บทที่ 2
สถิติที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้สิ่งที่สนใจศึกษาคือ การเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงที่ถูกตัดปลายทางซ้ายเมื่อไม่ทราบจุดตัดปลาย ด้วยวิธีโมเมนต์ดัดแปลง วิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีกำลังสองต่ำสุดเทียม ในที่นี้จะศึกษาเปรียบเทียบค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละวิธี โดยจะกล่าวถึงในรายละเอียดในหัวข้อต่อไปนี้

การประมาณค่าพารามิเตอร์

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ทำการศึกษารูปแบบของข้อมูลที่ถูกตัดปลายเป็นดังนี้

$$W = X \qquad , X > d$$

โดยที่ W, X เป็นตัวแปรสุ่ม และ d เป็นจุดตัดปลาย ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นและฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็นดังนี้

$$f_w(x) = \frac{f_x(x)}{1 - F_x(d)} \qquad , X > d$$

และ

$$F_w(x) = \frac{F_x(x) - F_x(d)}{1 - F_x(d)}$$

1. วิธีโมเมนต์ดัดแปลง

วิธีโมเมนต์เป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เก่าแก่ที่สุดเสนอโดย คาร์ล เพียร์สัน (Karl Pearson) เมื่อประมาณปี ค.ศ. 1894 หลักเกณฑ์ที่สำคัญที่มาใช้ได้แก่ การถือว่าโมเมนต์ของตัวอย่าง (Sample Moments) เป็นตัวประมาณของโมเมนต์ของประชากร (Population Moments) ที่สมนัยกัน และฟังก์ชันของโมเมนต์ของตัวอย่าง ก็ใช้เป็นตัวประมาณพารามิเตอร์ของประชากรที่เป็นฟังก์ชัน

สมนัยกันของโมเมนต์ของประชากร[1]

การประมาณค่าตัดแปลง(Modified Estimations) ขั้นตอนในการประมาณค่าตัดแปลงมีดังนี้

1.1 ประมาณค่าเริ่มต้นของจุดตัดปลาย ด้วยค่าที่น้อยกว่าหรือเท่ากับค่า ข้อมูลที่มีค่าต่ำที่สุด หรือตัวสถิติอันดับที่ 1 Y_1 =min(X(1),....X(N))

$$d_1 <= Y_1$$

1.2 ในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการใช้ตัวประมาณตัดแปลง(Modified Estimator) นั้นมี 2 ทางเลือกในการคำนวณค่าจุดตัดปลาย(truncated point) ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ คือ

1.2.1 $\mathrm{E}(Y_1) = y_1$ หรือ

1.2.2 $\mathrm{E}(F(Y_1)) = F(y_1)$

1.3 นำสมการดังกล่าวข้างต้นมาเปรียบเทียบกับสมการที่ได้จากวิธีโมเมนต์

กรณีที่มี 2 พารามิเตอร์รวมจุดตัดปลาย

$$\mathrm{E}(X) = \overline{X} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{E}(Y_1) = y_1 \text{ หรือ } \mathrm{E}(F(Y_1)) = F(y_1) \tag{2.2}$$

กรณีที่มี 3 พารามิเตอร์รวมจุดตัดปลาย

$$\mathrm{E}(X) = \overline{X} \tag{2.3}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2 \tag{2.4}$$

$$\mathrm{E}(Y_1) = y_1 \text{ หรือ } \mathrm{E}(F(Y_1)) = F(y_1) \tag{2.5}$$

ในการแก้สมการ ถ้าหากสมการยุ่งยากให้ใช้วิธีการเชิงตัวเลข (Numerical Mehtod) เข้าช่วยในการแก้สมการเพื่อให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์

2. วิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ใช่ค่าฟังก์ชันการเสี่ยงในการคัดเลือกตัวประมาณที่เหมาะสม แต่ใช้การวิเคราะห์จากสมการความเป็นจริง ผู้ที่ค้นพบวิธีนี้เป็นคนแรกคือ เกาส์ ซี เอฟ (C.F. Gauss 1821) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ต่อมานักสถิติชาวอังกฤษชื่อ อาร์ เอ ฟิชเชอร์ (R.A. Fisher 1922) ได้ปรับปรุงวิธีการและตรวจ

---

[1]ประชุม สุวัตถี,ดร., ทฤษฎีอนุมานเชิงสถิติ.(กรุงเทพมหานคร:2527) หน้า 96-97.

สอบคุณสมบัติต่าง ๆ วิธีการนี้จะใช้ได้เมื่อตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงแบบมีพารามิเตอร์ (Parametric Distribution)[2]

3. วิธีกำลังสองต่ำสุดเทียม

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองต่ำสุดเทียมนี้นำมาจากบทความของ สัตยา ดี.ดูเบย์ (Satya D. Dubey:1995)[3] ซึ่งใช้หลักการเดียวกับวิธีกำลังสองต่ำสุดคือหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่ทำให้ ผลบวกกำลังสองของผลต่างระหว่างค่าสังเกตกับค่าประมาณมีค่าต่ำสุดสำหรับวิธีกำลังสองต่ำสุดเทียมนี้ เป็นวิธีการหาตัวประมาณที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของผลต่างระหว่างค่า $\ln([1-F_n(x_i)]^{-1})$ โดยที่ $F_n(x_i)$ ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวอย่าง(Sample Distribution Function) กับค่า $\ln([1-F_w(x_i)]^{-1})$ โดยที่ $F_w(x_i)$ ฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลที่มีการตัดปลายทางซ้าย

กำหนดให้สมการกำลังสองของวิธีการกำลังสองต่ำสุดเทียมคือ

$$LQ = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \ln\left([1-F_w(x_i)]^{-1}\right)\right)^2$$

โดยที่

$$y_i = \left([1-F_n(x_i)]^{-1}\right)$$

$$F_n(x_i) = \frac{k_i}{n}$$

k_i คือจำนวนข้อมูลที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x_i

---

[2]ธีระพร วีระถาวร, ดร., <u>การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง:โครงสร้างและความหมาย</u> (พิทักษ์การพิมพ์ : 2531) หน้า 99.

