บทที่ 2

สถิติที่ใช้ในการวิจัย

บทนี้จะกล่าวถึงหลักสถิติต่างๆ ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ การแจกแจงปกติของตัวแปรพหุ, ตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด, ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีค่าประจำน้อยที่สุดของรูปแบบกำลังสอง(MINQUE) และวิธีแจคไนฟ์ รวมทั้งตัวสถิติทดสอบจากวิธีต่างๆ ที่เสนอในการวิจัยครั้งนี้

การแจกแจงปกติของตัวแปรพหุ (The Multivariate Normal Distribution)

ให้ $\underset{\sim}{y}' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เป็นเวกเตอร์ที่มีการแจกแจงปกติของ n ตัวแปรสุ่ม ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า $\underset{\sim}{y} \sim N_n\left(\underset{\sim}{\mu}, V\right)$ และฟังก์ชันความหนาแน่นอยู่ในรูป

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu}\right)' V^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{\mu}\right)\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}|V|^{\frac{1}{2}}} \quad , \ -\infty \langle y_i \langle \infty$$

$$, \ i = 1, 2, \ldots, n$$

แล้วเวกเตอร์สุ่ม $\underset{\sim}{y}$ จะมีการแจกแจงปกติของ n ตัวแปรสุ่มที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยคือ $\underset{\sim}{\mu}' = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$

และ เมทริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม คือ

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

ตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญและแบบถ่วงน้ำหนัก

(Ordinary Least Square and Weighted Least Square Estimator)

พิจารณาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้น

$$\underset{\sim}{y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{e}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{y}$ เป็นเวกเตอร์ค่าสังเกตขนาด nx1

X เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ขนาด nxp

$\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวกเตอร์พารามิเตอร์ขนาด px1

$\underset{\sim}{e}$ เป็นเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อนขนาด nx1

และ $\underset{\sim}{e} \sim \left(\underset{\sim}{0}, V\right)$, V คือ เมทริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วม

โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด(Least Square Method) จะเลือก $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ทำให้ระยะทางกำลังสองของความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยที่สุด กล่าวคือ เลือก $\underset{\sim}{\beta}$ ที่ทำให้

$$\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}\right)' V^{-1}\left(\underset{\sim}{y} - X\underset{\sim}{\beta}\right) \quad \text{มีค่าน้อยที่สุด}$$

แล้วจะได้ ตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด $\left(\hat{\underset{\sim}{\beta}}\right)$ คือ

$$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}\underset{\sim}{y}$$

และเรียก $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ ว่าเป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก $\left(\underset{\sim}{b}^{W}\right)$ และถ้า $V = \sigma^2 I_n$ จะได้ว่า $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ นั่นคือ

$$\underset{\sim}{b} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$$

ตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีค่าประจำน้อยที่สุดของรูปแบบกำลังสอง

(MInimum Norm Quadratic Unbiased Estimator : MINQUE)

ในปี ค.ศ. 1970 C. RADHAKRISHNA RAO ได้เสนอวิธีการประมาณค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของตัวแบบเชิงเส้น เมื่อความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนไม่เท่ากัน ซึ่งตัวประมาณดังกล่าวนี้ก็คือ ผลบวกเชิงเส้นของความคลาดเคลื่อนกำลังสองนั่นเอง โดยมีหลักการดังนี้

พิจารณาตัวแบบเชิงเส้น

$$\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X\beta} + \underset{\sim}{e}$$

โดยที่ $\underset{\sim}{y}$ เป็นเวกเตอร์ค่าสังเกตขนาด nx1

X เป็นเมทริกซ์ของค่าคงที่ขนาด nxp

$\underset{\sim}{\beta}$ เป็นเวกเตอร์พารามิเตอร์ขนาด px1

$\underset{\sim}{e}$ เป็นเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนขนาด nx1

และ เมทริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมของ $\underset{\sim}{e}$ คือ

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $\Sigma p_i \sigma_i^2$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของความแปรปรวนที่ต้องการประมาณค่า แล้วรูปแบบกำลังสองของค่าสังเกต $\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y}$ จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงและมีค่าประจำน้อยที่สุดของรูปแบบกำลังสอง(MINQUE) ถ้าค่าประจำยุคลิดของ A , $\|A\|$ ซึ่งก็คือรากที่สองของผลรวมของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ A^2 มีค่าน้อยที่สุด โดยมีเงื่อนไขคือ

1) $AX = 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}\sigma_i^2$, a_{ii} เป็นสมาชิกบนเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์ A

หมายเหตุ

เงื่อนไขข้อที่ (1) หมายความว่า ตัวประมาณ MINQUE ที่ได้เป็นตัวประมาณที่ยืนยง (invariant)

เงื่อนไขข้อที่ (2) หมายความว่า รูปแบบกำลังสอง $\underset{\sim}{y}'A\underset{\sim}{y}$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของฟังก์ชันเชิงเส้นของความแปรปรวนที่พิจารณา

