บทที่ 2

สถิติทดสอบและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แผนการทดลองแบบสุ่มภายในบล็อก (Randomized Block Design)

แผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อกที่นำมาศึกษาในครั้งนี้ จะพิจารณาถึงแผนการทดลองที่เป็นบล็อกสมบูรณ์ ซึ่งหมายความว่า ในแต่ละบล็อกจะต้องมีครบทุกทรีทเมนต์ แผนการทดลองนี้มีข้อดีคือ สามารถแยกปัจจัยที่ไม่ได้สนใจ (Confouding Effect) ออกจากความแตกต่างที่เกิดขึ้นจากผลกระทบทั้งหมดได้ ซึ่งทำได้โดยการแบ่งกลุ่มก่อนการทดลอง คือ การแบ่งบล็อก (Blocking) และเรียกแต่ละระดับของกลุ่มนี้ว่า บล็อก (Blocks) ซึ่งหลักในการจัดบล็อก คือ พยายามจัดหน่วยทดลองที่อยู่ในบล็อกเดียวกันให้มีลักษณะคล้ายคลึงกันมากที่สุด ส่วนหน่วยทดลองที่อยู่ต่างบล็อกกันจะมีความแตกต่างกันมากที่สุด

แผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ มีตัวแบบเป็นดังนี้

$$X_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,3\ldots,t$$
$$j = 1,2,3,\ldots,b$$

โดยที่ X_{ij}	หมายถึง	ค่าสังเกตจากหน่วยทดลองในบล็อกที่ j ที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i
μ	หมายถึง	ค่าเฉลี่ยของประชากร
τ_i	หมายถึง	อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ i
β_j	หมายถึง	อิทธิพลของบล็อกที่ j
ε_{ij}	หมายถึง	ค่าความคลาดเคลื่อนสุ่มของการทดลองจากหน่วยทดลองที่ (i,j)

สมมุติฐานสำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนที่พิจารณาในการศึกษาครั้งนี้คือ ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน (σ_i^2) เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้

H_o : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_t^2 = \sigma^2$

H_1 : ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอย่างน้อย 1 กลุ่ม มีความแปรปรวนไม่เท่ากัน

ตารางที่ 2.1 ลักษณะข้อมูลจากแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์

บล็อก	ทรีทเมนต์							รวม
	1	2	3	.	.	.	t	
1	X_{11}	X_{21}	X_{31}	.	.	.	X_{t1}	$X_{.1}$
2	X_{12}	X_{22}	X_{32}	.	.	.	X_{t2}	$X_{.2}$
3	X_{13}	X_{23}	X_{33}	.	.	.	X_{t3}	$X_{.3}$
.	.	.	.				.	.
.	.	.	.				.	.
.	.	.	.				.	.
b	X_{1b}	X_{2b}	X_{3b}	.	.	.	X_{tb}	$X_{.b}$
รวม	$X_{1.}$	$X_{2.}$	$X_{3.}$	.	.	.	$X_{t.}$	$X_{..}$

สถิติที่ใช้ในการทดสอบมีรายละเอียดดังนี้

2.2 สถิติทดสอบไบร์เลย์และบราดเลย์ (Brindley and Bradley's test : BRIN)

Brindley and Bradley (1985 : 711-714) ได้ทำการศึกษาตัวประมาณความแปรปรวนของประชากรของ Grubbs (1948 : 243-264) แล้วนำมาประยุกต์ใช้กับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนเมื่อข้อมูลได้จากแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ และรายละเอียดของการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานหลัก

$$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_t^2 = \sigma^2$$

ขั้นตอนในการทดสอบ

ให้ X_{ij} เป็นค่าสังเกตที่ได้จากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i ในบล็อกที่ j

$i = 1, 2, \ldots, t$

$j = 1, 2, \ldots, b$

และกำหนดให้

$\overline{X}_{i.}$ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในทรีทเมนต์ที่ i

$\overline{X}_{.j}$ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในบล็อกที่ j

$\overline{X}_{..}$ คือค่าเฉลี่ยรวม

1) คำนวณ $S_i^2 = \sum_{j=1}^{b} \left(\overline{X}_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{..} \right)^2$

2) คำนวณหาค่าประมาณของความแปรปรวนในทรีทเมนต์ที่ i

$$Q_i = \frac{t}{[(b-1)(t-2)]} S_i^2 - \frac{1}{[(b-1)(t-1)(t-2)]} \sum_{i=1}^{t} S_i^2$$

3) คำนวนหาผลรวมของผลคูณระหว่าง Q_i และ $Q_{i'}$ เมื่อ $i < i'$

$$\text{SUMQQ} = \sum_{i<i'} Q_i Q_{i'}$$

4) หาค่า T โดยใช้สูตร

$$T = \frac{2t\,(\text{SUMQQ})}{(t-1)\left(\sum_{i=1}^{t} Q_i \right)^2}$$

5) คำนวนตัวสถิติจากสูตร

$$\text{BRIN} = -\frac{1}{2}\,(b-1)(t-1)(t-2)\log T$$

<u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u> จะปฏิเสธสมมติฐานหลักก็ต่อเมื่อค่าสถิติ BRIN ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง Chi – square ที่ระดับองศาความเป็นอิสระเท่ากับ (t-1)

2.3 สถิติทดสอบฮาน (Han's test : HAN)

Han (1968 : 317-326, 1969 : 153-158) ได้ศึกษาและเสนอสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนเมื่อข้อมูลที่ต้องการทดสอบได้จากแผนการทดลองแบบสุ่มบล็อกสมบูรณ์ ซึ่งในการทดสอบของฮานนี้จะใช้ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) เข้ามาช่วยในการทดสอบบนหลักความจริงว่าเราสามารถสรุปได้ว่าความแปรปรวนของประชากรที่ศึกษามีค่าเท่ากันถ้าเราไม่อาจปฏิเสธสมมติฐานหลักที่ต้องการทดสอบ $R^2 = 0$ สำหรับรายละเอียดของการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานหลัก

$$H_o \; : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_t^2 = \sigma^2$$

ขั้นตอนในการทดสอบ

ให้ X_{ij} เป็นค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i ในบล็อกที่ j , i = 1, 2,...,t ; j = 1, 2,...,b , $\overline{x}_j$ เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลในบล็อกที่ j ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sum_{i=1}^{t} X_{ij} / t$

1. แปลงค่า X_{ij} ให้เป็น $Z_{ij} = X_{ij} - \overline{x}_j$

2. นำค่า Z_{2j} , Z_{3j} และ Z_{4j} มาคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (R^2) ของ $\overline{x}_j$ บนตัวแปร 3 ตัวคือ Z_{2j} , Z_{3j} และ Z_{4j} โดยใช้สูตร

$$R^2_{\overline{X}_j / Z_{2j}, Z_{3j}, Z_{4j}} = \frac{\sum_{i=1}^{b}(X_i - \overline{X})^2 - \sum_{i=1}^{b}(X_i - \hat{X})^2}{\sum_{i=1}^{b}(X_i - \overline{X})^2}$$