[3]Satya D. Dubey. "Asymptotic Properties of Several Estimations of Weibull Parameters." <u>Technometrics</u> 7(3) : 1965 : 423-434.

การแจกแจงที่ใช้ในการวิจัย

1. การแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

เมื่อ X มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution) โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นเป็นดังนี้

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right) & , x > 0\\ 0 & , \text{อื่น ๆ}\end{cases} \tag{2.1}$$

โดยที่ μ เป็นพารามิเตอร์กำหนดขนาด (Scale Parameter) , $-\infty < \mu < \infty$ และ σ เป็นพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง (Shape Parameter) , $\sigma > 0$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็นดังนี้

$$F_x(x)=\int_0^x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right]^2\right) \tag{2.2}$$

กำหนดให้

$$z(x)=\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Psi(z(x))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z(x)^2}{2}\right)$$

$$\Phi(z(x))=\int_0^{z(x)}\Psi(z(x))dz(x)$$

จากสมการที่ 2.2 จะได้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็นดังนี้

$$F_x(x)=\Phi(z(x)) \tag{2.3}$$

กรณีข้อมูลที่มีการตัดปลายทางซ้าย (Left-Truncated Data) เมื่อไม่ทราบจุดตัดปลายเป็นดังนี้

$$W = X \qquad , X > d \tag{2.4}$$

โดยที่ W และ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นของข้อมูลเป็นดังนี้

$$f_w(x)=\frac{f_x(x)}{1-F_x(d)}=\frac{1}{(1-\Phi(z(d)))\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z(x)^2}{2}\right) \tag{2.5}$$

มี μ,σ และ d เป็นพารามิเตอร์ ที่ $\sigma > 0$,$-\infty < \mu < \infty$ และ $d > 0$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสม เป็นดังนี้

$$F_w(x)=\frac{F_x(x)-F_x(d)}{1-F_x(d)}=\frac{\Phi(z(x))-\Phi(z(d))}{1-\Phi(z(d))} \tag{2.6}$$

1.1 วิธีโมเมนต์คัดแปลง

สำหรับวิธีโมเมนต์คัดแปลงเราสามารถหาค่าประมาณได้ดังนี้

mi คือโมเมนต์ที่ i

$$m1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = E(X) \tag{2.7}$$

$$m2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = E(X^2) \tag{2.8}$$

กำหนดให้

$$zd1 = \left(\frac{\ln(d) - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right) \tag{2.9}$$

$$zd2 = \left(\frac{\ln(d) - (\mu + 2\sigma^2)}{\sigma}\right) \tag{2.10}$$

$$m1 = E(X) = \frac{1 - \Phi(zd1)}{1 - \Phi(z(d))}\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{2.11}$$

$$m2 = E(X^2) = \frac{1 - \Phi(zd2)}{1 - \Phi(z(d))}\exp(2\mu + 2\sigma^2) \tag{2.12}$$

จากสมการที่ 2.11 และ 2.12 ย้ายข้างเพื่อให้ได้สมการใหม่ที่มีค่าเท่ากับ 0 เป็นดังนี้

$$H(1) = m1(1 - \Phi(z(d))) - (1 - \Phi(zd1))\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{2.13}$$

$$H(2) = m2(1 - \Phi(z(d))) - (1 - \Phi(zd2))\exp(2\mu + 2\sigma^2) \tag{2.14}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $E(Y_1)=y_1$ หรือ $E(F(Y_1))=F(y_1)$ แต่ในที่นี้เราใช้ $E(F(Y_1))=F(y_1)$ โดยที่ $y_1 = \min(X(1),\ldots,X(n))$

$$z(y_1) = \frac{(\ln(y_1) - \mu)}{\sigma} \tag{2.15}$$

$$z(d) = \frac{(\ln(d) - \mu)}{\sigma} \tag{2.16}$$

$$\frac{(\Phi(z(y_1)) - \Phi(z(d)))}{(1 - \Phi(z(d)))} = \frac{1}{n+1} \tag{2.17}$$

ทำการย้ายข้างสมการที่ 2.17 เพื่อให้ได้สมการที่เท่ากับ 0

$$H(3) = (n+1)(1 - \Phi(z(y_1))) - n(1 - \Phi(z(d))) \tag{2.18}$$

ทำการหาอนุพันธ์สมการที่ 2.13,2.14 และ 2.18 เทียบกับ μ,σ และ d เพื่อใช้ในวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ μ ,σ และ d

$$A(1)=\frac{\partial H(1)}{\partial \mu}=\frac{m1}{\sigma}\Psi(z(d))-\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\Psi(zd1)+(1-\Phi(zd1))\right) \quad (2.19)$$

$$A(2)=\frac{\partial H(2)}{\partial \mu}=\frac{m2}{\sigma}\Psi(z(d))-\exp(2\mu+2\sigma^2)\left(\frac{1}{\sigma}\Psi(zd1)+2(1-\Phi(zd1))\right) \quad (2.20)$$

$$A(3)=\frac{\partial H(3)}{\partial \mu}=\frac{(n+1)}{\sigma}\Psi(z(y_1))-\frac{n}{\sigma}\Psi(z(d)) \quad (2.21)$$