ขั้นตอนการคำนวณหาค่าของตัวประมาณ MINQUE สำหรับกรณีทั่วๆ ไป คือ กำหนดให้ $\mathbf{M} = \left(\mathrm{I} - \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\right) = \left[\mathrm{m}_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์ฉายา (projection matrix), $\underset{\sim}{v} = \left(\mathrm{I} - \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'\right)\underset{\sim}{y}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง, $\underset{\sim}{s}$ เป็นเวกเตอร์ของความแปรปรวน $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ และ $\mathrm{F} = \left[\mathrm{m}_{ij}^2\right]$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่ใช่เอกฐาน (non-singular matrix) แล้วตัวประมาณ MINQUE ของ $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ คือผลลัพธ์ของสมการ

$$\mathrm{F}\underset{\sim}{s} = \underset{\sim}{v}$$

และตัวประมาณ MINQUE ของฟังก์ชันเชิงเส้นของความแปรปรวน $(\underset{\sim}{p}'\hat{\underset{\sim}{s}})$ คือ

$$\underset{\sim}{p}'\hat{\underset{\sim}{s}} = \underset{\sim}{p}'\mathrm{F}^{-1}\underset{\sim}{v}$$

วิธีแจคไนฟ์ (Jackknife Method)

แจคไนฟ์เป็นวิธีที่ใช้เพื่อลดความเอนเอียงของตัวประมาณ เสนอโดย Quenouille และตัวประมาณที่ได้เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา (consistent estimator) หลักการของวิธีนี้ คือ ถ้าต้องการหาตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ด้วยตัวอย่างขนาด n จะต้องทำการจัดตัวอย่างเป็น g กลุ่ม โดยแต่ละกลุ่มมีขนาดเท่ากับ h ซึ่งจะเป็นตัวอย่างที่ถูกตัดทิ้งในแต่ละรอบของการคำนวณ ฉะนั้นในแต่ละรอบของการคำนวณจะใช้ตัวอย่างเพียง (g-1)h เท่านั้น และเรียกค่าที่ได้ว่า ค่าเทียม (pseudo-value) ของแจคไนฟ์ คือ

$$\tilde{\theta}_i = g\hat{\theta} - (g-1)\,\hat{\theta}_{-i} \;,\; i = 1, 2, \ldots, g$$

โดยที่ $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณของ θ จากขนาดตัวอย่าง n

$\hat{\theta}_{-i}$ เป็นตัวประมาณจากขนาดตัวอย่าง (g-1)h

ตัวประมาณแจคไนฟ์ คือ

$$\begin{aligned}\tilde{\theta} &= \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g}\tilde{\theta}_i \\ &= g\hat{\theta} - \frac{(g-1)}{g}\sum_{i=1}^{g}\hat{\theta}_{-i}\end{aligned}$$

ความเอนเอียงของตัวประมาณแจคไนฟ์ $(\tilde{\theta})$ เกิดขึ้นที่อันดับ(order) $O(n^{-2})$ แต่ความเอนเอียงของตัวประมาณ $\hat{\theta}$ เกิดขึ้นที่อันดับ $O(n^{-1})$

ภายหลัง Turley ได้เสนอวิธีการสร้างช่วงความเชื่อมั่นที่มีความแกร่ง โดยพิจารณาค่าเทียมของแจคไนฟ์ $(\tilde{\theta}_i)$ ที่ได้เป็นเสมือนตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระซึ่งกันและกัน แล้วความแปรปรวนของตัวประมาณแจคไนฟ์จะมีคุณสมบัติคงเส้นคงวา ซึ่งจะทำให้ตัวประมาณแจคไนฟ์มีการแจกแจงปกติมาตรฐานเมื่อใกล้อนันต์ นั่นคือ

$$t = \frac{\sqrt{g}\left(\hat{\theta}-\theta\right)}{\left\{\frac{1}{(g-1)}\sum_{i=1}^{g}\left(\tilde{\theta}_i-\tilde{\theta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

โดยที่ t มีการแจกแจงแบบที ด้วยระดับความเป็นอิสระ g-1

กำหนดให้ θ เป็นฟังก์ชันของ $\underset{\sim}{\beta}$ กล่าวคือ $\theta = g\left(\underset{\sim}{\beta}\right)$ โดยที่ $g\left(\underset{\sim}{\beta}\right)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้นจะได้ว่า $\hat{\theta} = g\left(\underset{\sim}{b}\right)$ และ $\hat{\theta}^{w} = g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right)$ เป็นฟังก์ชันของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ และตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก ตามลำดับ

ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

1) วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Square Method : t_W)

ในปี ค.ศ. 1989 Jun Shao ได้แสดงการแจกแจงเมื่อใกล้อนันต์ของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก รวมทั้งเมทริกซ์ของตัวประมาณที่คงเส้นคงวาของความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วย ภายใต้เงื่อนไข

1) $E\left(\underset{\sim}{e}\right)=\underset{\sim}{0}$ และ $E\left(e_{ij}e_{i'j'}\right)=0$, $j\neq j'$, $i\neq i'$

2) ให้ $c_0, c_\infty, \sigma_0^2$, และ σ_∞^2 เป็นค่าคงที่บวก และ n_0, n_∞ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้