, เมื่อแทนค่า X_i ด้วย $\overline{X}_j$

3. คำนวณตัวสถิติจากสูตร

$$F_{cal} = \frac{R^2}{1 - R^2} \times \frac{b - t}{t - 1}$$

โดยที่ t คือ จำนวนทรีทเมนต์

b คือ จำนวนบล็อก

<u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u>

จะปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อค่าสถิติ F_{cal} ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่า F ที่ได้จากการเปิดตารางเอฟที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (t-1) และ (b-t)

2.4 สถิติทดสอบของวิลค็อก (Wilcox's test : WILC)

Rand R. Wilcox (1989 : 305-315) ได้ทำการศึกษาตัวสถิติทดสอบของ Quade (1979 : 680-683) ซึ่งเป็นสถิติทดสอบเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากรแล้วนำมาปรับปรุงเพื่อใช้ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ซึ่งการทดสอบของวิลค็อกนี้ จะพิจารณาถึงการจัดอันดับข้อมูลที่ทำการแปลง (transformation) โดยใช้ค่ามัธยฐานแล้ว นอกจากนั้นยังพิจารณาการจัดอันดับของพิสัย (Range) ในแต่ละบล็อกอีกด้วย รายละเอียดของการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานหลัก

$H_o \; : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_t^2 = \sigma^2$

ขั้นตอนในการทดสอบ

ให้ X_{ij} เป็นค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i ในบล็อกที่ j

$i = 1, 2, \ldots, t$

$j = 1, 2, \ldots, b$

1. แปลงค่า X_{ij} ให้เป็น Z_{ij} โดยใช้สูตร

   $Z_{ij} = |X_{ij} - M_i|$ โดยที่ M_i คือค่ามัธยฐานของข้อมูลที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i

2. จัดอันดับ Z_{ij} ภายในบล็อกแต่ละบล็อกแยกจากกันให้เป็น $R(Z_{ij})$ ถ้าอันดับเท่ากันให้ใช้ค่าเฉลี่ยอันดับ

3. หา Sample Range (D_j) ในแต่ละบล็อก โดย

   Sample Range = ค่าสูงสุด (Z_{ij}) – ค่าต่ำสุด (Z_{ij})

4. จัดอันดับ Sample Range ให้เป็น $R(D_j)$ ถ้าค่าอันดับเท่ากันให้ใช้ค่าเฉลี่ยอันดับ

5. คำนวณ SRD(I) $= \sum_{j=1}^{b} \left[R(D_j) R(Z_{ij}) \right]$ และนำค่า SRD(I) ที่ได้มาหาค่า S โดยใช้

S $= \sum_{i}^{t} [SRD(I)]^2$

6. คำนวณ W $= \dfrac{72S}{t(t+1)b(b+1)(2b+1)} - \dfrac{9(t+1)b(b+1)}{2(2b+1)}$

7. คำนวณ A $= 1 - \dfrac{6(3b^2+3b-1)}{5b(b+1)(2b+1)}$

8. คำนวณ B $= 3A - 2 + \dfrac{72(3b^4+6b^3-3b+1)}{7b^2(b+1)^2(2b+1)^2}$

9. คำนวณ ν $= \dfrac{(t-1)A^3}{B^2}$

10. คำนวณตัวสถิติจากสูตร

WILCOX $= \dfrac{[W-t+1]A}{B} + \nu$

<u>เกณฑ์การตัดสินใจ</u>

จะปฏิเสธสมมติฐานหลักก็ต่อเมื่อค่าสถิติวิลค็อก ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าที่ได้จากการเปิดตาราง Chi – square ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ ν ซึ่งคำนวณได้จากขั้นตอนที่ 9

2.5 สถิติทดสอบเลเวเนปรับปรุง (Modified Levene test : LEVN)

Yitnosumarto and O' Neill (1986 : 230-241) ได้ศึกษาวิธีการทดสอบของเลเวเน แล้วนำมาปรับปรุง ให้ใช้ได้กับข้อมูลที่ได้จากแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ โดยพิจารณาถึงการแปลงข้อมูลโดยใช้ค่าสัมบูรณ์ของความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการทดลองเข้ามาช่วยในการแปลงค่า จากนั้นได้นำข้อมูลที่แปลงแล้วไปวิเคราะห์โดยใช้หลักการวิเคราะห์ความแปรปรวน พร้อมทั้งนำเสนอการคิดค่าองศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนอีกด้วย รายละเอียดของการทดสอบเป็นดังนี้

สมมติฐานหลัก

$$H_o \quad : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_t^2 = \sigma^2$$

ขั้นตอนในการทดสอบ

ให้ X_{ij} เป็นค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i ในบล็อกที่ j

$i = 1, 2, \ldots, t$;

$j = 1, 2, \ldots, b$

1. แปลงค่า X_{ij} ให้เป็น Z_{ij} โดยใช้สูตร

$$Z_{ij} = \left|X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{..}\right|$$

เมื่อ $\overline{X}_{i.}$ คือ ค่าเฉลี่ยของข้อมูลในทรีทเมนต์ที่ i

$\overline{X}_{.j}$ คือค่าเฉลี่ยของข้อมูลในบล็อกที่ j

$\overline{X}_{..}$ คือ ค่าเฉลี่ยรวม

2. เสนอแนวคิดเกี่ยวกับผลกระทบขององศาความเป็นอิสระ (effective degree of freedom) โดยนิยาม

$$k_{t,b} = \frac{(t-1)(b-1)}{tb}$$

และแสดงการคำนวณหาองศาความเป็นอิสระของแต่ละส่วนเป็นดังนี้ คือ

องศาความเป็นอิสระ ของ SSTr เท่ากับ $\frac{(t-2)}{k_{t,b}}$

องศาความเป็นอิสระ ของ SSB เท่ากับ $\frac{(b-2)}{k_{t,b}}$

องศาความเป็นอิสระของ SSE เท่ากับ $\frac{(t-2)(b-2)}{k_{t,b}}$

3. นำข้อมูล Z_{ij} ที่ได้จากการแปลงไปวิเคราะห์ความแปรปรวนซึ่งลักษณะของข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์และขั้นตอนการวิเคราะห์ที่สำคัญเป็นดังนี้

บล็อก	ทรีทเมนต์								รวม
	1	2	3	.	.	.	.	t	
1	Z_{11}	Z_{21}	Z_{31}	.	.	.	.	Z_{t1}	$Z_{.1}$
2	Z_{12}	Z_{22}	Z_{32}	.	.	.	.	Z_{t2}	$Z_{.2}$
3	Z_{13}	Z_{23}	Z_{33}	.	.	.	.	Z_{t3}	$Z_{.3}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
B	Z_{1b}	Z_{2b}	Z_{3b}	.	.	.	.	Z_{tb}	$Z_{.b}$
รวม	$Z_{1.}$	$Z_{2.}$	$Z_{3.}$	.	.	.	.	$Z_{t.}$	$Z_{..}$