$$B(1)=\frac{\partial H(1)}{\partial \sigma}=\frac{m1}{\sigma}z(d)\Psi(z(d))-\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{zd1}{\sigma}+2\right)\Psi(zd1)+\sigma(1-\Phi(zd1))\right) \quad (2.22)$$

$$B(2)=\frac{\partial H(2)}{\partial \sigma}=\frac{m2}{\sigma}z(d)\Psi(z(d))-\exp(2\mu+2\sigma^2)\left(\frac{1}{\sigma}\left(\frac{zd2}{\sigma}+4\right)\Psi(zd1)+4\sigma(1-\Phi(zd1))\right) \quad (2.23)$$

$$B(3)=\frac{\partial H(3)}{\partial \sigma}=\frac{(n+1)}{\sigma}z(y_1)\Psi(z(y_1))-\frac{n}{\sigma}z(d)\Psi(z(d)) \quad (2.24)$$

$$C(1)=\frac{\partial H(1)}{\partial d}=\frac{1}{\sigma d}\left(\Psi(zd1)\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)-m1\Psi(z(d))\right) \quad (2.25)$$

$$C(2)=\frac{\partial H(2)}{\partial d}=\frac{1}{\sigma d}\left(\Psi(zd2)\exp(2\mu+2\sigma^2)-m2\Psi(z(d))\right) \quad (2.26)$$

$$C(3)=\frac{\partial H(3)}{\partial d}=\frac{n}{\sigma d}\Psi(z(d)) \quad (2.27)$$

หาค่าประมาณพารามิเตอร์ μ,σ และ d โดยใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton -Raphson Method) สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix}\mu_{k+1}\\ \sigma_{k+1}\\ d_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_k\\ \sigma_k\\ d_k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\partial H(1)}{\partial \mu_k} & \frac{\partial H(1)}{\partial \sigma_k} & \frac{\partial H(1)}{\partial d_k}\\ \frac{\partial H(2)}{\partial \mu_k} & \frac{\partial H(2)}{\partial \sigma_k} & \frac{\partial H(2)}{\partial d_k}\\ \frac{\partial H(3)}{\partial \mu_k} & \frac{\partial H(3)}{\partial \sigma_k} & \frac{\partial H(3)}{\partial d_k}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}H_k(1)\\ H_k(2)\\ H_k(3)\end{pmatrix} \quad (2.28)$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่าประมาณโดยการกำหนด μ_0, σ_0 และ d_0 เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้กระบวนการซ้ำ(Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่าพารามิเตอร์ μ,σ และ d

1.2 วิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Likelihood Function) สำหรับการแจกแจงแบบลอกนอร์มอลเป็นดังนี้

$$L=\prod_{i=1}^{n}f_w(x_i) \quad (2.29)$$

$$L=\left(\sigma\sqrt{2\pi}(1-\Phi(z(d)))\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z(x_i)^2\right) \quad (2.30)$$

$$\ln(L) = -n\left(\ln\left(1-\Phi\left(z(d)\right)\right)+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\ln(\sigma)\right)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z(x_i)^2-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \quad (2.31)$$

ทำการหาอนุพันธ์บางส่วน สมการที่ 2.31 (ln(L)) เทียบกับ μ และ σ เป็นดังนี้

$$H(1)=\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu}=\sum_{i=1}^{n} z(x_i)-\frac{n\Psi(z(d))}{1-\Phi(z(d))}=0 \quad (2.32)$$

$$H(2)=\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma}=\sum_{i=1}^{n} z(x_i)^2-n-\frac{nz(d)\Psi(z(d))}{1-\Phi(z(d))}=0 \quad (2.33)$$

จากสมการที่ 2.32 และสมการที่ 2.33 สามารถหาค่าประมาณ σ เป็นดังนี้

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(x_i)-\mu\right)^2-\left(\ln(d)-\mu\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(x_i)-\mu\right)}{n}} \quad (2.34)$$

แทนค่าลงในสมการที่ 2.32 เพื่อหาค่า μ ดังนี้

$$z\left(\hat{d}\right)=\frac{\ln\left(\hat{d}\right)-\mu}{\hat{\sigma}} \quad (2.35)$$

$$g(\mu)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\ln(x_i)-\mu}{\hat{\sigma}}\right)-\frac{n\Psi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)}{1-\Phi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)} \quad (2.36)$$

โดยที่ในวิธีการประมาณค้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ $\hat{d}=y_1=\min(X(1),\ldots,X(n))$ เนื่องจากค่าข้อมูลต่ำสุดจะมีค่าใกล้เคียงจุดตัดปลายที่สุด หาอนุพันธ์ของสมการเพื่อใช้ ในวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์

กำหนดให้

$$\hat{\sigma}'=\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\mu}=\frac{n\left(\ln\left(\hat{d}\right)-\mu\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(x_i)-\mu\right)}{2\hat{\sigma}} \quad (2.37)$$

$$z'\left(\hat{d}\right)=\frac{\partial z\left(\hat{d}\right)}{\partial\mu}=\frac{\left(1-z\left(\hat{d}\right)\hat{\sigma}'\right)}{\hat{\sigma}} \quad (2.38)$$

$$\Psi'\left(z\left(\hat{d}\right)\right)=\Psi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)z\left(\hat{d}\right)z'\left(\hat{d}\right) \quad (2.39)$$

$$\Phi'\left(z\left(\hat{d}\right)\right)=-\Psi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)z'\left(\hat{d}\right) \quad (2.40)$$