2.1) $\sigma_0^2\leq\sigma_i^2\leq\sigma_\infty^2$, ทุกค่า i

2.2) $n_0\leq n_i\leq n_\infty$, ทุกค่า i

2.3) $\left\|\underset{\sim i}{x}\right\|\leq c_\infty$, ทุกค่า i

โดยที่ $\left\|\underset{\sim i}{x}\right\|=\left(\underset{\sim}{x}'\underset{\sim}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

และ 2.4) k^{-1}(ค่าเจาะจง (Eigen value) ที่น้อยที่สุดของเมทริกซ์ X′X) $\geq c_0$

3) ความคลาดเคลื่อน e_{ij} เป็นไปตามเงื่อนไขของโมเมนต์ (Moment Condition) กำหนดให้ δ, h เป็นค่าคงที่บวก

3.1) $E\left(e_{ij}/n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}e_{ij}^2\right)=0$

3.2) $E\left|e_{ij}\right|^{2+\delta}\leq h$, ทุกค่า i และ j

และ $E\left(n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}e_{ij}^2\right)^{-(1+\delta)}\leq h$, ทุกค่า i

เงื่อนไขของโมเมนต์ (3.1) เป็นเงื่อนไขเกี่ยวกับระดับความสมมาตรของการแจกแจงของความคลาดเคลื่อน และ (3.2) เป็นเงื่อนไขเกี่ยวกับการแจกแจงของความคลาดเคลื่อนที่มักพบในทางปฏิบัติ ถ้า $n_i\geq 3$, ทุกค่า i

ภายใต้เงื่อนไข (1) - (3) จะได้ว่า

$$(V^{w})^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\theta}^{w}-\theta\right) \rightarrow_{d} N(0,1)$$

โดยที่ $\rightarrow_{d}$ หมายถึง การลู่เข้าสู่ในการแจกแจง

V^{w} คือ ความแปรปรวนเมื่อใกล้อนันต์ของ $\hat{\theta}^{w}$

และ $V^{w}=\left(\nabla g\left(\underset{\sim}{\beta}\right)\right)V\left(\nabla g\left(\underset{\sim}{\beta}\right)\right)'$

โดยที่ $V = Cov\left[A^{-1}\left\{X'\widetilde{W}\underset{\sim}{e}+2B(X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{e}\right\}\right]$

$A=\sum_{i} n_{i} E(\widetilde{e}_{i}^{-1}) \underset{\sim}{x}_{i} \underset{\sim}{x}_{i}'$

$B=\sum_{i} n_{i} E\left\{\widetilde{e}_{i}^{-2}\left(n_{i}^{-1}\Sigma_{j} e_{ij}\right)^{2}\right\} \underset{\sim}{x}_{i} \underset{\sim}{x}_{i}'$

$\widetilde{W}=$ block diag $\left(\widetilde{e}_{1}^{-1} I_{n_1}, \ldots, \widetilde{e}_{k}^{-1} I_{n_k}\right)$

และ $\widetilde{e}_{i}=n_{i}^{-1} \sum_{j} e_{ij}^{2}$

ถ้าความคลาดเคลื่อนในแต่ละระดับของตัวแปรอิสระเป็นอิสระซึ่งกันและกัน V^{w} จะอยู่ในรูป

$$\widetilde{V}^{w}=\left(\nabla g\left(\underset{\sim}{\beta}\right)\right)\widetilde{V}\left(\nabla g\left(\underset{\sim}{\beta}\right)\right)'$$

โดยที่ $\widetilde{V}=A^{-1}+4 A^{-1} \widetilde{B} A^{-1}+4 A^{-1} \widetilde{B} D \widetilde{B} A^{-1}$

$D=(X'X)^{-1} X' Cov\left(\underset{\sim}{e}\right) X(X'X)^{-1}$

และ $\widetilde{B}=\sum_{i} E(\widetilde{e}_{i}^{-1}) \underset{\sim}{x}_{i} \underset{\sim}{x}_{i}'$

ดังนั้น ตัวประมาณของ $\widetilde{V}^{w}$ คือ

$$V_{s}^{w}=\left(\nabla g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right)\right) V_{s}\left(\nabla g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right)\right)'$$

โดยที่ $V_{s}=(X'WX)^{-1}+4(X'WX)^{-1} X'W_{1} X(X'WX)^{-1}$

$+4(X'WX)^{-1} X'W_{1} X(X'X)^{-1} X'W^{-1} X(X'X)^{-1} X'W_{1} X(X'WX)^{-1}$

W = block diag $\left(w_{1} I_{n_1}, \ldots, w_{k} I_{n_k}\right)$

และ W_{1} = block diag $\left(n_{1}^{-1} w_{1} I_{n_1}, \ldots, n_{k}^{-1} w_{k} I_{n_k}\right)$

V_s^W เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา (consistent estimator) ของ $\tilde{V}^W$ กล่าวคือ

$$k\left(V_s^W - \tilde{V}^W\right) \rightarrow_p 0$$

โดยที่ $\rightarrow_p$ หมายถึง การลู่เข้าสู่ในความน่าจะเป็น

ฉะนั้น ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$t_W = \left(V_s^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\theta}^W - \theta\right) \sim t_{N-p}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นเพียงเพื่อแสดงให้เห็นถึงขั้นตอนการคำนวณค่าของตัวสถิติทดสอบของแต่ละวิธีเท่านั้น