TOTAL SUM OF SQUARES

$$SST = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(Z_{ij} - \overline{Z}_{..})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} Z_{ij}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} Z_{ij}\right)^2}{tb}$$

TREATMENT SUM OF SQUARES

$$SSTR = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(\overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{..})^2$$

$$= b\sum_{i=1}^{t}(\overline{Z}_{i.} - \overline{Z}_{..})^2$$

$$= \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{b} Z_{ij}\right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} Z_{ij}\right)^2}{tb}$$

$$= \sum_{i=1}^{t}\frac{Z_{i.}^2}{b} - \frac{(Z_{..})^2}{tb}$$

BLOCK SUM OF SQUARES

$$SSB = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(\overline{Z}_{.j} - \overline{Z}_{..})^2$$

$$= t\sum_{j=1}^{b}(\overline{Z}_{.j} - \overline{Z}_{..})^2$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{t} Z_{ij}\right)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} Z_{ij}\right)^2}{tb}$$

$$= \sum_{j=1}^{b}\frac{Z_{.j}^2}{t} - \frac{(Z_{..})^2}{tb}$$

ERROR SUM OF SQUARES

$$SSE = SST - SSTR - SSB$$

ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนของ Z_{ij}

SOV	df	SS	MS	F
Treatments	$\frac{t-2}{k_{t,b}}$	$\sum_{i=1}^{t}\frac{(Z_{i.})^2}{b}-\frac{(Z_{..})^2}{tb}$	SSTR/df = MSTR	MSTR/MSE
Blocks	$\frac{b-2}{k_{t,b}}$	$\sum_{j=1}^{b}\frac{(Z_{.j})^2}{t}-\frac{(Z_{..})^2}{tb}$	SSB/df = MSB	MSB/MSE
ERROR	$\frac{(t-2)(b-2)}{k_{t,b}}$	SST-(SSTR+SSB)	SSB/df = MSE	

เกณฑ์การตัดสินใจ

จะปฏิเสธสมมติฐานเมื่อค่าสถิติ F ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่า F ที่ได้จากการเปิดตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ $\frac{t-2}{k_{t,b}}$ และ $\frac{(t-2)(b-2)}{k_{t,b}}$

ตัวอย่างการคำนวณหาค่าสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี

ข้อมูลได้มาจากการศึกษาผลผลิตข้าวสาลี 4 พันธุ์ ที่ปลูกในพื้นที่เพาะปลูกแตกต่างกัน 13 พื้นที่ ซึ่งรวบรวมโดย Graybill (1954 : 516-520) แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

บล็อก	ทรีทเมนต์				
	1	2	3	4	$\overline{X}_{.j}$
1	43.6	24.05	19.47	19.14	26.63
2	40.4	21.76	16.61	23.84	25.65
3	18.08	14.19	16.69	16.08	16.26
4	19.57	18.61	17.78	18.29	18.56
5	45.20	29.33	20.19	30.08	31.20
6	25.87	25.60	23.31	27.04	25.46
7	55.20	38.77	21.15	39.95	38.77
8	55.32	34.19	18.56	25.12	33.30
9	19.79	21.65	23.31	22.45	21.80
10	46.24	31.52	22.48	29.28	32.38
11	14.88	15.68	19.79	22.56	18.23
12	7.52	4.69	20.53	22.08	13.71
13	41.17	32.59	29.25	43.95	36.74
$\overline{X}_{i.}$	33.30	24.05	20.70	26.16	$\overline{X}_{..}$ =26.05

<u>วิธีที่ 1 วิธีทดสอบของไบร์เลย์และบราดเลย์</u>

1) จากตารางข้อมูลและค่า $\overline{X}_{i.}$, $\overline{X}_{.j}$ และ $\overline{X}_{..}$ สามารถนำมาหาค่า S_1^2 ได้ดังนี้

$$S_1^2 = (43.60 - 33.30 - 26.63 - 26.05)^2 + (40.40 - 33.30 - 25.65 + 26.05)^2 + \\ + \ldots + (41.17 - 33.30 - 36.74 + 26.05)^2$$

$$= 1044.12$$

S_2^2 = $(24.05 - 24.05 - 26.63 + 26.05)^2 + (21.76 - 24.05 - 25.65 + 26.05)^2 +$

$+ \ldots + (32.59 - 24.05 - 26.74 + 26.05)^2$

= 83.97

S_3^2 = $(19.47 - 20.70 - 26.63 + 26.05)^2 + (16.61 - 20.70 - 25.65 + 26.05)^2 +$

$+ \ldots + (29.25 - 20.70 - 36.74 + 26.05)^2$

= 620.47

S_4^2 = $(19.14 - 26.16 - 26.63 + 26.05)^2 + (23.84 - 26.16 - 25.65 + 26.05)^2 +$

$+ \ldots + (43.95 - 26.16 - 36.74 + 26.05)^2$

= 278.36

และผลรวมทั้งหมด = $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$ = 1044.12 +83.97 + 620.47 +278.36

= 2026.92

2) หาตัวประมาณของความแปรปรวนให้ครบทั้ง 4 ค่า ดังต่อไปนี้

$$Q_1 = \frac{4}{[(13-1)(4-2)]}(1044.12) - \frac{1}{[(13-1)(4-1)(4-2)]}(2026.92)$$

= 145.87

$$Q_2 = \frac{4}{[(13-1)(4-2)]}(83.97) - \frac{1}{[(13-1)(4-1)(4-2)]}(2026.92)$$

= -14.16

$$Q_3 = \frac{4}{[(13-1)(4-2)]}(620.47) - \frac{1}{[(13-1)(4-1)(4-2)]}(2026.92)$$

= 75.26

$$Q_4 = \frac{4}{[(13-1)(4-2)]}(278.36) - \frac{1}{[(13-1)(4-1)(4-2)]}(2026.92)$$

= 18.24

หาค่า $\left(\sum_{i=1}^{t} Q_i\right)^2$ = $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$ = $(145.67 + 14.16 + 75.26 + 18.24)^2$

= $(225.21)^2$

3) การหาค่าผลคูณของ Q_i และ $Q_{i'}$ เมื่อ i< i' แล้วนำค่าที่ได้มารวมกัน สามารถทำได้ดังนี้

$Q_1 Q_2$	= (145.67 x (-14.16))	$Q_2 Q_3$	= (-14.16 x 75.26)
$Q_1 Q_3$	= (145.67 x 75.26)	$Q_2 Q_4$	= (-14.16 x 18.24)
$Q_1 Q_4$	= (145.67 x 18.24)	$Q_3 Q_4$	= (75.26 x 18.24)
ผลรวม	= 11,622.98		