แทนค่าสมการที่ 2.37 - 2.40 เพื่อให้ได้สมการอนุพันธ์สมการที่ 2.36

$$g'(\mu)=\frac{n}{\hat{\sigma}}+\hat{\sigma}'\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\ln(x_i)-\mu\right)}{\hat{\sigma}^2}-n\frac{\left(\left(1-\Phi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)\right)\Psi'\left(z\left(\hat{d}\right)\right)-\Psi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)\Phi'\left(z\left(\hat{d}\right)\right)\right)}{\left(1-\Phi\left(z\left(\hat{d}\right)\right)\right)^2} \quad (2.41)$$

เราสามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ μ ได้จากวิธีการของนิวตัน-ราฟสัน ดังสมการต่อไปนี้

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \frac{g(\mu_k)}{g'(\mu_k)}$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่าประมาณโดยการกำหนด μ_0 เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้กระบวนการซ้ำ(Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่าพารามิเตอร์ μ แทนค่าประมาณพารามิเตอร์ μ ลงในสมการที่ 2.34 จะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ σ

1.3 **วิธีกำลังสองต่ำสุดเทียม**

กำหนดให้สมการกำลังสองของวิธีการกำลังสองต่ำสุดเทียมคือ

$$LQ = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \ln\left(\frac{1}{1-F_w(x_i)}\right)\right)^2 \tag{2.42}$$

โดยที่

$$y_i = \ln\left(\frac{1}{1-F_n(x_i)}\right) \tag{2.43}$$

$$F_n(x_i) = \frac{k_i}{n} \tag{2.44}$$

เมื่อ k_i คือจำนวนข้อมูลที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x_i

$$F(x) = \frac{F_x(x)-F_x(d)}{1-F_x(d)} = \frac{\Phi(z(x))-\Phi(z(d))}{1-\Phi(z(d))} \tag{2.45}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-F_w(x)}\right) = \ln(1-\Phi(z(d))) - \ln(1-\Phi(z(x))) \tag{2.46}$$

แทนค่า สมการที่ 2.46 ลงในสมการที่ 2.42 จะได้

$$LQ = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i + \ln(1-\Phi(z(x))) - \ln(1-\Phi(z(d)))\right)^2 \tag{2.47}$$

ทำการหาอนุพันธ์ LQ เทียบกับ μ และ σ

กำหนดให้

$$Y_i = \ln\left(1-\Phi(z(\hat{d}))\right) - \ln(1-\Phi(z(x_i))) \tag{2.48}$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\Psi(z(\hat{d}))}{\left(1-\Phi(z(\hat{d}))\right)} - \frac{\Psi(z(x_i))}{(1-\Phi(z(x_i)))}\right) \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{z(\hat{d})\Psi(z(\hat{d}))}{\left(1-\Phi(z(\hat{d}))\right)} - \frac{z(x_i)\Psi(z(x_i))}{(1-\Phi(z(x_i)))}\right) \tag{2.50}$$

โดยที่ ค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{d} = y_1 = \min(X(1),\ldots,X(n))$

เนื่องจากค่าข้อมูลต่ำสุดเป็นตัวประมาณที่มีค่าใกล้เคียงจุดตัดปลายทางซ้ายมากที่สุด จะได้ว่าอนุพันธ์ LQ เทียบกับ μ และ σ เป็นดังนี้

$$H(1) = \frac{\partial LQ}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mu} \right) - \sum_{i=1}^{n} Y_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \mu} \right) \tag{2.51}$$

$$H(2) = \frac{\partial LQ}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \sigma} \right) - \sum_{i=1}^{n} Y_i \left(\frac{\partial Y_i}{\partial \sigma} \right) \tag{2.52}$$

กำหนดให้

$$\frac{\partial \Psi(z(x))}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} z(x) \Psi(z(x)) \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \Psi(z(\hat{d}))}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} z(\hat{d}) \Psi(z(\hat{d})) \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial \Psi(z(x))}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} z(x)^2 \Psi(z(x)) \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial \Psi(z(\hat{d}))}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} z(\hat{d})^2 \Psi(z(\hat{d})) \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \mu^2} = {} & \frac{1}{\sigma(1-\Phi(z(\hat{d})))^2} \left\{ (1-\Phi(z(\hat{d}))) \left(\frac{\partial \Psi(z(\hat{d}))}{\partial \mu} \right) - \frac{\Psi(z(\hat{d}))^2}{\sigma} \right\} \\ & - \frac{1}{\sigma(1-\Phi(z(x_i)))^2} \left\{ (1-\Phi(z(x_i))) \left(\frac{\partial \Psi(z(x_i))}{\partial \mu} \right) - \frac{\Psi(z(x_i))^2}{\sigma} \right\} \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \mu \partial \sigma} = {} & \frac{1}{(1-\Phi(z(\hat{d})))^2} \left\{ \sigma(1-\Phi(z(\hat{d}))) \left(\frac{\partial \Psi(z(\hat{d}))}{\partial \sigma} \right) - \Psi(z(\hat{d}))\left(z(\hat{d})\Psi(z(\hat{d})) + (1-\Phi(z(\hat{d})))\right) \right\} \\ & - \frac{1}{(1-\Phi(z(x_i)))^2} \left\{ \sigma(1-\Phi(z(x_i))) \left(\frac{\partial \Psi(z(x_i))}{\partial \sigma} \right) - \Psi(z(x_i))\left(z(x_i)\Psi(z(x_i)) + (1-\Phi(z(x_i)))\right) \right\} \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_i}{\partial \sigma \partial \mu} = {} & \frac{1}{\sigma(1-\Phi(z(\hat{d})))^2} \left\{ (1-\Phi(z(\hat{d}))) \left(z(\hat{d}) \left(\frac{\partial \Psi(z(\hat{d}))}{\partial \mu} \right) - \frac{\Psi(z(\hat{d}))}{\sigma} \right) - \frac{z(\hat{d})\Psi(z(\hat{d}))^2}{\sigma} \right\} \\ & - \frac{1}{\sigma(1-\Phi(z(x_i)))^2} \left\{ (1-\Phi(z(x_i))) \left(z(x_i) \left(\frac{\partial \Psi(z(x_i))}{\partial \mu} \right) - \frac{\Psi(z(x_i))}{\sigma} \right) - \frac{z(x_i)\Psi(z(x_i))^2}{\sigma} \right\} \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial \sigma^2}=\left\{d\left(1-\Phi\left(z(\hat{d})\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Psi\left(z(\hat{d})\right)}{\partial\sigma}\right)-\frac{1}{\sigma}\Psi\left(z(\hat{d})\right)\right)-\Psi\left(z(\hat{d})\right)\left(z(\hat{d})\Psi\left(z(\hat{d})\right)+\left(1-\Phi\left(z(\hat{d})\right)\right)\right)\right\}$$

