระบบวงปิดให้อยู่ในรูปข้อสมการเมทริกซ์ก่อน จากนั้นจะอาศัยเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร (change of variable) หรือการกำจัดตัวแปร (elimination of variable) ในการแปลงเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปข้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปรของตัวควบคุม สำหรับโครงสร้างการควบคุมที่นำเสนอใน [2] ซึ่งใช้พารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบในการปรับพลวัตของตัวควบคุมโดยตรง พบว่าตัวคุณที่ใช้สำหรับการวางเงื่อนไขสมรรถนะคงทนของระบบวงปิดจะมีโครงสร้างเป็นบล็อกแนวแยงซึ่งมีความอนุรักษ์เกิดขึ้น ใน [10] จึงได้เสนอแนวคิดในการปรับพลวัตของตัวควบคุมจะโดยฟังก์ชันของพารามิเตอร์แปรตามเวลาแทน โดยอาศัยโครงสร้างดังกล่าวนี้ตัวคุณที่ใช้สำหรับการวางเงื่อนไขสมรรถนะคงทนของระบบวงปิดจะมีโครงสร้างเป็นบล็อกเต็มซึ่งมีความอนุรักษ์น้อยกว่า ในบทความเดียวกันนี้ยังได้สรุปวิธีการสร้างฟังก์ชันสำหรับการปรับพลวัตของตัวควบคุมในรูปแบบเด่นชัด (explicit form) ด้วย อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าตัวคุณที่ใช้มีโครงสร้างเป็นบล็อกเต็มแต่ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมยังจำเป็นต้องตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับสมบัติความเป็นบวกแน่นอน (positive definite) และลบแน่นอน (negative definite) ของตัวคุณ ดังนั้นใน [11] จึงได้พัฒนาแนวทางการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยตัดสมมติฐานดังกล่าวออกทั้งหมด แต่ฟังก์ชันของพารามิเตอร์แปรตามเวลาที่ได้จะมีรูปแบบเชิงนามธรรม (abstract form) ซึ่งมีความซับซ้อนมากกว่า

เพนดูลัมผกผันแบบหมุน (rotary inverted pendulum) เป็นระบบหนึ่งที่มีความน่าสนใจในทางปฏิบัติ ระบบดังกล่าวเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพและมีความไม่เป็นเชิงเส้นสูง เป้าหมายในการควบคุมคือรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมให้อยู่ในตำแหน่งแนวตั้ง การออกแบบระบบควบคุมส่วนมากมักจะใช้การประมาณเป็นเชิงเส้นรอบจุดสมดุลในแนวตั้งและใช้เทคนิคการออกแบบตัวควบคุมเหมาะสมที่สุด (optimal control) ในการออกแบบตัวควบคุม อย่างไรก็ตามการออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีนี้สามารถรับประกันเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบได้ในช่วงมุมเบี่ยงเบนแคบๆเท่านั้น ดังนั้นแนวทางการออกแบบตัวควบคุมโดยใช้เทคนิคการควบคุมระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์จึงมีความน่าสนใจในการประยุกต์ใช้กับระบบเพนดูลัมผกผันแบบหมุน เพื่อปรับปรุงสมรรถนะของผลตอบในช่วงมุมเบี่ยงเบนที่มากขึ้น

## 1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา

การวิเคราะห์ปัญหาการออกแบบระบบควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์มีความเป็นมาคร่าวๆดังนี้

- Apkarian และ Gahinet [2] พิจารณาระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้รูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นระหว่างระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลากับพารามิเตอร์แปรตามเวลา ในบทความนี้พิจารณาตัวควบคุมให้มีพลวัตเปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น เช่นเดียวกับตัวระบบ และใช้เงื่อนไขฮอนมันด์ของระบบเป็นเกณฑ์ในการออกแบบ การวิเคราะห์ปัญหาจะใช้บทตั้งค่าจริงมีขอบเขต (Bounded Real Lemma) เพื่อแปลงปัญหาให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และลดความอนุรักษ์ของเงื่อนไขฮอนมันด์ลงโดยอาศัยเมทริกซ์การสเกล
- Packard [12] เสนอการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในลักษณะเดียวกันกับ [2] เพียงแต่ระบบที่พิจารณาอยู่ในโดเมนเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete time)
- Apkarian, Gahinet และ Beckers [13] เสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้โดยพิจารณาสมการสถานะของระบบในรูปแบบของโพลีโทป (polytope) และคำนวณหาเมทริกซ์สมมาตรค่าจริง ที่ทำให้ระบบสอดคล้องเงื่อนไขบทตั้งค่าจริงมีขอบเขตที่ทุกจุดยอดของเซตโพลีโทป โดยอาศัยความเป็นเซตคอนเวกซ์ (convex set) จึงสรุปได้ว่าระบบยอมสอดคล้องเงื่อนไขบทตั้งค่าจริงมีขอบเขตสำหรับทุกสมการสถานะที่อยู่ภายในเซตโพลีโทปนั้นด้วย
- F. Wu และคณะ [14] ได้เสนอแนวทางการออกแบบตัวควบคุมโดยพิจารณาเงื่อนไขอัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of variation) ของพารามิเตอร์เพิ่มเติมในเงื่อนไขและใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟที่ขึ้นกับพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบแทนการใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟที่เป็นค่าคงที่เหมือนในงานวิจัยที่ผ่านมา
- Apkarian และ Adams [15] พิจารณาเงื่อนไขการออกแบบระบบควบคุมในลักษณะเดียวกันกับ [14] และได้เสนอแนวทางการสังเคราะห์ตัวควบคุมไว้สองวิธีคือวิธีการเปลี่ยนตัวแปรและการกำจัดตัวแปร และเปรียบเทียบข้อดีข้อเสียระหว่างสองวิธีนี้ในแง่ของการคำนวณ การคำนวณเงื่อนไขสำหรับสังเคราะห์ตัวควบคุมในบทความนี้อาศัยการตีตาราง (gridding) แบ่งค่าพารามิเตอร์และทำการคำนวณหาคำตอบที่แต่ละจุดของการแบ่งค่า ข้อเสียที่สำคัญของแนวทางนี้คือจำนวนเงื่อนไขที่ต้องทำการคำนวณจะสูง
- Scherer [8], [10] ได้เสนอแนวทางในการวิเคราะห์เสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนโดยใช้  $S$ -procedure บล็อกเต็ม เงื่อนไขเสถียรภาพคงทนที่ได้จะมีรูปแบบเดียวกันกับที่เสนอใน Iwasaki และ Hara [16], Megretski และ Rantzer [17], [18], [19] เพียงแต่ใน [16] จะใช้แนวคิดของตัวแยกกำลังสอง (quadratic separator) และนิยามของการวางรูปแบบดี (well-posedness) ส่วน [17], [18], [19] จะใช้เงื่อนไขกำลังสองเชิงอินทิกรัล (integral quadratic constraint, IQC) ในการหาเงื่อนไขเสถียรภาพของระบบ ในตอนท้ายของบทความ [10] ได้ขยายแนวคิดในการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับ



ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ อย่างไรก็ตามการสังเคราะห์ตัวควบคุมที่นำเสนอ ยังคงมีการตั้งเงื่อนไขความเป็นบวกแน่นอนและลบแน่นอนของคุณ เงื่อนไขที่ได้จึงยังมีความอนุรักษ์อยู่

- Scherer [11] ได้พัฒนาเงื่อนไขการสังเคราะห์ตัวควบคุมต่อจาก [10] สำหรับระบบโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์แปรตามเวลากับระบบในรูปแบบเชิงนามธรรม และตัดเงื่อนไขความเป็นบวกแน่นอนและลบแน่นอนของคุณที่เสนอไว้ใน [10] แต่ฟังก์ชันที่ใช้ในการปรับพลวัตของตัวควบคุมจะมีรูปแบบได้ทั้งในเชิงนามธรรมหรือเด่นชัด ขึ้นอยู่กับลักษณะของคำตอบที่ได้จากการแก้เงื่อนไขของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

## 1.2 วัตถุประสงค์

ออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม และเปรียบเทียบสมรรถนะที่ได้กับการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรงและตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตาราง

## 1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. สร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
2. ศึกษาการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม
3. ออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม และเปรียบเทียบสมรรถนะที่ได้กับการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรงและตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตาราง

## 1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาแบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์
2. ศึกษาแนวทางและวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุม สำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ เนื้อหาที่เกี่ยวข้องในส่วนนี้ได้แก่ลักษณะโครงสร้างของการควบคุม, รูปแบบเงื่อนไขเสถียรภาพและสมรรถนะของระบบ, แนวทางการสังเคราะห์ตัวควบคุมของระบบ
3. ศึกษาเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนและสมรรถนะคงทนขั้นพื้นฐานของระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา เนื้อหาที่ทำการค้นคว้าได้แก่ทฤษฎีการควบคุมเอชอินฟินิตี้, การวิเคราะห์และสังเคราะห์มิว
4. ศึกษาแนวทางการวางเงื่อนไขเสถียรภาพและสมรรถนะในทางระบบควบคุมและการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น
5. ศึกษาการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม

6. ออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน และทำการจำลองผลตอบของระบบเปรียบเทียบกับ การออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตารางที่นำเสนอใน [2] และการออกแบบตัวควบคุมแบบตรึง

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน
2. วิธีการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม
3. แนวทางการออกแบบตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม

## 1.6 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมด 4 บท และภาคผนวกอีก 2 บทดังนี้:

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาของปัญหา ขอบเขตวิทยานิพนธ์ ขั้นตอนการดำเนินงานและประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

บทที่ 2 กล่าวถึงการวิเคราะห์ระบบและการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม เนื้อหาส่วนท้ายจะแสดงตัวอย่างการออกแบบกับระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก

บทที่ 3 แสดงการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนทั้งหมด 3 รูปแบบ การจำลองผลตอบจะแยกประเด็นพิจารณาสองประเด็นคือผลของการเลือกแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมและผลของวิธีการสังเคราะห์ตัวควบคุมระหว่างการใช้ตัวคูณบล็อกเต็มกับวิธีที่เสนอใน [2] และการสังเคราะห์ตัวควบคุมแบบตรึง

บทที่ 4 เป็นข้อสรุปและข้อเสนอแนะในงานวิจัย

ภาคผนวก ก กล่าวถึงการแก้ปัญหาทางระบบควบคุมด้วยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยกล่าวถึงรูปแบบ, สมบัติของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นพร้อมยกตัวอย่างการแก้ปัญหาทางระบบควบคุมให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ภาคผนวก ข กล่าวถึงการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยกล่าวถึงการกำหนดปัญหา, การสังเคราะห์ตัวควบคุมด้วยเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรและการกำจัดตัวแปร

## บทที่ 2

# การวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม (full block multiplier) เป็นเครื่องมือ จุดประสงค์ของการวิเคราะห์คือหาเงื่อนไขที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพและสมรรถนะตามที่กำหนดและนำเงื่อนไขดังกล่าวมาใช้ในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุม ใน §2.1 เราจะกล่าวถึงนิยามของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์, รูปแบบของระบบที่ใช้ในการวิเคราะห์และเงื่อนไขสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนของระบบ ใน §2.2 จะกล่าวถึงการคำนวณเงื่อนไขสมรรถนะคงทนที่ได้จาก §2.1 และใน §2.3 จะกล่าวถึงโครงสร้างการควบคุมที่ใช้และการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบ ส่วน §2.4 เป็นตัวอย่างการออกแบบกับระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก

### 2.1 การวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์

#### 2.1.1 ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์

ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ (linear parameter varying system, LPV) คือระบบเชิงเส้นที่พารามิเตอร์ของระบบเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรชุดหนึ่ง เราเรียกตัวแปรชุดนี้ว่าตัวแปรกำหนดหรือพารามิเตอร์แปรตามเวลา สมการสถานะของระบบสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(\delta(t))x + \bar{B}_1(\delta(t))w_p + \bar{B}_2(\delta(t))u \\ z_p(t) &= \bar{C}_1(\delta(t))x + \bar{D}_{11}(\delta(t))w_p + \bar{D}_{12}(\delta(t))u \\ y(t) &= \bar{C}_2(\delta(t))x + \bar{D}_{21}(\delta(t))w_p \end{aligned} \quad (2.1)$$

โดยที่  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  คือตัวแปรสถานะของระบบ,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  คือสัญญาณออกที่วัดได้  $w_p(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$  คือสัญญาณสมรรถนะขาเข้า  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  คือสัญญาณควบคุม  $z_p(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  คือสัญญาณสมรรถนะออก  $\delta(t) = (\delta_1(t) \ \dots \ \delta_r(t))^T \in \delta \subseteq \mathbb{R}^r$  คือตัวแปรกำหนดหรือพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบที่สามารถวัดค่าได้ จากสมการด้านบน ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์มีมุมมองที่น่าสนใจคือ

1. วงศ์ (family) ของการประมาณระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้น
2. ระบบกึ่งเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ (quasi-LPV) [3]
3. ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ที่แปรตามเวลา

มุมมองที่สนใจในวิทยานิพนธ์นี้คือมุมมองแรกและมุมมองที่สอง เนื่องจากมุมมองดังกล่าวทำให้เราสามารถแทนระบบไม่เชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบของระบบเชิงเส้นได้ ตัวอย่างถัดไปจะแสดงแนวคิดอย่างง่ายของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในมุมมองดังกล่าว

ตัวอย่าง 2.1 พิจารณาระบบไม่เชิงเส้น

$$\dot{x}_1 = x_1 + \sin x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2 u \quad (2.2)$$

จากสมการดังกล่าว เราได้ว่าจุดสมดุลของระบบคือ

$$x_{1e} = -\sin x_{2e}, \quad u_e = x_{1e} \quad (2.3)$$

เราได้แบบจำลองที่ประมาณเป็นเชิงเส้นคือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1\delta} &= x_{1\delta} + (\cos x_{2e})x_{2\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} &= (x_{2e})x_{1\delta} + (-\sin x_{2e})x_{2\delta} - (x_{2e})u_\delta \end{aligned} \quad (2.4)$$

โดยที่  $(\cdot)_\delta = (\cdot) - (\cdot)_e$  แทนการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณออกจากจุดสมดุล ในกรณีนี้เราได้ว่า  $\delta(t) = \begin{pmatrix} x_{2e} & \cos x_{2e} & \sin x_{2e} \end{pmatrix}^T$  โดยที่

$$A(\delta(t)) = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_{2e} \\ x_{2e} & -\sin x_{2e} \end{pmatrix}, \quad B(\delta(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_{2e} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ในกรณีนี้ ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์คือระบบที่ได้จากการประมาณระบบไม่เชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้น โดยมีตัวแปร  $x_{2e}$  เป็นตัวกำหนดค่าของแบบจำลอง  $\square$

ตัวอย่าง 2.2 พิจารณาระบบไม่เชิงเส้นในตัวอย่าง (2.1) เราสามารถจัดรูประบบดังกล่าวใหม่ได้ดังนี้

$$\dot{x}_1 = x_1 + \left(\frac{\sin x_2}{x_2}\right) x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 x_1 - x_2 u \quad (2.6)$$

ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์รูปแบบแรกที่เป็นไปได้คือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\sin x_2)/x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \end{pmatrix} u \quad (2.7)$$

ในกรณีนี้ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ได้มาจากการจัดรูประบบไม่เชิงเส้น ให้อยู่ในรูปของระบบเชิงเส้น เทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะพิจารณาเสมือนเป็นตัวแปรกำหนดอีกหนึ่งชุดขณะที่ในตัวอย่างที่ผ่านมา จะใช้การประมาณเป็นเชิงเส้นก่อนโดยในกรณีนี้  $\delta(t) = \begin{pmatrix} x_2 & \frac{\sin x_2}{x_2} \end{pmatrix}^T$  อย่างไรก็ตามระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้วิธีนี้สามารถมีได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ สำหรับระบบ (2.6) สามารถแสดงได้ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (\sin x_2)/x_2 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \end{pmatrix} u \quad (2.8)$$

อย่างไรก็ตามเห็นได้ว่าในกรณีหลังพารามิเตอร์ที่ต้องวัดค่าได้มีสองตัวคือ  $x_1$  และ  $x_2$  ขณะที่แบบจำลองตัวแรกต้องการวัดค่าพารามิเตอร์  $x_2$  เพียงตัวเดียว ดังนั้นการสร้างแบบจำลองจึงต้องคำนึงด้วยว่าพารามิเตอร์ที่นิยามขึ้นมาสามารถวัดค่าได้ในทางปฏิบัติหรือไม่  $\square$

ในวิทยานิพนธ์นี้ มุมมองของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ที่เราสนใจคือมุมมองที่สอง โดยเราจะใช้มุมมองนี้ในการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน ซึ่งเราจะกล่าวถึงอีกครั้งในบทที่ 3 สำหรับตัวอย่างเพิ่มเติมของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในมุมมองแรกและมุมมองที่สองสามารถดูตัวอย่างได้ใน [3], [20]

เนื่องจากพารามิเตอร์  $\delta(t)$  สามารถวัดค่าได้ ดังนั้นเราจะใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์  $\mathcal{K}(\delta(t))$  ที่มีโครงสร้างดังสมการ

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= \bar{A}_c(\delta(t))x_c + \bar{B}_c(\delta(t))y \\ u &= \bar{C}_c(\delta(t))x_c + \bar{D}_c(\delta(t))y\end{aligned}\quad (2.9)$$

โดยที่  $\bar{A}_c(\cdot)$ ,  $\bar{B}_c(\cdot)$ ,  $\bar{C}_c(\cdot)$ ,  $\bar{D}_c(\cdot)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน  $\delta(t)$  จากโครงสร้างดังกล่าวพลวัตของตัวควบคุมจะเปลี่ยนแปลงตามค่าพารามิเตอร์  $\delta(t)$  ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ระบบวงปิด  $\mathcal{G}(\delta(t))$  มีสมการสถานะคือ

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \mathbf{A}(\delta(t))\xi + \mathbf{B}_p(\delta(t))w_p \\ z_p &= \mathbf{C}_p(\delta(t))\xi + \mathbf{D}_{pp}(\delta(t))w_p\end{aligned}\quad (2.10)$$

โดยที่  $\xi = \begin{pmatrix} x^T & x_c^T \end{pmatrix}^T$  อย่างไรก็ตามถ้าเราไม่จำกัดลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์  $\delta(t)$  กับระบบเลยจะทำให้ยากต่อการวิเคราะห์และออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบ ลักษณะความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์  $\delta(t)$  กับระบบสามารถกำหนดได้สองรูปแบบใหญ่ๆได้แก่รูปแบบเชิงสัมพรรค (affine) และรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น (linear fractional transformation, LFT) สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้เราจะเลือกรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น ซึ่งเราจะกล่าวในหัวข้อย่อยถัดไป

### 2.1.2 รูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น

การกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์  $\delta(t)$  กับระบบในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น มีข้อดีคือง่ายต่อการวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุม อีกทั้งยังครอบคลุมลักษณะความสัมพันธ์กว้างกว่ารูปแบบเชิงสัมพรรคซึ่งเป็นกรณีพิเศษของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น

การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นมีนิยามดังต่อไปนี้

**นิยาม 2.1** พิจารณาเมทริกซ์  $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$  เรานิยามการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่าง (lower LFT) ,  $\mathcal{F}_l(M, K)$  คือ

$$\mathcal{F}_l(M, K) = M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21} \quad (2.11)$$

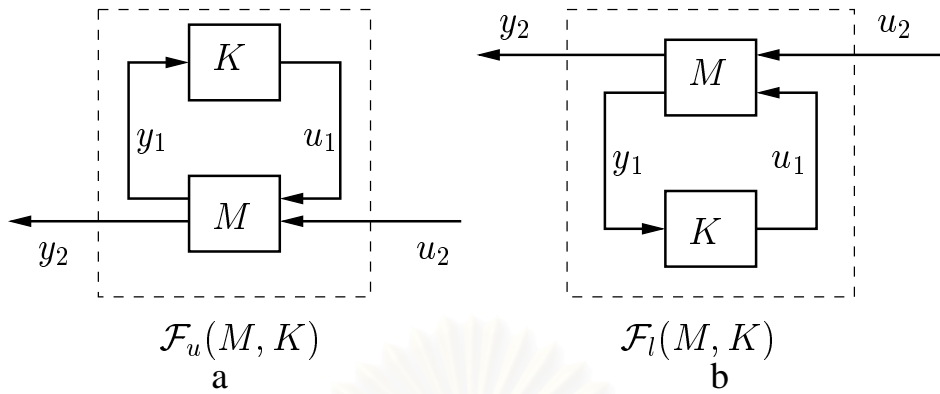
และการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน (upper LFT),  $\mathcal{F}_u(M, K)$  คือ

$$\mathcal{F}_u(M, K) = M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12} \quad (2.12)$$

โดยที่  $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$  เป็นเมทริกซ์แบ่งกัน (partition matrix) ที่มีขนาดเหมาะสม,  $(I - M_{22}K)^{-1}$  และ  $(I - M_{11}K)^{-1}$  สามารถหาค่าได้

จากนิยามของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น เราสามารถแทนระบบ (2.10) ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}_\delta w_\delta + \mathcal{B}_p w_p \\ z_\delta &= \mathcal{C}_\delta \xi + \mathcal{D}_{\delta\delta} w_\delta + \mathcal{D}_{\delta p} w_p \\ z_p &= \mathcal{C}_p \xi + \mathcal{D}_{p\delta} w_\delta + \mathcal{D}_{pp} w_p, \quad w_\delta = \Delta(\delta(t))z_\delta\end{aligned}\quad (2.13)$$



รูปที่ 2.1: การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน (รูป a) และการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นล่าง (รูป b)

โดยที่  $\Delta(\delta)$  คือฟังก์ชันของตัวแปร  $\delta(t)$  ในการวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุมเราจะสมมติให้แนววิถึที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ  $\Delta(\delta(t))$  มีค่าอยู่ภายในเซต  $\Delta$  กล่าวคือ

$$\Delta(\delta(t)) : [0, \infty) \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^{n_\delta \times n_\delta} \quad (2.14)$$

โดยที่เซต  $\Delta$  เป็นเซตกระชับและ  $0 \in \Delta$  ในกรณีนี้  $(I - D_{\delta\delta}\Delta)^{-1} \neq 0$  สำหรับทุกๆ  $\Delta \in \Delta$  เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\delta(t)) & \mathbf{B}_p(\delta(t)) \\ \mathbf{C}_p(\delta(t)) & \mathbf{D}_{pp}(\delta(t)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B_p \\ C_p & D_{pp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_\delta \\ D_{p\delta} \end{pmatrix} \Delta(\delta(t)) (I - D_{\delta\delta}\Delta(\delta(t)))^{-1} \begin{pmatrix} C_\delta & D_{\delta p} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}_u \left( \begin{array}{c|cc} D_{\delta\delta} & C_\delta & D_{\delta p} \\ \hline B_\delta & A & B_p \\ D_{p\delta} & C_p & D_{pp} \end{array}, \Delta(\delta(t)) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

จากผลลัพธ์ดังกล่าวเห็นได้ว่าถ้า  $(I - D_{\delta\delta}\Delta)^{-1} \neq 0$  สัญญาณ  $\xi(t)$ ,  $w_p(t)$  และ  $z_p(t)$  ของระบบ (2.10) และ (2.13) จะมีแนววิถึเดียวกัน สมบัติต่างๆของระบบ (2.10) สามารถวิเคราะห์ผ่านทางระบบ (2.13) แทนได้โดยในกรณีนี้เรากล่าวว่าระบบ (2.13) มีคุณสมบัติตั้งไว้ดี (well-posedness)

**นิยาม 2.2** ระบบ (2.13) มีคุณสมบัติตั้งไว้ดี (well-posedness) ถ้า  $(I - D_{\delta\delta}\Delta)^{-1} \neq 0$  สำหรับทุกๆ  $\Delta \in \Delta$  ในตัวอย่างถัดไปจะแสดงรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นอย่างง่ายของระบบอันดับหนึ่ง

**ตัวอย่าง 2.3** พิจารณาระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 + 2\delta(t) \\ 1 - \delta(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 + \delta(t) \\ 1 - \delta(t) \end{pmatrix} w_p \\ z_p &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \delta(t) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \delta(t) \end{pmatrix} w_p \end{aligned} \quad (2.16)$$

จากสมการสถานะนี้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{-1+2\delta(t)}{1-\delta(t)} & \frac{1+\delta(t)}{1-\delta(t)} \\ \frac{1}{1-\delta(t)} & \frac{2}{1-\delta(t)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{\delta(t)}{1-\delta(t)} & 1 + \frac{2\delta(t)}{1-\delta(t)} \\ 1 + \frac{\delta(t)}{1-\delta(t)} & 2 + \frac{2\delta(t)}{1-\delta(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\delta(t)}{1-\delta(t)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}_u \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}, \delta(t) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

ดังนั้นเราสามารถแทน (2.16) ในรูปการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + w_\delta + w_p \\ z_\delta &= x + w_\delta + 2w_p \\ z_p &= x + w_\delta + 2w_p, \quad w_\delta = \delta(t)z_\delta\end{aligned}\tag{2.18}$$

**ตัวอย่าง 2.4** พิจารณาระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในรูปแบบความสัมพันธ์เชิงสัมพรรค

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (-1 + \delta_1(t) + \delta_2(t))x + (1 + 2\delta_2(t))w_p \\ z_p &= (1 + \delta_1(t))x + w_p\end{aligned}\tag{2.19}$$

จากความสัมพันธ์นี้เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -1 + \delta_1(t) + \delta_2(t) & 1 + 2\delta_2(t) \\ 1 + \delta_1(t) & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1(t) + \delta_2(t) & 2\delta_1(t) \\ \delta_1(t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1(t) & 0 \\ 0 & \delta_1(t) \\ \delta_2(t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.20}$$

ดังนั้นเราสามารถแทนรูปแบบความสัมพันธ์เชิงสัมพรรคได้ในรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\delta^1 \\ z_\delta^2 \\ z_\delta^3 \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\delta^1 \\ w_\delta^2 \\ w_\delta^3 \\ w_p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_\delta^1 \\ w_\delta^2 \\ w_\delta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\delta^1 \\ z_\delta^2 \\ z_\delta^3 \end{pmatrix}\tag{2.21}$$

ในกรณีนี้เราได้ว่า  $\Delta(\delta(t)) = \text{diag}(\delta_1(t), \delta_1(t), \delta_2(t))$

**ข้อสังเกต 2.1** จากตัวอย่าง 2.4 เห็นได้ว่าในกรณีที่เรากำหนดให้  $D_{\delta\delta} = 0$  การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นจะลดรูปลงมาเป็นความสัมพันธ์เชิงสัมพรรค นั่นคือรูปแบบความสัมพันธ์เชิงสัมพรรคสามารถจัดให้อยู่ในรูปการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นได้เสมอ อย่างไรก็ตามรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นในกรณีทั่วไปไม่สามารถแปลงกลับให้อยู่ในรูปแบบเชิงสัมพรรคได้ การแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นจึงสามารถครอบคลุมลักษณะความสัมพันธ์ได้กว้างกว่ารูปแบบสัมพรรคตามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น  $\square$

### 2.1.3 การวิเคราะห์สมรรถนะ $H_\infty$ คงทน

จากที่ได้กล่าวถึงนอร์ม  $H_\infty$  ของระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาในภาคผนวก ข สมมติให้ระบบ (2.10) มีเสถียรภาพสำหรับทุกๆ แนววิถีของ  $\delta(t)$  นอร์ม  $H_\infty$  ของระบบ (2.10) สามารถนิยามได้โดย

$$\|G(\delta(t))\|_\infty = \sup_{w_p \in \mathcal{L}_2, w_p \neq 0} \frac{\|z_p\|_2}{\|w_p\|_2}\tag{2.22}$$

โดยอาศัยหลักการเดียวกันกับตัวอย่าง ก.6 เราสามารถหาเงื่อนไขของนอร์ม  $H_\infty$  ของระบบ (2.10) ได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท 2.1** ถ้ามีเมทริกซ์สมมาตร  $\mathcal{X}$  ที่ทำให้

$$\mathcal{X} > 0, \quad \left( \begin{array}{cc|cc} I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}(\delta) & \mathbf{B}(\delta) & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & -\gamma I & 0 \\ \mathbf{C}(\delta) & \mathbf{D}(\delta) & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{cc|cc} I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}(\delta) & \mathbf{B}(\delta) & 0 & 0 \\ \hline 0 & I & -\gamma I & 0 \\ \mathbf{C}(\delta) & \mathbf{D}(\delta) & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{array} \right) < 0, \quad \forall \delta \in \delta \quad (2.23)$$

เราได้ว่า (2.10) มีเสถียรภาพชี้กำลังและ  $\|\mathcal{G}(\delta(t))\|_\infty < \gamma$  สำหรับทุก ๆ แนววิถีของ  $\delta(t)$

**พิสูจน์** เป็นไปในลักษณะเดียวกันกับตัวอย่าง ก.6 □

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขดังกล่าวนี้ เห็นได้ชัดว่าแต่ละ  $\delta \in \delta$  เงื่อนไขดังกล่าวจะเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร  $\mathcal{X}$  แต่จำนวนเงื่อนไขทั้งหมดที่เราต้องพิจารณามีจำนวนเป็นอนันต์ การคำนวณหาค่าตอบจึงไม่สามารถทำได้โดยง่าย วิธีการหนึ่งที่สามารถลดจำนวนเงื่อนไขลงให้เหลือจำนวนจำกัดคือการตีตารางแบ่งค่าพารามิเตอร์  $\delta$  ข้อเสียของวิธีนี้คือไม่มีข้อกำหนดแน่นอนในการกำหนดตำแหน่งและจำนวนจุดของการแบ่งค่าพารามิเตอร์ ถ้าจำนวนจุดมากเงื่อนไขที่ต้องทำการคำนวณก็จะมากขึ้นด้วย

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้แสดงแนวทางการแทนระบบ (2.10) ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น (2.13) และสรุปได้ว่าในกรณีที่ระบบ (2.13) มีคุณสมบัติตั้งไว้ดีเราสามารถวิเคราะห์สมบัติของระบบ (2.10) ผ่านระบบ (2.13) แทนได้ เราจะแสดงแนวคิดของการหาเงื่อนไขที่สมมูลกันกับ (2.23) ผ่านทางรูปแบบของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นในตัวอย่างถัดไป

**ตัวอย่าง 2.5** พิจารณาความสัมพันธ์

$$y_2 = \left( m_{22} + m_{21} \frac{k}{1 - m_{11}k} m_{12} \right) u_2 = \mathcal{F}_u(M, k) u_2, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

โดยที่  $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} \in \mathbb{R}$  และ  $k$  เป็นสเกลาร์ค่าจริงที่ไม่ทราบค่าแน่นอนโดยที่  $|k| < r$  และ  $(1 - m_{11}k \neq 0)$  สำหรับทุก ๆ ค่า  $|k| < r$  จากนิยามของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น ความสัมพันธ์ (2.24) สมมูลกับ

$$\begin{aligned} y_1 &= m_{11}u_1 + m_{12}u_2 \\ y_2 &= m_{21}u_1 + m_{22}u_2, \quad u_1 = ky_1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

จุดประสงค์ในการวิเคราะห์ปัญหาคือพิสูจน์ว่าสำหรับทุก ๆ ค่า  $|k| < r$  เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{F}_u(M, k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{F}_u(M, k) \end{pmatrix} < 0 \iff \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.26)$$

เราสามารถแสดงเงื่อนไข  $|k| < r$  ในรูปของอสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$k^T k < r^2 \iff -\frac{1}{r} k^T k + r > 0 \iff \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \quad (2.27)$$

สมมติให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_{11} & m_{12} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_{11} & m_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.28)$$



เมื่อคูณสมการนี้ด้วย  $(u_1 \ u_2)^T$  และ  $(u_1 \ u_2)$  เข้าทางด้านซ้ายและขวาของสมการเราได้ว่า

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ m_{11} \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ m_{12} \end{pmatrix} u_2 \right) + \begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ m_{21} \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ m_{22} \end{pmatrix} u_2 \right) < 0 \quad (2.29)$$

เมื่อกำหนดให้  $u_2 = 0$  เราได้ว่า

$$u_1^T \begin{pmatrix} 1 \\ m_{11} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m_{11} \end{pmatrix} u_1 + u_1^T \begin{pmatrix} 0 \\ m_{21} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ m_{21} \end{pmatrix} u_1 < 0 \quad (2.30)$$

เนื่องจาก  $m_{21}^T m_{21} \geq 0$  ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า

$$u_1^T \begin{pmatrix} 1 \\ m_{11} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m_{11} \end{pmatrix} u_1 < 0 \iff -\frac{1}{r} + r m_{11}^T m_{11} < 0 \iff |m_{11}| < \frac{1}{r} \quad (2.31)$$

จาก  $|m_{11}| < \frac{1}{r}$  เราจึงได้ว่า  $(1 - m_{11}k) \neq 0$  และ

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_{11} & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} < 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} u_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} < 0 \\ \iff & y_1^T \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} < 0 \\ \implies & \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ y_2 \end{pmatrix} < 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{F}_u(M, k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{F}_u(M, k) \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

จากผลลัพธ์นี้แสดงให้เห็นว่าถ้า (2.27) และ (2.28) เป็นจริง เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า  $(1 - m_{11}k) \neq 0$  (ระบบมีคุณสมบัติตั้งไว้ดี) และ (2.26) เป็นจริงด้วย  $\square$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราสามารถสรุปแนวคิดการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างเงื่อนไข (2.23) ซึ่งนิยามบนระบบ (2.10) กับรูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น (2.13) ได้โดยอาศัย  $S$ -procedure บล็อกเต็ม (full block) ดังแสดงในทฤษฎีบทถัดไป

**ทฤษฎีบท 2.2** (full block  $S$ -procedure [11]) พิจารณาการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta), \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta \in \Delta, \quad \Delta \text{ เป็นเซตกระชับ} \quad (2.33)$$

กำหนดให้  $P_p = \begin{pmatrix} Q_p & S_p \\ S_p^T & R_p \end{pmatrix}$  โดยที่  $R_p > 0$  เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1.  $I - M_{11}\Delta$  ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐานและ  $\begin{pmatrix} I \\ \mathcal{F}_u(M, \Delta) \end{pmatrix}^T P_p \begin{pmatrix} I \\ \mathcal{F}_u(M, \Delta) \end{pmatrix} < 0$  สำหรับทุกๆ  $\Delta \in \Delta$
2. มีเมทริกซ์ตัวคูณ (multiplier)  $P = P^T > 0$  ที่ทำให้