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาตัวแบบความถดถอยเชิงเส้น

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_{ij} \quad , \ j = 1, \ldots, 3 \ , \ i = 1, \ldots, 3$$

เมื่อทำการตรวจสอบข้อมูล พบว่า ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติและความแปรปรวนของข้อมูลในแต่ละระดับของตัวแปรอิสระไม่เท่ากัน จากตัวแบบและข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้ ต้องการทดสอบสมมุติฐานที่ว่าตัวแปรตามและตัวแปรอิสระมีความสัมพันธ์กันหรือไม่

$$H_0: \ \beta_1 = 0$$
$$H_1: \ \beta_1 \neq 0$$

$$\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 6.203 \\ 7.094 \\ 6.473 \\ 5.485 \\ 6.347 \\ 6.076 \\ 8.064 \\ 7.506 \\ 5.753 \end{bmatrix} , \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} ,$$

$$\underset{\sim}{b} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 0.778 & -0.167 \\ -0.167 & 0.042 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 58.999 \\ 239.106 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 6.038 \\ 0.129 \end{bmatrix}$$

$$w_i = \frac{1}{n_i}\sum_j \left(y_{ij} - \underset{\sim}{x}'_i \underset{\sim}{b} \right)^2$$

$$\therefore \quad w_1 = 4.441 \ , \ w_2 = 2.110 \ , \ w_3 = 0.947$$

$$W = \begin{bmatrix} 4.441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.110 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.110 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.947 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.947 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.947 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{b}^{W} = (X'WX)^{-1} X'W\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 0.253 & -0.068 \\ -0.068 & 0.022 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 145.786 \\ 447.955 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.436 \\ 0.014 \end{bmatrix}$$

โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก

$$t_W = \frac{b_1^{w} - \beta_1}{\sqrt{Var(b_1^{w})}}$$

โดยที่

$$Var(b_1^{w}) = V_s^{w} = \left(\nabla g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right)\right) V_s \left(\nabla g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right)\right)',$$

$$V_s = (X'WX)^{-1} + 4(X'WX)^{-1} X'W_1X(X'WX)^{-1}$$
$$+4(X'WX)^{-1} XW_1X(X'X)^{-1} X'W^{-1}X(X'X)^{-1} X'W_1X(X'WX)^{-1}$$

และ

$$g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right) = \underset{\sim}{\ell}' \underset{\sim}{b}^{w} \ , \ \underset{\sim}{\ell}' = (0 \quad 1)$$

$$\therefore \quad \nabla g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right) = \underset{\sim}{\ell}' = (0 \quad 1)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1.480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.703 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.703 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.316 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.316 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.316 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.778 & -0.167 \\ -0.167 & 0.042 \end{bmatrix} \quad , \ (X'WX)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.253 & -0.068 \\ -0.068 & 0.022 \end{bmatrix}$$

$$X'W_1X = \begin{bmatrix} 7.499 & 23.007 \\ 23.007 & 85.634 \end{bmatrix} , \ X'W^{-1}X = \begin{bmatrix} 5.264 & 26.036 \\ 26.036 & 139.439 \end{bmatrix}$$

$$(X'WX)^{-1}X'W_1X(X'WX)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.084 & -0.023 \\ -0.023 & 0.007 \end{bmatrix}$$

$$(X'WX)^{-1}XW_1X(X'X)^{-1}X'W^{-1}X(X'X)^{-1}X'W_1X(X'WX)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.034 & -0.009 \\ -0.009 & 0.003 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ของตัวประมาณของความแปรปรวนของเวกเตอร์ตัวประมาณของสัมประสิทธิ์การถดถอย และตัวประมาณความแปรปรวนของ b_1^W คือ

$$V_s = \begin{bmatrix} 0.727 & -0.196 \\ -0.196 & 0.064 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ Var(b_1^W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.727 & -0.196 \\ -0.196 & 0.064 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.064$$

$$t_W = \frac{0.014}{\sqrt{0.064}} = 0.055 \qquad , \ t_{7,0.025} = 2.3646$$

เมื่อเปรียบเทียบค่าของตัวสถิติทดสอบ t ที่คำนวณได้กับค่าของตัวสถิติทดสอบ t จากตาราง พบว่า $|t_W| < t$ ฉะนั้นจึงยอมรับสมมุติฐานว่าง H_0: $\beta_1 = 0$ นั่นคือ ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระไม่มีความสัมพันธ์กัน

2) วิธีปรับแก้แจคไนฟ์แบบตัดทีละค่าสังเกต

(Modified Delete-one Jackknife Method : t_M)

ในปีค.ศ. 1989 Jun Shao ได้ทำการปรับแก้ตัวประมาณแจคไนฟ์แบบถ่วงน้ำหนักของความแปรปรวนของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก เพื่อให้เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา ซึ่งวิธีนี้จะทำการตัดข้อมูลคู่ลำดับ $\left(\underset{\sim i}{x}, y_{ij}\right)$ ออกทีละคู่ลำดับ

ให้ $\underset{\sim(i,j)}{b}$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ เมื่อตัดคู่ลำดับ $\left(\underset{\sim i}{x}, y_{ij}\right)$ ออก