4) คำนวณหาค่า T จากสูตร

$$T = \frac{2t \sum_{i<i'} Q_i Q_{i'}}{(t-1)\left(\sum_{i=1}^{t} Q_i\right)^2} = \frac{2 \times 4 \times (11622.98)}{(4-1) \times (225.21)^2} = 0.61$$

หาค่า log T = - 0..21

5) คำนวณหาค่าสถิติจากสูตร

$$BRIN = -\frac{1}{2}(b-1)(t-1)(t-2)\log T$$

$$= -\frac{1}{2}(13-1)(4-1)(4-2) \times (-0.21) = 9.70$$

6) หาค่าวิกฤตจากตาราง Chi-square ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ (4-1) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $\chi^2_{.05(3)}$ = 7.81 พบว่าสถิติที่ได้จากการคำนวณมากกว่าค่าที่ได้จากตาราง จึงสามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_o สรุปได้ว่าข้อมูลที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนแตกต่างกัน

<u>วิธีที่ 2 วิธีทดสอบของ Han</u>

1. แปลงค่า X_{ij} ให้เป็น Z_{ij} โดยใช้ $Z_{ij} = X_{ij} - \overline{X}_{j}$ ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงค่า Z_{ij} และ $\overline{X}_{j}$

บล็อก	ทรีทเมนต์				$\overline{X}_{.j}$
	1	2	3	4	
1	16.97	-2.54	-7.16	-7.22	26.63
2	14.75	-3.89	-9.04	-1.81	25.65
3	1.82	-2.07	0.43	-0.81	16.26
4	1.01	0.05	-0.78	-0.27	18.56
5	14.00	-1.87	-11.01	-1.12	31.20
6	0.41	0.14	-2.15	1.58	25.46
7	16.43	0	-17.62	1.18	38.77
8	22.02	0.89	-14.74	-8.18	33.30
9	-2.01	-0.15	1.51	0.65	21.80
10	13.86	-0.86	-9.90	-3.10	32.38
11	-3.35	-2.55	1.56	4.33	18.23
12	-6.19	-6.02	6.82	8.37	13.71
13	4.43	-4.15	-7.49	7.21	36.74

สมมติฐานที่ต้องการทดสอบ

H_o : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma^2$

H_1 : ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนอย่างน้อย 1 กลุ่ม มีความแปรปรวนต่างกัน

2.นำค่าข้อมูล $\overline{X}_j$ Z_{2j} , Z_{3j} และ Z_{4j} ; j = 1 , 13 มาหาค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจของ $\overline{X}_j$ บน Z_{2j} , Z_{3j} , Z_{4j} โดยใช้สูตร

$$R^2_{\overline{X}_j / Z_{2j}, Z_{3j}, Z_{4j}} = \frac{\sum_{i=1}^{b}(X_i - \overline{X})^2 - \sum_{i=1}^{b}(X_i - \hat{X})^2}{\sum_{i=1}^{b}(X_i - \overline{X})^2}$$, เมื่อแทนค่า X_i ด้วย $\overline{X}_j$

R^2 = 0.89

3. นำค่า R^2 ที่ได้ไปแทนลงในสูตรเพื่อคำนวณตัวสถิติ

$$F_{cal} = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{b-t}{t-1}$$

จะได้ว่า

$$F_{cal} = \frac{0.891}{1-0.891} - \frac{13-4}{4-1}$$

$$= 24.41$$

4. หาวิกฤตจากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 3 และ 9 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{.05,3,9}$ = 3.86 พบว่า F ที่ได้จากการคำนวณ > $F_{.05,3,9}$ จึงปฏิเสธ H_o สรุปได้ว่า ข้อมูลที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนแตกต่างกัน

<u>วิธีที่ 3 วิธีทดสอบของวิลค็อก</u>

1. เรียงลำดับของข้อมูลในแต่ละทรีทเมนต์แยกจากกันทั้ง 4 ทรีทเมนต์ เพื่อหาค่ามัธยฐานของแต่ละทรีทเมนต์ จะได้ผลดังนี้คือ

ค่ามัธยฐานในทรีทเมนต์ที่ 1 = 40.40

ค่ามัธยฐานในทรีทเมนต์ที่ 2 = 24.05

ค่ามัธยฐานในทรีทเมนต์ที่ 3 = 20.19

ค่ามัธยฐานในทรีทเมนต์ที่ 4 = 23.84

2. แปลงค่า X_{ij} ให้เป็น Z_{ij} โดยใช้ค่ามัธยฐานของทรีทเมนต์เข้ามาช่วยในการแปลง

จากสูตร $Z_{ij} = |X_{ij} - M_i|$; M_i เป็นค่ามัธยฐานของทรีทเมนต์ที่ i จะได้ดังตาราง

บล็อก	ทรีทเมนต์			
	1	2	3	4
1	3.20	0.00	0.72	4.43
2	0.00	2.29	3.58	0.00
3	22.32	9.86	3.50	7.76
4	20.83	5.44	2.41	5.55
5	4.8	5.28	0.00	6.24
6	14.53	1.55	3.12	3.20
7	14.80	14.72	0.96	16.11
8	14.92	10.14	1.63	1.28
9	20.61	2.40	3.12	1.39
10	5.48	7.47	2.29	5.44
11	25.52	8.37	0.40	1.28
12	32.88	19.36	3.40	1.76
13	0.77	8.54	9.06	20.11

3. จัดอันดับ Z_{ij} ในแต่ละบล็อกแยกจากกันเป็น $R(Z_{ij})$ จนครบทุกบล็อก

4. หาค่า Sample Range D_j ในแต่ละบล็อกโดย

Sample Range = ค่าสูงสุด (Z_{ij}) – ค่าต่ำสุด (Z_{ij})

Sample Range ในบล็อกที่ 1 = 4.43 - 0.00 = 4.43

Sample Range ในบล็อกที่ 2 = 3.58 – 0.00 = 3.58

ทำเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งครบ 13 บล็อก

5. จัดอันดับ Sample Range ให้เป็น $R(D_j)$
ผลที่ได้จากขั้นตอนที่ 3-5 แสดงได้ดังตาราง

บล็อก	Sample range (D_j)	R (D_j)	$R(Z_{ij})$			
			1	2	3	4
1	4.43	2	3	1	2	4
2	3.58	1	1.5	3	4	1.5
3	18.82	9	4	3	1	2
4	18.42	8	4	2	1	3
5	6.24	4	2	3	1	4
6	12.98	5	4	1	2	3
7	15.15	7	3	2	1	4
8	13.64	6	4	3	2	1
9	19.22	10	4	2	3	1
10	5.16	3	3	4	1	2
11	25.12	12	4	3	1	2
12	32.54	13	4	3	1	2
13	19.34	11	1	2	3	4