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^T P_p \begin{pmatrix} 0 & I \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_{11} & M_{12} \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_{11} & M_{12} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0 \quad (2.34)$$

สำหรับทุกๆ  $\Delta \in \Delta$

พิสูจน์ สามารถดูได้ใน [11] □

โดยอาศัย  $S$ -procedure บล็อกเต็ม เราได้เงื่อนไขที่สมมูลกับ (2.23) ดังแสดงในทฤษฎีบทถัดไป

**ทฤษฎีบท 2.3** ระบบ (2.13) มีคุณสมบัติตั้งไว้ดีและเงื่อนไข (2.23) เป็นจริงก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร  $\mathcal{X}$  และตัวคูณ  $P \in \mathcal{P}$  ที่ทำให้สมการเมทริกซ์เชิงเส้นต่อไปนี้เป็นจริง

$$\mathcal{X} > 0, \quad \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}_\delta & \mathcal{B}_p \\ 0 & I & 0 \\ \mathcal{C}_\delta & \mathcal{D}_{\delta\delta} & \mathcal{D}_{\delta p} \\ 0 & 0 & I \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{p\delta} & \mathcal{D}_{pp} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}_\delta & \mathcal{B}_p \\ 0 & I & 0 \\ \mathcal{C}_\delta & \mathcal{D}_{\delta\delta} & \mathcal{D}_{\delta p} \\ 0 & 0 & I \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{p\delta} & \mathcal{D}_{pp} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.35)$$

โดยที่เซต  $\mathcal{P}$  คือ

$$\mathcal{P} := \left\{ P \in \mathbb{R}^{2n_\delta \times 2n_\delta} : P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \right\} \quad (2.36)$$

พิสูจน์ จากเงื่อนไข (2.23) เมื่อทำการสลับแถวและหลักของเมทริกซ์ในเงื่อนไขได้ว่า

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \mathbf{A}(\delta) & \mathbf{B}(\delta) \\ \mathbf{C}(\delta) & \mathbf{D}(\delta) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \mathbf{A}(\delta) & \mathbf{B}(\delta) \\ \mathbf{C}(\delta) & \mathbf{D}(\delta) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

เราทราบว่า

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}(\delta) & \mathbf{B}_p(\delta) \\ \mathbf{C}_p(\delta) & \mathbf{D}_{pp}(\delta) \end{pmatrix} = \mathcal{F}_u \left( \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\delta\delta} & \mathcal{C}_\delta & \mathcal{D}_{\delta p} \\ \mathcal{B}_\delta & \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ \mathcal{D}_{p\delta} & \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{pp} \end{pmatrix}, \Delta(\delta) \right) \quad (2.38)$$

โดยอาศัย  $S$ -procedure บล็อกเต็ม เราได้ว่า  $(I - \mathcal{D}_{\delta\delta}\Delta)^{-1} \neq 0$  และ (2.23) เป็นจริงก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ตัวคูณ  $P$  ที่ทำให้

$$\mathcal{X} > 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \mathcal{B}_\delta & \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ \mathcal{D}_{p\delta} & \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{pp} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \mathcal{B}_\delta & \mathcal{A} & \mathcal{B}_p \\ \mathcal{D}_{p\delta} & \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{pp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_{\delta\delta} & \mathcal{C}_\delta & \mathcal{D}_{\delta p} \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_{\delta\delta} & \mathcal{C}_\delta & \mathcal{D}_{\delta p} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \quad (2.39)$$

กำหนดให้  $P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$  เมื่อรวมเทอมของอสมการทางด้านซ้ายมือเราได้ว่า

$$\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \hline B_\delta & A & B_p \\ \hline D_{p\delta} & C_p & D_{pp} \\ \hline I & 0 & 0 \\ \hline D_{\delta\delta} & C_\delta & D_{\delta p} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & Q & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \hline B_\delta & A & B_p \\ \hline D_{p\delta} & C_p & D_{pp} \\ \hline I & 0 & 0 \\ \hline D_{\delta\delta} & C_\delta & D_{\delta p} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.40)$$

คูณอสมการดังกล่าวด้วย  $(w_\delta^T \ \xi^T \ w_p^T)$  และ  $(w_\delta^T \ \xi^T \ w_p^T)^T$  เข้าทางด้านซ้ายและขวาของอสมการและสลับแถวและหลักในอสมการได้ว่า

$$\begin{pmatrix} w_\delta \\ \xi \\ w_p \end{pmatrix}^T \cdot (2.40) \cdot \begin{pmatrix} w_\delta \\ \xi \\ w_p \end{pmatrix} < 0 \iff \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{w_p}{\dot{\xi}} \\ z_p \\ w_\delta \\ z_\delta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & Q & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{w_p}{\dot{\xi}} \\ z_p \\ w_\delta \\ z_\delta \end{pmatrix} < 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ w_\delta \\ z_\delta \\ w_p \\ z_p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ w_\delta \\ z_\delta \\ w_p \\ z_p \end{pmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

$$\iff \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B_\delta & B_p \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline C_\delta & D_{\delta\delta} & D_{\delta p} \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline C_p & D_{p\delta} & D_{pp} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B_\delta & B_p \\ \hline 0 & I & 0 \\ \hline C_\delta & D_{\delta\delta} & D_{\delta p} \\ \hline 0 & 0 & I \\ \hline C_p & D_{p\delta} & D_{pp} \end{pmatrix} < 0$$

ได้ผลลัพธ์ดังแสดงใน (2.35) □

## 2.2 การคำนวณเงื่อนไขสมรรถนะคงทน

### 2.2.1 การกำหนดรูปแบบเซตตัวคูณ

พิจารณาเซตตัวคูณ  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} := \left\{ P \in \mathbb{R}^{2n_\delta \times 2n_\delta} : P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \forall \Delta \in \Delta \right\} \quad (2.42)$$

เราจะเห็นได้ว่าที่แต่ละค่า  $\Delta \in \Delta$  เงื่อนไขภายในเซต  $\mathcal{P}$  เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร  $Q, S$  และ  $R$  อย่างไรก็ตามเนื่องจากเงื่อนไขภายในนี้ต้องเป็นจริงสำหรับทุกค่า  $\Delta \in \Delta$  จำนวนเงื่อนไข

ที่เราต้องทำการคำนวณจึงมีจำนวนเป็นอนันต์ซึ่งเราไม่สามารถทำได้จริงในทางปฏิบัติ วิธีหนึ่งที่สามารถใช้ลดจำนวนเงื่อนไขลงให้เหลือจำนวนจำกัดได้คือการตีตาราง (grid) แบ่งค่าพารามิเตอร์  $\Delta$  ให้มีช่วงความละเอียดตามที่ต้องการและทำการคำนวณเงื่อนไขดังกล่าวที่แต่ละจุดของการแบ่งค่าพารามิเตอร์ ปัญหาที่สำคัญของวิธีการนี้คือไม่มีข้อกำหนดที่แน่นอนในการกำหนดตำแหน่งและจำนวนของจุดในตารางแบ่งค่าพารามิเตอร์ ถ้าจำนวนจุดที่กำหนดมีมาก จำนวนเงื่อนไขที่ต้องคำนวณก็จะมากขึ้น นอกจากนี้เราไม่สามารถสรุปได้ว่าเมทริกซ์  $P$  ที่ทำให้เงื่อนไขในเซต  $\mathcal{P}$  เป็นจริงที่แต่ละจุดของการตีตารางจะทำให้เงื่อนไขเดียวกันนี้เป็นจริงสำหรับทุกจุด  $\Delta \in \Delta$  เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว เราจะกำหนดเงื่อนไขของเมทริกซ์  $P \in \mathcal{P}$  เพิ่มเติมเข้าไปจากเดิมที่กำหนดให้เป็นเมทริกซ์สมมาตรอย่างเดียว จุดประสงค์ในการกำหนดรูปแบบดังกล่าวคือทำให้จำนวนเงื่อนไขที่ต้องคำนวณสามารถลดลงเหลือจำนวนจำกัด โดยอาศัยคุณสมบัติความเป็นคอนเวกซ์และความเป็นคอนเวกซ์บางส่วน (partially convex) ในการลดจำนวนเงื่อนไขแทนการตีตารางแบ่งค่าพารามิเตอร์

เราจะสมมติให้  $\Delta$  เป็นคอนเวกซ์ฮัลของเมทริกซ์คงที่จำนวน  $N$  ตัว

$$\Delta = \text{Co} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_N \} \quad (2.43)$$

พิจารณาเซต  $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}$

$$\mathcal{P}_1 := \left\{ P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}, Q < 0 : \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \forall \Delta \in \Delta \right\} \quad (2.44)$$

เมื่อกระจายเทอมในเงื่อนไขของเซต  $\mathcal{P}_1$  ออกมาจะได้ว่า

$$\Delta^T Q \Delta + \Delta^T S + S^T \Delta + R > 0, \quad \forall \Delta \in \Delta$$

เนื่องจากเรากำหนดให้  $Q < 0$  เราสามารถใช้การเติมเต็มของชูร์ ในการเปลี่ยนเงื่อนไขให้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} \Delta^T S + S^T \Delta + R & \Delta^T \\ \Delta & -Q^{-1} \end{pmatrix} > 0, \quad \forall \Delta \in \Delta$$

เห็นได้ว่าเงื่อนไขนี้เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเมื่อเทียบกับตัวแปร  $\Delta$  เนื่องจากเรานิยามให้เซต  $\Delta$  เป็นคอนเวกซ์ฮัลของเซตจุดยอดจำนวน  $N$  ตัว เราสรุปได้ว่า  $P \in \mathcal{P}_1$  ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{pmatrix} \Delta_v \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_v \\ I \end{pmatrix} > 0, \quad Q < 0, \quad \forall v = 1, \dots, N \quad (2.45)$$

ในกรณีที่ความไม่แน่นอนมีโครงสร้างแบบบล็อกแนวทแยง:

$$\Delta(\delta) = \text{diag}(\delta_1(t)I_{m_1}, \delta_2(t)I_{m_2}, \dots, \delta_r(t)I_{m_r}) \quad (2.46)$$

เราสามารถลดข้อจำกัดของเซตตัวคูณ  $P_1$  ลงได้โดยอาศัยคุณสมบัติความเป็นคอนเวกซ์บางส่วน (partially convex) ดังนี้: พิจารณาเซต  $P_2 \subseteq P$

$$P_2 = \left\{ P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & \cdots & Q_{rr} \end{pmatrix}, Q_{ii} < 0, i = 1, \dots, r : \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \forall \Delta \in \Delta \right\} \quad (2.47)$$

โดยอาศัยคุณสมบัติความเป็นคอนเวกซ์บางส่วนและใช้การเติมเต็มของชัวร์เพื่อแปลงเทอมกำลังสอง  $\delta_i^2 Q_{ii}$  ให้อยู่ในรูปเชิงเส้น เราได้ว่า  $P \in P_2$  ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{pmatrix} \Delta_v \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_v \\ I \end{pmatrix} > 0, \quad Q_{ii} < 0, \forall v = 1, \dots, N \quad (2.48)$$

เมื่อเปรียบเทียบเงื่อนไข (2.45) และ (2.48) เห็นได้ว่า  $P_1 \subseteq P_2$  ดังนั้นในกรณีที่ความไม่แน่นอนมีโครงสร้างเป็นแบบบล็อกแนวทแยง การวิเคราะห์สมรรถนะคงทนโดยใช้เซต  $P_2$  ในการคำนวณมีแนวโน้มที่จะให้ผลการวิเคราะห์ที่มีความอนุรักษ์ต่ำกว่าการใช้เซต  $P_1$  ในการคำนวณ

**ข้อสังเกต 2.2** จากนิยามของเซตตัวคูณ  $P_1$  และ  $P_2$  เห็นได้ว่า

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq P \quad (2.49)$$

จากความสัมพันธ์นี้เห็นได้ว่าคำตอบที่ได้จากการคำนวณโดยอาศัยเซตตัวคูณ  $P_1$  หรือ  $P_2$  จะเป็นค่าขอบเขตบน (upper bounded) ของสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนของระบบ กล่าวคือ

$$\gamma_p^* \leq \gamma_{P_2}^* \leq \gamma_{P_1}^* \quad (2.50)$$

เมื่อ  $\gamma_p^*$  คือค่าดัชนีสมรรถนะต่ำสุดของระบบ ส่วน  $\gamma_{P_1}^*$  และ  $\gamma_{P_2}^*$  คือคำตอบที่ได้จากการหาค่าต่ำสุดโดยใช้เซตตัวคูณ  $P_1$  และ  $P_2$  ในการคำนวณตามลำดับ ถ้าเซตตัวคูณที่ใช้ในการคำนวณมีความใกล้เคียงกับเซต  $P$  มากขึ้น ค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนก็จะเข้าใกล้ค่าจริงมากยิ่งขึ้น ความอนุรักษ์จากการคำนวณก็จะลดลง  $\square$

### 2.2.2 ตัวอย่างเชิงเลข

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงตัวอย่างเชิงเลขเพื่อทดสอบแนวโน้มความอนุรักษ์ที่ได้สรุปไว้ในข้อสังเกต 2.2 ระบบที่นำมาเป็นตัวอย่างเป็นระบบอันดับหนึ่งโดยดัดแปลงจากตัวอย่างใน [11]

**ตัวอย่าง 2.6** พิจารณาระบบ (2.13) กำหนดให้พารามิเตอร์ของระบบเป็นดังนี้

$$\left( \begin{array}{c|cc} A & B_\delta & B_p \\ \hline C_\delta & D_{\delta\delta} & D_{\delta p} \\ C_p & D_{p\delta} & D_{pp} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.51)$$

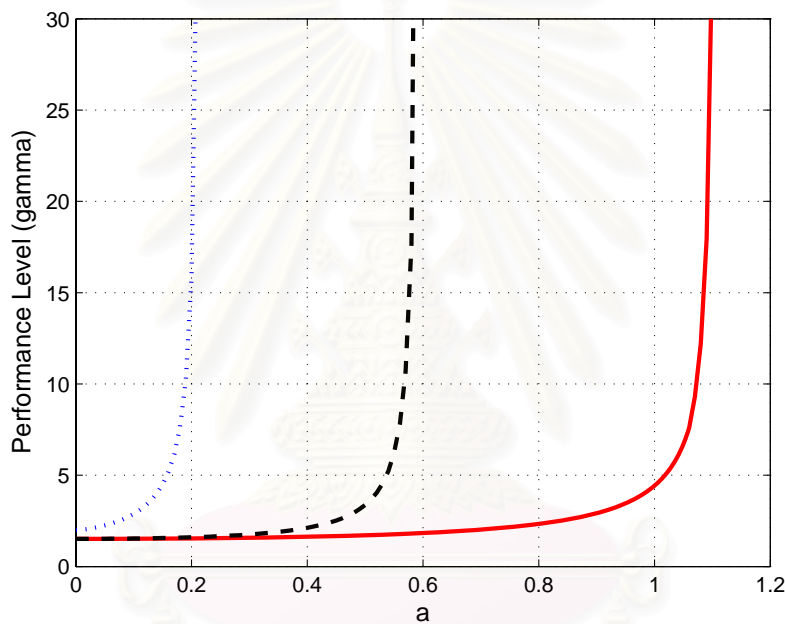
โดยที่  $0 \leq a \leq 1.2$  และ

$$\Delta(\delta) = \text{diag}(\delta_1 I_{2 \times 2}, \delta_2 I_{2 \times 2})$$

สำหรับตัวอย่างนี้เราจะทำการคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ  $H_\infty$  โดยเปลี่ยนค่า  $a$  ภายในช่วงที่กำหนด การคำนวณเราจะใช้เซตตัวคูณ  $P_1$ ,  $P_2$  และเซตตัวคูณ  $D$  ที่นิยามโดย

$$D := \left\{ P = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix}, Q = Q^T < 0: \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0 \right\} \quad (2.52)$$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีการวิเคราะห์และสังเคราะห์ค่ามิม ( $\mu$ ) เซตตัวคูณ  $D$  คือการสเกลแบบ  $D$  ที่ใช้สำหรับการหาค่าขอบเขตบนของค่ามิม [4] ผลการคำนวณแสดงดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2: ผลการวิเคราะห์สมรรถนะ  $H_\infty$  โดยใช้เซตตัวคูณ  $P_2$  (เส้นทึบ), เซตตัวคูณ  $P_1$  (เส้นประ) และเซตตัวคูณ  $D$  (เส้นจุด)

จากผลการคำนวณที่ได้ เมื่อเราคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ  $H_\infty$  ของระบบโดยใช้เซตตัวคูณ  $D$  จะได้ข้อสรุปว่าระบบสามารถประกันสมรรถนะคงทนจนถึงค่า  $a \approx 0.18$  ขณะที่การคำนวณโดยใช้เซต  $P_1$  ให้ข้อสรุปว่าระบบสามารถประกันสมรรถนะคงทนได้จนถึงค่า  $a \approx 0.57$  และการคำนวณโดยใช้เซต  $P_2$  ให้ข้อสรุปว่าระบบสามารถประกันสมรรถนะคงทนได้จนถึงค่า  $a \approx 1.1$  การคำนวณโดยใช้เซตตัวคูณ  $P_2$  จึงให้ผลที่มีความอนุรักษ์ต่ำเมื่อเทียบกับเซตตัวคูณ  $P_1$  และ  $D$  เมื่อพิจารณาที่โครงสร้างของเมทริกซ์  $P$  ภายในเซตตัวคูณ  $D$  เห็นได้ว่าลักษณะโครงสร้างของตัวคูณจะถูกจำกัดมากที่สุด กล่าวคือ

$$D \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq P$$

ดังนั้นการคำนวณโดยใช้เซต  $D$  จึงให้ผลการคำนวณที่มีความอนุรักษ์สูงสุดและเซต  $P_2$  ให้ผลที่มีความอนุรักษ์ต่ำที่สุด ซึ่งเป็นไปตามข้อสรุปที่กล่าวไว้ในข้อสังเกต 2.2  $\square$

## 2.3 การสังเคราะห์ตัวควบคุม

ในหัวข้อนี้เราจะใช้ผลการวิเคราะห์สมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนในหัวข้อที่ผ่านมาในการสร้างเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ โดยทั่วไปปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุมคงทนแบบป้อนกลับสัญญาณออก (output feedback) ไม่สามารถจัดปัญหาให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ การแก้ปัญหาคือต้องอาศัยการแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสองส่วนสลับกันไปในลักษณะเดียวกันกับการสังเคราะห์มิว อย่างไรก็ตามเราสามารถสร้างเงื่อนไขสำหรับการสังเคราะห์ตัวควบคุมให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้โดยการอาศัยโครงสร้างการควบคุมที่จะกล่าวในหัวข้อย่อยถัดไป

### 2.3.1 โครงสร้างตัวควบคุมที่ใช้

ในการสังเคราะห์ตัวควบคุม เราจะแทนระบบ (2.1) ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นบน  $\mathcal{F}_u(\mathcal{M}, \Delta(\delta(t)))$  โดยที่  $\mathcal{M}$  มีสมการสถานะคือ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\delta w_\delta + B_p w_p + B_u u \\ z_\delta &= C_\delta x + D_{\delta\delta} w_\delta + D_{\delta p} w_p + D_{\delta u} u \\ z_p &= C_p x + D_{p\delta} w_\delta + D_{pp} w_p + D_{pu} u \\ y &= C_y x + D_{y\delta} w_\delta + D_{yp} w_p, \quad w_\delta = \Delta(\delta(t)) z_\delta \end{aligned} \quad (2.53)$$

โดยที่  $\Delta(\delta(t))$  มีโครงสร้างดังนี้

$$\Delta(\delta(t)) = \text{diag}(\delta_1(t)I_{m_1}, \delta_2(t)I_{m_2}, \dots, \delta_r(t)I_{m_r}) \quad (2.54)$$

และ  $\Delta(\delta)$  สอดคล้องเงื่อนไข (2.14) สำหรับตัวควบคุม  $\mathcal{K}(\delta(t))$  เราจะกำหนดให้อยู่ในรูปของการแปลงส่วนย่อยล่างระหว่างตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา  $K$  กับฟังก์ชัน  $f_c(\Delta(\delta(t)))$  โดยที่  $K$  มีสมการสถานะคือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \begin{pmatrix} y \\ w_c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u \\ z_c \end{pmatrix} &= C_c x_c + D_c \begin{pmatrix} y \\ w_c \end{pmatrix} \quad w_c(t) = f_c(\Delta(\delta(t))) z_c \end{aligned} \quad (2.55)$$

โดยที่  $f_c(\cdot)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โครงสร้างลักษณะดังกล่าวนี้แสดงในรูปที่ 2.3a จากรูปเราได้ว่า

$$z_p = \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(\mathcal{M}, \Delta(\delta(t))), \mathcal{F}_l(K, f_c(\Delta(\delta(t)))) w_p \quad (2.56)$$

ในงานวิจัยที่ผ่านมาเช่น [2], [12] จะกำหนดให้  $f_c(\Delta(\delta(t))) = \Delta(\delta(t))$  หรือมีโครงสร้างในลักษณะเดียวกันกับ  $\Delta(\delta(t))$  สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้แนวทางที่นำเสนอใน [10] ในการสร้างฟังก์ชัน  $f_c(\Delta(\delta(t))) \neq \Delta(\delta(t))$  รายละเอียดจะกล่าวถึงอีกครั้งในหัวข้อย่อยถัดไป

โดยอาศัยลักษณะโครงสร้างการควบคุมดังกล่าว เราสามารถรวม  $\Delta(\delta(t))$  และ  $f_c(\Delta(\delta(t)))$  เข้าด้วยกันในรูปของเมทริกซ์บล็อกแนวทแยง เมื่อจัดรูปแบบสัญญาณเข้าออกใหม่ เราได้ว่า (2.56) มีรูปแบบที่สมมูลกันคือ

$$z_p = \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(\mathcal{M}_a, K), \Delta_e(\delta(t)))w_p \quad (2.57)$$

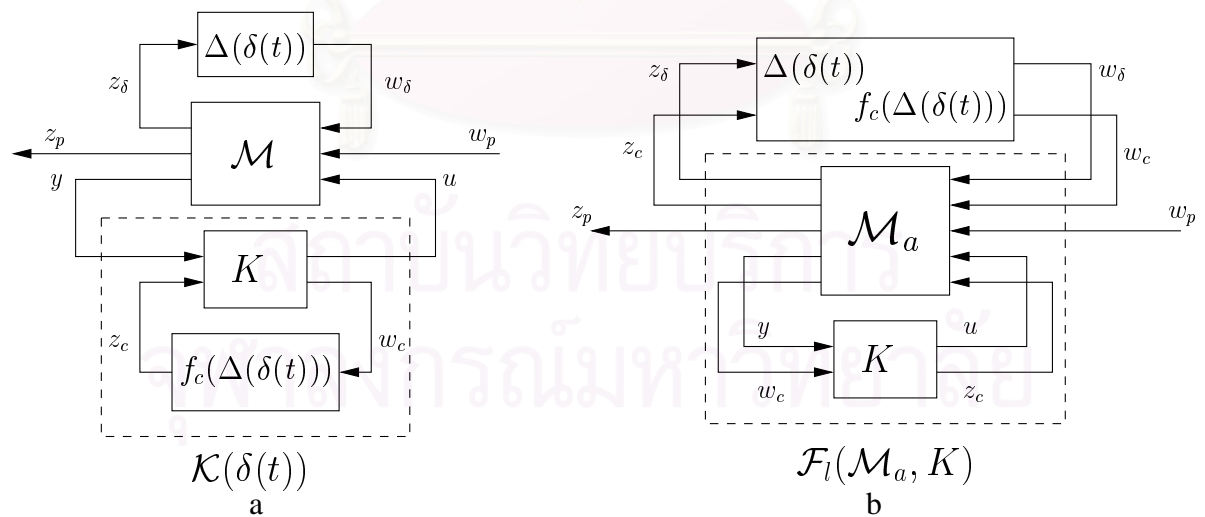
$\mathcal{M}_a$  มีสมการสถานะคือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\delta \\ z_c \\ z_p \\ y \\ w_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_\delta & 0 & B_p & B_u & 0 \\ C_\delta & D_{\delta\delta} & 0 & D_{\delta p} & D_{\delta u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ C_p & D_{p\delta} & 0 & D_{pp} & D_{pu} & 0 \\ C_y & D_{y\delta} & 0 & D_{yp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\delta \\ w_c \\ w_p \\ u \\ z_c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_\delta \\ w_c \end{pmatrix} = \Delta_e(\delta(t)) \begin{pmatrix} z_\delta \\ z_c \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

โดยที่  $\Delta_e(\delta(t)) = \begin{pmatrix} \Delta(\delta(t)) & 0 \\ 0 & f_c(\Delta(\delta(t))) \end{pmatrix}$  โครงสร้างสมมูลดังกล่าวนี้แสดงในรูปที่ 2.3b

### 2.3.2 การสังเคราะห์ตัวควบคุม

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาโครงสร้างในรูปที่ 2.3b ในการสังเคราะห์ตัวควบคุม จากลักษณะโครงสร้างดังกล่าวเราสามารถพิจารณาปัญหาการหาตัวควบคุม  $K(\delta(t))$  สำหรับระบบ (2.1) ในรูปของปัญหาการควบคุมคงทนแทนได้โดยมีจุดประสงค์คือหาตัวควบคุม  $K$  ที่ทำให้  $\mathcal{M}_a$  สอดคล้องสมรรถนะ  $H_\infty$  คงทนสำหรับทุกๆ แนววิถีที่เป็นไปได้ของ  $\Delta_e(\delta(t))$



รูปที่ 2.3: โครงสร้างตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์  $\mathcal{K}(\delta(t))$



จากรูปที่ 2.3b,  $\mathcal{F}_l(\mathcal{M}_a, K)$  สามารถแทนได้ด้วยสมการสถานะ

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B_\delta w_\delta + B_c w_c + B_p w_p \\ z_\delta &= C_\delta \xi + D_{\delta\delta} w_\delta + D_{\delta c} w_c + D_{\delta p} w_p \\ z_c &= C_c \xi + D_{c\delta} w_\delta + D_{cc} w_c + D_{cp} w_p \\ z_p &= C_p \xi + D_{p\delta} w_\delta + D_{pc} w_c + D_{pp} w_p\end{aligned}\quad (2.59)$$

นิยามเซตตัวคูณบล็อกเต็ม (full block)  $\mathcal{P}_e$

$$\mathcal{P}_e = \left\{ P_e = \left( \begin{array}{cc|cc} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ \hline S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{array} \right) : \begin{pmatrix} Q & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} < 0, \begin{pmatrix} R & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} > 0, \right. \\ \left. \left( \begin{array}{cc} \Delta & 0 \\ 0 & f_c(\Delta) \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right)^T \left( \begin{array}{cc|cc} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ \hline S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{array} \right) \left( \begin{array}{cc} \Delta & 0 \\ 0 & f_c(\Delta) \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) > 0, \forall \Delta \in \mathbf{\Delta} \right\} \quad (2.60)$$

โดยอาศัยผลลัพธ์ในทฤษฎีบท 2.3 เราได้ว่า  $\|\mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(\mathcal{M}_a, K), \Delta_e(\delta(t)))\|_\infty < \gamma$  ถ้ามี  $\mathcal{X} > 0$  และ  $P_e \in \mathcal{P}_e$  ที่ทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q & Q_{12} & S & S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & S_{21}^T & R & R_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ A & B_\delta & B_c & B_p \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ C_\delta & D_{\delta\delta} & D_{\delta c} & D_{\delta p} \\ C_c & D_{c\delta} & D_{cc} & D_{cp} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ C_p & D_{p\delta} & D_{pc} & D_{pp} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.61)$$

โดยอาศัยวิธีการเปลี่ยนตัวแปร เราสามารถแยกเทอมที่คูณกันระหว่าง  $\mathcal{X}A$  และ  $\mathcal{X}(B_\delta \ B_c \ B_p)$  ได้เงื่อนไขที่สมมูลกันคือ

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q & Q_{12} & S & S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & S_{21}^T & R & R_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ A(v) & B_\delta(v) & B_c(v) & B_p(v) \\ \hline 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ C_\delta(v) & D_{\delta\delta}(v) & D_{\delta c}(v) & D_{\delta p}(v) \\ C_c(v) & D_{c\delta}(v) & D_{cc}(v) & D_{cp}(v) \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ C_p(v) & D_{p\delta}(v) & D_{pc}(v) & D_{pp}(v) \end{pmatrix} < 0 \quad (2.62)$$

โดยที่

$$X(v) = \begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix} > 0, \quad \left( \begin{array}{c|ccc} A(v) & B_\delta(v) & B_c(v) & B_p(v) \\ \hline C_\delta(v) & D_{\delta\delta}(v) & D_{\delta c}(v) & D_{\delta p}(v) \\ C_c(v) & D_{c\delta}(v) & D_{cc}(v) & D_{cp}(v) \\ C_p(v) & D_{p\delta}(v) & D_{pc}(v) & D_{pp}(v) \end{array} \right) =$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} AY & A & B_\delta & 0 & B_p \\ \hline 0 & XA & XB_\delta & 0 & XB_p \\ \hline C_\delta Y & C_\delta & D_{\delta\delta} & 0 & D_{\delta p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_p Y & C_p & D_{p\delta} & 0 & D_{pp} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} 0 & B_u & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & D_{\delta u} & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & D_{pu} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c|ccc} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_y & D_{y\delta} & 0 & D_{yp} \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{array} \right)$$

(2.63)

เมื่อพิจารณาเงื่อนไข (2.62) เห็นได้ว่ายังคงมีเทอมการคูณกันระหว่างตัวแปรติดอยู่ในเงื่อนไขคือ

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ C_\delta(v) & D_{\delta\delta}(v) & D_{\delta c}(v) & D_{\delta p}(v) \\ C_c(v) & D_{c\delta}(v) & D_{cc}(v) & D_{cp}(v) \end{pmatrix}$$

(2.64)

เนื่องจาก  $P_e$  ต้องสอดคล้องเงื่อนไขของตัวคูณภายในเซต  $\mathcal{P}_e$  ด้วย ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใช้การเติมเต็มของชัวร์เพื่อแปลงปัญหาไปสู่รูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ อย่างไรก็ตามเราสามารถแปลง (2.62) ให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้โดยอาศัยบทตั้ง ข.1 เพื่อกำจัดตัวแปรบางส่วนออกจากเงื่อนไข

จากเงื่อนไข (2.62) เมื่อทำการสลับแถวและหลักในเงื่อนไข เราได้เงื่อนไขที่สมมูลกันคือ

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q & Q_{12} & 0 & 0 & S & S_{12} & 0 \\ 0 & Q_{12}^T & Q_{22} & 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^T & S_{21}^T & 0 & 0 & R & R_{12} & 0 \\ 0 & S_{12}^T & S_{22}^T & 0 & 0 & R_{12}^T & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{array} \right) \left( \begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \hline A(v) & B_\delta(v) & B_c(v) & B_p(v) \\ C_\delta(v) & D_{\delta\delta}(v) & D_{\delta c}(v) & D_{\delta p}(v) \\ C_c(v) & D_{c\delta}(v) & D_{cc}(v) & D_{cp}(v) \\ C_p(v) & D_{p\delta}(v) & D_{pc}(v) & D_{pp}(v) \end{array} \right) < 0$$

(2.65)

กำหนดให้

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_y & D_{y\delta} & 0 & D_{yp} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ 0 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} := \Psi_e, \quad \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ B_u^T & 0 & D_{\delta u}^T & 0 & D_{pu}^T \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}_\perp = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} := \Phi_e$$

(2.66)

จากบทตั้ง ข.1 เราได้ว่า (2.65) เป็นจริงก็ต่อเมื่อเงื่อนไขสองเงื่อนไขต่อไปนี้จริง

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & S & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{12}^T & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & S_{21}^T & 0 & 0 & 0 & R & R_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_{12}^T & S_{22}^T & 0 & 0 & 0 & R_{12}^T & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{array} \right) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline AY & A & B_\delta & 0 & B_p \\ 0 & XA & XB_\delta & 0 & XB_p \\ C_\delta Y & C_\delta & D_{\delta\delta} & 0 & D_{\delta p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_p Y & C_p & D_{p\delta} & 0 & D_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ 0 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.67)$$

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q} & \tilde{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 & \tilde{S} & \tilde{S}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{12}^T & \tilde{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 & \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}^T & \tilde{S}_{21}^T & 0 & 0 & 0 & \tilde{R} & \tilde{R}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}_{12}^T & \tilde{S}_{22}^T & 0 & 0 & 0 & \tilde{R}_{12}^T & \tilde{R}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{array} \right) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline -YA^T & 0 & -YC_\delta^T & 0 & -YC_p^T \\ -A^T & -A^T X & -C_\delta^T & 0 & -C_p^T \\ -B_\delta & -B_\delta^T X & -D_{\delta\delta}^T & 0 & -D_{p\delta}^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_p & -B_p^T X & -D_{\delta p}^T & 0 & -D_{pp}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} > 0 \quad (2.68)$$

โดยที่

$$\begin{pmatrix} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ \hline S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{Q}_{12} & \tilde{S} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{Q}_{12}^T & \tilde{Q}_{22} & \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \\ \hline \tilde{S}^T & \tilde{S}_{21}^T & \tilde{R} & \tilde{R}_{12} \\ \tilde{S}_{12}^T & \tilde{S}_{22}^T & \tilde{R}_{12}^T & \tilde{R}_{22} \end{pmatrix} := \tilde{P}_e \quad (2.69)$$

และ  $\tilde{P}_e$  สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \hline -\Delta^T & 0 \\ 0 & -f_c(\Delta)^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{Q}_{12} & \tilde{S} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{Q}_{12}^T & \tilde{Q}_{22} & \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \\ \hline \tilde{S}^T & \tilde{S}_{21}^T & \tilde{R} & \tilde{R}_{12} \\ \tilde{S}_{12}^T & \tilde{S}_{22}^T & \tilde{R}_{12}^T & \tilde{R}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \hline -\Delta^T & 0 \\ 0 & -f_c(\Delta)^T \end{pmatrix} < 0, \quad \forall \Delta \in \Delta \quad (2.70)$$