$\underset{\sim(i,j)}{b^W}$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก เมื่อตัดคู่ลำดับ $\left(\underset{\sim i}{x}, y_{ij}\right)$ ออก

และ $\hat{\theta}_{(i,j)} = g\left(\underset{\sim(i,j)}{b}\right)$ และ $\hat{\theta}^W_{(i,j)} = g\left(\underset{\sim(i,j)}{b^W}\right)$ เป็นฟังก์ชันของ $\underset{\sim(i,j)}{b}$ และ $\underset{\sim(i,j)}{b^W}$ ตามลำดับ

ภายใต้เงื่อนไข (1) - (3) ตัวประมาณแจคไนฟ์ที่ปรับแก้ของความแปรปรวนของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักคือ

$$V^W_M = \hat{V}^W_J + 4\,\tilde{V}^W_J + 4\,\tilde{V}^W_J\left(\hat{V}^W_J\right)^{-1}\tilde{U}^W_J\left(\hat{V}^W_J\right)^{-1}\tilde{V}^W_J$$

โดยที่

$$\hat{V}^W_J = \sum_i \sum_j (1-h_i)\left(\hat{\theta}^W_{(i,j)} - \hat{\theta}^W\right)^2$$

$$\tilde{V}^W_J = \sum_i \sum_j (1-h_i)\,n_i^{-1}\left(\hat{\theta}^W_{(i,j)} - \hat{\theta}^W\right)^2$$

$$\tilde{U}^W_J = \sum_i \sum_j (1-\tilde{c}_i)\left(\hat{\theta}_{(i,j)} - \hat{\theta}\right)^2$$

$$\underset{\sim}{b}_{(i,j)} = \underset{\sim}{b} - (1-\widetilde{c}_i)^{-1}(X'X)^{-1}\underset{\sim}{x}_i\left(y_{ij} - \underset{\sim}{x}_i'\underset{\sim}{b}\right)$$

$$\underset{\sim}{b}^{w}_{(i,j)} = \underset{\sim}{b}^{w} - (1-h_i)^{-1} w_i (X'WX)^{-1}\underset{\sim}{x}_i\left(y_{ij} - \underset{\sim}{x}_i'\underset{\sim}{b}^{w}\right)$$

$$h_i = w_i \underset{\sim}{x}_i'(X'WX)^{-1}\underset{\sim}{x}_i$$

และ $\widetilde{c}_i = \underset{\sim}{x}_i'(X'X)^{-1}\underset{\sim}{x}_i$

V^{w}_{M} เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวาของ $\widetilde{V}^{w}$ กล่าวคือ

$$k\left(V^{w}_{M} - \widetilde{V}^{w}\right) \to_p 0$$

ดังนั้น ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$t_M = \left(V^{w}_{M}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\theta}^{w} - \theta\right) \sim t_{N-p}$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากตัวอย่างที่ 1 พบว่า

$$g\left(\underset{\sim}{b}\right) = b_1 = 0.129 \text{ และ } g\left(\underset{\sim}{b}^{w}\right) = b_1^{w} = 0.014$$

โดยวิธีปรับแก้แจคไนฟ์แบบตัดทีละค่าสังเกต จะทำการตัดข้อมูลคู่ลำดับ $\left(\underset{\sim}{x}_i, y_{ij}\right)$ ออกทีละคู่ลำดับ แล้วนำข้อมูลที่เหลือมาคำนวณตามสูตรต่างๆ ดังนี้

$$V^{w}_{M} = \hat{V}^{w}_{J} + 4\widetilde{V}^{w}_{J} + 4\widetilde{V}^{w}_{J}\left(\hat{V}^{w}_{J}\right)^{-1}\widetilde{U}^{w}_{J}\left(\hat{V}^{w}_{J}\right)^{-1}\widetilde{V}^{w}_{J}$$

โดยที่

$$\hat{V}^{w}_{J} = \sum_i\sum_j(1-h_i)\left(\hat{\theta}^{w}_{(i,j)} - \hat{\theta}^{w}\right)^2$$

$$\widetilde{V}^{w}_{J} = \sum_i\sum_j(1-h_i)n_i^{-1}\left(\hat{\theta}^{w}_{(i,j)} - \hat{\theta}^{w}\right)^2$$

$$\widetilde{U}^{w}_{J} = \sum_i\sum_j(1-\widetilde{c}_i)\left(\hat{\theta}_{(i,j)} - \hat{\theta}\right)^2$$

$$\underset{\sim}{b}_{(i,j)} = \underset{\sim}{b} - \left(1-\widetilde{c}_i\right)^{-1}(X'X)^{-1}\underset{\sim}{x}_i\left(y_{ij} - \underset{\sim}{x}_i'\underset{\sim}{b}\right)$$

$$\underset{\sim}{b}^{w}_{(i,j)} = \underset{\sim}{b}^{w} - \left(1-h_i\right)^{-1} w_i (X'WX)^{-1}\underset{\sim}{x}_i\left(y_{ij} - \underset{\sim}{x}_i'\underset{\sim}{b}^{w}\right)$$

$$h_i = w_i \underset{\sim}{x}_i'(X'WX)^{-1}\underset{\sim}{x}_i$$

และ $\widetilde{c}_i = \underset{\sim}{x}_i'(X'X)^{-1}\underset{\sim}{x}_i$

กำหนดให้

$$\hat{V}^{W}_{J(i,j)} = (1-h_i)\left(\hat{\theta}^{W}_{(i,j)} - \hat{\theta}^{W}\right)^2$$

$$\tilde{V}^{W}_{J(i,j)} = (1-h_i)n_i^{-1}\left(\hat{\theta}^{W}_{(i,j)} - \hat{\theta}^{W}\right)^2$$

$$\tilde{U}^{W}_{J(i,j)} = (1-\tilde{c}_i)\left(\hat{\theta}_{(i,j)} - \hat{\theta}\right)^2$$