6. การคำนวณหาค่า SRD(I) โดยใช้

$$SRD(I) = \sum_{j}^{b} \left[R(D_j)\, R(Z_{ij}) \right]$$

$$SRD(1) = (2)(3) + (1)(1.5) + (9)(4) + \ldots + (11)(1) = 308.5$$

$$SRD(2) = (2)(1) + (1)(3) + (9)(3) + \ldots + (11)(2) = 226$$

$$SRD(3) = (2)(2) + (1)(4) + (9)(1) + \ldots + (11)(3) = 149$$

$$SRD(4) = (2)(4) + (1)(1.5) + (9)(2) + \ldots + (11)(4) = 226.5$$

7. คำนวณหา S โดยใช้

$$S = \sum_{i}^{t} (SRD(I))^2$$

$$S = (308.5)^2 + (226)^2 + (149)^2 + (226.5)^2 = 129751.5$$

8. คำนวณ W

$$= \frac{72\ (129751.5)}{4\ (4+1)\ 13\ (13+1)\ [(2\times3)+1]} - \frac{9\ (4+1)\ 13\ (13+1)}{2\ [(2\times3)+1]}$$

$$= 9.92$$

9. คำนวณ A

$$= 1 - \frac{b\ (3\ (13)^2 + 3\ (13) - 1)}{5\ (13)\ (13+1)\ [(2\times13)+1]}$$

$$= 0.867$$

10. คำนวณ B

$$= 3\ (0.867) - 2 + \frac{72\ (3\ (13)^4 + 6\ (13)^3 - (3\times13) + 1)}{7\ (13)^2\ (13+1)^2\ [(2\times13)+1]^2}$$

$$= 0.643$$

11. คำนวณ v

$$= \frac{(4-3)\ (0.867)^3}{(0.643)^2}$$

$$= 4.73 \approx 5$$

12. คำนวณตัวสถิติ

$$WILCOX = \frac{[9.32-4+1]\ (0.867)}{0.643} + 4.73$$

$$= 13.26$$

13. หาค่าวิกฤตจากตาราง Chi-square ที่องศาความเป็นอิสระเท่ากับ 4.73 ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $\chi^2_{.05(5)} = 7.81$ พบว่าค่าสถิติที่ได้จากการคำนวณ > ค่า Chi-square ที่ได้จากตาราง จึงสามารถปฏิเสธสมมติฐาน H_o สรุปได้ว่า ข้อมูลที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนแตกต่างกัน

4. วิธีทดสอบของเลเวนเนปรับปรุง

1. แปลงข้อมูล X_{ij} เป็น Z_{ij} โดยใช้ $Z_{ij} = \left|X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{ij} + \overline{X}_{..}\right|$

$Z_{11} = \left|43.60 - 33.30 - 26.63 + 26.05\right| = 9.72$

$Z_{12} = \left|40.40 - 33.30 - 25.65 + 26.05\right| = 7.50$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนกระทั่งครบทุกตัว

ตารางแสดงค่า Z_{ij} จากขั้นตอนที่ 1

บล็อก	ทรีทเมนต์				$Z_{.j}$
	1	2	3	4	
1	9.72	0.58	1.81	7.33	19.45
2	7.50	1.89	3.69	1.92	15.01
3	5.42	0.07	5.78	0.29	11.56
4	6.24	2.05	4.57	0.38	13.24
5	6.76	0.13	5.66	1.23	13.78
6	6.83	2.15	3.21	1.47	13.66
7	9.19	2.01	12.27	1.07	24.53
8	14.78	2.90	9.39	8.29	35.35
9	9.25	1.85	6.86	0.54	18.51
10	6.62	1.14	4.55	3.21	15.52
11	10.59	0.54	6.91	4.22	22.27
12	13.43	7.01	12.18	8.26	40.88
13	2.81	2.15	2.14	7.10	14.20
$Z_{i.}$	109.14	24.47	79.01	45.33	$\overline{Z}_{..}$ = 257.95

2.นำค่า Z_{ij} ที่ได้จากการแปลงค่าไปวิเคราะห์ความแปรปรวน

$$CT = \frac{\left[\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}(Z_{ij})\right]^2}{t\,b}$$

$$= \frac{(9.72) + (0.58) + \ldots + (7.10)}{(4 \times 13)}$$

$$= \frac{(257.95)^2}{(4 \times 13)}$$

$$= 1,279.61$$

$$SST = (9.72)^2 + (0.58)^2 + \ldots + (7.10)^2 - CT$$

$$= 2026.91 - 1279.691$$

$$= 747.30$$

$$SSTR = \frac{(109.14)^2 + (24.4)^2 + (79.01) + (45.33)^2}{(13)} - CT$$

$$= \frac{20808.35}{13} - 1279.61 = 321.03$$

$$SSB = \frac{(19.45)^2 + (15.01)^2 + \ldots + (14.20)^2}{4} - CT$$

$$= \frac{6092.40}{4} - 1279.61 = 243.49$$

$$SSE = SST - SSTR - SSB = 182.78$$

จากแนวคิดของผลกระทบของงศาความเป็นอิสระ (effective degree of freedom)

$$\dot{k}_{t,b} = \frac{(4-1)(13-1)}{(4 \times 13)} = 0.69$$

จะได้องศาความเป็นอิสระของ SSTR $= \frac{(4-2)}{0.69} = 3$

จะได้องศาความเป็นอิสระของ SSB $= \frac{(43-2)}{0.69} = 16$

จะได้องศาความเป็นอิสระของ SSE $= \frac{(4-2)(13-2)}{0.69} = 32$

จะได้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ดังนี้

SOV	df	SS	MS	F-test
TREATMENTS	3	321.03	107.01	18.734
BLOCKS	16	243.49		
ERROR	32	182.78	5.712	
TOTAL	51	747.31		

3. หาค่าวิกฤติจากตาราง F ที่องศาความเป็นอิสระ 3 และ 32 ณ ระดับนัยสำคัญ 0.05 จะได้ $F_{.05(3,32)} = 2.90$ พบว่า F จากการคำนวณ $> F_{.05(3,32)}$ ทำให้สามารถปฏิเสธ H_o ได้สรุปว่าข้อมูลที่นำมาทดสอบมีความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนแตกต่างกัน

เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้สนใจศึกษาถึงความแกร่งของสถิติทดสอบทั้ง 4 วิธี เมื่อความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการทดลองมีการแจกแจงแบบสมมาตรชนิดหางยาวและแบบเบ้ ดังนั้น จึงเลือกศึกษาการแจกแจงแบบที (t Distribution) แบบไคสแควร์ (Chi-square Distribution) แบบไวบูลล์ (Weibull Distribution) และการแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution) เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผลด้วย ซึ่งรายละเอียดและคุณสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับการแจกแจงทั้งหมดจะนำเสนอดังต่อไปนี้