โดยที่

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{Q}_{12} \\ \tilde{Q}_{12}^T & \tilde{Q}_{22} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \tilde{R} & \tilde{R}_{12} \\ \tilde{R}_{12}^T & \tilde{R}_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.71)$$

จากเงื่อนไขภายในเซต  $\mathcal{P}_e$  และ (2.70) เราได้ว่า  $\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$  และ  $\begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{pmatrix}$  สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ I \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} I \\ -\Delta^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ -\Delta^T \end{pmatrix} < 0, \quad \forall \Delta \in \Delta \quad (2.72)$$

โดยที่  $Q < 0, R > 0, \tilde{Q} < 0$  และ  $\tilde{R} > 0$  เมื่อการจ่าย  $\Phi_e$  และ  $\Psi_e$  ถูกนำไปในเงื่อนไข (2.67) และ (2.68) และตัดผลลัพธ์ที่เป็นศูนย์ออก เมื่อทำการสลับแถวและหลักในเงื่อนไขเราได้ผลลัพธ์สุดท้ายคือ

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{cc|cc|cc} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^T & R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{array} \right) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ A & B_\delta & B_p \\ \hline 0 & I & 0 \\ C_\delta & D_{\delta\delta} & D_{\delta p} \\ \hline 0 & 0 & I \\ C_p & D_{p\delta} & D_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.73)$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{cc|cc|cc} Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{Q} & \tilde{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S}^T & \tilde{R} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{array} \right) \begin{pmatrix} -A^T & -C_\delta^T & -C_p^T \\ I & 0 & 0 \\ \hline -B_\delta^T & -D_{\delta\delta}^T & -D_{p\delta}^T \\ 0 & I & 0 \\ \hline -B_p^T & -D_{\delta p}^T & -D_{pp}^T \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} > 0 \quad (2.74)$$

จากแนวทางที่ได้แสดงมา เราสามารถสรุปเงื่อนไขสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับการสังเคราะห์ตัวควบคุมดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.4** เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีตัวควบคุม (2.55), เมทริกซ์  $\mathcal{X}$ , ฟังก์ชัน  $f_c(\Delta(\delta(t)))$  และตัวคูณ  $P_e \in \mathcal{P}_e$  ที่ทำให้ระบบวงปิด (2.59) สอดคล้องเงื่อนไข (2.61)
2. มีเมทริกซ์  $X, Y, P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$  และ  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{pmatrix}$  ที่ทำให้เงื่อนไข (2.72)-(2.74) เป็นจริง

*พิสูจน์* สำหรับการพิสูจน์จาก  $1 \Rightarrow 2$  เราได้แสดงขั้นตอนตามที่ได้กล่าวมาด้านบน สำหรับการพิสูจน์จาก  $2 \Rightarrow 1$  เราแบ่งเป็นสามขั้นตอนดังนี้

• การสร้างตัวคูณบล็อกเต็ม  $P_e$

ในการสร้างตัวคูณบล็อกเต็ม  $P_e$  จากเมทริกซ์  $P = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}$  และ  $\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{pmatrix}$  เรามีเงื่อนไขที่ต้องพิจารณาสองประการคือ

1. เงื่อนไข  $P_e^{-1} = \tilde{P}_e$
2. สมบัติความเป็นบวกแน่นอน (positive definite) และลบแน่นอน (negative definite) ของสมาชิกภายใน  $P_e$  กล่าวคือ

$$\begin{pmatrix} Q & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.75)$$

และ

$$\begin{pmatrix} R & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.76)$$

ในขั้นแรกเงื่อนไขที่จะพิจารณาคือเงื่อนไข  $P_e^{-1} = \tilde{P}_e$  เมื่ออาศัยเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกันทำการสลับแถวและหลักของเมทริกซ์ของ  $P_e$  เราได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวสมมูลกับ

$$\left( \begin{array}{cc|cc} Q & S & Q_{12} & S_{12} \\ S^T & R & S_{21}^T & R_{12} \\ \hline Q_{12}^T & S_{21} & Q_{22} & S_{22} \\ S_{12}^T & R_{12}^T & Q_{22} & S_{22} \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{cc|cc} \tilde{Q} & \tilde{S} & \tilde{Q}_{12} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} & \tilde{S}_{21}^T & \tilde{R}_{12} \\ \hline \tilde{Q}_{12}^T & \tilde{S}_{21} & \tilde{Q}_{22} & \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{12}^T & \tilde{R}_{12}^T & \tilde{Q}_{22} & \tilde{S}_{22} \end{array} \right) := \tilde{P}_{em} \quad (2.77)$$

เพื่อความสะดวกในการแสดงค่าเราจะกำหนดให้

$$\left( \begin{array}{c|c} P & T \\ \hline T^T & T^T N T \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} Q & S & Q_{12} & S_{12} \\ S^T & R & S_{21}^T & R_{12} \\ \hline Q_{12}^T & S_{21} & Q_{22} & S_{22} \\ S_{12}^T & R_{12}^T & Q_{22} & S_{22} \end{array} \right) \quad (2.78)$$

เราสามารถแยกส่วนเมทริกซ์  $\left( \begin{array}{c|c} P & T \\ \hline T^T & T^T N T \end{array} \right)$  ได้ดังนี้

$$\left( \begin{array}{c|c} P & T \\ \hline T^T & T^T N T \end{array} \right) = \begin{pmatrix} I & T(T^T N T)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & (T^T N T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (T^T N T)^{-1} T^T & I \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

โดยที่  $Y = P - T(T^T N T)^{-1} T^T$  ดังนั้นเราได้ว่า

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} P & T \\ \hline T^T & T^T N T \end{array} \right)^{-1} &= \begin{pmatrix} Y^{-1} & -Y^{-1} T(T^T N T)^{-1} \\ \star & (T^T N T)^{-1} + (T^T N T)^{-1} T^T Y^{-1} T (T^T N T)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} \tilde{Q} & \tilde{S} & \tilde{Q}_{12} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} & \tilde{S}_{21}^T & \tilde{R}_{12} \\ \hline \tilde{Q}_{12}^T & \tilde{S}_{21} & \tilde{Q}_{22} & \tilde{S}_{22} \\ \tilde{S}_{12}^T & \tilde{R}_{12}^T & \tilde{Q}_{22} & \tilde{S}_{22} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.80)$$

เนื่องจากตัวแปร  $\begin{pmatrix} \tilde{Q} & \tilde{S} \\ \tilde{S}^T & \tilde{R} \end{pmatrix}$  เป็นตัวแปรที่เราทราบค่าจากการหาคำตอบของเงื่อนไข (2.72)-(2.74) ดังนั้น

$$Y^{-1} = (P - T(T^T N T)^{-1} T^T)^{-1} = (P - N^{-1})^{-1} = \tilde{P} \quad (2.81)$$

$$\therefore N = (P - \tilde{P}^{-1})^{-1}$$

โดยการกำหนดให้  $N = (P - \tilde{P}^{-1})^{-1}$  เราได้ว่าบล็อกเมทริกซ์ที่ตำแหน่ง (1,1) ของ  $\tilde{P}_{em}$  จะมีค่าเท่ากับ  $\tilde{P}$  ลำดับต่อไปเงื่อนไขที่เราจะพิจารณาคือเงื่อนไขความเป็นบวกแน่นอนและลบแน่นอนของสมาชิกภายใน  $P_e$  พิจารณาเงื่อนไข

$$\begin{pmatrix} Q & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.82)$$

สมบัติดังกล่าวนี้สามารถแสดงได้ในอีกรูปแบบคือ

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ \hline S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.83)$$

เมื่อทำการสลับแถวและหลักภายในเงื่อนไขได้ว่า

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{cc|cc} Q & S & Q_{12} & S_{12} \\ S^T & R & S_{21}^T & R_{12} \\ \hline Q_{12}^T & S_{21} & Q_{22} & S_{22} \\ S_{12}^T & R_{12}^T & Q_{22} & S_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.84)$$

ในทำนองเดียวกัน เงื่อนไข  $\begin{pmatrix} R & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{pmatrix} > 0$  สามารถแสดงได้ในรูปแบบเดียวกันกับ (2.84) คือ

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{cc|cc} Q & S & Q_{12} & S_{12} \\ S^T & R & S_{21}^T & R_{12} \\ \hline Q_{12}^T & S_{21} & Q_{22} & S_{22} \\ S_{12}^T & R_{12}^T & Q_{22} & S_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \quad (2.85)$$

เพื่อความสะดวกในการแสดงตัวแปร เราจะกำหนดให้

$$Z = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

และแสดงเงื่อนไข (2.84), (2.85) ใหม่ดังนี้

$$\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P & T \\ T^T & T^T N T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} < 0 \quad (2.87)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z} & 0 \\ 0 & \tilde{Z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P & T \\ T^T & T^T N T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z} & 0 \\ 0 & \tilde{Z} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.88)$$

ดังนั้นขั้นตอนที่เหลือในการสร้างตัวคูณ  $P_e$  คือเลือกเมทริกซ์  $T$  ที่ทำให้สมการทั้งสองนี้เป็นจริง เมื่อเรากระจายเทอมใน (2.87) และ (2.88) ได้ว่า

$$\begin{pmatrix} Z^T P Z & Z^T T Z \\ Z^T T^T Z & Z^T T^T N T Z \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \tilde{Z}^T P \tilde{Z} & \tilde{Z}^T T \tilde{Z} \\ \tilde{Z}^T T^T \tilde{Z} & \tilde{Z}^T T^T N T \tilde{Z} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.89)$$

กำหนดให้  $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \end{pmatrix}$  โดยที่  $T_1 = T Z$  และ  $T_2 = T \tilde{Z}$  โดยอาศัยการเติมเต็มของชูร์ เราได้ว่า (2.89) สมมูลกับ

$$T_1^T (N - Z(Z^T P Z)^{-1} Z^T) T_1 < 0 \quad (2.90)$$

$$T_2^T (N - \tilde{Z}(\tilde{Z}^T P \tilde{Z})^{-1} \tilde{Z}^T) T_2 > 0 \quad (2.91)$$

ในขั้นสุดท้ายเราจะแสดงให้เห็นว่ามีเมทริกซ์  $T_1$  และ  $T_2$  ที่ทำให้เงื่อนไข (2.90) และ (2.91) เป็นจริง กำหนดให้  $n_-(A)$  แทนจำนวนค่าเฉพาะจริงเฉพาะที่เป็นลบของเมทริกซ์  $A$  และ  $n_+(A)$  แทนจำนวนค่าเฉพาะจริงเฉพาะที่เป็นบวกของเมทริกซ์  $A$  โดยที่  $A$  เป็นเมทริกซ์สมมาตร โดยอาศัยการแยกส่วนของเมทริกซ์ในลักษณะเดียวกันกับ (2.79) เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} n_- \begin{pmatrix} Z^T P Z & Z^T \\ Z & N \end{pmatrix} &= n_-(Z^T P Z) + n_-(N - Z(Z^T P Z)^{-1} Z^T) \\ &= n_-(N) + n_-(Z^T P Z - Z^T N^{-1} Z^T) \end{aligned} \quad (2.92)$$

เมื่อแทน  $N = (P - \tilde{P}^{-1})^{-1}$  เราได้ว่า

$$n_-(Z^T P Z - Z^T N^{-1} Z^T) = n_-(Z^T P Z - Z^T (P - \tilde{P}^{-1}) Z) = n_-(Z^T \tilde{P}^{-1} Z) \quad (2.93)$$

เนื่องจากเรากำหนดให้  $Q < 0$ ,  $\tilde{Q} < 0$  โดยที่  $Q$  และ  $\tilde{Q}$  มีขนาดเท่ากัน ดังนั้นเราได้ว่า

$$n_-(Q) = n_-(\tilde{Q}) = n_-(\tilde{Q}^{-1}) \quad (2.94)$$

นั่นคือ

$$n_-(Z^T P Z) = n_-(Z^T \tilde{P}^{-1} Z) \quad (2.95)$$

ดังนั้น

$$n_-(N - Z(Z^T P Z)^{-1} Z^T) = n_-(N) \quad (2.96)$$

นั่นคือ  $N - Z(Z^T P Z)^{-1} Z^T$  ต้องมีค่าเฉพาะจริงเฉพาะที่เป็นลบจำนวนเท่ากับ  $n_-(N)$  ดังนั้นเราสามารถหาเมทริกซ์  $T_1$  ที่มีจำนวนหลักเท่ากับ  $n_-(N)$  ที่ทำให้เงื่อนไข (2.90) เป็นจริง ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$n_+(N - \tilde{Z}(\tilde{Z}^T P \tilde{Z})^{-1} \tilde{Z}^T) = n_+(N) \quad (2.97)$$

นั่นคือเราสามารถหาเมทริกซ์  $T_2$  ที่มีจำนวนหลักเท่ากับ  $n_+(N)$  ที่ทำให้เงื่อนไข (2.91) เป็นจริง

**การหาฟังก์ชัน  $f_c(\Delta)$**

สำหรับการหาฟังก์ชัน  $f_c(\Delta)$  เราจะพิจารณาเงื่อนไขของตัวคูณ  $P_e$

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & f_c(\Delta) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left( \begin{array}{cc|cc} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ \hline S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & f_c(\Delta) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0, \quad \forall \Delta \in \Delta \quad (2.98)$$

เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้

$$\left( \begin{array}{c|c} Q_e & S_e \\ \hline S_e^T & R_e \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} Q & Q_{12} & S & S_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & S_{21} & S_{22} \\ \hline S^T & S_{21}^T & R & R_{12} \\ S_{12}^T & S_{22}^T & R_{12}^T & R_{22} \end{array} \right) \quad (2.99)$$

เมื่อกระจายการคูณและอาศัยการเติมเต็มของซูร์ เราได้ว่า (2.98) สมมูลกับ

$$\left( \begin{array}{cc|cc} U_{11} & U_{12} & (W_{11} + \Delta)^T & W_{21}^T \\ U_{21} & U_{22} & W_{12}^T & (W_{22} + f_c(\Delta))^T \\ \hline W_{11} + \Delta & W_{12} & V_{11} & V_{12} \\ W_{21} & W_{22} + f_c(\Delta) & V_{21} & V_{22} \end{array} \right) > 0 \quad (2.100)$$

โดยที่  $U = R_e - S_e^T Q_e^{-1} S_e > 0$ ,  $V = -Q_e^{-1} > 0$  และ  $W = Q_e^{-1} S_e$  ลำดับถัดไปเราจะสลับแถวและหลักใน (2.100) ดังนี้

$$\left( \begin{array}{cc|cc} U_{11} & (W_{11} + \Delta)^T & U_{12} & W_{21}^T \\ W_{11} + \Delta & V_{11} & W_{12} & V_{12} \\ \hline U_{21} & W_{12}^T & U_{22} & (W_{22} + f_c(\Delta))^T \\ W_{21} & V_{21} & W_{22} + f_c(\Delta) & V_{22} \end{array} \right) > 0 \quad (2.101)$$

โดยอาศัยการเติมเต็มของซัวร์เทียบกับบล็อก (1, 1) ของ (2.101) เราได้ว่า (2.101) สมมูลกับ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11}(\Delta) & A_{12}(\Delta) \\ A_{12}(\Delta)^T & A_{22}(\Delta) \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} U_{22} & (W_{22} + f_c(\Delta))^T \\ W_{22} + f_c(\Delta) & V_{22} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} U_{21} & W_{12}^T \\ W_{21} & V_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & (W_{11} + \Delta)^T \\ W_{11} + \Delta & V_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_{12} & W_{21}^T \\ W_{12} & V_{12} \end{pmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

เนื่องจากเงื่อนไขนี้เป็นบวกแน่นอน  $A_{11}(\Delta)$  และ  $A_{22}(\Delta)$  ต้องเป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ดังนั้นเราสามารถเลือก  $f_c(\Delta)$  เพื่อให้  $A_{12}(\Delta)$  มีค่าเป็นศูนย์ในกรณีนี้เราได้ว่า  $f_c(\Delta)$  คือ

$$f_c(\Delta) = -W_{22} + \begin{pmatrix} W_{21} & V_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & (W_{11} + \Delta)^T \\ W_{11} + \Delta & V_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_{12} \\ W_{12} \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

#### การหาตัวควบคุม (2.55)

ในขั้นตอนสุดท้าย การหาตัวควบคุม (2.55) สามารถทำได้โดยการแก้เงื่อนไข (2.62) ซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้เนื่องจากเราทราบค่าของเมทริกซ์ตัวคูณเป็นที่เรียบร้อยแล้ว สำหรับขั้นตอนการคำนวณจะอาศัยหลักการเดียวกันกับภาคผนวก ข  $\square$

## 2.4 ตัวอย่างการออกแบบ

สำหรับตัวอย่างการออกแบบเราจะพิจารณาการควบคุมระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก (magnetic suspension) ระบบรองรับแม่เหล็กมีโครงสร้างแสดงในรูปที่ 2.4

จากรูป  $m$  คือมวลของลูกเหล็ก (kg),  $x_1(t)$  คือระยะห่างจากคอยล์ถึงจุดศูนย์กลางของลูกบอล (m) ลูกบอลจะถูกรองรับโดยอาศัยแรงทางแม่เหล็กไฟฟ้า  $F_{\text{mag}}$  จากขดลวดเหนี่ยวนำ ค่าความเหนี่ยวนำของขดลวดมีค่าคือ

$$L = L(x_1(t)) = \frac{aL_0}{a + x_1(t)} \quad (2.104)$$

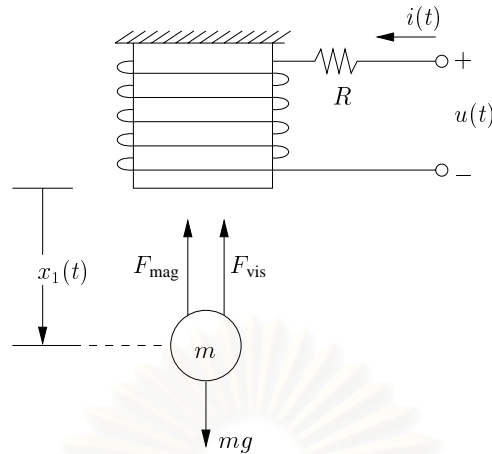
โดยที่  $a$  และ  $L_0$  เป็นค่าคงที่ เราได้ว่าค่าแรง  $F_{\text{mag}}$  จะขึ้นอยู่กับค่ากระแส  $i(t)$  และระยะห่าง  $x_1(t)$  ดังนี้

$$F_{\text{mag}} = -\frac{aL_0 i(t)^2}{2(a + x_1(t))^2} \quad (2.105)$$

สำหรับ  $F_{\text{vis}}$  คือแรงเสียดทานที่เกิดในการเคลื่อนที่ ในที่นี้เราประมาณให้  $F_{\text{vis}} \approx k \frac{d}{dt} x_1(t)$  โดยอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน เราได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ในส่วน of ลูกบอลคือ

$$m\ddot{x}_1(t) = mg - k\dot{x}_1(t) - \frac{aL_0 i(t)^2}{2(a + x_1(t))^2} \quad (2.106)$$





รูปที่ 2.4: ระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก

ในส่วนของวงจรไฟฟ้าที่กำหนดที่สร้างแรงทางแม่เหล็ก เราได้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันที่ป้อนกับระบบ  $u(t)$  กับค่าความเหนี่ยวนำคือ

$$u(t) = i(t)R + \frac{d}{dt}(L(x_1(t))i(t)) \quad (2.107)$$

เมื่อแทนค่า  $L(x_1(t))$  เข้าไปได้ว่า

$$u(t) = i(t)R - \frac{aL_0}{(a+x_1(t))^2}i(t)\frac{d}{dt}x_1(t) + \frac{aL_0}{a+x_1(t)}\frac{d}{dt}i(t) \quad (2.108)$$

เมื่อกำหนดให้  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$  และ  $x_3(t) = i(t)$  เราได้สมการสถานะสำหรับระบบดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, u) = x_2 \\ \dot{x}_2 &:= f_2(x_1, x_2, x_3, u) = g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0ax_3^2}{2m(a+x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, u) = \frac{a+x_1}{aL_0} \left( -Rx_3 + \frac{L_0ax_2x_3}{(a+x_1)^2} + u \right) \end{aligned} \quad (2.109)$$

สัญญาณออกที่สามารถวัดค่าได้คือตำแหน่งของลูกบอล  $x_1(t)$  และกระแสภายในวงจร  $x_3(t)$  สำหรับค่าพารามิเตอร์ในระบบเรากำหนดให้  $m = 0.1$  kg,  $L_0 = 1$  H,  $a = 0.05$  m  $k = 0.001$  m/s และ  $R = 1\Omega$  เมื่อกำหนดให้  $x_1 = x_{1e}$  เป็นตัวกำหนดจุดทำงานของระบบ เราได้จุดสมดุลของระบบดังนี้

$$x_2 = 0, \quad x_{3e} = \sqrt{\frac{2mg}{L_0a}}(a+x_{1e}), \quad u_e = Rx_{3e} \quad (2.110)$$

เมื่อทำการประมาณเป็นเชิงเส้นรอบจุดสมดุล เราได้แบบจำลองเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^\delta &= x_2^\delta \\ \dot{x}_2^\delta &= \frac{2g}{a+x_{1e}}x_1^\delta - \frac{k}{m}x_2^\delta - \frac{\sqrt{2mgL_0a}}{m(a+x_{1e})}x_3^\delta \\ \dot{x}_3^\delta &= \sqrt{\frac{2mg}{L_0a}}x_2^\delta - \frac{R(a+x_{1e})}{L_0a}x_3^\delta - \frac{a+x_{1e}}{L_0a}u^\delta \end{aligned} \quad (2.111)$$

โดยที่  $x_i^\delta = x_i - x_{ie}$  กำหนดให้  $\delta(t) = x_{1e}/a$  เราสามารถเขียนสมการ (2.111) ดังนี้

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1^\delta \\ \dot{x}_2^\delta \\ \dot{x}_3^\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c_1}{1+\delta(t)} & -c_2 & -\frac{c_3}{1+\delta(t)} \\ 0 & c_4 & -c_5(1+\delta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^\delta \\ x_2^\delta \\ x_3^\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_6(1+\delta(t)) \end{pmatrix} u^\delta \quad (2.112)$$

โดยที่

$$c_1 = \frac{2g}{a}, \quad c_2 = \frac{k}{m}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{2gL_0}{ma}}$$

$$c_4 = \frac{\sqrt{2mgL_0a}}{L_0a}, \quad c_5 = \frac{R}{L_0}, \quad c_6 = \frac{1}{L_0}$$

เราสามารถดึงตัวแปร  $\delta(t)$  ที่อยู่ในเมทริกซ์ของสมการสถานะ (2.112) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c_1}{1+\delta(t)} & -c_2 & -\frac{c_3}{1+\delta(t)} \\ 0 & c_4 & -c_5(1+\delta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & c_4 & -c_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_3\delta(t)}{1+\delta(t)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_5\delta(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & c_4 & -c_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c_1\delta(t) + \frac{c_1\delta(t)^2}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\delta(t) - \frac{c_3\delta(t)^2}{1+\delta(t)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_5\delta(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & c_4 & -c_5 \end{pmatrix} + \delta(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & \frac{-c_1\delta(t)}{1+\delta(t)} & c_3 & \frac{-c_3\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5\delta(t) & c_6\delta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_1 & -c_2 & -c_3 \\ 0 & c_4 & -c_5 \end{pmatrix} + \\ & \delta(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\delta(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.113)$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -\frac{\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\delta(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -\frac{\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{-1} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & \delta(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\delta(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \delta(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\delta(t) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.114) \\
 & = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - \delta(t) \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = I - \delta(t)D_{\delta\delta}
 \end{aligned}$$

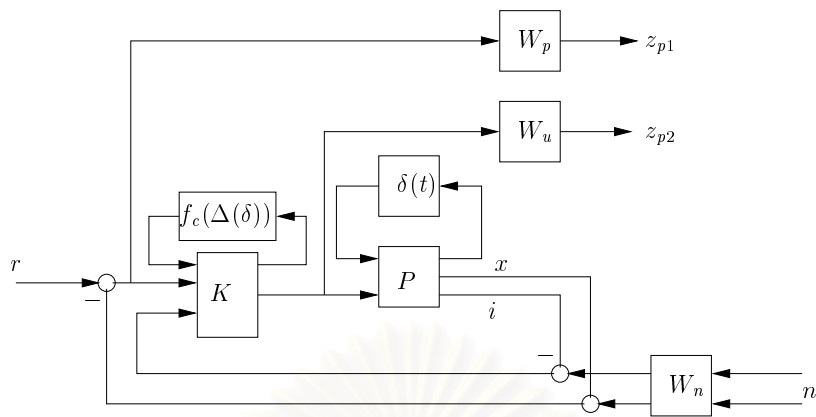
ในทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_6(1+\delta(t)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_6 \end{pmatrix} + \delta(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\delta(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -\frac{\delta(t)}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\delta(t)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

เราได้แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{x}_1^\delta \\ \dot{x}_2^\delta \\ \dot{x}_3^\delta \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & -c_2 & -c_3 & c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & c_6 & c_6 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^\delta \\ x_2^\delta \\ x_3^\delta \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ u^\delta \end{pmatrix} \quad (2.116)
 \end{aligned}$$

โดยที่  $(w_1^T \ \dots \ w_6^T)^T = \delta(t)I_{6 \times 6} (z_1^T \ \dots \ z_6^T)^T$



รูปที่ 2.5: โครงสร้างที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก

ในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก เราใช้โครงสร้างดังแสดงในรูปที่ 2.5 จากรูป  $w_p$  คือฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weighting function) สำหรับระบุขอบเขตของฟังก์ชันความไว (sensitivity function) ของระบบดังนี้

$$\|S(j\omega)\|_\infty \leq \|1/w_p(j\omega)\|_\infty, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.117)$$

ในการออกแบบเราเลือกรูปแบบของ  $w_p$  ดังนี้ [21]

$$w_p = \frac{(s/\sqrt{M} + \omega_b)^2}{(s + \omega_b\sqrt{\epsilon})^2} \quad (2.118)$$

โดยที่  $\omega_b$  คือแบนด์วิธ,  $\epsilon$  คือขอบเขตค่าคลาดเคลื่อนในสภาวะอยู่ตัวของระบบ ส่วน  $M$  จะกำหนดส่วนพุงเกินของผลตอบของระบบ ในที่นี้เรากำหนดให้  $\omega_b = 5$ ,  $\epsilon = 0.001$  และ  $M = 2$

สำหรับ  $w_u$  เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักสำหรับกำหนดขนาดสูงสุดของสัญญาณควบคุม  $w_n$  เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักสำหรับสัญญาณรบกวนจากการวัดที่ต้องการให้การรบกวนเริ่มมีนัยสำคัญที่ความถี่ใด สำหรับการออกแบบเรากำหนดให้  $w_u = 1/30$  และ  $w_n = 10^{-6}$  (ในการออกแบบเราสมมติให้การรบกวนจากการวัดส่งผลน้อยมากในทุกช่วงความถี่)

ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมเราจะใช้เกณฑ์สมรรถนะ  $H_\infty$  โดยมีจุดประสงค์หาตัวควบคุม  $K(\delta)$  ที่ทำให้

$$\left\| \begin{pmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \gamma \left\| \begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix} \right\|_2 \quad (2.119)$$

สำหรับค่า  $\gamma \geq \gamma_{\text{opt}}$  เมื่อ  $\gamma_{\text{opt}}$  คือดัชนีสมรรถนะต่ำสุดของระบบวงปิด ในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุม เราจะเปรียบเทียบสมรรถนะต่ำสุดของระบบที่ได้จากวิธีการสังเคราะห์สองวิธีคือ

1. ตัวควบคุม  $H_\infty$  แบบตรง ( $f_c(\Delta(\delta)) = 0$ )
2. ตัวควบคุม  $H_\infty$  แบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม

ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมเราจะกำหนดให้  $\|\Delta(\delta)\|_\infty = 0.01$  เราได้ดัชนีสมรรถนะต่ำสุด  $\gamma$  ที่ได้ในแต่ละวิธีดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1: ค่าดัชนีสมรรถนะที่ได้ในการควบคุมระบบรองรับด้วยแม่เหล็ก

Controller	Achievable $\gamma$
fixed $H_\infty$ controller	14.30
LPV $H_\infty$ controller with full block multiplier	1.486

จากตารางที่ 2.1 ในกรณีที่เรานำตัวควบคุม  $H_\infty$  แบบตรึงค่าดัชนีสมรรถนะ  $\gamma$  จะสูงกว่าการใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์มาก เนื่องจากการสังเคราะห์ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้จะพิจารณาความไม่แน่นอนแบบไร้อโครงสร้างขณะที่ความไม่แน่นอน (พารามิเตอร์แปรตามเวลา) ของระบบเป็นความไม่แน่นอนมีโครงสร้าง การออกแบบตัวควบคุมลักษณะนี้จึงเกิดความอนุรักษ์มากซึ่งส่งผลให้ระบบมีสมรรถนะต่ำ

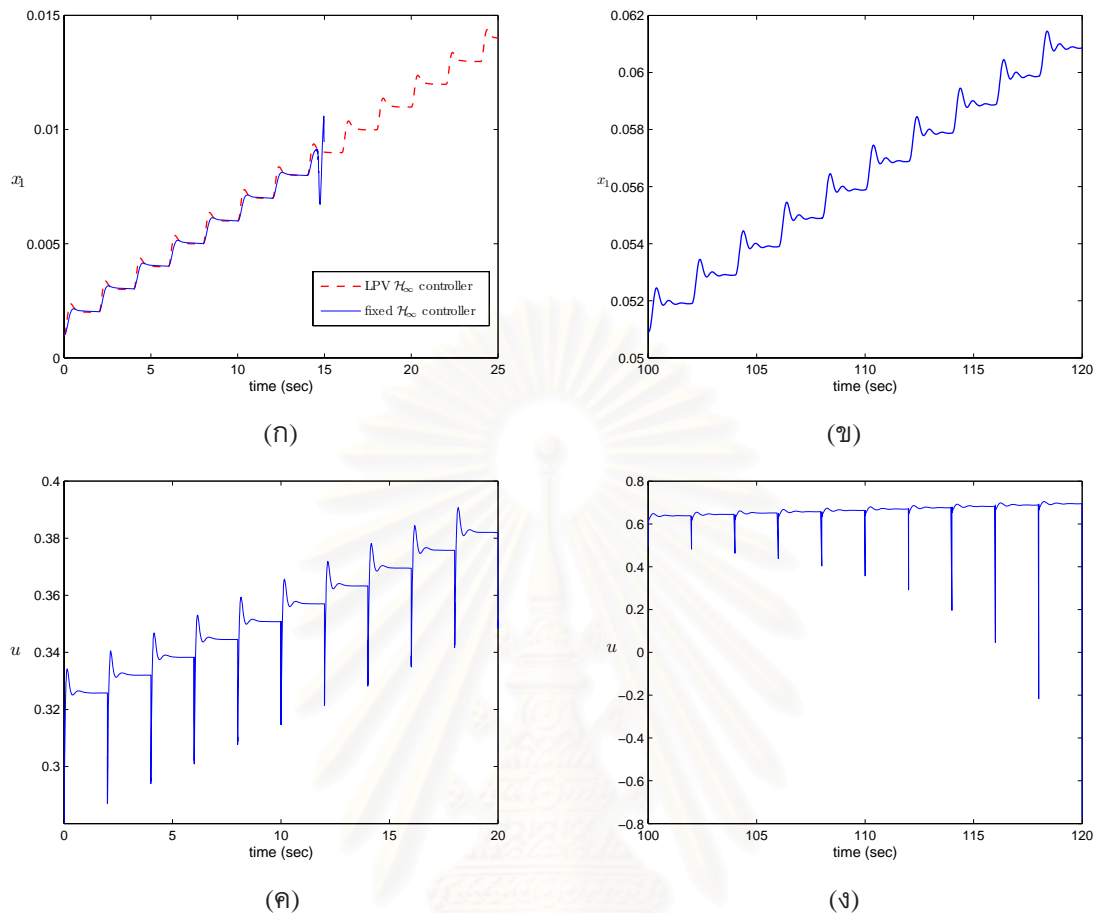
ในลำดับสุดท้าย เราจะเปรียบเทียบช่วงการทำงานของระบบที่ตัวควบคุมแบบตรึงและตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สามารถรักษาเสถียรภาพได้ การเปรียบเทียบผลตอบจะเริ่มจากกำหนดให้ระยะสมดุลเริ่มต้นระหว่างคอยล์กับลูกเหล็กมีค่า 0.001 m จากนั้นจะทำการเพิ่มขนาดของ  $x_{1e}$  ที่ละ 0.001 m ทุกๆสองวินาทีและดูช่วงที่ระบบยังสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงได้ ผลการควบคุมแสดงดังในรูปที่ 2.6(ก)-(ง) จากรูปที่ 2.6(ก) เห็นได้ชัดว่าเมื่อใช้ตัวควบคุมแบบตรึงระบบสามารถตามรอยสัญญาณอ้างอิงและรักษาเสถียรภาพไว้ได้จน  $x_{1e} \approx 0.008$  m ขณะที่ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ระบบสามารถตามรอยสัญญาณและรักษาเสถียรภาพได้จน  $x_{1e} \approx 0.06$  m ซึ่งกว้างกว่าการใช้ตัวควบคุมแบบตรึงมาก

## 2.5 สรุป

ในบทนี้เราได้กล่าวถึงการวิเคราะห์ระบบและสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวควบคุมบล็อกเต็ม การวิเคราะห์สมรรถนะคงทนของระบบจะอาศัย  $S$ -procedure บล็อกเต็มเป็นเครื่องมือ เงื่อนไขสมรรถนะคงทนจะอยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์โดยมีตัวคูณปรากฏในเงื่อนไข ในตัวอย่างการคำนวณได้แสดงผลของการเลือกโครงสร้างของตัวคูณและสรุปได้ว่าโครงสร้างตัวคูณบล็อกแนวทแยงจะให้ผลการคำนวณที่มีความอนุรักษ์สูงกว่าการเลือกโครงสร้างแบบบล็อกเต็ม

ในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุม เราได้แสดงโครงสร้างที่ใช้สำหรับการสังเคราะห์ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ และใช้แนวทางเดียวกันกับการวิเคราะห์ระบบในการสร้างเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับสังเคราะห์ตัวควบคุม ตัวควบคุมที่ได้จะมีความแตกต่างจากงานวิจัยที่ผ่านมาคือการปรับพลวัตของตัวควบคุมจะกระทำโดยฟังก์ชันต่อเนื่องของพารามิเตอร์  $\delta(t)$  แทนการใช้พารามิเตอร์  $\delta(t)$  โดยตรง

ในตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมได้พิจารณาระบบรองรับด้วยแม่เหล็กซึ่งเป็นระบบไม่เชิงเส้น เมื่อเปรียบเทียบผลการควบคุมระหว่างตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรึง กับตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ได้ว่า การใช้ตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรึงสามารถประกันเสถียรภาพของระบบในช่วงการ



รูปที่ 2.6: (ก) เปรียบเทียบผลตอบระหว่างการใช้อัตว์ควบคุมแบบตรึง (เส้นทึบ) และการใช้อัตว์ควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ (เส้นประ) (ข) ภาพขยายช่วงการทำงานของตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในช่วงเวลา 100 ถึง 120 วินาที (ค) ภาพขยายสัญญาณควบคุมจากตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในช่วงเวลา 0 ถึง 20 วินาที (ง) ภาพขยายสัญญาณควบคุมจากตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในช่วงเวลา 100 ถึง 120 วินาที

ทำงานที่แคบกว่าการใช้อัตว์ควบคุมเอชอินฟินิตี้ที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์มาก ดังนั้นถ้าระบบไม่เชิงเส้นที่ทำการควบคุมมีช่วงการทำงานกว้าง การใช้อัตว์ควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์จึงเป็นทางเลือกที่เหมาะสมกว่าการใช้อัตว์ควบคุมแบบตรึง

## บทที่ 3

### การควบคุมเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน

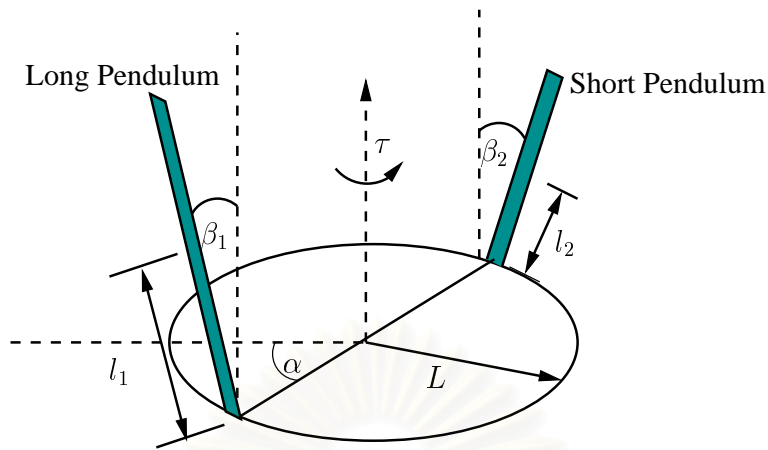
ในบทนี้จะแสดงการประยุกต์ใช้แนวคิดของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน (rotary double inverted pendulum) ใน §3.1 จะกล่าวถึงเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน ใน §3.2 จะกล่าวถึงการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ของระบบ ใน §3.3 จะกล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับระบบ ใน §3.4 กล่าวถึงผลของการเลือกแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ที่มีต่อผลตอบสนองของระบบ และ §3.5 จะเปรียบเทียบผลการควบคุมเมื่อใช้ตัวควบคุมที่นำเสนอใน [2] และตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรง

#### 3.1 เพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน

เพนดูลัมผกผัน (inverted pendulum) เป็นอุปกรณ์ที่ใช้อย่างแพร่หลายในการสาธิตการประยุกต์ใช้ทฤษฎีควบคุม จุดประสงค์ในการออกแบบตัวควบคุมคือรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมให้ตั้งในแนวตั้ง โดยอาศัยการสร้างความแข็งแกร่งที่บริเวณฐานของแท่งเพนดูลัม เพนดูลัมผกผันที่ใช้ในช่วงแรกคือเพนดูลัมผกผันบนรถ (cart pendulum) ซึ่งฐานของเพนดูลัมจะติดอยู่บนรถและอาศัยการเคลื่อนที่ของรถในการรักษาสมดุลของเพนดูลัม อย่างไรก็ตามเพนดูลัมรูปแบบนี้มีข้อจำกัดในทางปฏิบัติเกี่ยวกับระยะทางที่รถต้องใช้ในการเคลื่อนที่ ด้วยเหตุผลดังกล่าวจึงมีการพัฒนารูปแบบเป็นเพนดูลัมผกผันแบบหมุน (rotary inverted pendulum) ขึ้น สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนฐานของแท่งเพนดูลัมจะติดบนจานหมุนและอาศัยการหมุนของจานหมุนในการรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัม ดังนั้นเพนดูลัมรูปแบบนี้จึงไม่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับระยะการเคลื่อนที่

สำหรับในวิทยานิพนธ์นี้เราจะพิจารณาเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน ซึ่งแท่งเพนดูลัมสองแท่งที่มีความยาวแตกต่างกันจะตั้งอยู่ในตำแหน่งตรงกันข้ามบนจานหมุนดังแสดงในรูปที่ 3.1 เพนดูลัมผกผันรูปแบบนี้ จะมีความยากในการควบคุมมากกว่าเพนดูลัมผกผันแบบเดี่ยวเนื่องจากจานหมุนต้องหมุนเพื่อรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมสองแท่งพร้อมๆกัน ขณะที่เพนดูลัมผกผันแบบเดี่ยวจะรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมเพียงแท่งเดียวเท่านั้น

จากรูปที่ 3.1 กำหนดให้  $\alpha$  คือการกระจัดเชิงมุมของจานหมุน (rad),  $\beta_1, \beta_2$  คือมุมของเพนดูลัมแท่งยาวและแท่งสั้นเทียบกับแกนแนวตั้ง (rad) และ  $\tau$  คือ แรงบิด (torque) ที่กระทำต่อจานหมุน (N·m) ในการควบคุมจะใช้มอเตอร์กระแสตรงเป็นตัวขับเคลื่อน (actuator) สำหรับสร้างแรงบิดให้กับจานหมุน จุดประสงค์ของการควบคุมคือใช้การเคลื่อนที่ของจานหมุนในการรักษาสมดุลของแท่งเพนดูลัมทั้งสองแท่งเมื่อมุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ส่วนค่าพารามิเตอร์ต่างๆของระบบแสดงในตารางที่ 3.1



รูปที่ 3.1: ระบบเพนดูลัมผูกพันคู่แบบหมุน

สมการการเคลื่อนที่ของระบบสามารถอธิบายได้ดังนี้ [22]

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} P_{11} &= J_0 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta_1 + m_1 L^2 + m_2 l_2^2 \sin^2 \beta_2 + m_2 L^2 \\ P_{12} &= -m_1 l_1 L \cos \beta_1, \quad P_{13} = -m_2 l_2 L \cos \beta_2 \\ P_{21} &= -m_1 l_1 L \cos \beta_1, \quad P_{22} = J_1 + m_1 l_1^2 \\ P_{23} &= 0, \quad P_{31} = -m_2 l_2 L \cos \beta_2 \\ P_{32} &= 0, \quad P_{33} = J_2 + m_2 l_2^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} p'_1 &= m_1 l_1^2 \dot{\beta}_1 \dot{\alpha} \sin(2\beta_1) + m_2 l_2^2 \dot{\beta}_2 \dot{\alpha} \sin(2\beta_2) + m_1 l_1 L \dot{\beta}_1^2 \sin \beta_1 + m_2 l_2 L \dot{\beta}_2^2 \sin \beta_2 + c_0 \dot{\alpha} \\ p'_2 &= -m_1 l_1^2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta_1 \cos \beta_1 - m_1 g l_1 \sin \beta_1 + c_1 \dot{\beta}_1 \\ p'_3 &= -m_2 l_2^2 \dot{\alpha}^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - m_2 g l_2 \sin \beta_2 + c_2 \dot{\beta}_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

### 3.2 แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์

ในการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ เราจะอาศัยแนวคิดของระบบกึ่งเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในลักษณะเดียวกันกับที่ได้แสดงในตัวอย่างที่ 2.2 อย่างไรก็ตามทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นบางส่วนใน (3.2) และ (3.3) จะถูกประมาณเป็นเชิงเส้นรอบจุด  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  เพื่อทำการลดจำนวนทอมไม่เป็นเชิงเส้นที่ต้องนิยามเป็นพารามิเตอร์แปรตามเวลาไม่ให้มีจำนวนมากเกินไป



ตารางที่ 3.1: ค่าพารามิเตอร์ของเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุน

พารามิเตอร์	สัญลักษณ์	ค่าที่ใช้	หน่วย
ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของจานหมุน	$J_0$	0.06	kg-m <sup>2</sup>
ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของเพนดูลัมแก่งยาว	$J_1$	0.1	kg-m <sup>2</sup>
ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของเพนดูลัมแก่งสั้น	$J_2$	0.002	kg-m <sup>2</sup>
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของจานหมุน	$c_0$	0.004	N-m·s
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของเพนดูลัมแก่งยาว	$c_1$	0.003	N-m·s
สัมประสิทธิ์ความเสียดทานของเพนดูลัมแก่งสั้น	$c_2$	0.0009	N-m·s
มวลของเพนดูลัมแก่งยาว	$m_1$	1	kg
มวลของเพนดูลัมแก่งสั้น	$m_2$	0.13	kg
ระยะจากจุดหมุนถึงจุด c.m. ของเพนดูลัมแก่งยาว	$l_1$	0.3	m
ระยะจากจุดหมุนถึงจุด c.m. ของเพนดูลัมแก่งสั้น	$l_2$	0.2	m
รัศมีจานหมุน	$L$	0.5	m
ค่าคงที่แรงโน้มถ่วง	$g$	9.8	m/s

กำหนดให้

$$\begin{aligned} \delta_1 &= m_1 l_1 L \dot{\beta}_1 \sin \beta_1, & \delta_2 &= m_2 l_2 L \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \\ \delta_3 &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin(2\beta_1), & \delta_4 &= \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\alpha} \sin(2\beta_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

เมื่อแทนกลับเข้าไปใน (3.3) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} p'_1 &= 2\delta_3 \dot{\beta}_1 + 2\delta_4 \dot{\beta}_2 + \delta_1 \dot{\beta}_1 + \delta_2 \dot{\beta}_2 + c_0 \dot{\alpha} \\ p'_2 &= -\delta_3 \dot{\alpha} - m_1 g l_1 \sin \beta_1 + c_1 \dot{\beta}_1 \\ p'_3 &= -\delta_4 \dot{\alpha} - m_2 g l_2 \sin \beta_2 + c_2 \dot{\beta}_2 \end{aligned}$$

ทำการประมาณเทอม  $\sin \beta_1$  และ  $\sin \beta_2$  รอบจุด  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  เราได้ว่า

$$\begin{aligned} p'_2 &\approx -\delta_3 \dot{\alpha} - m_1 g l_1 \beta_1 + c_1 \dot{\beta}_1 \\ p'_3 &\approx -\delta_4 \dot{\alpha} - m_2 g l_2 \beta_2 + c_2 \dot{\beta}_2 \end{aligned}$$

พิจารณาเทอม  $P_{11}$ ,  $P_{12}$  และ  $P_{13}$  ใน (3.2) เมื่อทำการประมาณเป็นเชิงเส้นรอบ  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  เราได้ว่า

$$\begin{aligned} P_{11} &\approx J_0 + m_1 L^2 + m_2 L^2 \\ P_{12} &\approx -m_1 l_1 L, & P_{13} &\approx -m_2 l_2 L \end{aligned} \quad (3.5)$$

เมื่อกำหนดให้ตัวแปรสถานะของระบบ  $x = (\alpha \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta}_1 \ \dot{\beta}_2)$  เราได้แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์  $\mathcal{M}_1$  คือ

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0 + m_1 L^2 + m_2 L^2 & -m_1 l_1 L & -m_2 l_2 L \\ 0 & 0 & 0 & -m_1 l_1 L & J_1 + m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 l_2 L & 0 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -c_0 & -(\delta_1 + 2\delta_3) & -(\delta_2 + 2\delta_4) \\ 0 & m_1 g l_1 & 0 & \delta_3 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 g l_2 & \delta_4 & 0 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tau \quad (3.6)$$

อย่างไรก็ตามเราสามารถสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ในรูปแบบอื่นได้อีก โดยนิยามพารามิเตอร์แปรตามเวลาในรูปแบบที่แตกต่างกัน ในกรณีที่เรากำหนดให้พารามิเตอร์แปรตามเวลา  $\delta_5$  มีค่าดังแสดงใน (3.7)

$$\delta_5 = m_1 l_1^2 \dot{\beta}_1 \sin(2\beta_1) + m_2 l_2^2 \dot{\beta}_2 \sin(2\beta_2) \quad (3.7)$$

เราได้ว่าเทอม  $p'_1$  สามารถแสดงได้ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$p'_1 = \delta_5 \dot{\alpha} + \delta_1 \dot{\beta}_1 + \delta_2 \dot{\beta}_2 + c_0 \dot{\alpha} \quad (3.8)$$

จากการนิยามพารามิเตอร์ในรูปแบบดังกล่าว เราได้แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์  $\mathcal{M}_2$  คือ

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0 + m_1 L^2 + m_2 L^2 & -m_1 l_1 L & -m_2 l_2 L \\ 0 & 0 & 0 & -m_1 l_1 L & J_1 + m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 l_2 L & 0 & J_2 + m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(c_0 + \delta_5) & -\delta_1 & -\delta_2 \\ 0 & m_1 g l_1 & 0 & \delta_3 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 g l_2 & \delta_4 & 0 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tau \quad (3.9)$$

ถ้าเราแยกเทอมที่บวกกันในพารามิเตอร์  $\delta_5$  ออกเป็น  $\delta_5 = \delta_6 + \delta_7$  โดยที่

$$\delta_6 = m_1 l_1^2 \dot{\beta}_1 \sin(2\beta_1), \quad \delta_7 = m_2 l_2^2 \dot{\beta}_2 \sin(2\beta_2) \quad (3.10)$$

เราได้แบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์  $M_3$  คือ

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0 + m_1 L^2 + m_2 L^2 \\ 0 & 0 & 0 & -m_1 l_1 L \\ 0 & 0 & 0 & -m_2 l_2 L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -(c_0 + \delta_6 + \delta_7) & -\delta_1 & -\delta_2 \\ 0 & m_1 g l_1 & 0 & \delta_3 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 g l_2 & \delta_4 & 0 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tau \quad (3.11)$$

จากแนวทางที่ได้แสดงมาเห็นได้ว่าแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ สามารถมีได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบขึ้นอยู่กับการนิยามพารามิเตอร์แปรตามเวลาของระบบ เนื่องจากพารามิเตอร์แปรตามเวลาจะทำหน้าที่ในการปรับพลวัตของตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ การนิยามพารามิเตอร์แปรตามเวลาที่แตกต่างกันจึงน่าจะให้ผลการควบคุมที่แตกต่างกันด้วย เราจะแสดงผลของการเลือกใช้แบบจำลองในการออกแบบตัวควบคุมที่จะส่งผลต่อลักษณะผลตอบของระบบใน §3.4

### 3.3 การออกแบบตัวควบคุม

#### 3.3.1 รูปแบบการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้น

ในการออกแบบตัวควบคุมเราจะแทนแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์  $M_1$ ,  $M_2$  และ  $M_3$  ในรูปของการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\delta w_\delta + B_u u \\ z_\delta &= C_\delta x + D_{\delta\delta} w_\delta + D_{\delta u} u \\ y &= C_y x + D_{y\delta} w_\delta, \quad w_\delta = \Delta(\delta) = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r) z_\delta \end{aligned} \quad (3.12)$$

โดยที่  $\delta_1, \dots, \delta_r$  จะถูกทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalized) ให้มีค่าระหว่าง  $-1$  ถึง  $1$  ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= \frac{\delta_1}{\delta_{1\max}} = \frac{\dot{\beta}_1 \sin \beta_1}{\dot{\beta}_{1\max} \sin \beta_{1\max}}, & \delta'_2 &= \frac{\delta_2}{\delta_{2\max}} = \frac{\dot{\beta}_2 \sin \beta_2}{\dot{\beta}_{2\max} \sin \beta_{2\max}} \\ \delta'_3 &= \frac{\delta_3}{\delta_{3\max}} = \frac{\dot{\alpha} \sin(2\beta_1)}{\dot{\alpha}_{\max} \sin(2\beta_{1\max})}, & \delta'_4 &= \frac{\delta_4}{\delta_{4\max}} = \frac{\dot{\alpha} \sin(2\beta_2)}{\dot{\alpha}_{\max} \sin(2\beta_{2\max})} \\ \delta'_5 &= \frac{\delta_5}{\delta_{5\max}} = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\beta}_1 \sin(2\beta_1) + m_2 l_2^2 \dot{\beta}_2 \sin(2\beta_2)}{m_1 l_1^2 \dot{\beta}_{1\max} \sin(2\beta_{1\max}) + m_2 l_2^2 \dot{\beta}_{2\max} \sin(2\beta_{2\max})} \\ \delta'_6 &= \frac{\delta_6}{\delta_{6\max}} = \frac{\dot{\beta}_1 \sin(2\beta_1)}{\dot{\beta}_{1\max} \sin(2\beta_{1\max})}, & \delta'_7 &= \frac{\delta_7}{\delta_{7\max}} = \frac{\dot{\beta}_2 \sin(2\beta_2)}{\dot{\beta}_{2\max} \sin(2\beta_{2\max})} \end{aligned}$$

โดยที่  $\beta_{1\max} = \beta_{2\max} = 5^\circ$ ,  $\dot{\beta}_{1\max} = \dot{\beta}_{2\max} = \pi$  rad/sec และ  $\dot{\alpha}_{\max} = 3\pi$  rad/sec

จากสมการ (3.6), (3.9) และ (3.11) เห็นได้ว่าระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ทั้งสามชุดมีความแตกต่างกันในด้านโครงสร้างของพารามิเตอร์แปรตามเวลาเท่านั้น ถ้าเรากำหนดให้พารามิเตอร์แปรตามเวลามีค่าเท่ากับศูนย์จะได้ว่าระบบทั้งสามคือระบบเดียวกัน ดังนั้นเมื่อทำการแยกพารามิเตอร์แปรตามเวลาออกมาในรูปการแปลงส่วนย่อยเชิงเส้นได้ว่าเมทริกซ์  $A$ ,  $B_p$ ,  $C_p$  และ  $D_{pp}$  จะมีค่าเหมือนกันทั้งสามแบบจำลอง

เนื่องจากพารามิเตอร์แปรตามเวลามีความสัมพันธ์ในรูปแบบเชิงเส้นกับระบบ  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  และ  $\mathcal{M}_3$  ดังนั้น  $D_{\delta\delta} = 0$  ทั้งสามกรณี และเนื่องจากสัญญาณ  $\tau$  และ  $y$  เข้าและออกระบบโดยไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์  $\delta$  ดังนั้น  $D_{\delta p}$  และ  $D_{p\delta}$  จึงมีค่าเท่ากับศูนย์ทั้งสามกรณีเช่นเดียวกัน

เมื่อแทนค่าพารามิเตอร์ต่างๆในตารางที่ 3.1 ลงไป เราได้ค่าต่างๆในสมการ (3.12) ดังนี้

$$A = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 12.0 & 2.3 & -0.020 & -0.012 & -0.0081 \\ 0.0 & 25.0 & 1.8 & -0.016 & -0.025 & -0.0064 \\ 0.0 & 21.0 & 40.0 & -0.036 & -0.021 & -0.14 \end{pmatrix}, B_p = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 5.0 \\ 3.9 \\ 9.0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$C_p = I_{6 \times 6}, D_{\delta\delta} = 0, D_{\delta p} = 0, D_{p\delta} = 0, D_{pp} = 0$$

ค่าของเมทริกซ์  $B_\delta$ ,  $C_\delta$  และโครงสร้างของพารามิเตอร์แปรตามเวลา  $\Delta(\delta)$  สำหรับแบบจำลอง  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  และ  $\mathcal{M}_3$  เป็นดังนี้

- แบบจำลอง  $\mathcal{M}_1$ :  $\Delta(\delta) = \text{diag}(\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3 I_{2 \times 2}, \delta'_4 I_{2 \times 2})$  และ

$$B_\delta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.20 & 0.018 & 0.73 & 0.29 & 0.042 & 0.038 \\ 0.16 & 0.014 & 0.58 & 0.62 & 0.033 & 0.030 \\ 0.37 & 0.032 & 1.3 & 0.52 & 0.077 & 0.66 \end{pmatrix}, C_\delta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

- แบบจำลอง  $\mathcal{M}_2$ :  $\Delta(\delta) = \text{diag}(\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4, \delta'_5)$  และ

$$B_\delta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.26 & 0.20 & 0.014 & 0.66 & 0.021 \\ 0.20 & 0.16 & 0.030 & 0.52 & 0.017 \\ 0.47 & 0.37 & 0.025 & 11.0 & 0.038 \end{pmatrix}, C_\delta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

- แบบจำลอง  $M_3: \Delta(\delta) = \text{diag}(\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4, \delta'_6, \delta'_7)$  และ

$$B_\delta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.24 & 0.014 & 0.16 & 0.032 & 0.37 & 0.021 \\ 0.19 & 0.011 & 0.34 & 0.025 & 0.29 & 0.017 \\ 0.44 & 0.026 & 0.29 & 0.55 & 0.66 & 0.038 \end{pmatrix}, \quad C_\delta = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

### 3.3.2 โครงสร้างการควบคุม

ในการออกแบบตัวควบคุมเราใช้โครงสร้างการควบคุมดังแสดงในรูปที่ 3.2 จากรูป  $P$  แทนระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (3.12),  $K$  แทนตัวควบคุม (2.55),  $w_{p1}$ ,  $w_{p2}$  คือสัญญาณสมรรถนะขาเข้าและ  $z_{p1}$ ,  $z_{p2}$ ,  $z_{p3}$  คือสัญญาณสมรรถนะขาออก

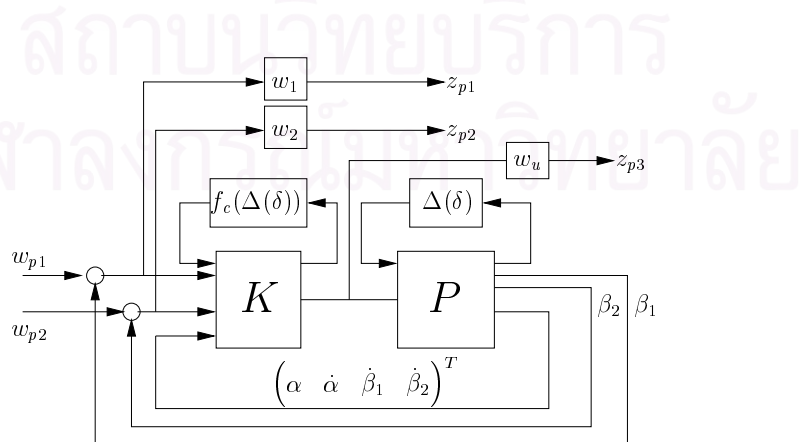
ในวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาปัญหาด้านเสถียรภาพของระบบเป็นประเด็นหลัก ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจึงเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก  $w_1$  และ  $w_2$  ให้เป็นค่าคงที่โดยมีค่าเท่ากับ 0.1 ส่วน  $w_u$  เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักขนาดของสัญญาณควบคุมกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.02

จุดประสงค์ของการออกแบบตัวควบคุมคือหาตัวควบคุม  $K$  และฟังก์ชัน  $f_c(\Delta(\delta))$  ที่ทำให้

1. ระบบวงปิดมีเสถียรภาพเชิงซีก็าลัง
2. นอร์ม  $H_\infty$  ของระบบมีค่าน้อยกว่า  $\gamma$  กล่าวคือ

$$\left\| \begin{pmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \\ z_{p3} \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \gamma \left\| \begin{pmatrix} w_{p1} \\ w_{p2} \end{pmatrix} \right\|_2 \quad (3.17)$$

สำหรับทุก ๆ แนววิถีที่เป็นไปได้ของพารามิเตอร์แปรตามเวลา  $\delta(t)$



รูปที่ 3.2: โครงสร้างที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุม

### 3.4 ผลของการเลือกแบบจำลอง

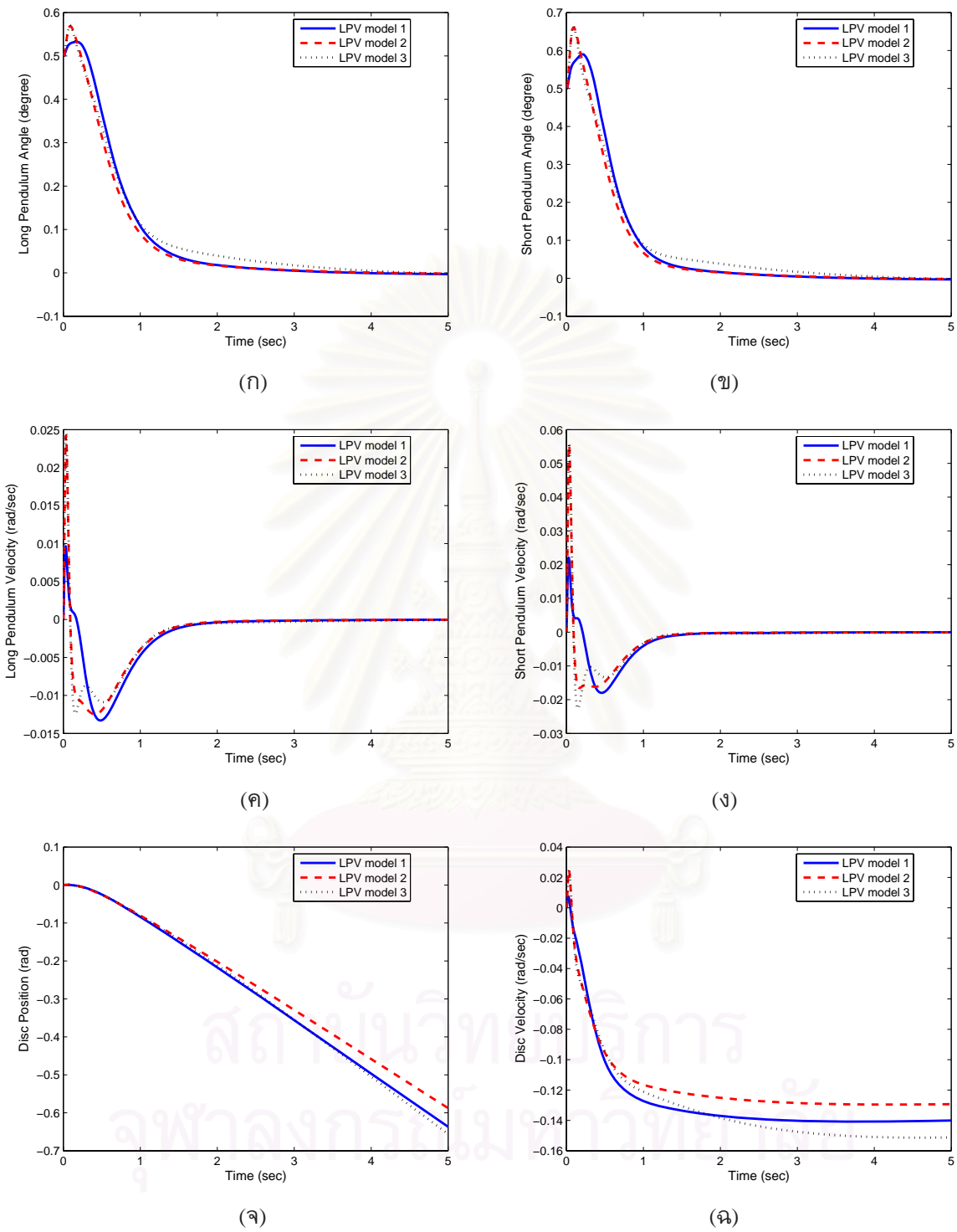
ในการเปรียบเทียบผลของการเลือกพารามิเตอร์แปรตามเวลา เราจะใช้แบบจำลอง  $M_1$ ,  $M_2$  และ  $M_3$  สำหรับสังเคราะห์ตัวควบคุม (2.55) ทั้งหมดสามชุดคือ  $K_1$ ,  $K_2$  และ  $K_3$  ตามลำดับ ค่าดัชนีสมรรถนะที่เลือกใช้คือ  $\gamma = 1$  ในการเปรียบเทียบผลตอบจะใช้ตัวควบคุมทั้งสามชุดนี้จำลองผลตอบกับระบบ (3.2) โดยแบ่งกรณีการเลือกมุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นของเพนดูลัมออกเป็นห้ากรณีดังนี้

- กรณีที่ 1:  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0.5^\circ$
- กรณีที่ 2:  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 24^\circ$
- กรณีที่ 3:  $\beta_1(0) = 8^\circ, \beta_2(0) = 0^\circ$
- กรณีที่ 4:  $\beta_1(0) = 0^\circ, \beta_2(0) = 13^\circ$
- กรณีที่ 5:  $\beta_1(0) = -6.2^\circ, \beta_2(0) = 6.2^\circ$

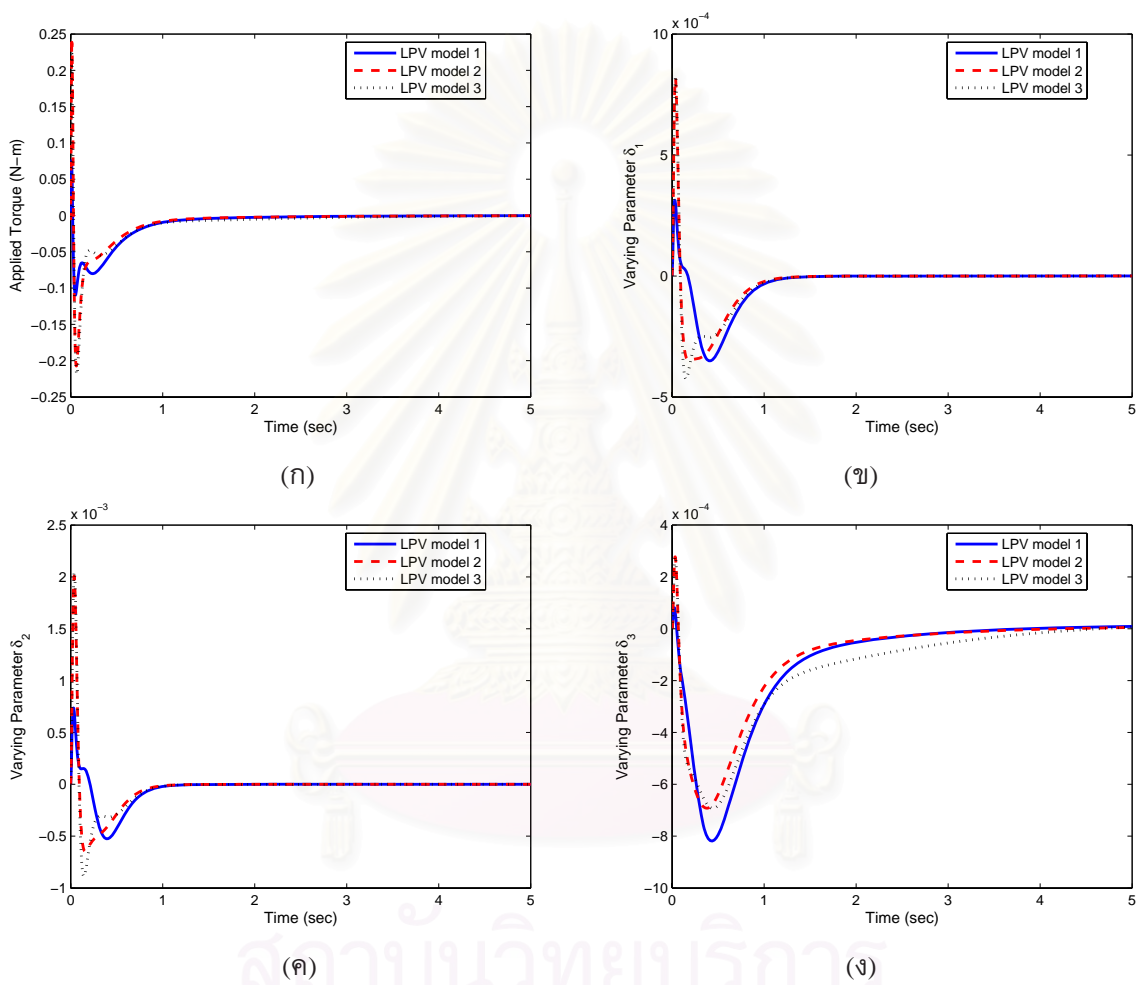
เนื่องจากจำนวนพารามิเตอร์แปรตามเวลาในแบบจำลองมีจำนวนค่อนข้างมากส่งผลให้จำนวนเงื่อนไข (2.72) มากตามไปด้วย ซอฟต์แวร์ที่เลือกใช้ในการหาคำตอบของเงื่อนไข (2.72)-(2.74) คือ SDPT3 [23] เนื่องจากมีความรวดเร็วในการหาคำตอบสูง ส่วนการหาพารามิเตอร์ของตัวควบคุมจะใช้ขั้นตอนเดียวกันกับภาคผนวก ข โดยเงื่อนไข (ข.29) ตั้งค่า  $\alpha_1 = 2\alpha^*$  และใช้ LMI control toolbox ในโปรแกรม Matlab สำหรับการแก้ปัญหา