$$*\left\{\frac{z(\hat{d})}{\left(1-\Phi\left(z(\hat{d})\right)\right)^2}\right\}-\left\{d\left(1-\Phi(z(x_i))\right)\left(\left(\frac{\partial\Psi(z(x_i))}{\partial\sigma}\right)-\frac{1}{\sigma}\Psi(z(x_i))\right)-\Psi(z(x_i))\left(z(x_i)\Psi(z(x_i))+\left(1-\Phi(z(x_i))\right)\right)\right\} \quad (2.60)$$

$$*\left\{\frac{z(x_i)}{\left(1-\Phi(z(x_i))\right)^2}\right\}$$

ทำการอนุพันธ์สมการที่ 2.51 และ 2.52 เทียบกับ μ และ σ โดยแทนค่าสมการที่ 2.53 ถึง สมการที่ 2.60 ที่กำหนดให้ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$A(1)=\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\mu^2}\right)-\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\mu^2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\mu}\right)^2 \quad (2.61)$$

$$A(2)=\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\sigma\partial\mu}\right)-\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\sigma\partial\mu}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\mu}\right)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\sigma}\right) \quad (2.62)$$

$$B(1)=\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\mu\partial\sigma}\right)-\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\mu\partial\sigma}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\mu}\right) \quad (2.63)$$

$$B(2)=\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\sigma^2}\right)-\sum_{i=1}^{n} Y_i\left(\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\sigma^2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial\sigma}\right)^2 \quad (2.64)$$

หาค่าประมาณพารามิเตอร์ μ และ σ โดยใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton -Raphson Method) สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix}\mu_{k+1}\\ \sigma_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_k\\ \sigma_k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\partial H(1)}{\partial\mu_k} & \frac{\partial H(1)}{\partial\sigma_k}\\ \frac{\partial H(2)}{\partial\mu_k} & \frac{\partial H(2)}{\partial\sigma_k}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}H_k(1)\\ H_k(2)\end{pmatrix} \quad (2.65)$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่าประมาณโดยการกำหนด μ_0 และ σ_0 เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้กระบวนการซ้ำ (Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่าพารามิเตอร์ μ และ σ

2. การแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล

เมื่อ X มีการแจกแจงเอกซโพเนนเชียล (Exponential Distribution) ฟังก์ชันความหนาแน่นเป็นดังนี้

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{1}{\theta}x\right) & , x > d \\ 0 & , \text{อื่น ๆ} \end{cases} \tag{2.66}$$

เมื่อ θ เป็นพารามิเตอร์กำหนดขนาด (Scale Parameter) ที่มีค่ามากกว่า 0 , d เป็นจุดตัดปลาย และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็นดังนี้

$$F_x(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\theta}x\right) \tag{2.67}$$

กรณีข้อมูลที่มีการตัดปลายทางซ้าย (Left-Truncated Data) เมื่อไม่ทราบจุดตัดปลายเป็นดังนี้

$$W > X \qquad ,X>d \tag{2.68}$$

โดยที่ W และ X เป็นตัวแปรสุ่ม d หมายถึงพารามิเตอร์ที่เกิดจากการตัดปลาย (Truncated Parameter) ความหนาแน่นของการแจกแจงที่ถูกตัดปลายทางซ้ายเป็นดังนี้

$$f_w(x) = \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{1}{\theta}(x-d)\right) \qquad ,\theta > 0 \tag{2.69}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ของการแจกแจงที่ถูกตัดปลายทางซ้ายเป็นดังนี้

$$F_w(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\theta}(x-d)\right) \tag{2.70}$$

2.1 วิธีโมเมนต์ดัดแปลง[1]

สำหรับวิธีโมเมนต์ดัดแปลงเราสามารถหาค่าประมาณได้ดังนี้

กำหนดให้ m_i คือโมเมนต์ที่ i

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X} = d + \theta \tag{2.71}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $E(Y_1)=y_1$ หรือ $E(F(Y_1))=F(y_1)$ แต่ในที่นี้เราใช้ $E(Y_1)=y_1$ ให้ $y_1 = \min(X(1),\ldots,X(n))$ ซึ่งสามารถความหนาแน่นได้ดังนี้

$$g(y_1) = nf(y_1)[1 - F(y_1)]^{n-1} = n\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{n}{\theta}(y_1 - d)\right) \tag{2.72}$$

เราสามารถหาค่าคาดหวังของ y_1 ได้ดังนี้

[1]Dusit Charernkavanich, "Estimation in Truncated Distribution when Points of Truncation are unknown" (Ph.D. dissertation,University of Georgia,1978), p. 9-14.

$$\mathrm{E}(Y_1) = \int_d^{\infty} n\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{n}{\theta}(y_1-d)\right)dy_1 = d+\frac{\theta}{n} = y_1 \quad (2.73)$$