2.6 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

2.6.1 การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงที่สำคัญและถูกนำมาใช้บ่อยที่สุดในวิชาสถิติ ค้นพบโดย เดอมูวร์ (De Movire : 1667-1754) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ต่อมาลาปลาซ (Laplace : 1749-1827) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสได้นำมาประยุกต์ใช้ในทางด้านสังคมศาสตร์ และวิทยาศาสตร์อย่างแพร่หลาย หลังจากนั้นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันคือ เกาส์ (Gauss : 1777-1855) ได้นำทฤษฎีนี้ไปศึกษาหาความคลาดเคลื่อน (Error) โดยการวัดซ้ำๆ ในกลุ่มที่มีขนาดคงเดิม และพบว่าการแจกแจงที่ได้จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ ดังนั้นการแจกแจงแบบปกติจึงอาจเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Gaussian Distribution ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นคือ

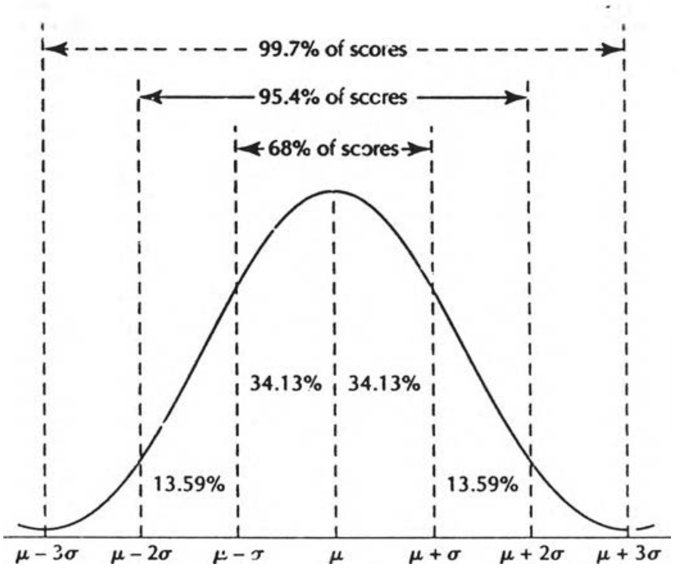
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

โดยที่	$f(x)$	แทนความสูงของโค้งที่วัดจากแกนนอน ณ จุดใดๆ ทุกจุด (x)
	σ	แทนความเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร
	σ^2	แทนความแปรปรวนของประชากร
	μ	แทนค่าเฉลี่ยของประชากร
	π	เท่ากับ 3.14159
	e	เท่ากับ 2.71828
	x	ค่าของข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง

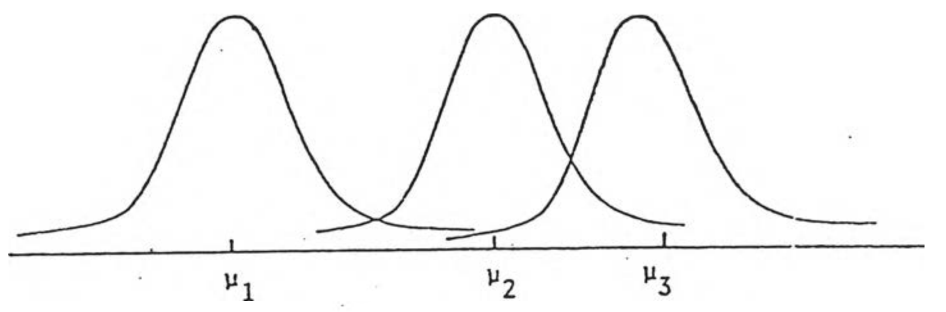
และค่า μ , σ เป็นพารามิเตอร์ที่บอกถึงลักษณะของประชากรว่ามีตำแหน่งและการกระจายมากน้อยเพียงใดตามลำดับ

2.6.2 ลักษณะและคุณสมบัติของการแจกแจงปกติ

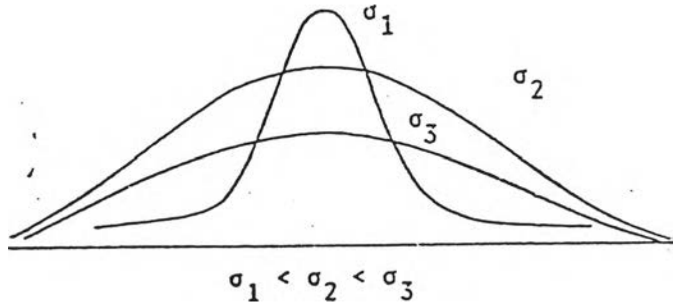
1. ลักษณะของโค้งเป็นรูประฆังคว่ำ (Bell shaped) และมีลักษณะสมมาตร (Symmistry)
2. จุดที่เป็นค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยมเป็นจุดเดียวกันหรือมีค่าเท่ากัน
3. มีความโด่ง (kurtosis) ของเส้นโค้งเท่ากับ 3 ซึ่งเรียกว่า เมโซเคอร์ติค (Mesokurtic) และจุดเปลี่ยนโค้งทั้งสองข้างจะอยู่ ณ ตรง 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
4. ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับศูนย์
5. ปลายทั้งสองข้างของเส้นโค้งจะค่อยๆลดต่ำลง แต่ไม่จรดกับฐานของโค้งหรือแกนนอน
6. ถ้าลากเส้นตั้งฉากจาก X (ซึ่งเป็นแกนนอน) ไปยังเส้นโค้งโดยที่เส้นดังกล่าวห่างจากจุดเฉลี่ย (μ) ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาด้วยระยะหนึ่งเท่า, สองเท่า และสามเท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) พื้นที่ที่ปิดกั้นเส้นตั้งฉากกับเส้นโค้งจะเท่ากับ 68%, 95% และ 99.7% ของพื้นที่ทั้งหมดตามลำดับ
7. พารามิเตอร์ μ และ σ จะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งที่ตั้งของเส้นโค้งและความโค้งหรือแบบของโค้งตามลำดับ



รูปที่ 2.1 แสดงพื้นที่โค้งของการแจกแจงแบบปกติ



รูปที่ 2.2 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าเฉลี่ยต่างกันแต่มีค่าความแปรปรวนเท่ากัน



รูปที่ 2.3 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าความแปรปรวนต่างกันแต่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน

2.7 การแจกแจงแบบที (T Distribution)

การแจกแจงแบบทีมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ แต่มีลักษณะหางยาวกว่า การแจกแจงที หรือ Student's t-Distribution เป็นชื่อเพื่อให้เกียรติแก่กอสเซทท์ ที่พิมพ์ผลงานเรื่อง " Small sample" โดยใช้นามปากกาว่า " Student"

การแจกแจงที เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติและไคสแควร์ ซึ่งสามารถเขียนสูตรได้ดังนี้

$$t_{(n)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}}$$

เมื่อ n คือองศาความเป็นอิสระ (Degree of fredom)

Z คือการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1

$\chi^2_{(n)}$ คือการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบที คือ

$$f(x) = \frac{\left[1+\frac{x^2}{n}\right]^{\frac{-(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}\ B\left[\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right]} \quad ; \ -\alpha < x < \alpha \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