เมื่อทำการจำลองผลตอบเราได้ผลลัพธ์แสดงในรูปที่ 3.3 ถึง 3.17 ดังนี้

- |             |   |
|-------------|---|
| รูปที่ 3.3  | ผลตอบของตัวแปรสถานะ $x$ ในกรณีที่ 1                               |
| รูปที่ 3.4  | สัญญาณควบคุมและแนววิถีของ $\delta'_1$ ถึง $\delta'_3$ ในกรณีที่ 1 |
| รูปที่ 3.5  | แนววิถีของ $\delta'_4$ ถึง $\delta'_7$ ในกรณีที่ 1                |
| รูปที่ 3.6  | ผลตอบของตัวแปรสถานะ $x$ ในกรณีที่ 2                               |
| รูปที่ 3.7  | สัญญาณควบคุมและแนววิถีของ $\delta'_1$ ถึง $\delta'_3$ ในกรณีที่ 2 |
| รูปที่ 3.8  | แนววิถีของ $\delta'_4$ ถึง $\delta'_7$ ในกรณีที่ 2                |
| รูปที่ 3.9  | ผลตอบของตัวแปรสถานะ $x$ ในกรณีที่ 3                               |
| รูปที่ 3.10 | สัญญาณควบคุมและแนววิถีของ $\delta'_1$ ถึง $\delta'_3$ ในกรณีที่ 3 |
| รูปที่ 3.11 | แนววิถีของ $\delta'_4$ ถึง $\delta'_7$ ในกรณีที่ 3                |
| รูปที่ 3.12 | ผลตอบของตัวแปรสถานะ $x$ ในกรณีที่ 4                               |
| รูปที่ 3.13 | สัญญาณควบคุมและแนววิถีของ $\delta'_1$ ถึง $\delta'_3$ ในกรณีที่ 4 |
| รูปที่ 3.14 | แนววิถีของ $\delta'_4$ ถึง $\delta'_7$ ในกรณีที่ 4                |
| รูปที่ 3.15 | ผลตอบของตัวแปรสถานะ $x$ ในกรณีที่ 5                               |
| รูปที่ 3.16 | สัญญาณควบคุมและแนววิถีของ $\delta'_1$ ถึง $\delta'_3$ ในกรณีที่ 5 |
| รูปที่ 3.17 | แนววิถีของ $\delta'_4$ ถึง $\delta'_7$ ในกรณีที่ 5                |

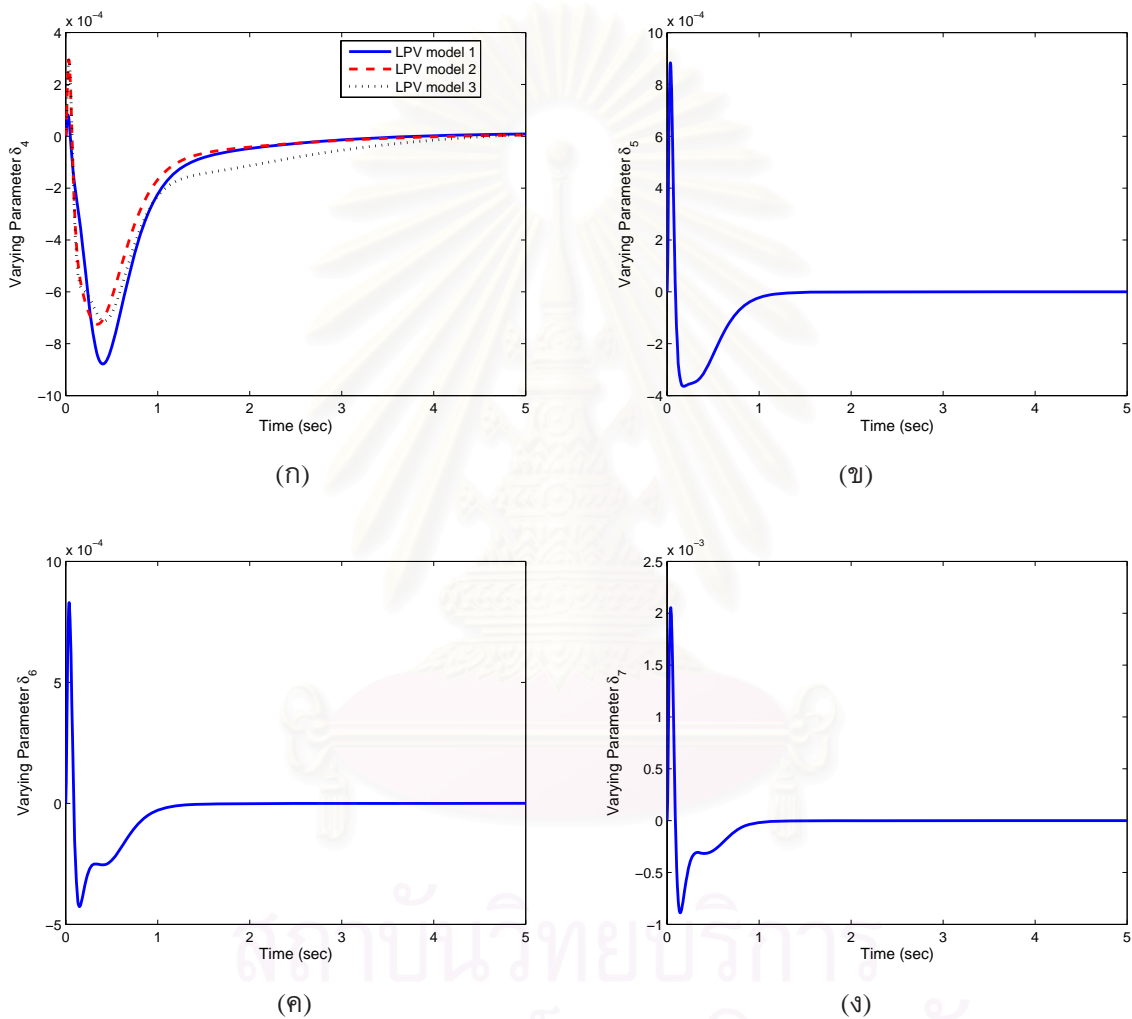


รูปที่ 3.3: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec)

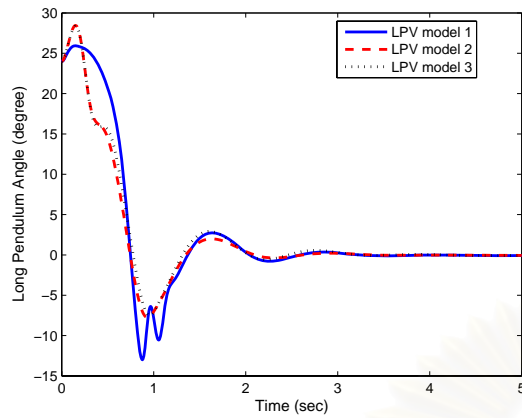


รูปที่ 3.4: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์  $\delta_1$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta_2$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta_3$

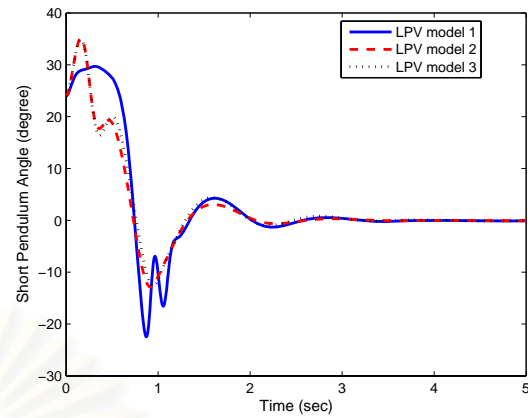




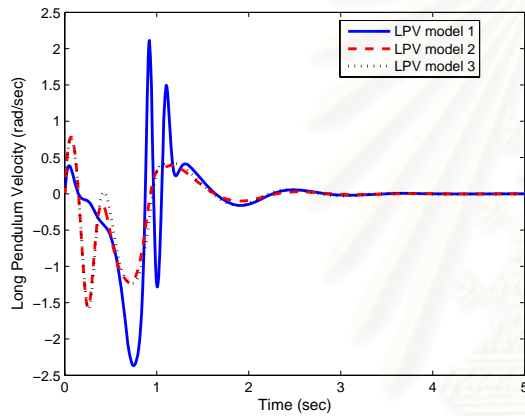
รูปที่ 3.5: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์  $\delta'_4$  (ข) พารามิเตอร์  $\delta'_5$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta'_6$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta'_7$



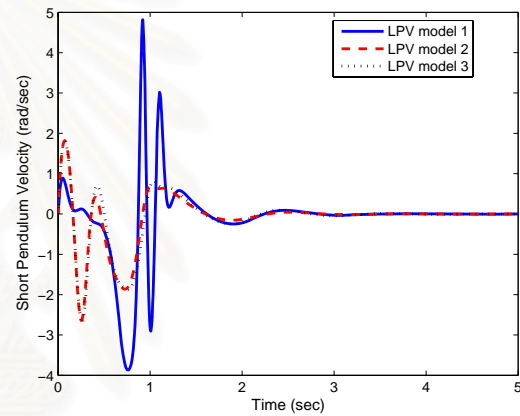
(ก)



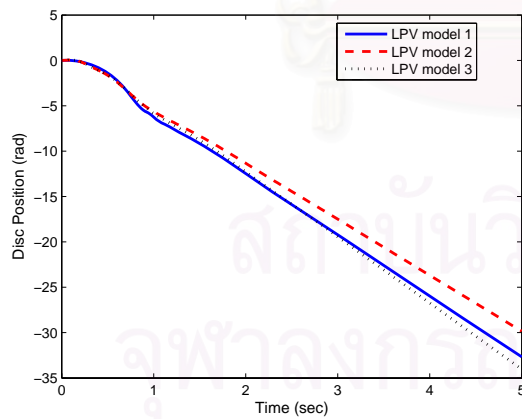
(ข)



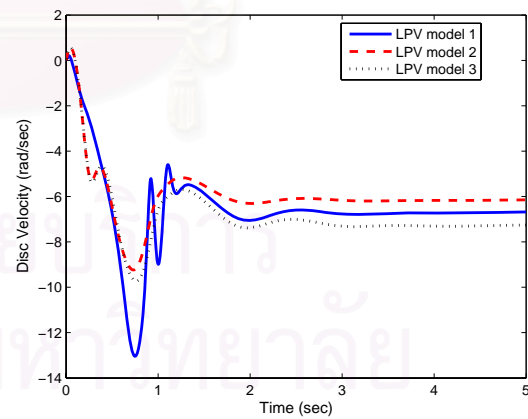
(ค)



(ง)

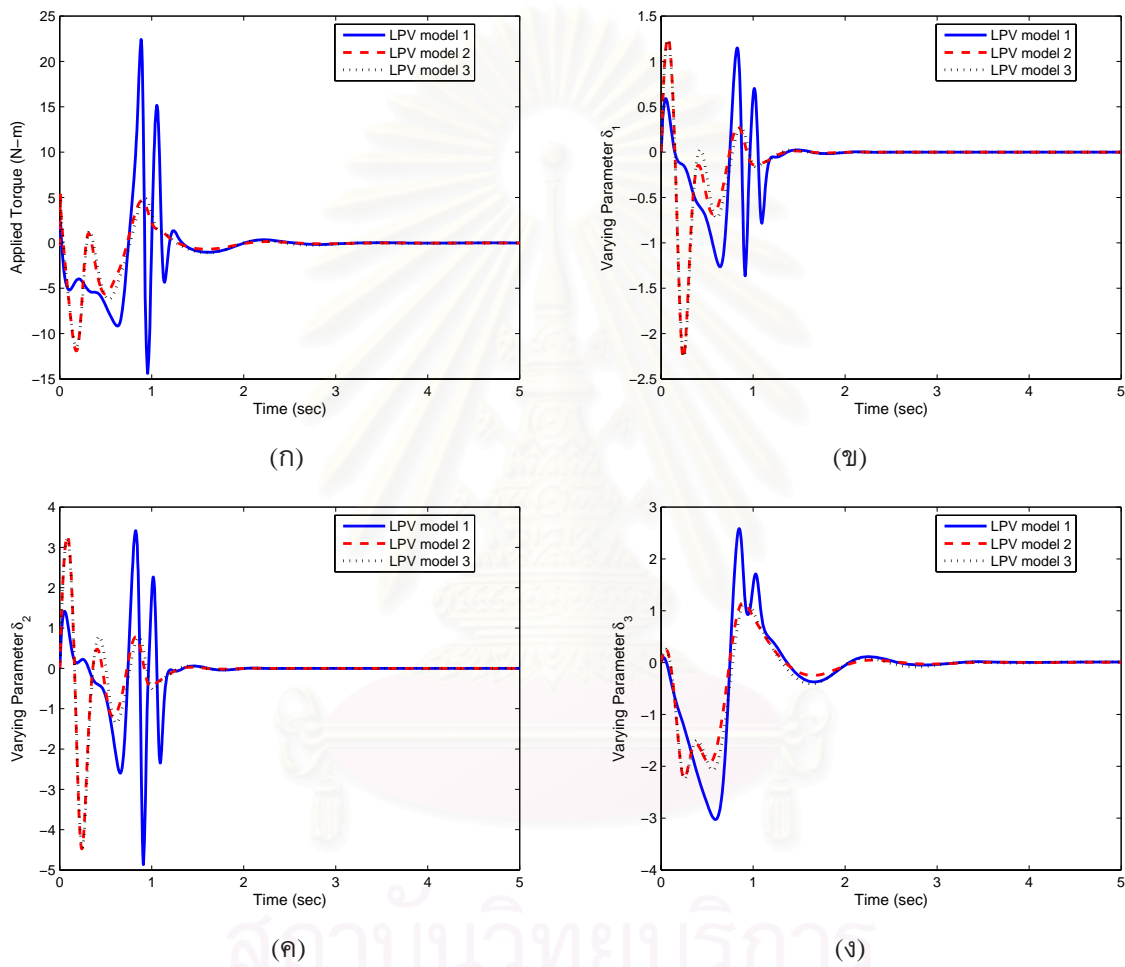


(จ)

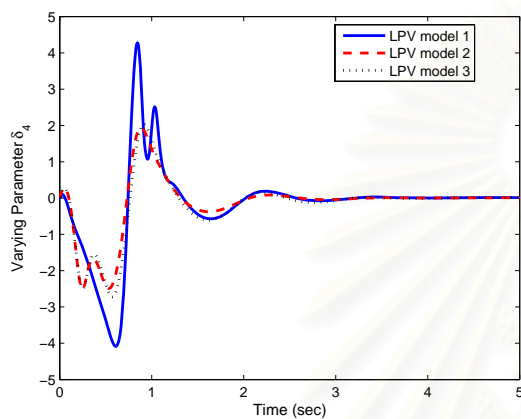


(ฉ)

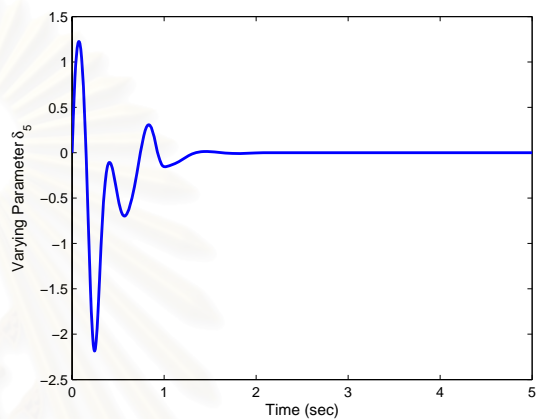
รูปที่ 3.6: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 2 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec)



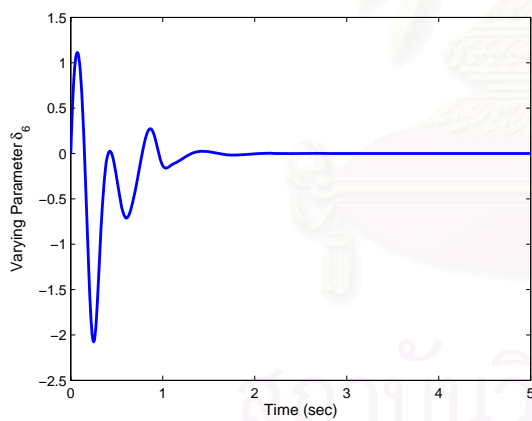
รูปที่ 3.7: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 2 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์  $\delta_1$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta_2$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta_3$



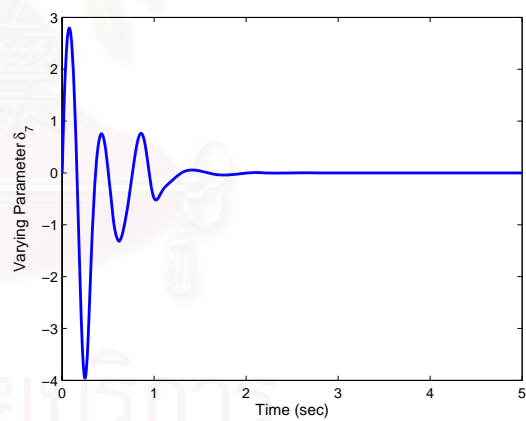
(ก)



(ข)

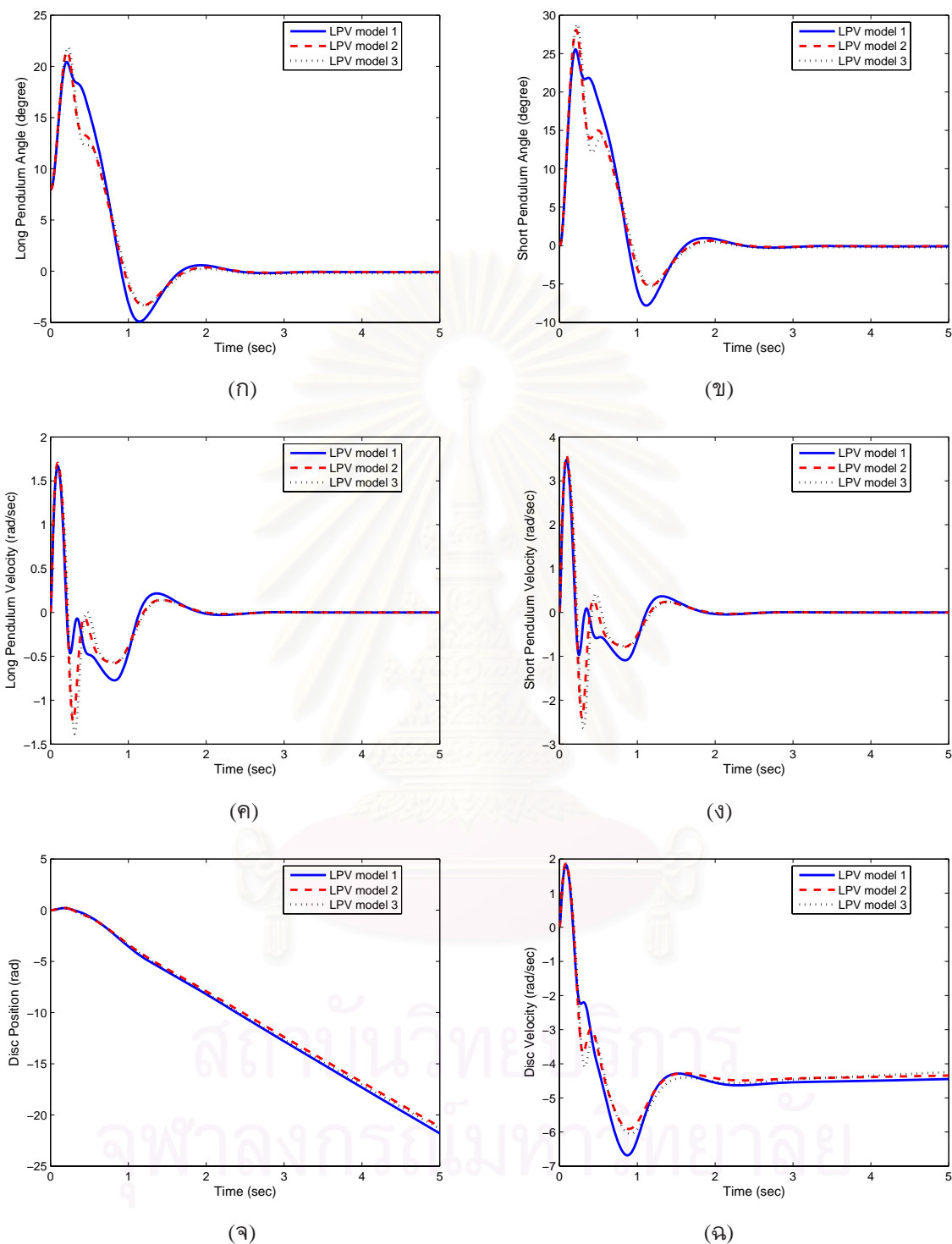


(ค)

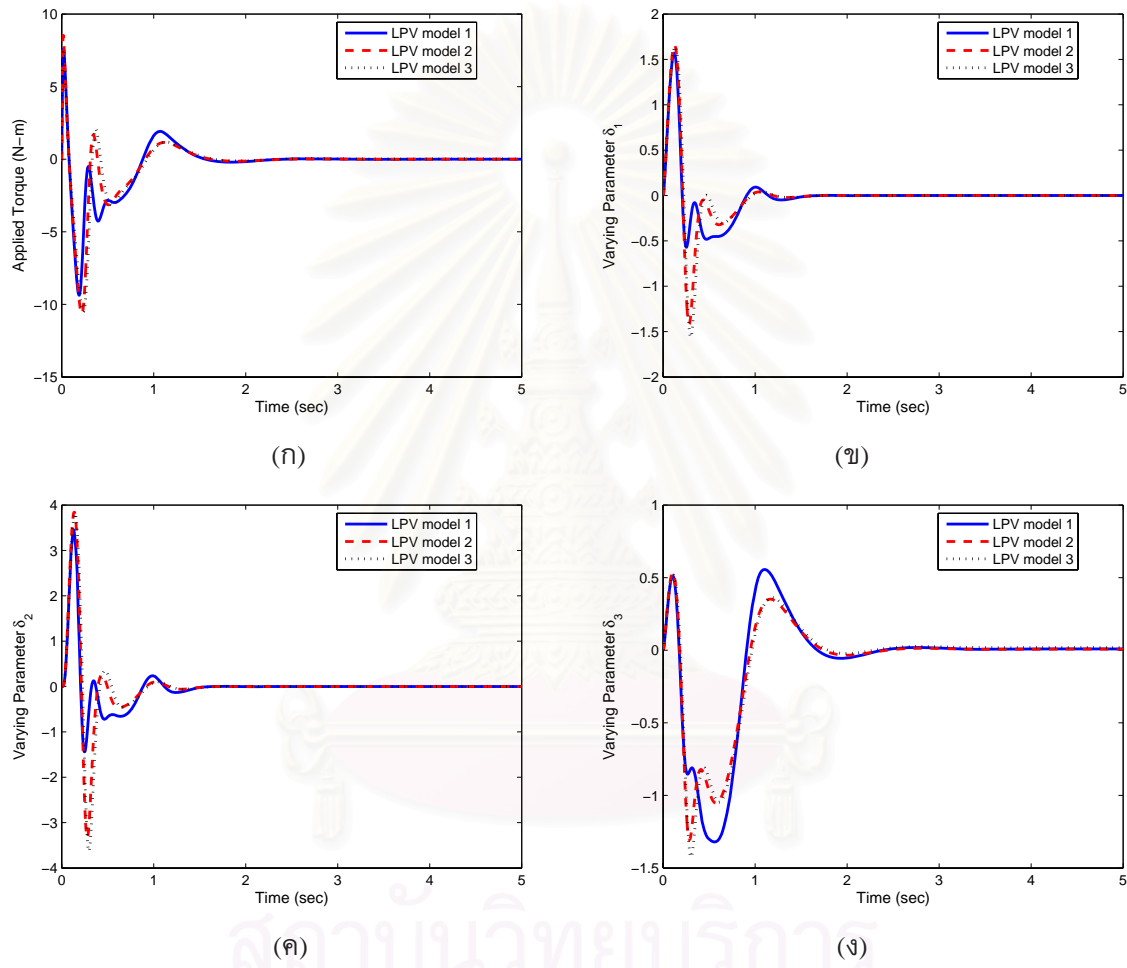


(ง)

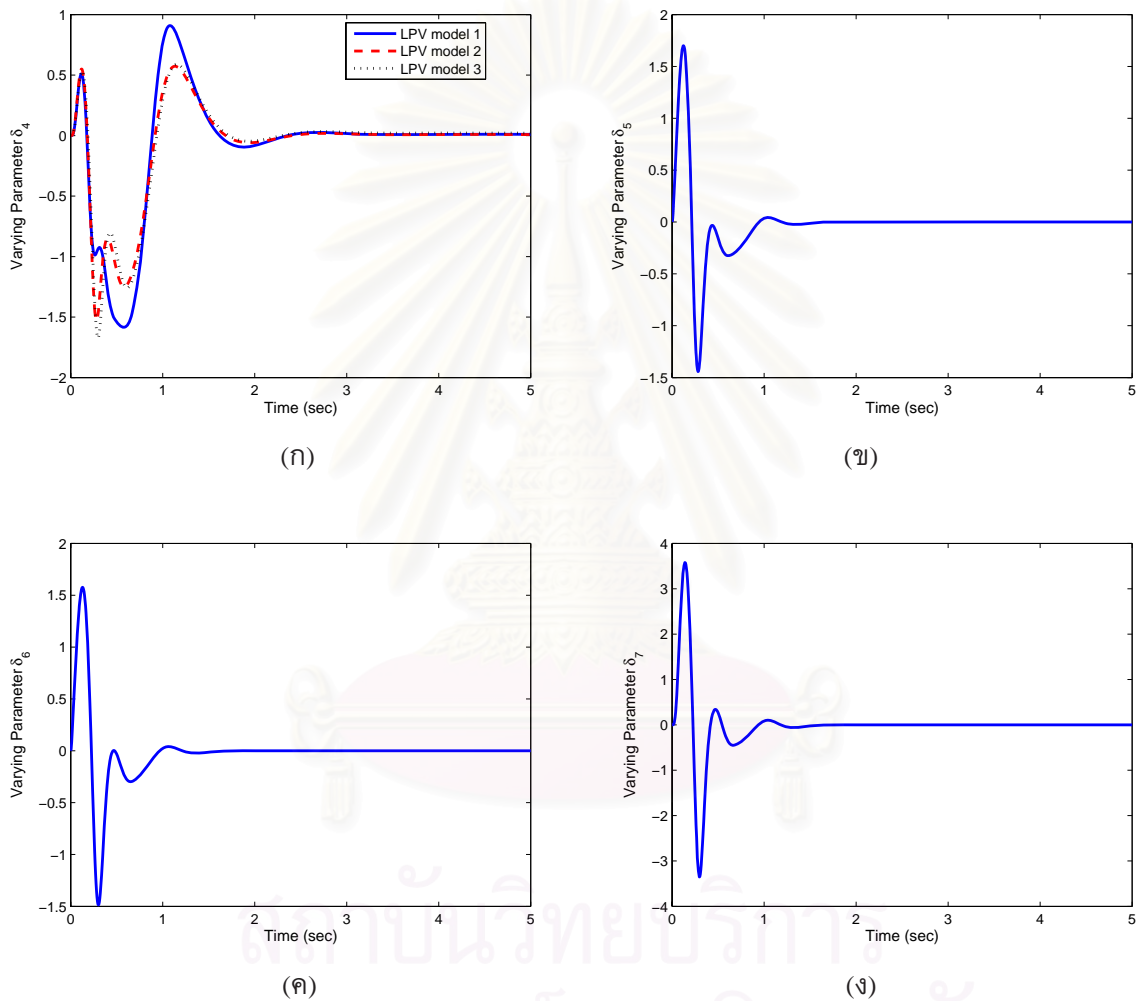
รูปที่ 3.8: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 2 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์  $\delta'_4$  (ข) พารามิเตอร์  $\delta'_5$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta'_6$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta'_7$



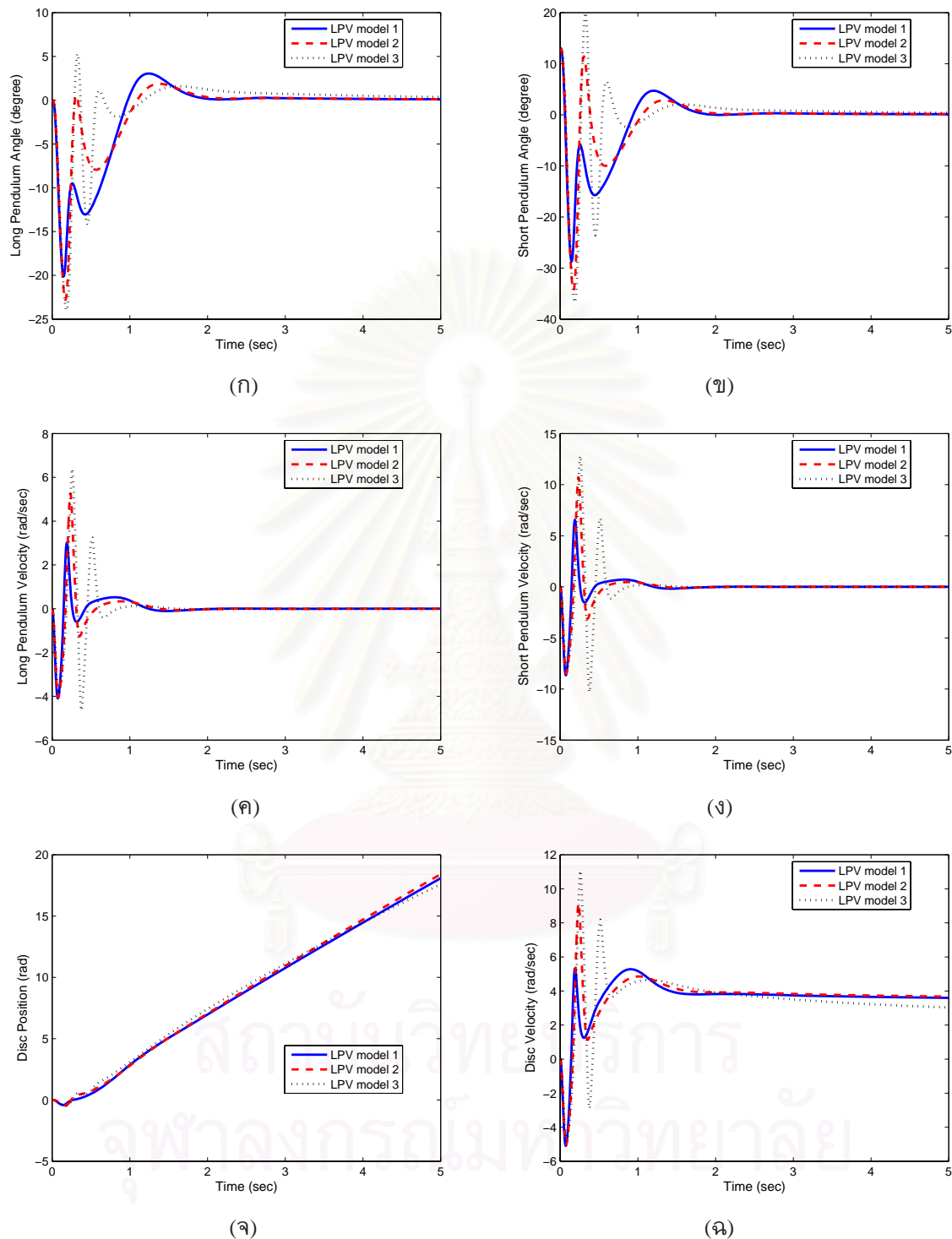
รูปที่ 3.9: ผลตอบสนองของระบบในกรณีที่ 3 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec)



รูปที่ 3.10: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 3 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์  $\delta'_1$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta'_2$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta'_3$

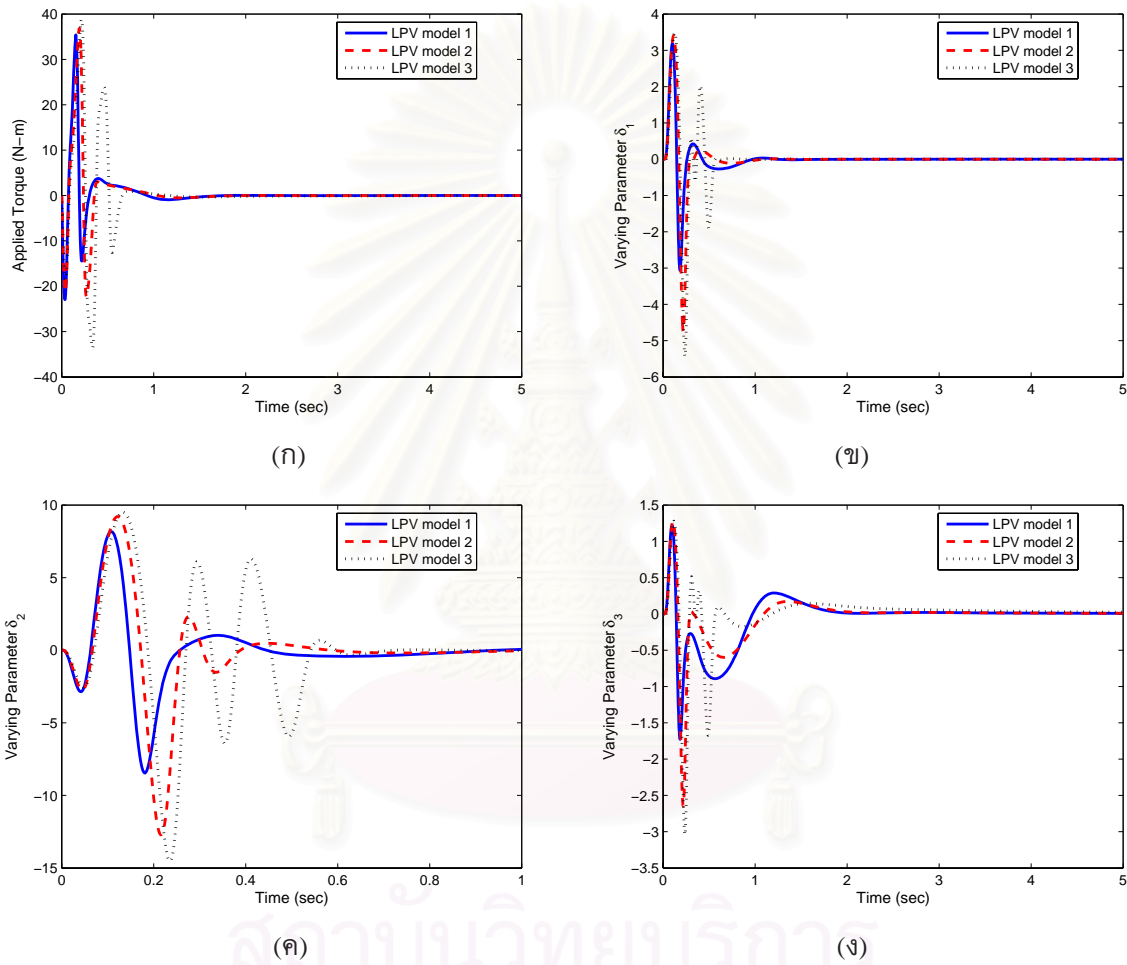


รูปที่ 3.11: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 3 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์  $\delta'_4$  (ข) พารามิเตอร์  $\delta'_5$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta'_6$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta'_7$