ทำการย้ายข้างสมการที่ 2.73 เพื่อให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์เป็นดังนี้

$$\hat{d} = \frac{\left(ny_1-\overline{X}\right)}{n-1} \quad (2.74)$$

แทนค่า สมการที่ 2.74 ลงในสมการที่ 2.71 ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ θ

$$\hat{\theta} = \frac{n(\overline{X}-y_1)}{n-1} \quad (2.75)$$

2.2 วิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด[2]

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) สำหรับการแจกแจงแบบเอกซโพเนนเชียล เป็นดังนี้

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_w(x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-d)\right) \quad (2.76)$$

$$\ln(L) = -n\ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-d) \quad (2.77)$$

ทำการอนุพันธ์ ln(L) เทียบกับ θ

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-d) \quad (2.78)$$

จากสมการที่ 2.78 ให้ $\frac{\partial \ln(L)}{\partial\theta} = 0$ เราสามารถหาค่าพารามิเตอร์ θ ได้ดังนี้

$$\hat{\theta} = \overline{X} - \hat{d} = \overline{X} - y_1 \quad (2.79)$$

สำหรับวิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุดนั้นสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ d ด้วย y_1=min(X(1),...,X(n)) เนื่องจากค่าข้อมูลต่ำสุดจะมีค่าใกล้เคียงจุดตัดปลายมากที่สุด

2.3 วิธีกำลังสองต่ำสุดเทียม

กำหนดให้สมการกำลังสองของวิธีการกำลังสองต่ำสุดเทียมคือ

$$LQ = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \ln\left([1-F_w(x_i)]^{-1}\right)\right)^2 \quad (2.80)$$

โดยที่

---

[2] Dusit Charernkavanich, "Estimation in Truncated Distribution when Points of Truncation are unknown" (Ph.D. dissertation,University of Georgia,1978), pp. 11.

$$y_i = \left[1 - F_n(x_i)\right]^{-1} \tag{2.81}$$

$$F_n(x_i) = \frac{k_i}{n+1} \tag{2.82}$$

k_i คือจำนวนข้อมูลที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x_i

สำหรับวิธีกำลังสองต่ำสุดเทียมนี้เป็นวิธีการหาตัวประมาณที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของผลต่างระหว่างค่า $\ln([1-F_n(x_i)]^{-1})$ โดยที่ $F_n(x_i)$ ฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวอย่าง (Sample Distribution Function) กับค่า $\ln([1-F_w(x_i)]^{-1})$ โดยที่ $F_w(x_i)$ ฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลที่มีการตัดปลายทางซ้าย โดยใช้ อนุพันธ์เข้าช่วย

$$F_w(x_i) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\theta}(x_i - d)\right) \tag{2.83}$$

$$\ln\left(\left[1 - F_w(x_i)\right]^{-1}\right) = \frac{1}{\theta}(x_i - d) \tag{2.84}$$

แทนค่าสมการที่ 2.83-2.84 ลงในสมการที่ 2.82 จะได้

$$LQ = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \frac{1}{\theta}(x_i - d)\right)^2 \tag{2.85}$$

ทำการอนุพันธ์ LQ เทียบกับ θ

$$\frac{\partial LQ}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - d)\left(y_i - \frac{1}{\theta}(x_i - d)\right) \tag{2.86}$$

ให้ สมการที่ 2.86 เท่ากับ 0 เราสามารถหาค่าพารามิเตอร์ θ ได้ดังนี้

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{d}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i\left(x_i - \hat{d}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_1)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - y_1)} \tag{2.87}$$

สำหรับวิธีกำลังสองต่ำสุดเทียมนั้นสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ d ด้วย y_1=min(X(1),...,X(n)) เนื่องจากข้อมูลต่ำสุดเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับจุดตัดปลายที่สุด

3. การแจกแจงแบบพาเรโต้

เมื่อ X มีการแจกแจงแบบพาเรโต้ (Pareto Distribution) ฟังก์ชันความหนาแน่นเป็นดังนี้

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{(\alpha+1)}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{อื่น ๆ} \end{cases} \tag{2.88}$$

เมื่อ α เป็นพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง (Shape Parameter) , α > 0 และ λ เป็นพารามิเตอร์กำหนดขนาด (Scale Parameter) , λ > 0 และ มีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็นดังนี้

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} \tag{2.89}$$

กรณีข้อมูลที่มีการตัดปลายทางซ้าย (Left-Truncated Data) เมื่อไม่ทราบจุดตัดปลายเป็นดังนี้

$$W > X \qquad ,X>d \tag{2.90}$$

โดยที่ W และ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่ามากกว่า 0 และ d หมายถึงพารามิเตอร์ที่เกิดจากการตัดปลาย (Truncated Parameter) ความหนาแน่นของการแจกแจงที่ถูกตัดปลายทางซ้ายเป็นดังนี้

$$f_w(x) = \frac{f_x(x)}{1-F_x(d)} = \frac{\alpha(\lambda+d)^{\alpha}}{(\lambda+x)^{(\alpha+1)}} \qquad \alpha,\lambda,d > 0 \tag{2.91}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ของการแจกแจงที่ถูกตัดปลายทางซ้ายเป็นดังนี้

$$F_w(x) = \frac{F_x(x) - F_x(d)}{1-F_x(d)} = 1 - \left(\frac{\lambda+d}{\lambda+x}\right)^{\alpha} \tag{2.92}$$