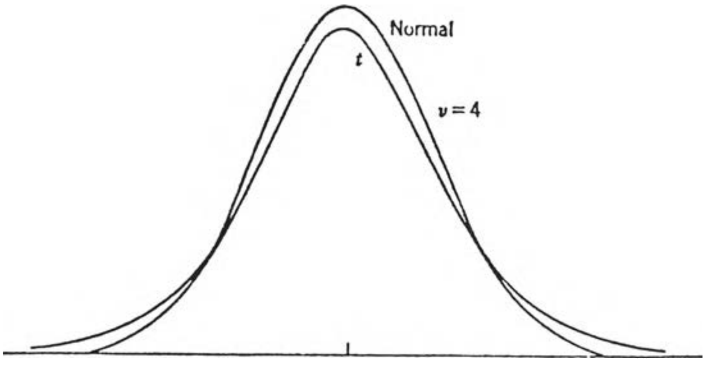
โดยที่ B (a,b) เป็นเบต้าฟังก์ชัน ซึ่ง $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

n คือองศาความเป็นอิสระ

คุณสมบัติของการแจกแจงแบบที

1. โค้งมีลักษณะเป็นสมมาตรหางยาว ค่าเฉลี่ย, มัธยฐาน และฐานนิยม อยู่ที่จุดเดียวกัน และมีค่าเท่ากับ 0
2. ความแปรปรวนมีค่าเท่ากับ $\frac{n}{n-2}$ เมื่อ n เป็นองศาความเป็นอิสระซึ่งมีค่ามากกว่า 2
3. ถ้า n มีค่ามากๆ การกระจายจะมีค่าใกล้เคียงโค้งปกติ

ลักษณะการแจกแจงของที จะเป็นไปตามองศาความเป็นอิสระ ซึ่งในที่นี้ คือ n จึงกล่าวได้ว่าการกระจายของการแจกแจงแบบทีขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่าง ดังรูป



รูป 2.4 การแจกแจงแบบที ที่ระดับองศาความเป็นอิสระ = 4

2.8 การแจกแจงแบบไคสแควร์ (Chi-Square Distribution)

2.8.1 การแจกแจงแบบไคสแควร์ถูกค้นพบครั้งแรกในปี ค.ศ. 1876 โดย เอฟ.อาร์ฮิลเมอร์ท (F. R. Helmert : 1843-1917) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน ต่อมาในปี ค.ศ. 1900 คาลเพียสัน (Karl Pearson : 1857-1936) นักสถิติชาวอังกฤษได้ทำการพัฒนาและนำมาใช้ประโยชน์อย่างแพร่หลาย

ถ้าข้อมูล X เป็นตัวแปรอิสระ มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตร0ฐานเท่ากับ σ หากนำเอาข้อมูล X แต่ละตัวมาแปลงเป็นค่า Z โดยใช้สูตร

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

แล้วนำค่า Z ที่ได้แต่ละค่ามายกกำลังสองแล้วทำการแจกแจงความถี่ของ Z^2 ปรับพื้นที่ทั้งหมดให้เป็น 1 จะได้ลักษณะการกระจายแบบไคสแควร์

สมมติแปลงข้อมูล X จำนวน n ค่า ซึ่งเป็นอิสระกันให้เป็นค่า Z^2 แล้วนำมารวมกันจะได้

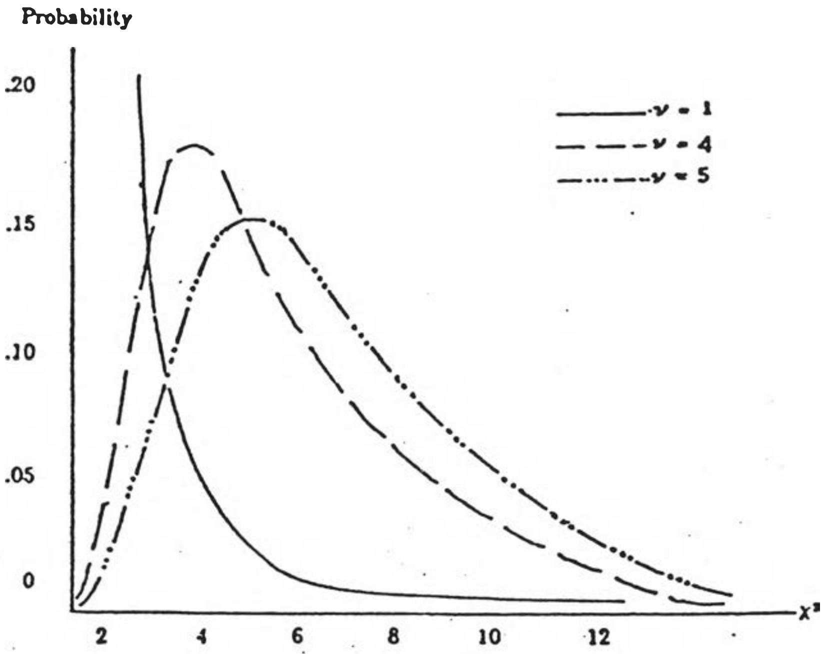
$$\begin{aligned} Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 &= \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \\ &= \chi^2_{(n)} \end{aligned}$$

ลักษณะการแจกแจงของค่าไคสแควร์ จะเปลี่ยนแปลงไปตามขนาดของกลุ่มตัวอย่าง (n) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า การกระจายของไคสแควร์จะแปรตามองศาความเป็นอิสระ สำหรับกลุ่มเดียวองศาความเป็นอิสระมีค่าเท่ากับ n -1

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบไคสแควร์คือ

$$f(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{x}{2}\right\}.x^{\frac{(n-2)}{2}}}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad ;x > 0 \ ; n = 1,2,\ldots$$

โดยที่ n คือองศาความเป็นอิสระ ข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์จะมีลักษณะเบ้ขวา



รูปที่ 2.5 แสดงการแจกแจงไคสแควร์ที่ระดับความเป็นอิสระเท่ากับ 1, 4 และ 5

2.8.2 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบไคสแควร์ มีดังนี้

1.ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงไคสแควร์จะมีค่าเท่ากับองศาความเป็นอิสระ (ค่าเฉลี่ยของ $\chi^2_{(n)} = n$)

2.ค่ามัธยฐานของ $\chi^2_{(n)} = n - 2 \quad n \geq 2$

3.ความเบี่ยงเบนมาตรฐานของ $\chi^2_{(n)} = \sqrt{2n}$ หรือมีความแปรปรวนเท่ากับ $2n$

4. ค่าความเบ้ (Skewness) ของ $\chi^2_{(n)}$ เท่ากับ ทำให้ลักษณะการกระจายของ มีลักษณะเบ้ทางขวา

5. ค่า χ^2 จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $+\infty$ เนื่องจากค่า χ^2 คือค่า Z^2 นั่นเอง

6. ถ้า n มีขนาดใหญ่แล้ว การแจกแจงของ χ^2 จะมีลักษณะเข้าสู่การแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็น n และความเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น $\sqrt{2n}$