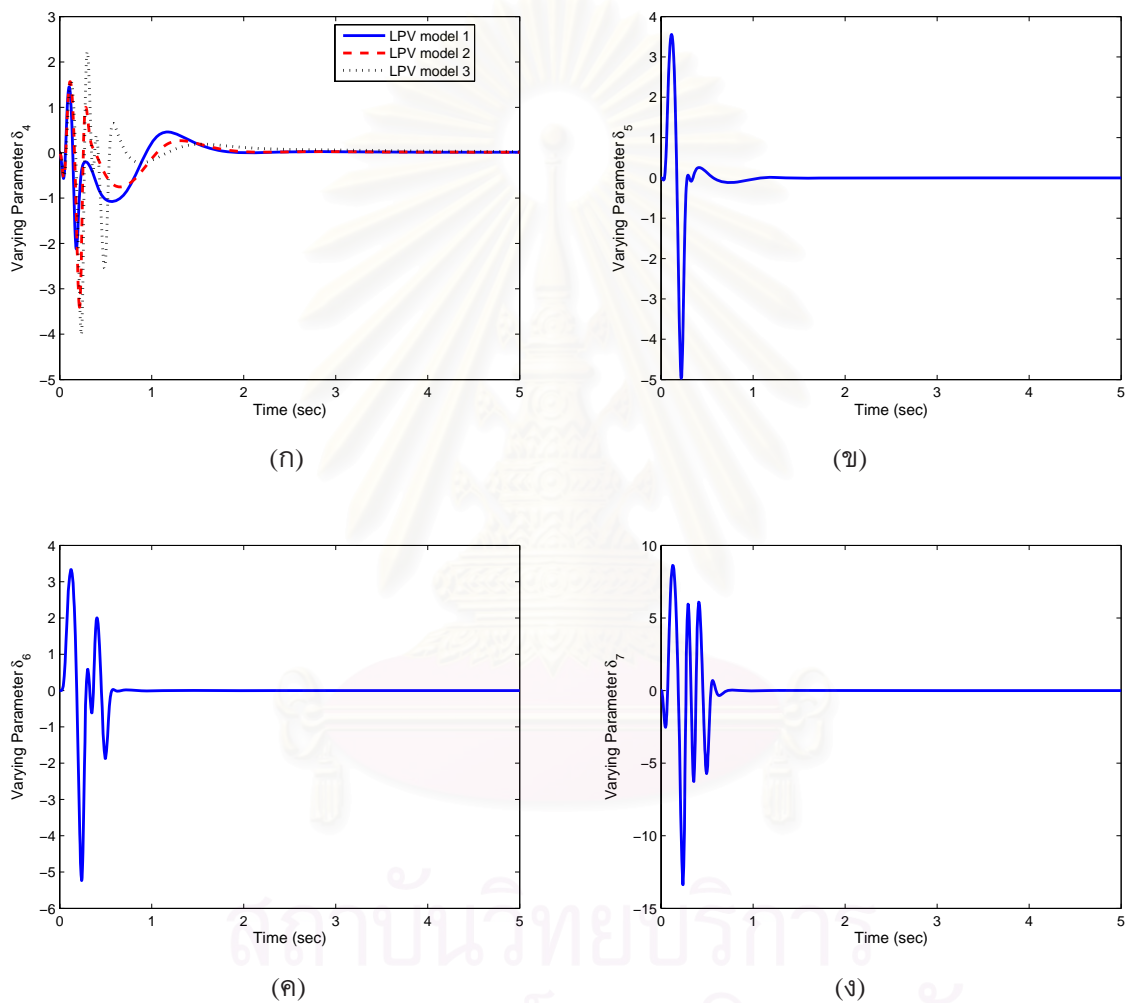


รูปที่ 3.12: ผลตอบสนองของระบบไนกรณีที่ 4 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec)

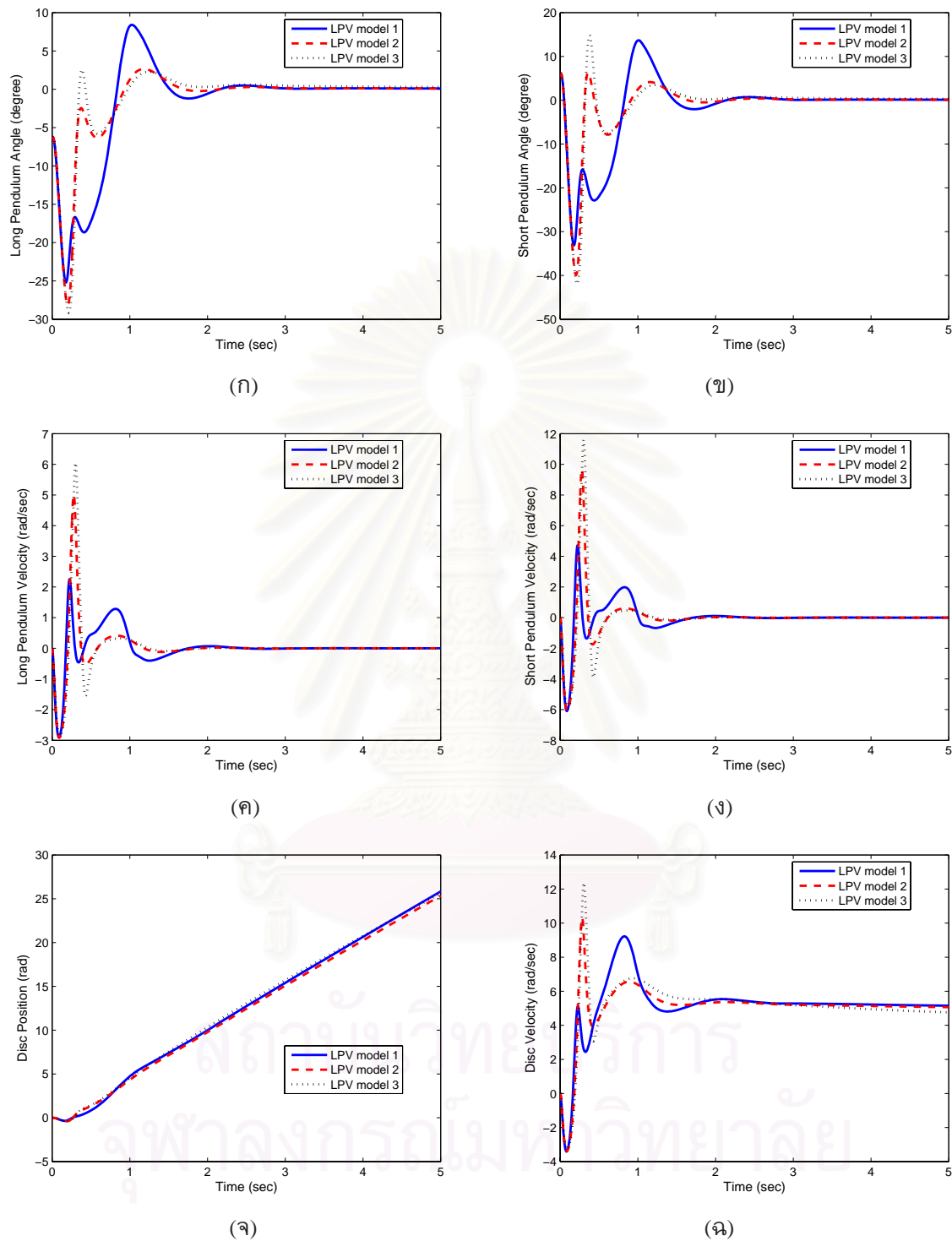




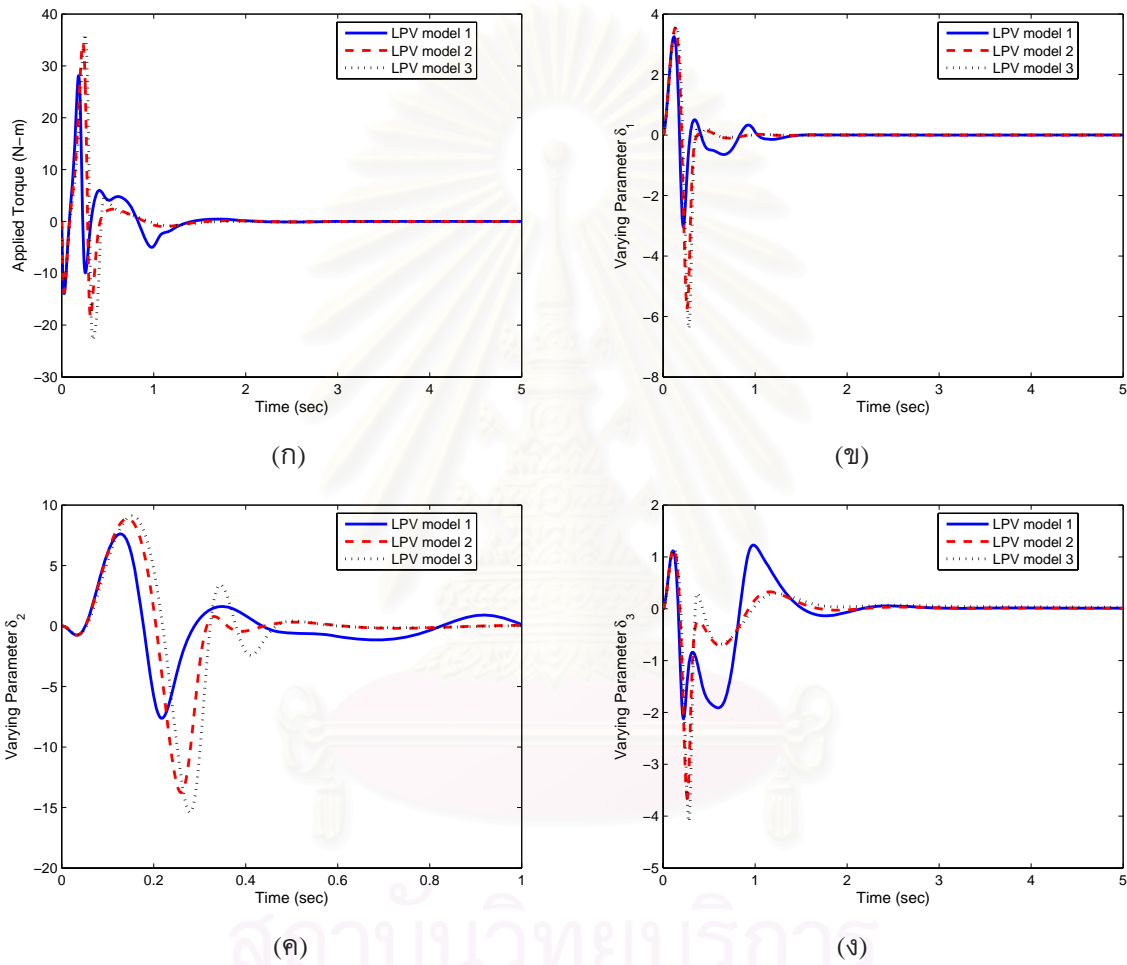
รูปที่ 3.13: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 4 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์  $\delta_1$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta_2$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta_3$



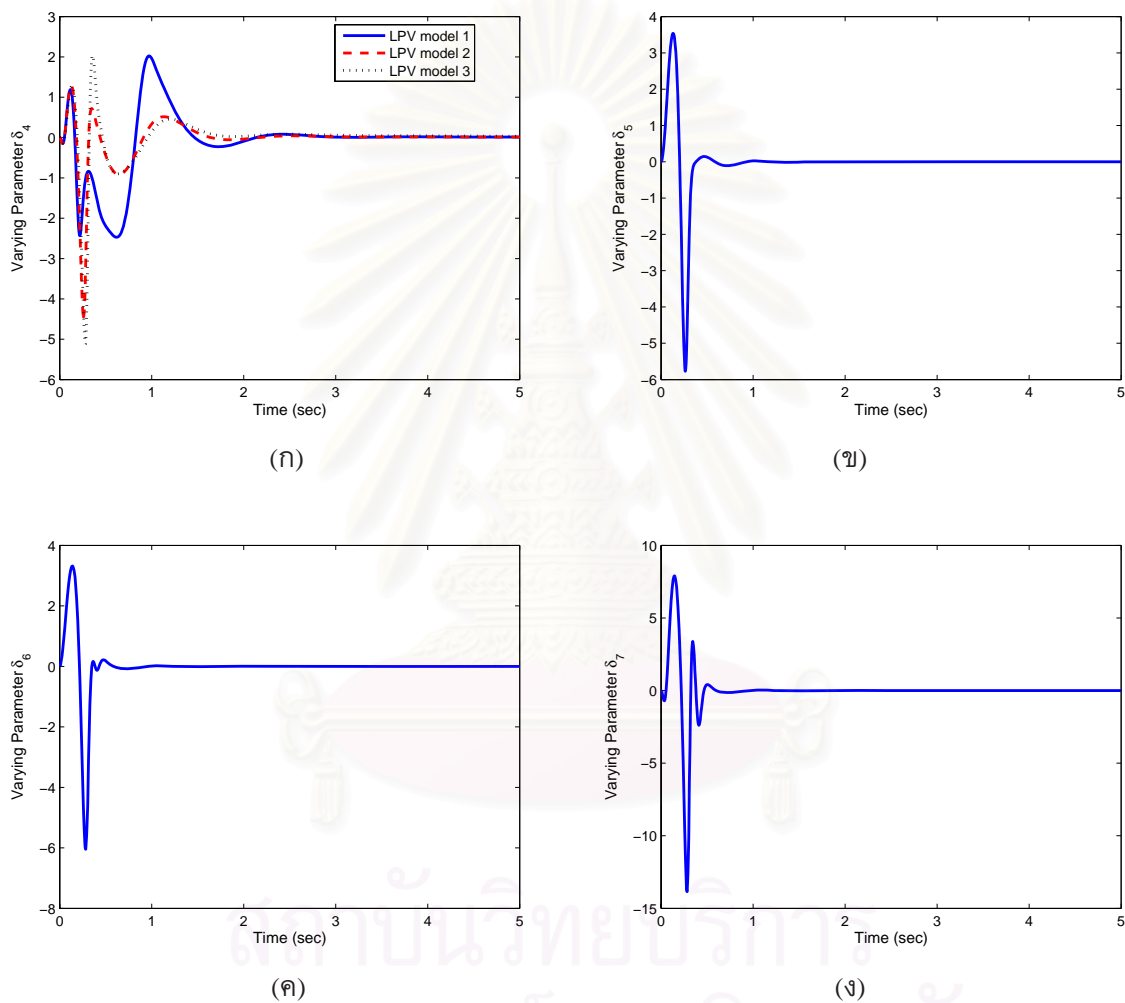
รูปที่ 3.14: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 4 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์  $\delta'_4$  (ข) พารามิเตอร์  $\delta'_5$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta'_6$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta'_7$



รูปที่ 3.15: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 5 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแท่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (องศา) (ค) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งยาว (rad/sec) (ง) ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแท่งสั้น (rad/sec) (จ) มุมของจานหมุน (rad) (ฉ) ความเร็วเชิงมุมของจานหมุน (rad/sec)



รูปที่ 3.16: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 5 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) สัญญาณควบคุม (N-m) (ข) พารามิเตอร์  $\delta_1$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta_2$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta_3$



รูปที่ 3.17: ผลตอบสนองของระบบในกรณีนี้ที่ 5 เมื่อใช้ตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลอง  $M_1$  (เส้นทึบ),  $M_2$  (เส้นประ),  $M_3$  (เส้นจุด): (ก) พารามิเตอร์  $\delta'_4$  (ข) พารามิเตอร์  $\delta'_5$  (ค) พารามิเตอร์  $\delta'_6$  (ง) พารามิเตอร์  $\delta'_7$

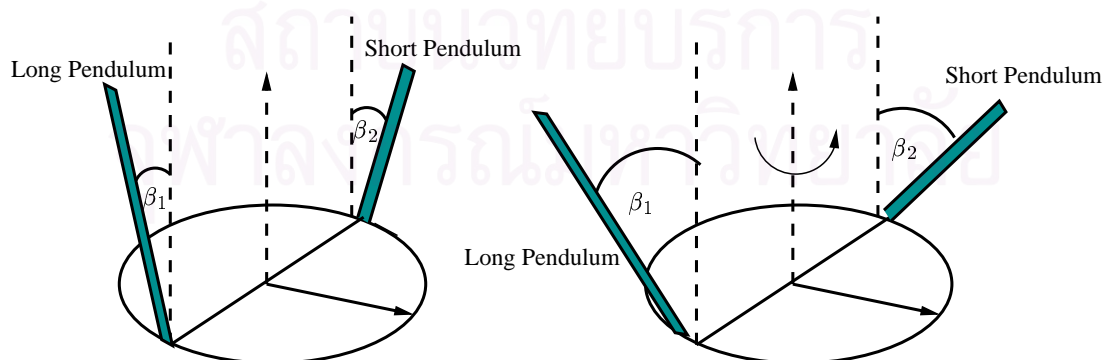
การวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จะแยกออกเป็นกรณีย่อยๆดังนี้

### กรณีที่ 1 และ 2

พิจารณากรณีที่ 1 จากรูปที่ 3.3 เห็นได้ว่าในกรณีที่มุมเบี่ยงเบนเริ่มต้นของเพนดูลัมมีค่าน้อยและวางตัวอยู่ในทิศทางเดียวกันผลตอบสนองของระบบไม่แตกต่างกันมากนัก เมื่อเราพิจารณาแนววิถีของพารามิเตอร์แปรตามเวลา  $\delta'_1$  ถึง  $\delta'_7$  จะเห็นได้ว่าพารามิเตอร์ทุกตัวจะวิ่งอยู่ในช่วงที่มีขนาดค้ำ ดังนั้นในกรณีนี้ผลกระทบของพารามิเตอร์ที่มีต่อการควบคุมจึงยังไม่ส่งผลกระทบมากนัก

ในกรณีที่ 2 ซึ่งขนาดของมุมเบี่ยงเบนมากขึ้นจะเห็นได้ว่าผลตอบสนองของระบบวงปิดมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด เมื่อพิจารณาจากลักษณะของผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมจะเห็นว่าในช่วงเวลาเริ่มต้นจานหมุนจะหมุนในทิศทางที่ทำให้มุมเบี่ยงเบนของเพนดูลัมทั้งสองแห่งเพิ่มขึ้น จนถึงตำแหน่งที่มีการถ่วงสมดุลเหมาะสมดังแสดงในรูปที่ 3.18 โดยที่ความเร็วในการหมุนของจานหมุนมีขนาดไม่มากนัก แต่เนื่องจากมุมเบี่ยงเบนของเพนดูลัมออกห่างจากจุดสมดุลมากขึ้น ดังนั้นในช่วงเวลาดังกล่าวนี้ความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมแห่งสั้นจะมีค่าสูง (รูปที่ 3.6(ง)) เนื่องจากแบบจำลอง  $M_1$  มีพารามิเตอร์แปรตามเวลาที่เกี่ยวข้องกับความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัม อยู่เพียงสองตัวคือ  $\delta'_1$  และ  $\delta'_2$  ขณะที่แบบจำลองชุด  $M_2$  มีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องเพิ่มเติมอีกหนึ่งตัวคือ  $\delta'_3$  และแบบจำลอง  $M_3$  มีพารามิเตอร์เพิ่มเติมสองตัวคือ  $\delta'_6$  และ  $\delta'_7$  ดังนั้นตัวควบคุม  $K_2$  และ  $K_3$  จะได้รับผลกระทบมากกว่า จากรูปที่ 3.8(ข) ถึง 3.8(ง) จะเห็นได้ว่าขนาดของพารามิเตอร์  $\delta'_5$ ,  $\delta'_6$  และ  $\delta'_7$  จะมีค่าเกินขอบเขตที่ตัวควบคุมรับประกันเสถียรภาพและสมรรถนะ ส่งผลให้ในช่วงเวลาเริ่มแรกผลตอบที่ได้จากการใช้ตัวควบคุม  $K_2$  และ  $K_3$  จึงเกิดการแกว่งขึ้น ( $t \approx 0.3$  ถึง  $0.5$  วินาที) แต่เนื่องจากขนาดของ  $\delta'_5$ ,  $\delta'_6$  และ  $\delta'_7$  มีค่าเกินขอบเขตที่กำหนดในช่วงเวลาสั้นๆ ดังนั้นการแกว่งของผลตอบจึงยังปรากฏไม่มากนัก

หลังจากที่เพนดูลัมทั้งสองแห่งอยู่ในตำแหน่งที่มีการถ่วงสมดุล ระบบจะเริ่มดึงเพนดูลัมเข้าสู่จุดสมดุลโดยการเร่งความเร็วของจานหมุนมากขึ้น เนื่องจากแบบจำลอง  $M_1$  มีพารามิเตอร์แปรตามเวลาที่เกี่ยวข้องกับความเร็วเชิงมุมจานหมุนถึงสี่ตัวคือ  $\delta'_3 I_{2 \times 2}$  และ  $\delta'_4 I_{2 \times 2}$  ขณะที่แบบจำลอง  $M_2$



รูปที่ 3.18: รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 2: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา)

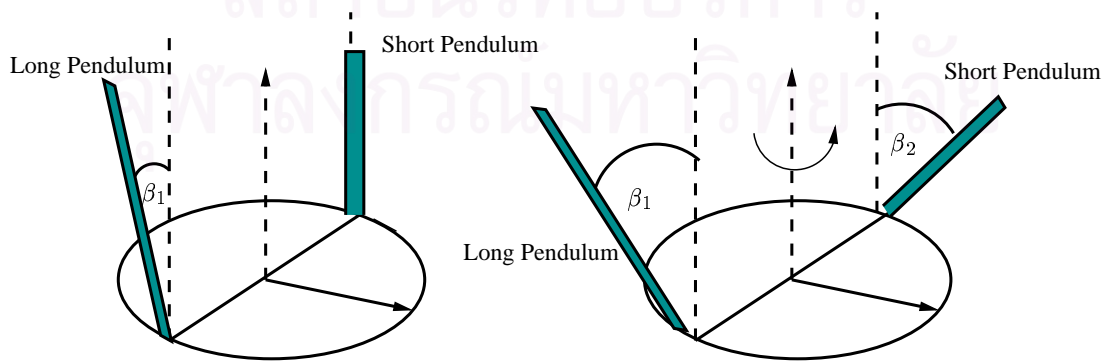
และ  $\mathcal{M}_3$  มีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องเพียงสองตัวคือ  $\delta'_3$  และ  $\delta'_4$  ดังนั้นในช่วงเวลานี้ระบบที่ใช้ตัวควบคุม  $\mathcal{K}_1$  จะได้รับผลกระทบมากกว่า จากรูปที่ 3.7(ง) และ 3.8(ก) เห็นได้ว่าขนาดของพารามิเตอร์ที่ได้จากการใช้ตัวควบคุม  $\mathcal{K}_1$  จะมีค่าเกินขอบเขตที่กำหนดไว้ในช่วงเวลาที่ยาวนานกว่ากรณีของพารามิเตอร์  $\delta'_5, \delta'_6$  และ  $\delta'_7$  และมีขนาดสูงกว่าผลตอบที่ได้จากตัวควบคุม  $\mathcal{K}_2$  และ  $\mathcal{K}_3$  ดังนั้นในช่วงเวลานี้ ( $t \approx 0.8$  ถึง 1.1 วินาที) ผลตอบที่ได้จากตัวควบคุม  $\mathcal{K}_1$  จึงเกิดการแกว่งที่เด่นชัดขึ้นมา

**กรณีที่ 3**

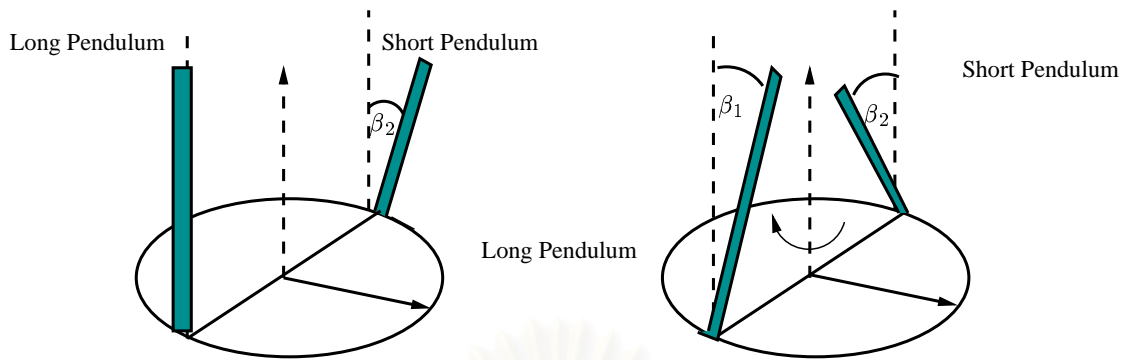
สำหรับในกรณีที่ 3 ขั้นตอนในการควบคุมจะมีลักษณะเดียวกันกับกรณีที่ 2 คือหมุนจานหมุนด้วยความเร็วต่ำในทิศทางที่เพิ่มขนาดมุมเบี่ยงเบนของเพนดูลัมทั้งสองแท่งเพื่อปรับการถ่วงสมดุลของเพนดูลัมก่อน จากนั้นจึงเร่งความเร็วของจานหมุนเพื่อดึงเพนดูลัมเข้าสู่จุดสมดุล เพียงแต่ในกรณีนี้ความเร็วที่จานหมุนเริ่มหมุนเพื่อดึงเพนดูลัมเข้าสู่จุดสมดุลจะมีขนาดที่ต่ำกว่าในกรณีที่สอง (ดูรูปที่ 3.9(ฉ)) ดังนั้นขนาดการแกว่งของผลตอบที่ได้จากตัวควบคุมชุด  $\mathcal{K}_1$  ในช่วงเวลาดังกล่าวจึงมีค่าไม่สูงเหมือนในกรณีที่ผ่านมาดังแสดงในรูปที่ 3.9(ก)- 3.9(ง)

**กรณีที่ 4**

ในกรณีที่ 4 ขั้นตอนการควบคุมจะแตกต่างกับกรณีที่ผ่านมาคือในช่วงเวลาแรกจานหมุนจะหมุนด้วยอัตราเร็วที่สูงมากเพื่อดึงเพนดูลัมแท่งสั้นให้อยู่ในตำแหน่งมุม  $\beta_2 < 0$  โดยมุมของเพนดูลัมแท่งยาวก็จะเบี่ยงเบนออกจากจุดสมดุลไปในทิศทางเดียวกันกับเพนดูลัมแท่งสั้นดังแสดงในรูปที่ 3.20 โดยที่มุมการเบี่ยงเบนที่  $\beta_1$  มีค่าน้อยกว่าเนื่องจากมีโมเมนต์ความเฉื่อยที่มากกว่า ในช่วงที่จานหมุนหมุนด้วยอัตราเร็วสูงจึงส่งผลให้เพนดูลัมแท่งสั้นมีความเร็วเชิงมุมสูงด้วย ดังนั้นในช่วงแรกของการควบคุม พารามิเตอร์  $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_5, \delta'_6$  และ  $\delta'_7$  จะมีขนาดสูงเกินขอบเขตที่กำหนดมาก ดังนั้นผลตอบที่ได้จากตัวควบคุมชุด  $\mathcal{K}_2$  และ  $\mathcal{K}_3$  จะมีการแกว่งอย่างเห็นได้ชัดในช่วงเวลาดังกล่าวดังแสดงในรูปที่ 3.12(ก) ถึง 3.12(ฉ) ในกรณีนี้ผลตอบที่ได้จากตัวควบคุม  $\mathcal{K}_3$  จะมีการแกว่งมากที่สุดเนื่องจากพารามิเตอร์  $\delta'_7$  จะส่งผลกระทบต่อระบบค่อนข้างมาก (ดูรูปที่ 3.14(ง)) ส่วนตัวควบคุมชุด  $\mathcal{K}_1$  จะได้รับผลกระทบจากความเร็วเชิงมุมของเพนดูลัมน้อย



รูปที่ 3.19: รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 3: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา)



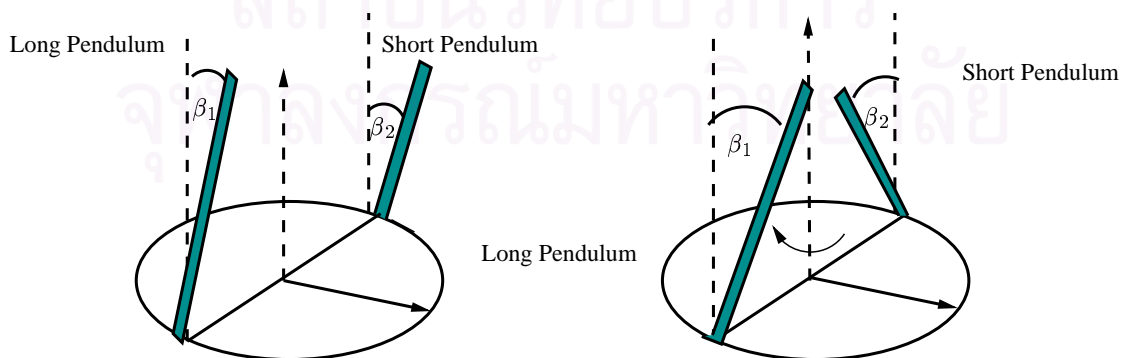
รูปที่ 3.20: รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 4: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา)

กว่า ผลตอบที่ได้จึงมีการแกว่งที่น้อยกว่า สำหรับผลกระทบจากความเร็วของจานหมุนเห็นได้ว่าค่าพารามิเตอร์  $\delta_3$  และ  $\delta_4$  จะมีค่าเกินขอบเขตที่กำหนดในช่วงเวลาสั้นๆ เท่านั้น ดังนั้นผลกระทบที่มีต่อระบบเมื่อใช้ตัวควบคุม  $K_1$  จึงส่งผลไม่เด่นชัดมากนัก

#### กรณีที่ 5

สำหรับในกรณีที่ 5 มีขั้นตอนการควบคุมที่เหมือนกับกรณีที่ 4 เพียงแต่ในช่วงเวลาเริ่มต้นจานหมุนจะหมุนด้วยความเร็วที่ต่ำกว่า ส่งผลให้ความเร็วของเพนดูลัมมีค่าต่ำกว่าในกรณีที่ผ่านมา ดังนั้นผลกระทบทางด้านเสถียรภาพจะน้อยกว่า ผลตอบที่ได้ในช่วงเวลาเริ่มต้นจึงมีขนาดของการแกว่งที่น้อยกว่ากรณีที่สองอย่างเห็นได้ชัด

**ข้อสังเกต 3.1** ถึงแม้ว่าในกรณีที่สี่และห้าผลตอบสนองของระบบจากตัวควบคุมชุด  $K_2$  และ  $K_3$  จะเกิดการแกว่งขึ้นในช่วงเวลาเริ่มต้น แต่ผลลัพธ์ที่ได้คือแท่งเพนดูลัมจะวางตัวอยู่ในตำแหน่งที่ใกล้จุดสมดุลมากกว่าการใช้ตัวควบคุม  $K_1$  (รูปที่ 3.12(ก), 3.12(ข), 3.15(ก), 3.15(ข)) ความเร็วของจานหมุนที่ใช้ในการตั้งเพนดูลัมเข้าสู่จุดสมดุลในช่วงเวลาที่เหลือในกรณีที่ใช้ตัวควบคุม  $K_1$  จึงมีขนาดมากกว่า ดังนั้นผล



รูปที่ 3.21: รูปแบบการปรับสมดุลของเพนดูลัมในกรณีที่ 5: ตำแหน่งเริ่มต้น (ซ้าย) ตำแหน่งภายหลังการปรับสมดุล (ขวา)



กระทบของความเร็วงานหมุนจะส่งผลกระทบมากกว่าการใช้ตัวควบคุมชุด  $K_2$  และ  $K_3$  ผลตอบที่ได้จากตัวควบคุม  $K_1$  จะมีขนาดการแกว่งในช่วงเวลาก่อนเข้าสู่จุดสมดุล (ช่วง 1 ถึง 2 วินาที) มากกว่าโดยการแกว่งดังกล่าวจะเห็นได้ชัดเจนมากขึ้นในกรณีที่ห้า (รูปที่ 3.15(ก), 3.15(ข)) สำหรับในกรณีที่ 5 เมื่อพิจารณาจากตำแหน่งหลังจากการปรับสมดุล (ที่  $t \approx 0.4$  วินาที) โดยงานหมุนเห็นได้ว่าจะอยู่ห่างจากจุดสมดุลมากกว่า ( $\beta_1 \approx 20^\circ$  ในกรณีที่ 4,  $\beta_1 \approx 25^\circ$  ในกรณีที่ 5) ดังนั้นการตั้งเพนดูลัมเข้าสู่จุดสมดุลจำเป็นต้องใช้ความเร็วของงานหมุนที่มากกว่า ดังนั้นกรณีที่ 5 ตัวควบคุม  $K_1$  จะได้รับผลกระทบมากกว่า ผลตอบในช่วง 1 ถึง 2 วินาที จึงมีขนาดการแกว่งที่ใหญ่กว่ากรณีที่ 4

เราสรุปผลของการควบคุมที่ได้จากตัวควบคุมทั้งสามชุดในกรณีที่ 2 ถึง 4 แสดงในตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2: สรุปผลของการควบคุมที่ได้จากตัวควบคุม  $K_1$ ,  $K_2$  และ  $K_3$