จำนวนรอบที่ต้องการทำการคำนวณทั้งหมด 9 รอบ ซึ่งแต่ละรอบคำนวณได้ค่าต่างๆ ดังนี้

<u>รอบที่ 1</u> $h_1 = 0.310$, $\tilde{c}_1 = 0.278$,

$\left(b^{W}_{1(1,1)} - b^{W}_1\right) = -0.40$, $\left(b_{1(1,1)} - b_1\right) = -0.011$

$\hat{V}^{W}_{J(1,1)} = 0.001$, $\tilde{V}^{W}_{J(1,1)} = 0.000$, $\tilde{U}^{W}_{J(1,1)} = 0.000$

<u>รอบที่ 2</u> $h_1 = 0.310$, $\tilde{c}_1 = 0.278$,

$\left(b^{W}_{1(1,2)} - b^{W}_1\right) = 0.096$, $\left(b_{1(1,2)} - b_1\right) = 0.092$

$\hat{V}^{W}_{J(1,2)} = 0.006$, $\tilde{V}^{W}_{J(1,2)} = 0.002$, $\tilde{U}^{W}_{J(1,2)} = 0.006$

<u>รอบที่ 3</u> $h_1 = 0.310$, $\tilde{c}_1 = 0.278$,

$\left(b^{W}_{1(1,3)} - b^{W}_1\right) = 0.001$, $\left(b_{1(1,3)} - b_1\right) = 0.020$

$\hat{V}^{W}_{J(1,3)} = 0.000$, $\tilde{V}^{W}_{J(1,3)} = 0.000$, $\tilde{U}^{W}_{J(1,3)} = 0.000$

<u>รอบที่ 4</u> $h_2 = 0.134$, $\tilde{c}_2 = 0.111$,

$\left(b^{W}_{1(2,1)} - b^{W}_1\right) = 0.051$, $\left(b_{1(2,1)} - b_1\right) = 0.000$

$\hat{V}^{W}_{J(2,1)} = 0.002$, $\tilde{V}^{W}_{J(2,1)} = 0.001$, $\tilde{U}^{W}_{J(2,1)} = 0.000$

<u>รอบที่ 5</u> $h_2 = 0.134$, $\tilde{c}_2 = 0.111$,

$\left(b^{W}_{1(2,2)} - b^{W}_1\right) = 0.007$, $\left(b_{1(2,2)} - b_1\right) = 0.000$

$\hat{V}^{W}_{J(2,2)} = 0.000$, $\tilde{V}^{W}_{J(2,2)} = 0.000$, $\tilde{U}^{W}_{J(2,2)} = 0.000$

<u>รอบที่ 6</u> $h_2 = 0.134$, $\tilde{c}_2 = 0.111$,

$\left(b^{W}_{J(2,3)} - b^{W}_{J}\right) = 0.021$, $\left(b_{J(2,3)} - b_J\right) = 0.000$

$\hat{V}^{W}_{J(2,3)} = 0.000$, $\tilde{V}^{W}_{J(2,3)} = 0.000$, $\tilde{U}^{W}_{J(2,3)} = 0.000$

<u>รอบที่ 7</u> $h_3 = 0.223$, $\tilde{c}_3 = 0.278$,

$\left(b^{W}_{J(3,1)} - b^{W}_{J}\right) = -0.122$, $\left(b_{J(3,1)} - b_J\right) = -0.144$

$\hat{V}^{W}_{J(3,1)} = 0.012$, $\tilde{V}^{W}_{J(3,1)} = 0.004$, $\tilde{U}^{W}_{J(3,1)} = 0.015$

<u>รอบที่ 8</u> $h_3 = 0.223$, $\tilde{c}_3 = 0.278$,

$\left(b^{W}_{J(3,2)} - b^{W}_{J}\right) = -0.078$, $\left(b_{J(3,2)} - b_J\right) = -0.080$

$\hat{V}^{W}_{J(3,2)} = 0.005$, $\tilde{V}^{W}_{J(3,2)} = 0.002$, $\tilde{U}^{W}_{J(3,2)} = 0.005$

<u>รอบที่ 9</u> $h_3 = 0.223$, $\tilde{c}_3 = 0.278$,

$\left(b^{W}_{J(3,3)} - b^{W}_{J}\right) = 0.223$, $\left(b_{J(3,3)} - b_J\right) = 0.278$

$\hat{V}^{W}_{J(3,3)} = 0.003$, $\tilde{V}^{W}_{J(3,3)} = 0.001$, $\tilde{U}^{W}_{J(3,3)} = 0.011$

จะได้ค่าต่างๆ คือ

$$\hat{V}^{W}_{J} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\hat{V}^{W}_{J(i,j)} = 0.029$$

$$\tilde{V}^{W}_{J} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\tilde{V}^{W}_{J(i,j)} = 0.010$$

$$\tilde{U}^{W}_{J} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\tilde{U}^{W}_{J(i,j)} = 0.037$$

ตัวประมาณแจคไนฟ์แบบตัดทีละค่าสังเกตของความแปรปรวนของ $\hat{\theta}^{W}$ คือ

$$\therefore \quad V^{W}_{M} = 0.029 + 4(0.010) + \frac{4(0.010)^2(0.037)}{(0.029)^2}$$

$$= 0.085$$

ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$t_M = \frac{b_1^w - \beta_1}{\sqrt{Var(b_1^w)}} = \frac{0.014}{\sqrt{0.085}} = 0.048$$

เมื่อเปรียบเทียบค่าของตัวสถิติทดสอบ t ที่คำนวณได้กับค่าของตัวสถิติทดสอบ t จากตาราง พบว่า $|t_M| < t$ ดังนั้นจึงยอมรับสมมุติฐานว่าง $H_0 : \beta_1 = 0$ นั่นคือ ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระไม่มีความสัมพันธ์กัน

3) วิธีแจคไนฟ์แบบตัดเป็นกลุ่ม (Delete-group Jackknife Method : t_J)

ในปีค.ศ. 1993 Jun Shao และ J.N.K. Rao ได้เสนอวิธีแจคไนฟ์แบบตัดเป็นกลุ่ม เพื่อหาตัวประมาณแจคไนฟ์ของความแปรปรวนของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก ซึ่งตัวประมาณความแปรปรวนที่ได้จะเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา วิธีนี้จะทำการตัดข้อมูลออกทีละระดับของตัวแปรอิสระ ซึ่งในแต่ละระดับของตัวแปรอิสระจะประกอบด้วยข้อมูลทั้งหมด n_i คู่ลำดับ คือ $\left(\underset{\sim}{x}_i, y_{ij}\right)$, $j=1,2,\ldots,n_i$

ให้ $\underset{\sim}{b}_{-i}^w$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักเมื่อตัดข้อมูลระดับที่ i ออก

และ $\hat{\theta}_{-i}^w = g\left(\underset{\sim}{b}_{-i}^w\right)$ เป็นฟังก์ชันของ $\underset{\sim}{b}_{-i}^w$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $\underset{\sim}{b}^w$ และ $\underset{\sim}{b}_{-i}^w$ คือ

$$\underset{\sim}{b}^w = \sum_i c_i \underset{\sim}{b}_{-i}^w + O_p(k^{-1})$$

โดยที่ $O_p(k^{-1})$ เป็นพจน์ของ k ที่มีอันดับน้อยกว่า -1 ด้วยความน่าจะเป็น

$$c_i = \frac{1 - n_i \underset{\sim}{x}_i'(X'X)^{-1}\underset{\sim}{x}_i}{k-p} > 0 \quad , \quad \sum_i c_i = 1$$

$\underset{\sim}{b}_{-i}^w$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก เมื่อตัดข้อมูลระดับที่ i ออก คือ

$$\underset{\sim}{b}_{-i}^w = \left(\sum_{h \neq i} n_h w_{hi} \underset{\sim}{x}_h \underset{\sim}{x}_h'\right)^{-1}\left(\sum_{h \neq i} w_{hi} \underset{\sim}{x}_h \sum_j y_{hj}\right)$$

โดยที่ $w_{hi} = u_{hi}^{-1}$

และ $u_{hi} = \frac{1}{n_h}\sum_j \left(y_{hj} - \underset{\sim h}{x}'\underset{\sim -i}{b}\right)^2$

ภายใต้เงื่อนไข (1) - (3) ตัวประมาณแจคไนฟ์ของความแปรปรวนของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก คือ

$$V_J^w = (k-p)\sum_i c_i\left(\hat{\theta}_{-i}^w - \hat{\theta}^w\right)^2$$

และ V_J^w เป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวาของ V^w กล่าวคือ

$$k\left(V_J^w - V^w\right) \to_p 0$$

ดังนั้น ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$t_J = \left(V_J^w\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\hat{\theta}^w - \theta\right) \sim t_{k-p}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จากตัวอย่างที่ 1 โดยวิธีแจคไนฟ์แบบตัดเป็นกลุ่ม จะทำการตัดข้อมูลออกทีละระดับของตัวแปรอิสระ แล้วนำข้อมูลที่เหลือมาคำนวณตามสูตรต่างๆ ดังนี้

$$\underset{\sim -i}{b}^w = \left(\sum_{h\neq i} n_h w_{hi} \underset{\sim h}{x}\underset{\sim h}{x}'\right)^{-1}\left(\sum_{h\neq i} w_{hi}\underset{\sim h}{x}\sum_j y_{hj}\right) \quad , i = 1, ..., 3$$

โดยที่ $w_{hi} = \left[n_h^{-1}\sum_j\left(y_{hj} - \underset{\sim h}{x}'\underset{\sim -i}{b}\right)^2\right]^{-1}$