7. $\chi^2_{n_1} + \chi^2_{n_2}$ โดยที่ เป็นอิสระกันจะมีการแจกแจงเช่นเดียวกับ เมื่อ n_1, n_2 เป็นระดับความเป็นอิสระของไคสแควร์ชุดที่ 1 และชุดที่ 2 ตามลำดับ เช่น $\chi^2_{(5)} + \chi^2_{(10)} = \chi^2_{(15)}$

2.9 การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

Waloddi Weibull นักฟิสิกส์ชาวสวีเดนเป็นผู้แนะนำการแจกแจงนี้ขึ้นเมื่อ ค.ศ. 1939 ซึ่งการแจกแจงจะเกี่ยวข้องกับอายุการใช้งานของเครื่องจักรกลต่างๆ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}.x^{\alpha-1}.e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} & ; \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0 & ; \quad \text{else} \end{cases}$$

โดยที่ x เป็นข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์

α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่างของการแจกแจง (Shape Parameter)

β เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงขนาดของการแจกแจง

2.9.1 คุณสมบัติของการแจกแจงแบบไวบูลล์

1.โค้งมีลักษณะเปลี่ยนไปตามพารามิเตอร์ α เมื่อ $\alpha = 2$ โค้งจะมีลักษณะเบ้ขวาซึ่งจะคล้ายการกระจายแบบไคสแควร์

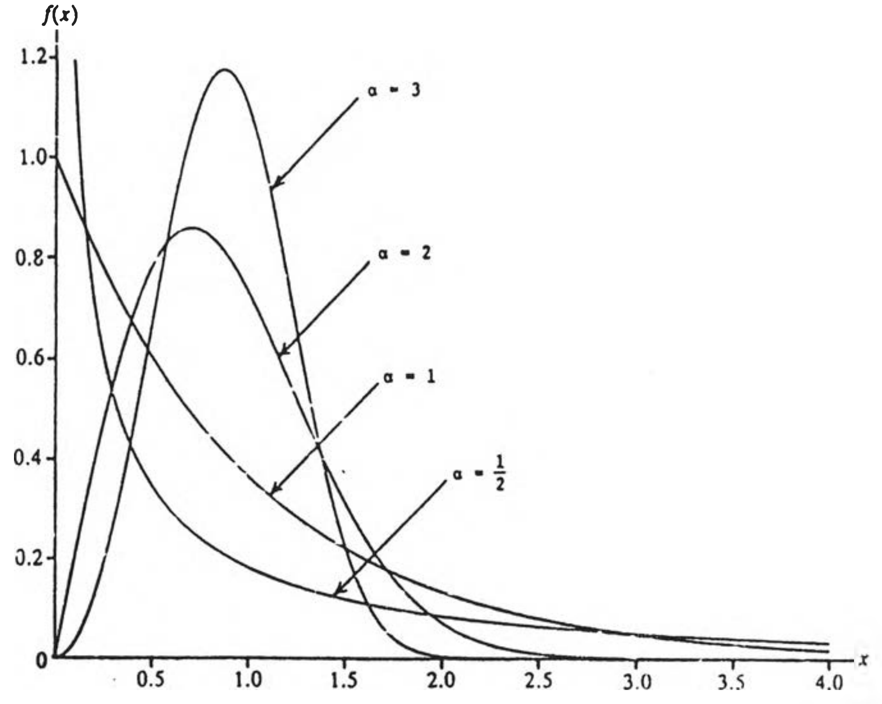
2. ค่าความแปรปรวนและค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มไวบูลล์ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α และ β โดยที่

ค่าเฉลี่ย $= \frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

ค่าความแปรปรวน $= \frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$

3. การแจกแจงไวบูลล์มีค่า $\alpha = 1$ และ β เป็นค่าใดๆ ที่มากกว่าศูนย์จะเป็นการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น α นั่นคือ

$$\text{Weibull} \quad (1, \beta) \quad \cong \quad \exp(\beta)$$



รูปที่ 2.6 แสดงการแจกแจงแบบไวบูลล์ เมื่อ α = 2.0 และ β = 0.5, 1, 2

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาที่เกี่ยวกับสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเมื่อข้อมูลมีการแจกแจงแบบสองทางนั้น ยังไม่มีผู้วิจัยนำมาศึกษาเปรียบเทียบกันอย่างกว้างขวาง ส่วนใหญ่จะเป็นการศึกษาเปรียบเทียบสถิติทดสอบสำหรับข้อมูลแจกแจงทางเดียวเท่านั้น งานวิจัยที่เสนอนี้ เป็นการศึกษาถึงคุณสมบัติของตัวสถิติทดสอบต่างๆ โดยอาศัยอำนาจการทดสอบและความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

Grubbs (1948 : 234 - 264) ได้เสนอวิธีการหารตัวประมาณความแปรปรวนที่ไม่เอนเอียง (Unbiased Estimator) โดยใช้ค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเข้ามาช่วยในการคำนวณ พร้อมทั้งแสดงให้เห็นด้วยว่าตัวประมาณที่ได้มีการแจกแจงแบบไคสแควร์

Russell and Bradley (1958 : 111 - 129) เสนอสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนเมื่อข้อมูลได้มาจากแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อกสมบูรณ์ และจำนวนทรีทเมนต์มีค่าเท่ากับ 3 และสถิติทดสอบจะใช้ตัวประมาณของ Grubbs เป็นพื้นฐานในการคำนวณ พร้อมทั้งแสดงให้เห็นว่าสถิติทดสอบที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n – 1

Brown and Foresythe (1974 : 364 - 367) ศึกษาเปรียบเทียบสถิติทดสอบ 3 วิธี คือ สถิติทดสอบแจคไนฟ์ที่เสนอโดยเลยาร์ด (Layard's Chi - square test statistic) และสถิติทดสอบเลเวเน (Levene's test statistic) ได้ผลสรุปว่า สถิติทดสอบเลเวเนมีความแกร่งเมื่อมีการแจกแจงที่ไม่ใช่แบบปกติ แต่อำนาจการทดสอบค่อนข้างต่ำ ส่วนสถิติทดสอบแจคไนฟ์ และสถิติทดสอบไคสแควร์ เป็นสถิติทดสอบที่ไม่มีความแกร่ง เมื่อการแจกแจงของข้อมูลไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ

Ellenberg (1977 : 407 - 411) ได้ทำการศึกษาสถิติทดสอบเมื่อข้อมูลมีลักษณะการแจกแจงแบบสองทาง (Two way classification) โดยอาศัยสัดส่วนของผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนในแต่ละกลุ่มเทียบกับผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนทั้งหมดในแผนการทดลอง และเสนอค่าวิกฤตในการปฏิเสธสมมติฐานว่างในรูปแบบตาราง ในกรณีที่ทรีทเมนต์มีค่าไม่เกิน 10 และจำนวนบล็อกมีค่าไม่เกิน 15 บล็อก