กรณีการควบคุม	ตัวควบคุม $K_1$	ตัวควบคุม $K_2$	ตัวควบคุม $K_3$
กรณีที่ 2	ผลตอบมีการแกว่งในช่วงที่งานหมุนตั้งเพนดูลัมสู่จุดศูนย์ ( $t \approx 0.8$ ถึง 1.1 วินาที)	ผลตอบมีการแกว่งเล็กน้อยภายหลังการปรับสมดุลโดยงานหมุน ( $t \approx 0.3$ ถึง 0.5)	ผลตอบใกล้เคียงกับตัวควบคุม $K_2$
กรณีที่ 3	เหมือนกรณีที่ 2 แต่ขนาดการแกว่งต่ำกว่า	เหมือนกรณีที่ 2 แต่ขนาดการแกว่งต่ำกว่า	เหมือนกรณีที่ 2 แต่ขนาดการแกว่งต่ำกว่า
กรณีที่ 4	ผลตอบมีการแกว่งเล็กน้อยภายหลังการปรับสมดุลโดยงานหมุน ( $t \approx 0$ ถึง 1 วินาที), การพุ่งเกินสูงกว่าตัวควบคุม $K_2$ และ $K_3$ เล็กน้อยในช่วง $t \approx 0.8$ ถึง 2 วินาที	ผลตอบมีการแกว่งสูงกว่าตัวควบคุม $K_1$ ภายหลังการปรับสมดุลโดยงานหมุน ( $t \approx 0$ ถึง 1 วินาที), การพุ่งเกินต่ำกว่าตัวควบคุม $K_1$ เล็กน้อยในช่วง $t \approx 0.8$ ถึง 2 วินาที	ผลตอบมีการแกว่งสูงกว่าตัวควบคุม $K_1$ , $K_2$ ภายหลังการปรับสมดุลโดยงานหมุน ( $t \approx 0$ ถึง 1 วินาที) มาก, การพุ่งเกินในช่วง $t \approx 0.8$ ถึง 2 วินาทีต่ำกว่าตัวควบคุม $K_1$ และ $K_2$ เล็กน้อย
กรณีที่ 5	เหมือนกรณีที่ 4 แต่ขนาดการแกว่งในช่วงเวลาเริ่มต้นต่ำกว่า, ขนาดการพุ่งเกินในช่วง $t \approx 0.8$ ถึง 2 วินาทีสูงกว่ากรณีที่ 4 มาก	เหมือนกรณีที่ 4 แต่ขนาดการแกว่งในช่วงเวลาเริ่มต้นต่ำกว่า, การพุ่งเกินในช่วง $t \approx 0.8$ ถึง 2 วินาทีต่ำกว่าตัวควบคุม $K_1$	เหมือนกรณีที่ 4 แต่ขนาดการแกว่งในช่วงเวลาเริ่มต้นต่ำกว่า, การพุ่งเกินในช่วง $t \approx 0.8$ ถึง 2 วินาทีต่ำกว่าตัวควบคุม $K_1$ และ $K_2$

จากผลลัพธ์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าการนิยามพารามิเตอร์แปรตามเวลาที่แตกต่างกัน สามารถให้ผลลัพธ์การควบคุมที่แตกต่างกัน เมื่อเปรียบเทียบตัวควบคุม  $K_2$  และ  $K_3$  พบว่าผลตอบที่ได้จากตัวควบคุม  $K_2$  เป็นที่น่าพอใจมากกว่าตัวควบคุม  $K_3$  นอกจากนี้เมื่อพิจารณาสมการ (2.103) จะเห็นได้ว่ามีเทอมการหาตัวผกผันของเมทริกซ์อยู่ โดยที่ขนาดของเทอมดังกล่าวขึ้นอยู่กับจำนวนของพารามิเตอร์แปรตามเวลาในระบบ ในกรณีที่ตัวควบคุม  $K_2$  เราต้องทำการหาเมทริกซ์ผกผันขนาด  $10 \times 10$  ขณะที่ในกรณีของตัวควบคุม  $K_3$  ขนาดของเมทริกซ์ผกผันคือ  $12 \times 12$  ดังนั้นเมื่อพิจารณาในแง่ของการทำงานของตัวควบคุมใน

ทางปฏิบัติการใช้ตัวควบคุม  $K_2$  จะเหมาะสมกว่าเนื่องจากใช้เวลาในการคำนวณสัญญาณควบคุมที่ต่ำกว่าตัวควบคุม  $K_3$

อย่างไรก็ตามเมื่อเปรียบเทียบตัวควบคุม  $K_1$  และ  $K_2$  พบว่ามีข้อดีข้อเสียที่แตกต่างกัน ตัวควบคุม  $K_1$  จะให้ผลตอบที่มีขนาดการแกว่งช่วงเวลาเริ่มต้นที่ต่ำกว่าตัวควบคุม  $K_2$  แต่อาจเกิดส่วนพุ่งเกินขนาดใหญ่ได้เมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง ขณะที่ตัวควบคุม  $K_2$  ให้ผลตอบที่มีการแกว่งในระยะเริ่มต้นโดยในบางกรณีการแกว่งอาจมีขนาดสูงแต่ก็เกิดในช่วงเวลาไม่ยาวนานนัก เมื่อเวลาผ่านไปผลตอบที่ได้ก็มีแนวโน้มที่จะราบเรียบกว่าผลตอบจากตัวควบคุม  $K_1$

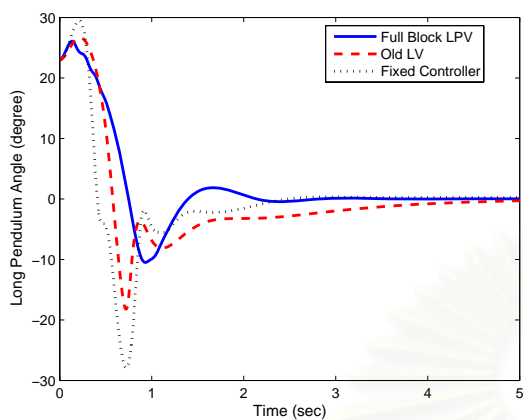
ถ้าเราพิจารณาเงื่อนไข (2.45) เห็นได้ว่าจำนวนเงื่อนไขของตัวคุณ  $P$  และ  $\tilde{P}$  ที่ต้องทำการคำนวณสำหรับตัวควบคุม  $K_1$  คือ  $2^4 + 2^4 = 32$  เงื่อนไขขณะที่จำนวนเงื่อนไขดังกล่าวสำหรับตัวควบคุม  $K_2$  คือ  $2^5 + 2^5 = 64$  เงื่อนไข ดังนั้นการแก้ปัญหาค่าเหมาะที่สุดเชิงเส้นในกรณีของตัวควบคุม  $K_1$  จึงใช้เวลาการคำนวณหาค่าตอบน้อยกว่ากรณีตัวควบคุม  $K_2$  แต่เมื่อพิจารณาในแง่การทำงานในระบบจริง ตัวควบคุม  $K_2$  ต้องทำการหาเมทริกซ์ผกผันขนาด  $10 \times 10$  ขณะที่ตัวควบคุม  $K_1$  ต้องทำการหาเมทริกซ์ผกผันขนาด  $12 \times 12$  ดังนั้นตัวควบคุม  $K_2$  จะใช้เวลาในการคำนวณสัญญาณควบคุมที่ต่ำกว่าตัวควบคุม  $K_1$  จากข้อดีข้อเสียดังกล่าวนี้ จึงยังไม่สามารถสรุปได้แน่ชัดว่าตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลองชุดใดให้ผลลัพธ์การควบคุมที่ดีและเหมาะสมในทางปฏิบัติที่สุด ดังนั้นจึงควรมีการศึกษาแนวทางการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์และผลกระทบที่มีต่อการควบคุมให้ชัดเจนต่อไป

### 3.5 ผลของตัวควบคุม

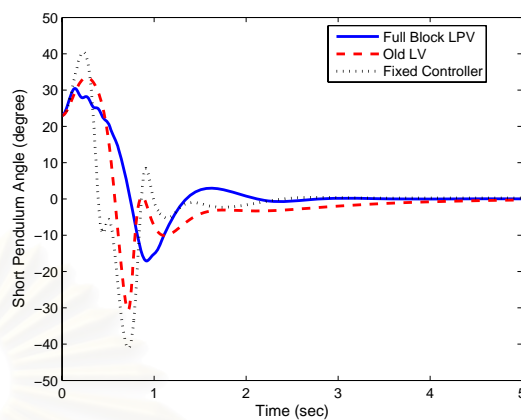
ในการเปรียบเทียบผลของตัวควบคุมเราจะใช้แบบจำลอง  $M_1$  ในการออกแบบตัวควบคุม ตัวควบคุมที่ใช้ในการเปรียบเทียบคือตัวควบคุมที่นำเสนอใน [2] และตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้แบบตรง ในขั้นตอนการสังเคราะห์ตัวควบคุม (2.55) และตัวควบคุมที่เสนอใน [2] จะทำการปรับค่าตัวแปร  $\alpha_1$  ในเงื่อนไข (ข.29) เป็น  $\alpha_1 = 20\alpha^*$  ส่วนการสังเคราะห์ตัวควบคุมแบบตรงจะใช้คำสั่งใน LMI control toolbox การเปรียบเทียบผลตอบจะแยกเป็น 4 กรณีดังนี้

1.  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 23^\circ$
2.  $\beta_1(0) = 8^\circ, \beta_2(0) = 0^\circ$
3.  $\beta_1(0) = 0^\circ, \beta_2(0) = 13^\circ$
4.  $\beta_1(0) = -5^\circ, \beta_2(0) = 5^\circ$

เมื่อทำการเปรียบเทียบผลตอบได้ผลแสดงดังในรูปที่ 3.22 ถึง 3.25 จากผลที่ได้เห็นได้ว่าการใช้ตัวควบคุมที่ได้จากการใช้ตัวคุณบล็อกเต็มให้ผลลัพธ์การควบคุมที่ดีกว่าการใช้ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] ทุกกรณี ซึ่งเป็นไปตามแนวโน้มที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 ส่วนตัวควบคุมแบบตรงให้ผลลัพธ์การควบคุมที่ดีน้อยกว่าการใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนแปลงตามพารามิเตอร์ในทุกกรณีเช่นเดียวกัน

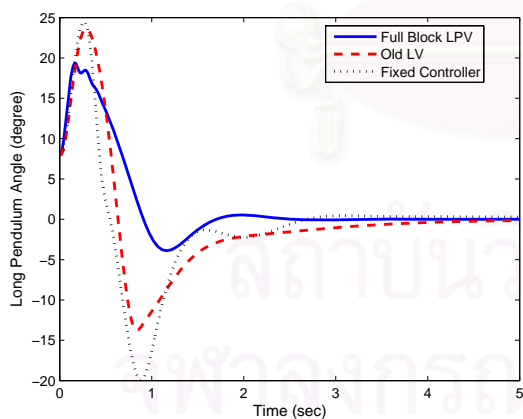


(ก)

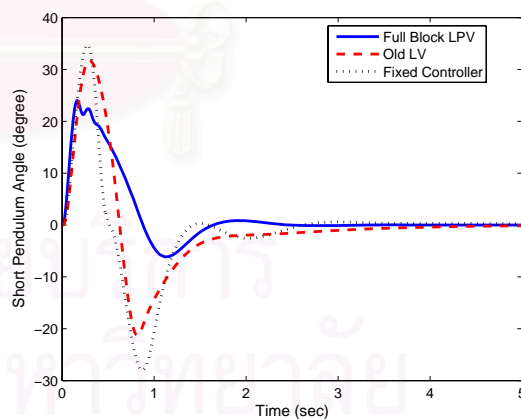


(ข)

รูปที่ 3.22: ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 1 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแก่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแก่งสั้น (องศา)

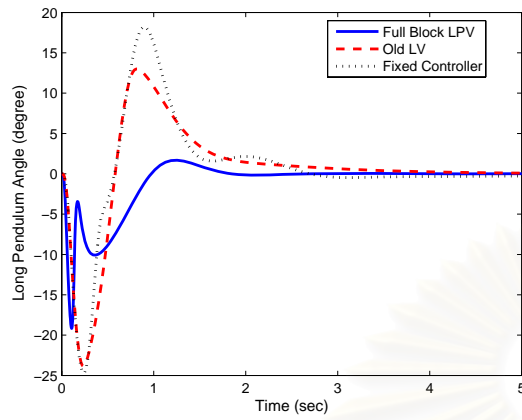


(ก)

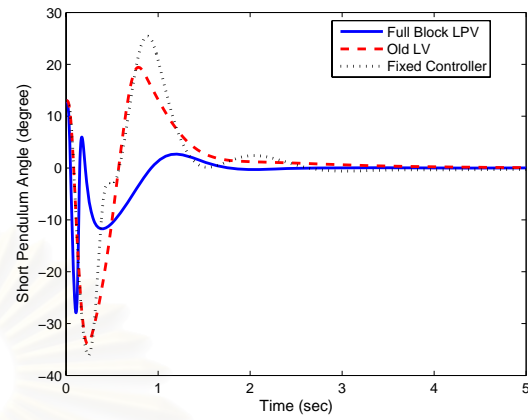


(ข)

รูปที่ 3.23: ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 2 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแก่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแก่งสั้น (องศา)

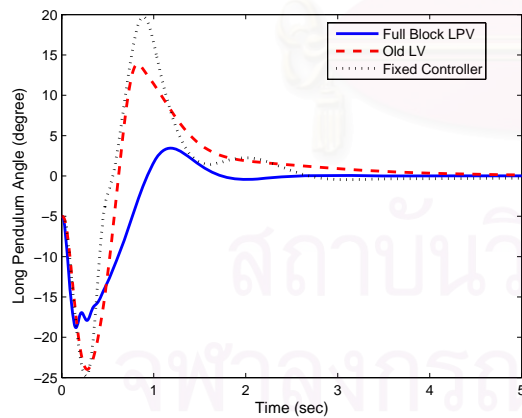


(ก)

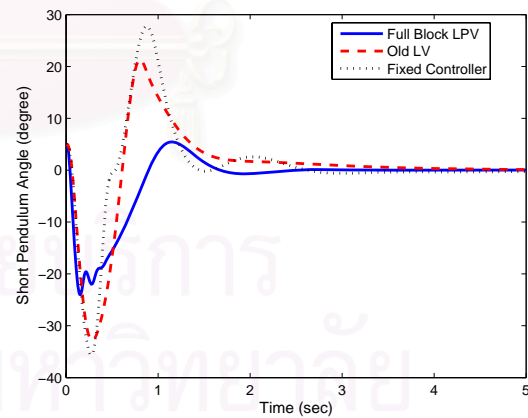


(ข)

รูปที่ 3.24: ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 3 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแก่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแก่งสั้น (องศา)

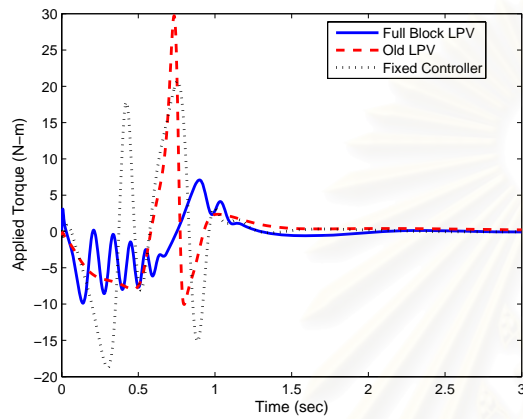


(ก)

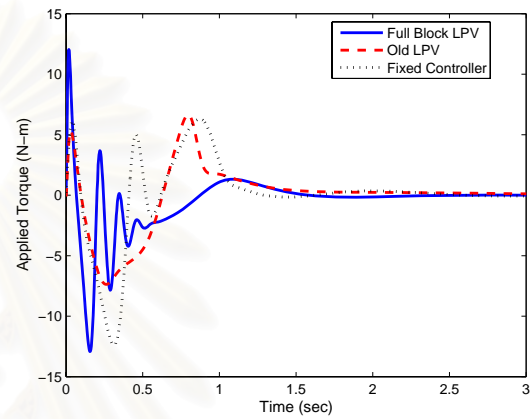


(ข)

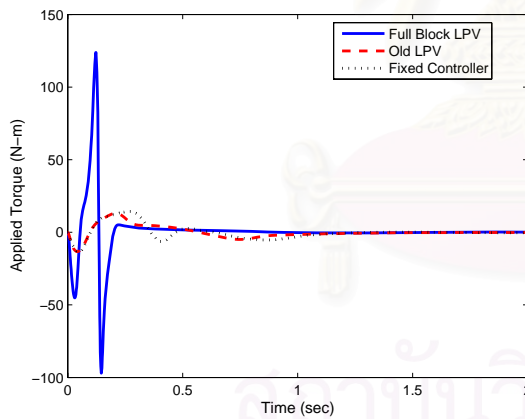
รูปที่ 3.25: ผลตอบสนองของมุมเพนดูลัมในกรณีที่ 4 เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) มุมของเพนดูลัมแก่งยาว (องศา) (ข) มุมของเพนดูลัมแก่งสั้น (องศา)



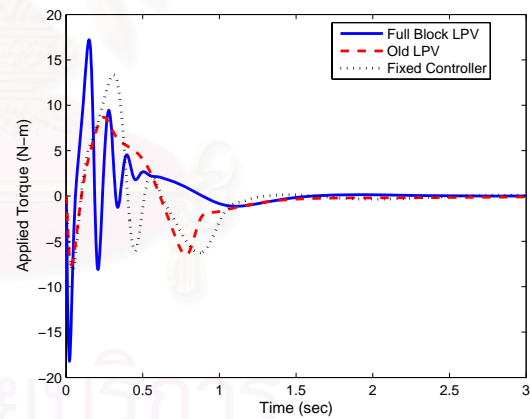
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 3.26: สัญญาณควบคุม (N-m) เมื่อใช้ตัวควบคุม LPV บล็อกเต็ม (เส้นทึบ), ตัวควบคุมที่เสนอใน [2] (เส้นประ) และตัวควบคุมแบบตรึง (เส้นจุด): (ก) กรณีที่ 1 (องศา) (ข) กรณีที่ 2 (ค) กรณีที่ 3 (ง) กรณีที่ 4

เมื่อพิจารณาสัญญาณควบคุมในแต่ละกรณี (รูปที่ 3.26(ก) ถึง (ง)) เห็นได้ว่าในช่วงเวลาเริ่มต้นตัวควบคุมที่ได้จากการใช้ตัวคูณบล็อกเต็มจะให้สัญญาณควบคุมที่มีขนาดและอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงกว่าตัวควบคุมที่เหลือ ยกเว้นในกรณีที่ 1 ที่มีขนาดต่ำกว่า ดังนั้นตัวขับเร้าที่ใช้งานจริงจะรับภาระในการทำงานที่สูงกว่า

**ข้อสังเกต 3.2** เมื่อเปรียบเทียบลักษณะของสัญญาณควบคุมที่ได้จากการใช้ตัวคูณบล็อกเต็มในกรณีที่ 2 และ 3 (รูปที่ 3.26(ข), (ค)) กับผลลัพธ์ในรูปที่ 3.10(ก) และ 3.13(ก) จะเห็นได้ว่าลักษณะของสัญญาณควบคุมมีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัดถึงแม้ว่าการณีการควบคุมจะเป็นกรณีเดียวกัน สาเหตุของความแตกต่างเกิดจากการกำหนดค่าพารามิเตอร์ในเงื่อนไข (ข.29) ที่แตกต่างกัน ในหัวข้อ 3.4 เรากำหนดค่า  $\alpha_1 = 2\alpha^*$  ขณะที่ในหัวข้อนี้เรากำหนด  $\alpha_1 = 20\alpha^*$  ดังนั้นขนาดของตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในกรณีหลังจึงมีขนาดสูงกว่า ส่งผลให้ตัวควบคุมที่ได้ในกรณีหลังมีขนาดอัตราขยายที่ใหญ่กว่าและมีพลวัตที่รวดเร็วกว่าในกรณีแรก

### 3.6 สรุป

ในบทนี้ได้แสดงการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี สำหรับเพนดูลัมผกผันคู่แบบหมุนโดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ การสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สำหรับระบบสามารถทำได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ จากการจำลองผลตอบแสดงให้เห็นว่าการเลือกใช้แบบจำลองที่แตกต่างกันส่งผลให้ผลตอบของระบบมีความแตกต่างกัน อย่างไรก็ตามจากผลลัพธ์ที่ได้ยังไม่สามารถสรุปได้ชัดเจนว่าแบบจำลองใดที่ให้ผลลัพธ์การควบคุมที่ดีที่สุด จึงควรมีการศึกษาวិธีการสร้างแบบจำลองแบบอื่น ๆ รวมถึงผลกระทบต่อการควบคุมให้ชัดเจนต่อไป

เมื่อเปรียบเทียบผลตอบของระบบที่ได้จากตัวควบคุมที่สังเคราะห์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็ม, ตัวคูณที่นำเสนอใน [2] และตัวควบคุมแบบตรึงพบว่า ตัวควบคุมที่สังเคราะห์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็มให้ผลการควบคุมที่ดีกว่าตัวควบคุมอีกสองตัวที่เหลือซึ่งเป็นไปตามแนวโน้มที่ได้กล่าวไว้

## บทที่ 4

### บทสรุปและข้อเสนอแนะ

#### 4.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ศึกษาการออกแบบตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้สำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุน โดยใช้เทคนิคการควบคุมเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ด้วยตัวคูณบล็อกเต็ม ระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์คือระบบเชิงเส้นที่มีพารามิเตอร์แปรตามเวลา โดยอาศัยมุมมองดังกล่าวทำให้เราสามารถแสดงแบบจำลองของเพนดูลัมผกผันแบบหมุนให้อยู่ในรูปของระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์ได้

การออกแบบตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์จะใช้แนวคิดเหมือนกันกับการควบคุมคงที่ ดังนั้นการวางเงื่อนไขสมรรถนะคงที่ของระบบจึงเป็นตัวแปรสำคัญที่จะกำหนดผลลัพธ์ที่ได้จากการควบคุม เงื่อนไขสมรรถนะคงที่ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์โดยมีเทอมตัวคูณบล็อกเต็มติดอยู่ในเงื่อนไข เมื่อเปรียบเทียบโครงสร้างของตัวคูณบล็อกเต็มที่ใช้กับโครงสร้างของเมทริกซ์การสเกลที่มีการนำเสนอในงานวิจัยก่อนหน้าเห็นได้ว่าการจำกัดลักษณะโครงสร้างที่น้อยกว่า ผลลัพธ์ในการวิเคราะห์ก็จะมีคามอนุรักษ์ต่ำกว่าด้วย

ในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับเพนดูลัมผกผันแบบหมุนได้แสดงแนวทางการสร้างแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์สำหรับระบบทั้งหมด 3 รูปแบบ แบบจำลองทั้งสามนี้ได้มาจากระบบไม่เชิงเส้นระบบเดียวกันแต่มีความแตกต่างกันในขั้นตอนการนิยามพารามิเตอร์แปรตามเวลาเท่านั้น เมื่อเราทำการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยใช้แบบจำลองทั้งสามชุด และนำตัวควบคุมที่ได้ไปจำลองผลกับระบบพบว่าผลตอบที่ได้มีความแตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาในแง่ผลลัพธ์การควบคุมและความเหมาะสมในทางปฏิบัติพบว่าตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลองแต่ละชุดให้ผลลัพธ์ที่มีข้อดีข้อเสียต่างกันออกไป

เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์การควบคุมกับตัวควบคุมที่นำเสนอในงานวิจัยก่อนหน้าและตัวควบคุมแบบตรงพบว่า ตัวควบคุมที่สังเคราะห์โดยใช้ตัวคูณบล็อกเต็มให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจมากที่สุดขณะที่ตัวควบคุมแบบตรงให้สมรรถนะของผลตอบที่ต่ำที่สุด ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีที่ได้สรุปไว้

#### 4.2 ข้อเสนอแนะ

1. เนื่องจากตัวควบคุมที่ได้จากแบบจำลองเชิงเส้นที่เปลี่ยนตามพารามิเตอร์แต่ละแบบจะให้ผลลัพธ์การควบคุมที่แตกต่างกัน จึงควรมีการศึกษาแนวทางการสร้างแบบจำลองในแบบอื่น ๆ รวมถึงผลกระทบที่มีต่อผลตอบของระบบวงปิดให้ชัดเจนยิ่งขึ้น
2. ฟังก์ชันที่ใช้ในการปรับพลวัตของตัวควบคุมมีความซับซ้อนและมีข้อจำกัดเกี่ยวกับการคำนวณในทางปฏิบัติ ควรมีการปรับหรือประมาณรูปแบบของฟังก์ชันดังกล่าวให้เหมาะสมในการใช้งานจริง

3. การออกแบบตัวควบคุมใช้เกณฑ์สมรรถนะเอชอินฟินิตี้เพียงอย่างเดียว ควรมีการขยายการพิจารณาไปสู่เกณฑ์สมรรถนะอื่นๆเช่นการควบคุมเอชทู ( $H_2$  control) เป็นต้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## รายการอ้างอิง

1. C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. "Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization," *IEEE Trans. Aut. Control*, 42, 7 (1997): 896–911.
2. P. Apkarian and P. Gahinet. "A Convex Characterization of Gain-Scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  Controllers," *IEEE Trans. Aut. Control*, 40, 5 (1995): 853–864.
3. W. J. Rugh and J. S. Shamma. "Research on Gain Scheduling," *Automatica*, 60 (2000): 1401–1425.
4. A. Packard and J. Doyle. "The Complex Structured Singular Value," *Automatica*, 29, 1 (1993): 71–109.
5. M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle. "Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics," *IEEE Trans. Aut. Control*, 36, 1 (1991): 25–38.
6. E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. "Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions," *IEEE Trans. Aut. Control*, 41, 7 (1996): 1041–1046.
7. P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. "Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty," *IEEE Trans. Aut. Control*, 41, 3 (1996): 436–442.
8. C. W. Scherer. "A Full Block  $S$ -Procedure with Application," in *cdc* (1997): 2602-2607.
9. K. Zhou and J. C. Doyle. *Essential of Robust Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1998.
10. L. E. Ghaoui and S. Iulian Niculescu. *Advanced in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. The Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
11. C. Scherer. "LPV Control and Full Block Multiplier," *Automatica*, 37 (2001): 361–375.
12. A. Packard. "Gain Scheduling via Linear Fractional Transformation," *Syst. Control Letters*, 22 (1994): 79–92.
13. P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. "Self-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  Control of Linear Parameter-varying System: a Design Example," *Automatica*, 31, 9 (1995): 1251–1261.
14. A. P. F. Wu, X. H. Yang and G. Becker. "Induced  $\mathcal{L}_2$ -norm Control for LPV Systems with Bounded Parameter Variation Rates," *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 6 (1996): 983–998.
15. P. Apkarian and R. J. Adams. "Advance Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems," *IEEE Trans. Control Sys. Tech.*, 6, 1 (1998): 21–32.

16. T. Iwasaki and S. Hara. “Well-Posedness of Feedback Systems: Insights into Exact Robustness Analysis and Approximate Computations,” *IEEE Trans. Aut. Control*, 43, 5 (1998): 619–630.
17. A. Megretski and A. Rantzer. “System Analysis via Integral Quadratic Constraints,” *IEEE Trans. Aut. Control*, 42, 6 (1997): 819–830.
18. A. Megretski and A. Rantzer. “System Analysis via Integral Quadratic Constraints: Part I,” tech. rep., Department Automat. Contr., Lund Inst. Technol, April 1995.
19. A. Megretski and A. Rantzer. “System Analysis via Integral Quadratic Constraints: Part II,” tech. rep., Department Automat. Contr., Lund Inst. Technol, September 1997.
20. H. Kajiwara, P. Apkarian, and P. Gahinet. “LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum,” *IEEE Control Syst. Mag.*, 19 (February 1999): 44–54.
21. S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. UK: John Wiley and Sons, 1996.
22. P. Pakdeepattarakorn, P. Thamvechvitee, J. Songsiri, M. Wongsaisuwana, and D. Banjerdpongchai. “Dynamic Models of A Rotary Double Inverted Pendulum System,” in *Proc. IEEE Region 10 Conf.*, (2004): 558–561.
23. K. C. Toh, R. H. Tutuncu, and M. J. Todd. *SDPT3 [Computer Software]*. Available from: <http://www.math.nus.edu.sg/mattohkc/sdpt3.html>.
24. S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
25. M. Dettori. *LMI Techniques for Control with Application to a Compact Disk Player Mechanism*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 2001.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

### อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

การแก้ปัญหาทางระบบควบคุมในอดีต เรามักหาคำตอบที่เป็นผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytic solution) ซึ่งต้องการทราบคำตอบที่แน่นอนของปัญหา สำหรับปัญหาบางอย่างการคำนวณหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ไม่สามารถทำได้ง่ายหรือไม่สามารถหาได้ เช่น ปัญหาการหาออร์โมนันต์ของระบบ, ปัญหาการหาตัวควบคุมเอชอินฟินิตี้, ปัญหาการออกแบบตัวควบคุมโดยวางตำแหน่งของขั้วในบริเวณที่กำหนด ปัญหาเหล่านี้ไม่ได้ต้องการทราบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ การแก้ปัญหาโดยใช้แนวทางอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นวิธีการเชิงเลข (numerical method) ที่สามารถแก้ปัญหาในทางระบบควบคุมหลายปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น, รูปแบบของปัญหา, ข้อดีของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และตัวอย่างการแปลงปัญหาการวิเคราะห์ในทางระบบควบคุมให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

#### ก.1 อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequality) คืออสมการที่อยู่ในรูปแบบ

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (ก.1)$$

โดยที่  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์สมมาตรจริงสำหรับทุกค่า  $i$  และ  $x$  คือตัวแปรที่ต้องการทราบค่าสัญลักษณ์  $>$  ในอสมการ (ก.1) แทนความหมายว่า  $F(x)$  เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite) กล่าวคือ  $z^T F(x) z > 0$  สำหรับทุกค่า  $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

จากนิยามของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเห็นได้ว่าตัวแปรในปัญหาจะอยู่ในรูปของเวกเตอร์ ในกรณีที่ตัวแปรอยู่ในรูปของเมทริกซ์ เรายังคงสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ (ก.1) ได้ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ก.1 พิจารณาอสมการของเลียปูนอฟ (Lyapunov inequality)

$$A^T P + P A < 0$$

โดยที่  $A$  เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่และ  $P = P^T$  เป็นตัวแปรเมทริกซ์ที่ต้องการทราบค่า เพื่อแสดงให้เห็นภาพได้ง่ายขึ้น เราจะเลือกให้  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  และ

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

เราสามารถแสดงค่าของเมทริกซ์  $P$  ในรูปของผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของเมทริกซ์ฐาน (basis matrix) ได้ดังนี้

$$P = p_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

แทนค่ากลับเข้าไปในสมการได้ว่า

$$-A^T \left( p_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) - \left( p_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) A > 0$$

เมื่อรวมเทอมเข้าด้วยกันได้ว่า

$$-p_{11} \underbrace{\left( A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \star \right)}_{F_1} - p_{12} \underbrace{\left( A^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \star \right)}_{F_2} - p_{22} \underbrace{\left( A^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \star \right)}_{F_3} > 0$$

เราได้ว่า  $x = (p_{11} \ p_{12} \ p_{22})^T$

ในกรณีที่เรากำลังการแก้ปัญหาสมการเมทริกซ์เชิงเส้นหลายปัญหา เราสามารถรวมสมการทั้งหมดให้เหลือเพียงสมการเพียงชุดเดียวได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง ก.2** กำหนดสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจำนวน  $q$  สมการดังนี้

$$F^j(x) = F_0^j + \sum_{i=1}^m x_i^j F_i^j > 0, \quad j = 1, \dots, q$$

โดยที่  $x^j$  และ  $F_i^j$  เป็นตัวแปรและเมทริกซ์สมมาตรคงที่ของสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่  $j$  ตามลำดับ เราสามารถยุบสมการทั้งหมดเหลือเพียงสมการเดียวดังนี้

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m X_i F_i$$

โดยที่  $F_i = \text{diag}(F_i^1, \dots, F_i^q)$  สำหรับทุกค่า  $i = 0, \dots, m$  และ  $X_i = \text{diag}(x_i^1 I, \dots, x_i^q I)$

ในบางกรณี สมการเมทริกซ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น สามารถจัดให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ โดยอาศัยส่วนเติมเต็มของชัวร์ (Schur complement) ดังนี้

**บทตั้ง ก.1** (Schur's Complement) พิจารณาสมการเมทริกซ์

$$R(x) > 0, \quad \text{และ} \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (\text{ก.2})$$

โดยที่  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  และ  $S(x)$  มีคุณสมบัติสัมพรรคบนตัวแปร  $x$  เราได้ว่า (ก.2) เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{ก.3})$$

พิสูจน์ สามารถดูได้ใน [24] □

**ตัวอย่าง ก.3** พิจารณาสมการเมทริกซ์

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0 \quad (\text{ก.4})$$

โดยที่  $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$  เป็นเมทริกซ์คงที่และ  $P = P^T$  เป็นตัวแปรเมทริกซ์ที่ต้องการทราบค่า เมื่ออาศัยส่วนเติมเต็มของชัวร์ เราได้ว่าสมการนี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -R \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ก.5})$$

เห็นได้ว่าเงื่อนไขที่ได้เป็นสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเมื่อเทียบกับตัวแปร  $P$

### รูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีอยู่หลายรูปแบบ แต่ปัญหาหลักที่พิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้มีอยู่สองรูปแบบคือ

1. ปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI feasibility problem) คือ ปัญหาการหาค่า  $x$  ที่สอดคล้องเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$F(x) > 0 \quad (\text{ก.6})$$

ในกรณีที่ไม่สามารถหาค่า  $x$  ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ก.6) ได้ เรากล่าวว่าเงื่อนไข (ก.6) เป็นไปไม่ได้ (infeasible)

2. ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (optimization problem) คือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $S = \{x : F(x) > 0\}$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์

ตัวอย่าง ก.4 พิจารณาปัญหาเสถียรภาพของระบบเชิงเส้น

$$\dot{x} = Ax$$

โดยที่  $x$  คือตัวแปรสถานะและ  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ จากทฤษฎีเสถียรภาพของเลียปูนอฟเราได้ว่าระบบดังกล่าวจะมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร  $P > 0$  ที่ทำให้

$$A^T P + PA < 0$$

เราสามารถแสดงเงื่อนไขดังกล่าวในรูปของปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} -P & 0 \\ 0 & A^T P + PA \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ก.7})$$

ตัวอย่าง ก.5 พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา

$$\dot{x} = Ax$$

โดยที่  $x(0) = x_0$  เป็นค่าคงที่และสมมติให้ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ พิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์

$$J := \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt \quad (\text{ก.8})$$