และ $V_J^w = (k-p)\sum_i c_i\left(\hat{\theta}_{-i}^w - \hat{\theta}^w\right)^2 \quad , \quad k = 3,\ p = 2$

โดยที่ $c_i = \frac{1 - n_i \underset{\sim i}{x}'(X'X)^{-1}\underset{\sim i}{x}}{k-p}$

กำหนดให้

$$V_{J(-i)}^w = (k-p)\,c_i\left(\hat{\theta}_{-i}^w - \hat{\theta}^w\right)^2$$

จำนวนรอบที่ต้องทำการคำนวณทั้งหมด 3 รอบ ซึ่งแต่ละรอบได้ค่าต่างๆ ดังนี้

<u>รอบที่ 1</u> $c_1 = 0.833$, $b_{1(-1)}^w = 0.569$, $V_{J(-1)}^w = 0.051$

<u>รอบที่ 2</u> $c_2 = 0.333$, $b_{1(-2)}^w = 0.129$, $V_{J(-2)}^w = 0.009$

<u>รอบที่ 3</u> $c_3 = 0.833$, $b^{W}_{1J(-3)} = -0.310$, $V^{W}_{J(-3)} = 0.018$

ตัวประมาณแจคไนฟ์แบบตัดเป็นกลุ่มของความแปรปรวนของ $\hat{\theta}^{W}$ คือ

$$V^{W}_{J} = \sum_{i=1}^{k} V^{W}_{J(-i)}$$

$$\therefore \quad V^{W}_{J} = 0.078$$

ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$t_J = \frac{b^{W}_{1} - \beta_1}{\sqrt{Var(b^{W}_{1})}} = \frac{0.014}{\sqrt{0.078}} = 0.050$$

เมื่อเปรียบเทียบค่าของตัวสถิติทดสอบ t ที่คำนวณได้กับค่าของตัวสถิติทดสอบ t จากตาราง พบว่า $|t_J| < t$ ดังนั้นจึงยอมรับสมมุติฐานว่าง $H_0 : \beta_1 = 0$ นั่นคือ ตัวแปรตามและตัวแปรอิสระไม่มีความสัมพันธ์กัน

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

-ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก มีดังนี้

ในปี ค.ศ. 1978 Fuller และ J.N.K. Rao ได้แสดงการแจกแจงเมื่อใกล้อนันต์ของ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{W}$ เมื่อ $k \to \infty$ โดยมีข้อกำหนดว่า ความคลาดเคลื่อน e_{ij} มีการแจกแจงปกติ และ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{W}$ เป็นฟังก์ชันของ $\underset{\sim}{b}^{W}$, $\underset{\sim}{b}^{W}$ เป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก และในปี ค.ศ. 1989(a) Shao ได้แสดงการแจกแจงเมื่อใกล้อนันต์ของ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}^{W}$ โดยที่ความคลาดเคลื่อนไม่จำเป็นต้องมีการแจกแจงปกติ เพียงแต่กำหนดเงื่อนไขของโมเมนต์ของความคลาดเคลื่อนแทน ที่แสดงถึงระดับความสมมาตรของการแจกแจงของความคลาดเคลื่อน

-ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีปรับแก้แจคไนฟ์แบบตัดทีละค่าสังเกต มีดังนี้

ในปี ค.ศ. 1986 Wu ได้แสดงตัวประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมที่คงเส้นคงวาด้วยวิธีแจคไนฟ์แบบตัดทีละค่าสังเกตของ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ โดยที่ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ เป็นฟังก์ชันของ $\underset{\sim}{b}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบสามัญ ภายใต้ข้อตกลงเบื้องต้นของ e_{ij} และในปีเดียวกัน Ghosh ได้แสดงว่า เมทริกซ์ของตัวประมาณ

ความแปรปรวน-ความแปรปรวนร่วมของ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ นี้ มีคุณสมบัติไม่คงเส้นคงวา เมื่อความคลาดเคลื่อนมีความสัมพันธ์กันภายในระดับของตัวแปรอิสระ ซึ่งส่งผลต่อการอนุมานเชิงสถิติด้วย แต่ในปี ค.ศ. 1989(b) Shao ได้แสดงว่า ตัวประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักมีคุณสมบัติไม่คงเส้นคงวา พร้อมทั้งเสนอ วิธีการหาตัวประมาณความแปรปรวนของตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนักด้วยใช้วิธีแจคไนฟ์แบบตัดทีละค่าสังเกต ซึ่งตัวประมาณความแปรปรวนที่ได้นั้นมีคุณสมบัติคงเส้นคงวา

-ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีแจคไนฟ์แบบตัดเป็นกลุ่ม มีดังนี้

ในปี ค.ศ. 1980 J.N.K. Rao ได้ศึกษาตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นที่มีจำนวนซ้ำในแต่ละระดับของตัวแปรอิสระกรณีเฉพาะ $\underset{\sim}{x}_i' \underset{\sim}{\beta} = \mu$ รวมทั้งได้เสนอ วิธีการหาตัวประมาณความแปรปรวนด้วยวิธีแจคไนฟ์แบบตัดเป็นกลุ่มของตัวประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย ผลปรากฏว่า สามารถแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นกับการอนุมานเชิงสถิติได้เป็นอย่างดี