3.1 วิธีโมเมนต์ดัดแปลง

สำหรับวิธีโมเมนต์ดัดแปลงเราสามารถหาค่าประมาณได้ดังนี้

กำหนดให้ mi คือโมเมนต์ที่ i

$$m1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathrm{E}(X) \tag{2.93}$$

$$m2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \mathrm{E}(X^2) \tag{2.94}$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_d^{\infty} \alpha x \frac{(\lambda+d)^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\,dx = d + \left(\frac{\lambda+d}{\alpha-1}\right) = m1 \tag{2.95}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_d^{\infty} \alpha x^2 \frac{(\lambda+d)^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}\,dx = d^2 + 2d\left(\frac{\lambda+d}{\alpha-1}\right) + \frac{(\lambda+d)^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = m2 \tag{2.96}$$

ทำการย้ายข้างสมการที่ 2.95 และ 2.96 เพื่อให้ได้สมการใหม่ที่มีค่าเท่ากับ 0 เป็นดังนี้

$$H(1)=(\lambda+d)-(m1-d)(\alpha-1) \tag{2.97}$$

$$H(2)=2d(\lambda+d)(\alpha-1)+(\lambda+d)^2-(m2-d^2)(\alpha-1)(\alpha-2) \tag{2.98}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $E(Y_1)=y_1$ หรือ $E(F(Y_1))=F(y_1)$ แต่ในที่นี้เราใช้ $E(Y_1)=y_1$ ให้ $y_1=\min(X(1),\ldots,X(n))$ ซึ่งสามารถความหนาแน่นได้ดังนี้

$$g(y_1)=nf(y_1)[1-F(y_1)]^{n-1}=\frac{n\alpha(\lambda+d)^{n\alpha}}{(\lambda+y_1)^{n\alpha+1}} \tag{2.99}$$

เราสามารถหาค่าคาดหวังของ y_1 ได้ดังนี้

$$\mathrm{E}(Y_1)=\int_d^\infty n\alpha y_1\frac{(\lambda+d)^{n\alpha}}{(\lambda+y_1)^{n\alpha+1}}dy_1=d+\left(\frac{\lambda+d}{n\alpha-1}\right)=y_1 \tag{2.100}$$

ทำการย้ายข้างเพื่อให้ได้สมการที่เท่ากับ 0

$$H(3)=(n\alpha-1)(y_1-d)+(d+\lambda) \tag{2.101}$$

จาก H(1) และ H(3) ทำการย้ายข้างเพื่อให้ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และ d ในรูปของ α ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ดังนี้

$$\hat{d}=\frac{(n\alpha-1)y_1+(\alpha-1)m1}{\alpha(n+1)} \tag{2.102}$$

$$\hat{\lambda}=\frac{(n\alpha-1)y_1+(\alpha-1)m1}{\alpha(n+1)}n\alpha-(n\alpha-1)y_1=\hat{d}n\alpha-(n\alpha-1)y_1 \tag{2.103}$$

แทนค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และ d ลงใน H(3) เพื่อให้ได้สมการในรูปของ α ได้สมการใหม่เป็นดังนี้

$$g(\alpha)=2\hat{d}(\alpha-2)(\hat{\lambda}+\hat{d})+(\hat{\lambda}+\hat{d})^2+(\alpha-1)(\alpha-2)(\hat{d}^2-m2) \tag{2.104}$$

ทำการอนุพันธ์เทียบกับ α เพื่อใช้ในวิธีการนิวตันราฟสันเป็นดังนี้

$$\hat{d}'=\frac{\partial\hat{d}}{\partial\alpha}=\frac{(y_1-m1)}{(n+1)\alpha^2} \tag{2.105}$$

$$\hat{\lambda}'=\frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial\alpha}=n(\hat{d}+\alpha\hat{d}')-ny_1 \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}g'(\alpha)=\frac{\partial g(\alpha)}{\partial\alpha}&=2\left(\hat{d}(\hat{\lambda}+\hat{d})+(\alpha-2)\left((\hat{\lambda}+\hat{d})\hat{d}'+\hat{d}(\hat{d}'+\hat{\lambda}')\right)\right)\\&+2(\hat{\lambda}+\hat{d})(\hat{d}'+\hat{\lambda}')+(\hat{d}^2-m2)(2\alpha-3)+2(\alpha-1)(\alpha-2)\hat{d}^2\end{aligned} \tag{2.107}$$

เราสามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ α ได้จากวิธีการของนิวตัน-ราฟสัน ดังสมการต่อไปนี้

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{g(\alpha_k)}{g'(\alpha_k)}$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่าประมาณโดยการกำหนด α_0 เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้กระบวนการซ้ำ (Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่าพารามิเตอร์ α นำค่าประมาณพารามิเตอร์ แทนค่าลงในสมการที่ 2.102 และ 2.103 ซึ่งจะได้ค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และ d

3.2 วิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) สำหรับการแจกแจงแบบพาเรโต้ เป็นดังนี้

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_w(x_i) = \left(\alpha(\lambda + d)^{\alpha}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(\lambda + x_i)^{\alpha+1}} \tag{2.108}$$

$$\ln(L) = n\ln(\alpha) + n\alpha\ln(\lambda + d) - (\alpha + 1)\sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda + x_i) \tag{2.109}$$

ทำการอนุพันธ์ ln(L) เทียบกับ λ และ α

$$H(1) = \frac{\partial\ln(L)}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} + n\ln(\lambda + d) - \sum_{i=1}^{n}\ln(\lambda + x_i) \tag{2.110}$$

$$H(2) = \frac{\partial\ln(L)}{\partial\lambda} = \frac{n\alpha}{(\lambda + d)} - (\alpha + 1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda + x_i)} \tag{2.111}$$

ทำการอนุพันธ์สมการที่ H(1) และ H(2) เทียบกับ λ และ α เพื่อใช้ในวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) เพื่อใช้ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และ α

$$A(1) = \frac{\partial H(1)}{\partial\alpha} = \frac{-n}{\alpha^2} \tag{2.112}$$

$$A(2) = \frac{\partial H(2)}{\partial\alpha} = \frac{n}{(\lambda + \hat{d})} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda + x_i)} \tag{2.113}$$

$$B(1) = \frac{\partial H(1)}{\partial\lambda} = \frac{n}{(\lambda + \hat{d})} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda + x_i)} = A(2) \tag{2.114}$$

$$B(2) = \frac{\partial H(2)}{\partial\lambda} = \frac{-n\alpha}{(\lambda + \hat{d})^2} + (\alpha + 1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\lambda + x_i)^2} \tag{2.115}$$

สำหรับวิธีการประมาณด้วยภาวะน่าจะเป็นสูงสุดนั้นสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ d ด้วย y_1=min(X(1),...,X(n)) เนื่องจากเป็นตัวที่มีค่าเข้าใกล้จุดตัดปลายมากที่สุด หาค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และ α โดยใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton -Raphson Method) สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix}\alpha_{k+1}\\ \lambda_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{k}\\ \lambda_{k}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial H(1)}{\partial\alpha_k} & \dfrac{\partial H(1)}{\partial\lambda}\\ & k \\ \dfrac{\partial H(2)}{\partial\alpha_k} & \dfrac{\partial H(2)}{\partial\lambda_k}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}H_k(1)\\ H_k(2)\end{pmatrix} \tag{2.116}$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่าประมาณโดยการกำหนด λ_0 และ α_0 เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้กระบวนการซ้ำ (Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่าพารามิเตอร์ λ และ α

3.3 วิธีกำลังสองต่ำสุดเทียม

กำหนดให้สมการกำลังสองของวิธีการกำลังสองต่ำสุดเทียมคือ

$$LQ=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\ln\left([1-F_w(x_i)]^{-1}\right)\right)^2 \tag{2.117}$$

โดยที่

$$y_i=\left([1-F_n(x_i)]^{-1}\right) \tag{2.118}$$

$$F_n(x_i)=\frac{k_i}{n} \tag{2.119}$$

k_i คือจำนวนข้อมูลที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x_i

สำหรับวิธีกำลังสองต่ำสุดนี้เป็นวิธีการหาตัวประมาณที่ทำให้ผลบวกกำลังสองของผลต่างระหว่างค่า $\ln([1-F_n(x_i)]^{-1})$ โดยที่ $F_n(x_i)$ ฟังก์ชั่นการแจกแจงของตัวอย่าง (Sample Distribution Function) กับค่า $\ln([1-F_w(x_i)]^{-1})$ โดยที่ $F_w(x_i)$ ฟังก์ชันการแจกแจงของข้อมูลที่มีการตัดปลายทางซ้าย โดยใช้ อนุพันธ์เข้าช่วย

$$F_w(x_i)=1-\left(\frac{\lambda+d}{\lambda+x_i}\right)^{\alpha} \tag{2.120}$$

$$\ln\left([1-F_w(x_i)]^{-1}\right)=\alpha\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln(\lambda+d)\right) \tag{2.121}$$

แทนค่าลงในสมการจะได้

$$LQ=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\alpha\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln(\lambda+d)\right)\right)^2 \tag{2.122}$$

ทำการอนุพันธ์ LQ เทียบกับ λ และ α

$$H(1)=\frac{\partial LQ}{\partial\alpha}=\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right)^2-\sum_{i=1}^{n}y_i\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right) \tag{2.123}$$

$$H(2)=\frac{\partial LQ}{\partial\tau}=\alpha^2\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right)\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right)-\alpha\sum_{i=1}^{n}y_i\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right)$$

(2.124)

ทำการอนุพันธ์สมการที่ H(1) และ H(2) เทียบกับ α,λ เพื่อใช้ใน วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) เพื่อใช้ในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ α,λ

$$A(1)=\frac{\partial H(1)}{\partial \alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right)^2 \tag{2.125}$$

$$A(2)=\frac{\partial H(2)}{\partial \alpha}=2\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right)\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right)-\sum_{i=1}^{n}y_i\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right) \tag{2.126}$$

$$B(1)=\frac{\partial H(1)}{\partial \lambda}=2\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right)\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right)-\sum_{i=1}^{n}y_i\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right) \tag{2.127}$$

$$B(2)=\frac{\partial H(2)}{\partial \lambda}=\alpha^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda+x_i}-\frac{1}{\lambda+\hat{d}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\ln(\lambda+x_i)-\ln\left(\lambda+\hat{d}\right)\right)\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)^2}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)^2}\right)\right\}$$
$$+\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{(\lambda+x_i)}-\frac{1}{\left(\lambda+\hat{d}\right)}\right) \tag{2.128}$$

สำหรับวิธีกำลังสองต่ำสุดเทียมนั้นสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ d ด้วย y_1=min(X(1),...,X(n)) เนื่องจากเป็นตัวที่มีค่าเข้าใกล้จุดตัดปลายมากที่สุด หาค่าประมาณพารามิเตอร์ λ และ α โดยใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton -Raphson Method) สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix}\alpha_{k+1}\\ \lambda_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \lambda_k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{\partial H(1)}{\partial \alpha_k} & \frac{\partial H(1)}{\partial \lambda} \\ & k \\ \frac{\partial H(2)}{\partial \alpha_k} & \frac{\partial H(2)}{\partial \lambda_k}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}H_k(1)\\ H_k(2)\end{pmatrix} \tag{2.129}$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถหาค่าประมาณโดยการกำหนด λ_0 และ α_0 เป็นค่าเริ่มต้น แล้วใช้กระบวนการซ้ำ (Iteration Method) จนกระทั่งได้ค่าพารามิเตอร์ λ และ α