โดยที่  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  เป็นค่าคงที่ เราสามารถคำนวณค่าขอบเขตบนน้อยที่สุด (least upper bounded) ของฟังก์ชันจุดประสงค์ (ก.8) ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ดังต่อไปนี้: พิจารณาอสมการ

$$A^T P + PA + Q < 0 \quad (\text{ก.9})$$

โดยที่  $P = P^T > 0$  เป็นตัวแปรเมทริกซ์ ถ้ากำหนดให้  $V(t) = x(t)^T P x(t)$  เราได้ว่าอสมการนี้สมมูลกับ

$$\frac{d}{dt} V(t) + Q < 0 \quad (\text{ก.10})$$

เมื่ออินทิเกรตช่วง  $t = 0$  ถึง  $\infty$  ได้ว่า

$$V(\infty) - V(0) + \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt < 0$$

เนื่องจากเราสมมติให้ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ  $x(\infty) \rightarrow 0$  เราได้ว่า

$$\int_0^\infty x(t)^T Q x(t) dt < V(0)$$

ดังนั้น เราสามารถหาค่าขอบเขตบนน้อยที่สุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ (ก.8) โดยแก้ปัญหาค่าต่ำสุดของ  $V(0) = x_0^T P x_0$  ที่สอดคล้องเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} -P & 0 \\ 0 & A^T P + P A + Q \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ก.11})$$

**ตัวอย่าง ก.6** พิจารณาการหามอนิเตอร์ของระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du \quad (\text{ก.12})$$

โดยที่  $x(0) = 0$  และสมมติให้ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ เรานิยามมอนิเตอร์ของระบบ (ก.12) ดังนี้

$$\sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

โดยที่  $\|u\|_2 = \int_0^\infty u^T u dt$  คือ นอร์ม  $\mathcal{L}_2$  ของสัญญาณ  $u$  เราสามารถหามอนิเตอร์ของระบบในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ดังนี้: พิจารณาอสมการ

$$A^T P + P A + y^T y - \gamma^2 u^T u \leq 0 \quad (\text{ก.13})$$

โดยที่  $P = P^T$  เป็นตัวแปรเมทริกซ์และ  $\gamma$  เป็นตัวแปรค่าสเกลาร์ กำหนดให้  $V(t) = x(t)^T P x(t)$  เราได้ว่าอสมการนี้สมมูลกับ

$$\frac{d}{dt} V(t) + y^T y - \gamma^2 u^T u \leq 0 \quad (\text{ก.14})$$

เมื่ออินทิเกรตช่วง  $t = 0$  ถึง  $\infty$  ได้ว่า

$$V(\infty) - V(0) + \int_0^\infty y^T y - \gamma^2 u^T u dt \leq 0$$

เนื่องจากเราสมมติให้ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ  $x(\infty) \rightarrow 0$  เราได้ว่า

$$\int_0^\infty y^T y - \gamma^2 u^T u dt \leq 0 \iff \|y\|_2 \leq \gamma \|u\|_2$$

ดังนั้นเราสามารถหามอนิเตอร์ของระบบ (ก.12) ได้โดยการหาค่าต่ำสุดของ  $\gamma$  และเมทริกซ์  $P$  ที่ทำให้เงื่อนไข (ก.13) เป็นจริง เราสามารถแสดงเงื่อนไขใน (ก.13) ให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร  $P$  และ  $\hat{\gamma} = \gamma^2$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\hat{\gamma} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix} \leq 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\hat{\gamma} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \leq 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\hat{\gamma} I + D^T D \end{pmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{ก.15})$$

สำหรับการจัดรูปแบบปัญหาอื่นๆในทางระบบควบคุมให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สามารถดูเพิ่มเติมได้ใน [1], [24]

จากตัวอย่างที่ยกมา เราได้แสดงแนวทางในการจัดรูปแบบของปัญหาในทางระบบควบคุมอย่างง่ายให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งจุดเด่นของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่สำคัญๆ คือ

1. จุดประสงค์ของการออกแบบและเงื่อนไขกำหนดที่สามารถเขียนได้ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น มีอยู่มาก
2. เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเงื่อนไขคอนเวกซ์ กล่าวคือถ้า  $F(x_1) > 0$  และ  $F(x_2) > 0$  เราได้ว่า

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) > 0, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

ปัญหาของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงคอนเวกซ์ (convex optimization problem) ซึ่งมีขั้นตอนในการหาค่าตอบหลายวิธี วิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดคือวิธีการจุดภายใน (interior-point method)

3. ปัญหาที่มีหลายเงื่อนไขหรือหลายวัตถุประสงค์มักไม่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ หรือสามารถหาผลเฉลยได้ยาก เช่น ปัญหาการควบคุม  $H_2/H_\infty$ , ปัญหาการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยวางเงื่อนไขขอบเขตของข้อของระบบวงปิด วิธีการอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสามารถหาค่าตอบของปัญหาเหล่านี้ได้ วิธีการอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งสำหรับการหาผลเฉลยของปัญหา

จากข้อดีดังกล่าวนี้ อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเป็นที่สนใจอย่างแพร่หลายดังจะเห็นได้จากบทความที่ตีพิมพ์ในช่วงสิบปีที่ผ่านมา นอกจากนี้ซอฟต์แวร์ที่ใช้ในการแก้ปัญหกอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นก็มีจำนวนมากเช่น LMI Control Toolbox ของ Matlab, YALMIP ซึ่งเป็นโปรแกรมส่วนเชื่อมต่อกับผู้ใช้ (user interface) โปรแกรม YALMIP มีข้อดีที่เหนือกว่า LMI Control Toolbox คือการกำหนดเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสามารถทำได้ง่ายกว่าและสามารถเลือกโปรแกรมสำหรับแก้ปัญห (solver) ได้หลากหลายกว่า เช่น SDPT3 [23] ซึ่งมีประสิทธิภาพและความเร็วในการหาค่าตอบสูง

## ก.2 สรุป

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์และแก้ปัญหทางระบบควบคุมได้มากมาย รูปแบบปัญหาของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีอยู่สองรูปแบบหลักคือการหาค่าที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นและปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด ปัญหาทั้งสองรูปแบบนี้เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงคอนเวกซ์ ซึ่งมีระเบียบวิธีสำหรับแก้ปัญหที่มีประสิทธิภาพ แนวทางการแก้ปัญหโดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่มีความน่าสนใจในการวิเคราะห์ปัญหาในทางระบบควบคุม



## ภาคผนวก ข

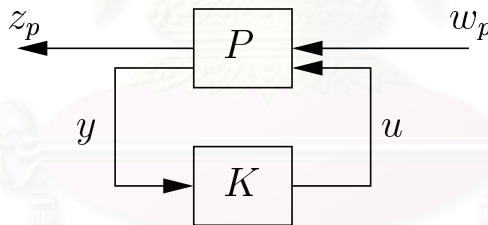
### การสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาโดยใช้ อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ในภาคผนวก ก เราได้กล่าวถึงอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ปัญหาในทางระบบควบคุมบางปัญหาในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ในบทนี้ เราจะใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือในการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา ใน §ข.1 จะเป็นการกำหนดรูปแบบปัญหาและสรุปแนวทางการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา โดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือ ส่วน §ข.2 กล่าวถึงการสังเคราะห์ตัวควบคุมสำหรับระบบโดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปร (change of variable method) และวิธีการกำจัดตัวแปร (elimination method)

#### ข.1 การวิเคราะห์ระบบ

##### ข.1.1 รูปแบบปัญหา

พิจารณาโครงสร้างการป้อนกลับในรูปที่ ข.1



รูปที่ ข.1: โครงสร้างการป้อนกลับของระบบ

จากรูป  $P$  คือระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่มีสมการสถานะคือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_p \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_p & B_u \\ C_p & D_{pp} & D_{pu} \\ C_y & D_{yp} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_p \\ u \end{pmatrix} \quad (\text{ข.1})$$

โดยที่  $x$  คือตัวแปรสถานะ  $w_p$  คือสัญญาณสมรรถนะขาเข้า  $z_p$  คือสัญญาณเข้าสมรรถนะขาออก  $y$  คือสัญญาณขาออก  $u$  คือสัญญาณควบคุม  $K$  คือตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาโดยที่มีสมการสถานะคือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{ข.2})$$

เมื่อแทนค่าสัญญาณเข้าออกใน (ข.2) เข้าไปใน (ข.1) เราได้ว่าระบบวงปิดคือ

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{cl} \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{cl} \\ w_p \end{pmatrix} \quad (\text{ข.3})$$

โดยที่

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} A & 0 & B_p \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline C_p & 0 & D_{pp} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \\ 0 & D_{pu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ C_y & 0 & D_{yp} \end{pmatrix} \quad (\text{ข.4})$$

### ข.1.2 นอร์ม $H_\infty$

ในระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา เราสามารถนิยามนอร์ม  $H_\infty$  ได้สองรูปแบบใหญ่คือ รูปแบบในทางโดเมนความถี่และโดเมนเวลา สำหรับนิยามในทางโดเมนความถี่เราจะกำหนดให้

$$G(s) := \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

แทนเมทริกซ์ถ่ายโอนของระบบและสมมติให้ระบบมีเสถียรภาพ นอร์ม  $H_\infty$  ของระบบนิยามโดย

$$\|G\|_\infty := \sup_{\text{Re}(s) > 0} \sigma_{\max}(G(s)) < \infty \quad (\text{ข.5})$$

เนื่องจากเราสมมติให้  $G(s)$  มีเสถียรภาพ ดังนั้น  $G(s)$  มีสมบัติเชิงวิเคราะห์ (Analytic) บน  $\mathbb{C}^+$  โดยอาศัยหลักการ maximum modulus principle เราสามารถหานอร์ม  $H_\infty$  ได้โดย

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (\text{ข.6})$$

**ข้อสังเกต ข.1** ในกรณีที่ระบบเป็นแบบสัญญาณเข้าเดียว-สัญญาณออกเดียว นอร์ม  $H_\infty$  ของระบบคือค่าขนาดสูงสุดของผลตอบเชิงความถี่ที่แสดงในแผนภาพของโบเด (Bode plot) นั้นเอง

สำหรับการนิยามนอร์ม  $H_\infty$  ของระบบในทางโดเมนเวลา เราจะกำหนดให้สัญญาณเข้าออกในระบบเป็นสมาชิกของปริภูมิของสัญญาณที่มีพลังงานจำกัด  $\mathcal{L}_2$

$$\mathcal{L}_2 := \{x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < \infty\} \quad (\text{ข.7})$$

โดยที่นอร์ม  $\|x\|_2$  นิยามโดย

$$\|x\|_2 = \left( \int_0^\infty x^T x \, dt \right)^{1/2} \quad (\text{ข.8})$$

เราได้ว่านอร์ม  $H_\infty$  ของระบบสามารถนิยามได้ดังนี้

$$\|G\|_\infty := \sup_{w_p \neq 0, w_p \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z_p\|_2}{\|w_p\|_2} \quad (\text{ข.9})$$

**ข้อสังเกต ข.2** จากนิยามในทางโดเมนเวลา นอร์ม  $H_\infty$  ของระบบก็คืออัตราขยายมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างสัญญาณเข้าออกของระบบ โดยที่สัญญาณเข้ามีพลังงานจำกัด

ในทางการออกแบบระบบควบคุม นอร์ม  $H_\infty$  ของระบบสามารถใช้เป็นเกณฑ์ในการวัดผลของสัญญาณรบกวน  $w_p$  (เช่น สัญญาณรบกวนภายนอก, สัญญาณรบกวนจากเครื่องวัด) ที่มีต่อสัญญาณออก  $z_p$  (เช่น สัญญาณค่าผิดพลาด) ในกรณีที่นอร์ม  $H_\infty$  มีค่าต่ำแสดงว่าระบบมีสมรรถนะในการกำจัดผลของสัญญาณรบกวนที่ดี

เราสามารถแสดงเงื่อนไขนอร์ม  $H_\infty$  ของระบบในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท ข.1** ระบบ (ข.1) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับและ  $\|G\|_\infty < \gamma$  ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์  $\mathcal{X}$  ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.10})$$

พิสูจน์ สามารถดูได้ใน [25], [1] □

จากทฤษฎีบทนี้ เราสามารถคำนวณค่านอร์ม  $H_\infty$  ของระบบได้จากการหาค่าต่ำสุดของ  $\gamma$  ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ข.10)

**ข้อสังเกต ข.3** จากเงื่อนไข (ข.10) เห็นได้ว่าเงื่อนไขดังกล่าวไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อเทียบกับตัวแปร  $\gamma$  ใดๆก็ตาม เราสามารถอาศัยส่วนเติมเต็มของชูรีในการแปลงเงื่อนไขดังกล่าวให้เป็นเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \\ C & D \end{pmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma} (C \ D)^T (C \ D) < 0 \quad (\text{ข.11}) \\ \Leftrightarrow & \left( \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} & 0 \\ \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} & (C \ D)^T \\ \hline (C \ D) & -\gamma I \end{array} \right) < 0 \end{aligned}$$

## ข.2 การสังเคราะห์ตัวควบคุม

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้แสดงเงื่อนไขเกณฑ์สมรรถนะ  $H_\infty$  ในรูปของอสมการเมทริกซ์ สำหรับในหัวข้อนี้ เราจะแสดงแนวทางการสังเคราะห์ตัวควบคุมหาตัวแปร  $\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  และตัวแปร  $\mathcal{X}$  ที่ทำให้ระบบวงปิดสอดคล้องเงื่อนไขนอร์ม  $H_\infty$  ของระบบ วิธีที่ใช้ในการสังเคราะห์ตัวควบคุมมีสองวิธีได้แก่วิธีการเปลี่ยนตัวแปรและวิธีการกำจัดตัวแปร

## ข.2.1 วิธีการเปลี่ยนตัวแปร (I)

ในบทตั้ง ก.1 เราได้แสดงวิธีการเปลี่ยนเงื่อนไขของสมการเมทริกซ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นโดยอาศัยการเติมเต็มของซูร์ อย่างไรก็ตามในหลายๆกรณีการเติมเต็มของซูร์เพียงอย่างเดียวไม่เพียงพอในการเปลี่ยนปัญหาไม่เป็นเชิงเส้นไปสู่ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ แนวทางในการแก้ปัญหาคือนิยามตัวแปรขึ้นมาใหม่และแปลงเงื่อนไขที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นเชิงเส้นในตัวแปรใหม่ เมื่อแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปรใหม่แล้วแล้วจึงค่อยแปลงค่าตัวแปรดังกล่าวกลับไปสู่ตัวแปรเดิม

เราจะแสดงแนวคิดของวิธีการเปลี่ยนตัวแปรในการแก้ปัญหาการป้อนกลับสถานะ (state feedback) สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาดังตัวอย่างถัดไป

**ตัวอย่าง ข.1** พิจารณาระบบที่มีสมการสถานะดังนี้

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

เราสามารถหาอัตราขยายการป้อนกลับสถานะ  $K$  ที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์  $P = P^T > 0$  และ  $K$  ที่ทำให้

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0, \quad P > 0$$

เห็นได้ว่าเงื่อนไขนี้ไม่เป็นเชิงเส้นเนื่องจากการคูณกันระหว่างตัวแปรอยู่ อย่างไรก็ตามถ้าเรากำหนดให้  $Y = P^{-1}$  และคูณค่า  $Y$  เข้าทั้งสองข้างของอสมการได้ว่า

$$Y(A + BK)^T + (A + BK)Y < 0$$

กำหนดให้  $F = KY$  เราได้เงื่อนไขสุดท้ายคือ

$$(AY + BF) + (AY + BF)^T < 0$$

เห็นได้ว่าเงื่อนไขนี้เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร  $Y$  และ  $F$  โดยที่ค่าอัตราขยาย  $K$  มีค่าเท่ากับ  $FY^{-1}$

จากตัวอย่างนี้ เราได้แสดงแนวทางง่ายๆ ในการนิยามตัวแปรและเปลี่ยนเงื่อนไขให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น อย่างไรก็ตามสำหรับปัญหาการหาตัวควบคุม (ข.2) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขนอร์ม  $H_\infty$  ต้องอาศัยเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกัน (congruence transformation) ช่วยในการเปลี่ยนตัวแปรและแปลงเงื่อนไขให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แนวคิดหลักในการแก้ปัญหาดังกล่าวคือหาเมทริกซ์การแปลงสอดคล้องกันเพื่อเปลี่ยนตัวแปรในเงื่อนไข (ข.10)

$$\begin{pmatrix} X & A_c & B_c & C_c & D_c \end{pmatrix} \rightarrow v := \begin{pmatrix} X & Y & K & L & M & N \end{pmatrix} \quad (\text{ข.12})$$

และแปลงเงื่อนไข (ข.10) ให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร  $v$  ชั้นแรกสมมติให้มีเมทริกซ์  $X$  และ  $\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  ที่ทำให้เงื่อนไข (ข.10) เป็นจริง และพิจารณาการแบ่งส่วน (partition) เมทริกซ์  $X$  และ  $X^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} X & U \\ U^T & * \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} Y & V \\ V^T & * \end{pmatrix} \quad (\text{ข.13})$$

โดยที่  $U$  และ  $V$  เป็นเมทริกซ์อันดับแถวเต็ม (full row rank) จากการแบ่งส่วนดังกล่าวเราได้ว่า

$$I - XY = UV^T \quad (\text{ข.14})$$

ในขั้นต่อไปเรานิยามเมทริกซ์  $\Pi$

$$\Pi = \begin{pmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ข.15})$$

เราได้ว่า

$$\Pi^T \mathcal{X} \Pi = \begin{pmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X & U \\ U^T & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix} =: X(v) \quad (\text{ข.16})$$

พิจารณาการแปลง

$$\begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \left[ \begin{pmatrix} A^T \mathcal{X} + \mathcal{X} A & \mathcal{X} B \\ B^T \mathcal{X} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & D \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.17})$$

เมื่อกระจายเทอมเข้าไปในเงื่อนไขได้ว่า

$$\begin{pmatrix} \Pi^T (A^T \mathcal{X} + \mathcal{X} A) \Pi & \Pi^T \mathcal{X} B \\ B^T \mathcal{X} \Pi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ C \Pi & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C \Pi & D \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.18})$$

พิจารณาเทอม  $\Pi^T \mathcal{X} A \Pi$  เมื่อแทนค่า  $A$  ใน (ข.3) และกำหนดให้  $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  ได้ว่า

$$\Pi^T \mathcal{X} A \Pi = \begin{pmatrix} AY & A \\ XAY & XA \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ U & XB_u \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C_y Y & C_y \end{pmatrix} \quad (\text{ข.19})$$

ในทำนองเดียวกัน แทนค่า  $B$  และ  $C$  เข้าไปได้ว่า

$$\begin{aligned} \Pi^T \mathcal{X} B &= \begin{pmatrix} B_p \\ XB_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ U & XB_u \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} 0 \\ D_{yp} \end{pmatrix} \\ C \Pi &= \begin{pmatrix} C_p Y & C_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & D_{pu} \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C_y Y & C_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{ข.20})$$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูป เราจะรวมตัวแปรในรูปเมทริกซ์แบ่งส่วนโดยได้ผลลัพธ์ดังแสดงในสมการ (ข.21)

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c|c} \Pi^T \mathcal{X} A \Pi & \Pi^T \mathcal{X} B \\ \hline C \Pi & D \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} AY & A & B_p \\ \hline XAY & XA & XB_p \\ \hline C_p Y & C_p & D_{pp} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c} 0 & B_u \\ \hline U & XB_u \end{array} \right) \mathcal{K} \left( \begin{array}{c|c} V^T & 0 \\ \hline C_y Y & C_y \\ \hline 0 & D_{yp} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} AY & A & B_p \\ \hline XAY & XA & XB_p \\ \hline C_p Y & C_p & D_{pp} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c} 0 & B_u \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & D_{pu} \end{array} \right) \left[ \begin{pmatrix} U & XB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C_y Y & I \end{pmatrix} \right] \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C_y \\ \hline 0 & D_{yp} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} AY & A & B_p \\ \hline 0 & XA & XB_p \\ \hline C_p Y & C_p & D_{pp} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c} 0 & B_u \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & D_{pu} \end{array} \right) \left[ \begin{pmatrix} U & XB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C_y Y & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C_y \\ \hline 0 & D_{yp} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} AY & A & B_p \\ \hline 0 & XA & XB_p \\ \hline C_p Y & C_p & D_{pp} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c|c} 0 & B_u \\ \hline I & 0 \\ \hline 0 & D_{pu} \end{array} \right) \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & C_y \\ \hline 0 & D_{yp} \end{array} \right) := \begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{ข.21})$$

โดยที่

$$\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} U & XB_u \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{K} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C_y Y & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{ข.22})$$

ดังนั้นถ้ามีเมทริกซ์  $\mathcal{X}$  และ  $\mathcal{K}$  ที่ทำให้เงื่อนไข (ข.10) เป็นจริง เราได้ว่ามีเมทริกซ์  $X, Y$  และ  $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$  ที่ทำให้

$$X(v) > 0, \quad \begin{pmatrix} A(v)^T + A(v) & B(v) \\ B(v)^T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.23})$$

เป็นจริงด้วย เมื่อใช้การเติมเต็มของชูร์เพื่อแยกเทอมที่คูณกันระหว่าง  $C(v), D(v)$  ออกเราได้ว่า (ข.23) เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$X(v) > 0, \quad \begin{pmatrix} A(v)^T + A(v) & B(v) & C(v)^T \\ B(v)^T & -\gamma I & D(v)^T \\ C(v) & D(v) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.24})$$

ในทางกลับกัน สมมติให้มีเมทริกซ์  $X, Y$  และ  $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$  ที่ทำให้เงื่อนไข (ข.24) เป็นจริง เราได้ว่า  $I - XY$  ไม่เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ดังนั้นเราสามารถหาเมทริกซ์จัตุรัส  $U, V$  โดยที่  $U$  และ  $V$  ไม่เป็นเอกฐานได้ และสรุปได้ว่าเมทริกซ์  $\Pi$  เป็นเมทริกซ์ไม่เป็นเอกฐาน จากผลลัพธ์ดังกล่าวนี้เราสามารถหาเมทริกซ์  $\mathcal{X}$  และ  $\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  ได้โดยที่

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} Y & V \\ I & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & U \end{pmatrix} \quad (\text{ข.25})$$

$$\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & XB_u \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K - XAY & L \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^T & 0 \\ C_y Y & I \end{pmatrix} \quad (\text{ข.26})$$

และเนื่องจาก  $\Pi$  ไม่เป็นเอกฐาน เมื่อเราทำการแปลงอสมการ (ข.24) โดยใช้เมทริกซ์การแปลง  $\Pi^{-1}$  และ  $\begin{pmatrix} \Pi^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  ก็จะได้เงื่อนไข (ข.10) ซึ่งเป็นเงื่อนไขก่อนการเปลี่ยนตัวแปรนั่นเอง

จากแนวทางที่ได้กล่าวมา เราสามารถสรุปผลลัพธ์ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท ข.2** เงื่อนไขต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา  $\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  และเมทริกซ์  $\mathcal{X}$  ที่ทำให้เงื่อนไข (ข.10) เป็นจริง
2. มีเมทริกซ์  $X, Y, \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$  ที่ทำให้อสมการเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} A(v)^T + A(v) & B(v) & C(v)^T \\ B(v)^T & -\gamma I & D(v)^T \\ C(v) & D(v) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.27})$$

ถ้าเงื่อนไขข้อ 2 เป็นจริง เราสามารถหาค่า  $\mathcal{X}$  และ  $\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  ได้ดังสมการ (ข.14), (ข.25) และ (ข.26)

### การวางเงื่อนไขตัวแปรสำหรับการคำนวณเชิงเลข

ในขั้นตอนการแก้หาคำตอบของเงื่อนไข (ข.24) พบว่าบางกรณีการแก้เงื่อนไขดังกล่าวโดยตรงอาจทำให้ขนาดของตัวแปร  $v$  ที่ได้มีขนาดใหญ่และตัวแปร  $X, Y$  ที่ได้อาจทำให้เทอม  $I - XY$  เข้าใกล้เอกฐาน กรณีทั้งสองนี้อาจทำให้ตัวควบคุมที่ได้มีอัตราขยายและแถบความถี่ (bandwidth) มีค่าสูงมาก หรืออาจส่งผลให้ขั้นตอนการคำนวณพารามิเตอร์ของตัวควบคุมมีลักษณะสภาพเสีย (ill-conditioned) ทำให้คำตอบที่ได้ไม่สามารถเชื่อถือได้ เราสามารถหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวได้โดยการเพิ่มเงื่อนไขของตัวแปรในขั้นตอนการแก้สมการ (ข.24) ดังนี้ [1], [25]

1. หาค่าต่ำสุด  $\gamma = \gamma^*$  ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ข.27)
2. ตรึงค่า  $\gamma_1 > \gamma^*$  และหาค่าต่ำสุดของ  $\alpha$  ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ข.24) และ

$$X < \alpha I, \quad Y < \alpha I, \quad \left( \begin{array}{cc|cc} \alpha I & 0 & K & L \\ 0 & \alpha I & M & N \\ \hline K^T & M^T & \alpha I & 0 \\ L^T & N^T & 0 & \alpha I \end{array} \right) < 0 \quad (\text{ข.28})$$

สำหรับเงื่อนไขนี้เป็นการจำกัดขนาดของตัวแปร  $v$

3. ตรึงค่า  $\gamma_1$  และ  $\alpha_1 > \alpha^*$  หาค่าสูงสุด  $\beta$  ที่สอดคล้องเงื่อนไข (ข.24), (ข.28) และ

$$\begin{pmatrix} Y & \beta I \\ \beta I & X \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{ข.29})$$

เงื่อนไขนี้เป็นการแก้ปัญหาไม่ให้เทอม  $I - XY$  เข้าใกล้เอกฐานเพื่อปรับปรุงขั้นตอนการหาคำตอบของพารามิเตอร์ตัวควบคุมให้มีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น

### ข.2.2 วิธีการกำจัดตัวแปร

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้แสดงแนวทางการสังเคราะห์ตัวควบคุมโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อแปลงเงื่อนไข (ข.10) ให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น อย่างไรก็ตามเราสามารถทำการกำจัดตัวแปรบางตัวออกจากเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังกล่าวเพื่อลดจำนวนตัวแปรในเงื่อนไขลงได้ เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าเราสามารถกำจัดตัวแปร  $K, L, M, N$  ในเงื่อนไข (ข.24) ออกไปได้โดยเงื่อนไขที่กำจัดตัวแปรดังกล่าวออกไปแล้วยังคงเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร  $X$  และ  $Y$  ในกรณีที่ระบบมีอันดับสูงการกำจัดตัวแปรออกจากเงื่อนไขอาจลดจำนวนตัวแปรในการแก้ปัญหาลงได้มากกว่า 1,000 ตัว ผลลัพธ์คือความเร็วในการคำนวณหาคำตอบก็จะสูงขึ้น

ในขั้นตอนการกำจัดตัวแปรออกจากเงื่อนไข (ข.24) เราจะอาศัยบทตั้งต่อไปนี้เป็นเครื่องมือในการพิจารณาว่าตัวแปรใดในเงื่อนไขที่เราสามารถกำจัดออกไปได้บ้าง

**บทตั้ง ข.1** (Elimination Lemma [11]) พิจารณาอสมการเมทริกซ์

$$\begin{pmatrix} I \\ \mathcal{L}^T X \mathcal{M} + \mathcal{N} \end{pmatrix}^T P \begin{pmatrix} I \\ \mathcal{L}^T X \mathcal{M} + \mathcal{N} \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.30})$$

สมมติให้  $\mathcal{P}$  มีโครงสร้างคือ

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{S} \\ \mathcal{S}^T & \mathcal{R} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} \geq 0$$

โดยที่  $\mathcal{P}$  สามารถหาตัวผกผันได้และ

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{Q}} & \tilde{\mathcal{S}} \\ \tilde{\mathcal{S}}^T & \tilde{\mathcal{R}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{Q}} \leq 0$$

เราได้ว่าสมการ (ข.30) เป็นจริงก็ต่อเมื่อสมการเมทริกซ์

$$\mathcal{M}_\perp^T \begin{pmatrix} I \\ \mathcal{N} \end{pmatrix}^T \mathcal{P} \begin{pmatrix} I \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} \mathcal{M}_\perp < 0, \quad \mathcal{L}_\perp^T \begin{pmatrix} -\mathcal{N}^T \\ I \end{pmatrix}^T \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} -\mathcal{N}^T \\ I \end{pmatrix} \mathcal{L}_\perp > 0 \quad (\text{ข.31})$$

เป็นจริง โดยที่  $\mathcal{L}_\perp$  และ  $\mathcal{M}_\perp$  แทนเมทริกซ์ฐาน (basis matrix) ของ  $\ker(\mathcal{L})$  และ  $\ker(\mathcal{M})$  ตามลำดับ

พิสูจน์ สามารถดูได้ใน [11] □

จากเงื่อนไข (ข.23) เราสามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการ (ข.30) โดยการสลับแถวและหลักได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \hline A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \hline A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{ข.32})$$

โดยที่

$$\begin{pmatrix} A(v) & B(v) \\ C(v) & D(v) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \\ 0 & D_{pu} \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}}_X \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_y & D_{yp} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} + \underbrace{\begin{pmatrix} AY & A & B_p \\ 0 & XA & XB_p \\ \hline C_p Y & C_p & D_{pp} \end{pmatrix}}_N \quad (\text{ข.33})$$

กำหนดให้  $\mathcal{L}_\perp$  แทนเมทริกซ์ฐานของ  $\ker \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ B_u^T & 0 & D_{pu}^T \end{pmatrix}$  และ  $\mathcal{M}_\perp$  แทนเมทริกซ์ฐานของ

$\ker \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & C_y & D_{yp} \end{pmatrix}$  โดยที่

$$\mathcal{L}_\perp = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{ข.34})$$

เมื่อเปรียบเทียบเทอม  $\mathcal{P}$  ใน (ข.30) กับเงื่อนไข (ข.32) กับ ได้ว่า

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \tilde{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (\text{ข.35})$$



ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานในบทตั้ง ข.1 ดังนั้นเราได้ว่า (ข.32) เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ \hline AY & A & B_p \\ 0 & XA & XB_p \\ C_p Y & C_p & D_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (ข.36)$$

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma} I & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -YA^T & 0 & -YC_p^T \\ -A & -A^T X & -C_p^T \\ -B_p^T & -B_p^T X & -D_{pp}^T \\ \hline I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} > 0$$

เมื่อทำการตัดแถวและหลักที่เป็นศูนย์ออกจากสมการเราได้ผลลัพธ์สุดท้ายคือ

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & I & 0 \\ 0 & -\gamma I & | & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & \frac{1}{\gamma} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ \hline XA & XB_p \\ C_p & D_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} < 0 \quad (ข.37)$$

$$\begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma} I & | & 0 & 0 \\ \hline I & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & \gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -YA^T & -YC_p^T \\ -B_p^T & -D_{pp}^T \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} > 0$$

เห็นได้ว่าสมการทั้งสองนี้เป็นเชิงเส้นเมื่อเทียบกับตัวแปร  $X$  และเราสามารถใส่ส่วนเติมเต็มของชัวร์เพื่อทำให้สมการนี้เป็นเชิงเส้นเมื่อเทียบกับ  $\gamma$  ได้ในลักษณะเดียวกันกับ (ข.24) จากผลลัพธ์ที่ได้เราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท ข.3** กำหนดให้  $\mathcal{N}_X = (\Psi_1^T \ \Psi_2^T)^T$  และ  $\mathcal{N}_Y = (\Phi_1^T \ \Phi_2^T)^T$  เราได้ว่าเงื่อนไข (ข.24) เป็นจริงก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_X & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB_p & C_p^T \\ B_p^T X & -\gamma I & D_{pp}^T \\ C_p & D_{pp} & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_X & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (ข.38)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_Y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} YA + A^T Y & YC_p^T & B_p \\ C_p Y & -\gamma I & D_{pp} \\ B_p^T & D_{pp}^T & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_Y & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & I \\ I & X \end{pmatrix} > 0$$

**การหาพารามิเตอร์ตัวควบคุม**

การหาพารามิเตอร์ตัวควบคุมสามารถทำได้สองวิธี วิธีแรกคือแทนค่า  $X$  และ  $Y$  ที่ได้จาก (ข.38) กลับเข้าไปในเงื่อนไข (ข.24) และแก้หาค่า  $\begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}$  และหาพารามิเตอร์ตัวควบคุมโดย

อาศัยสมการ (ข.14) และ (ข.26) ส่วนอีกวิธีหนึ่งคือหาเมทริกซ์  $\mathcal{X}$  โดยใช้การแยกส่วน  $I - XY = UV^T$  และสมการ (ข.25) จากนั้นแทนค่ากลับเข้าไปในเงื่อนไข (ข.10) โดยที่ตัวแปรที่ต้องการทราบค่าคือ  $\begin{pmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{pmatrix}$  และอาศัยการเติมเต็มของซูร์ในการจัดให้เงื่อนไขอยู่ในรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้นก็สามารถแก้หาพารามิเตอร์ของตัวควบคุมได้เช่นเดียวกัน

### ข.3 สรุป

ในบทนี้เราได้แสดงวิธีการวิเคราะห์และสังเคราะห์ตัวควบคุม สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือ การสังเคราะห์ตัวควบคุมสามารถทำได้สองวิธี คือวิธีการเปลี่ยนตัวแปรและวิธีการกำจัดตัวแปร วิธีการเปลี่ยนตัวแปรจะใช้การนิยามตัวแปรขึ้นมาและอาศัยการจัดรูปหรือการแปลงที่สอดคล้องกันเพื่อให้เงื่อนไขเป็นเชิงเส้นเมื่อเทียบกับตัวแปรที่นิยามขึ้นมาใหม่ ส่วนวิธีการกำจัดตัวแปรจะทำการกำจัดตัวแปรบางตัวออกจากเงื่อนไข และสร้างเงื่อนไขที่สมมูลกับเงื่อนไขเดิม ข้อดีของวิธีการกำจัดตัวแปรคือเราสามารถลดจำนวนตัวแปรในเงื่อนไขลง เวลาที่ใช้คำนวณคำตอบก็จะลดลงซึ่งเราจะเห็นผลได้ชัดในกรณีที่ระบบมีอันดับสูง

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายเชตต์ พิฑูรมานิต เกิดเมื่อวันที่ 27 ตุลาคม พ.ศ. 2525 จังหวัดกรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของ นายเชมพันธ์ พิฑูรมานิต และนางประทุม พิฑูรมานิต สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในปีการศึกษา 2545 และ ศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม เมื่อ พ.ศ. 2546



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย