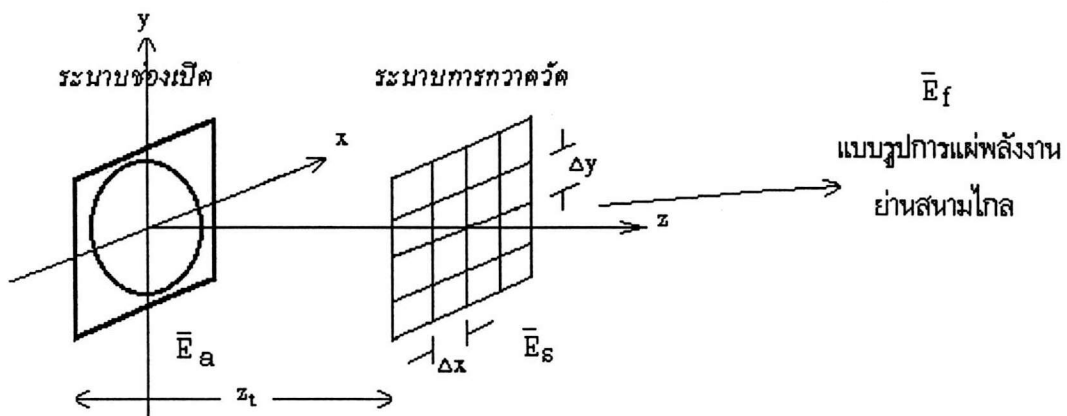


บทที่ 2

หลักการทั่วไปและผลกระทบจากคลื่นที่จางหายไป
กับระยะห่างในการชักตัวอย่างเมื่อทำการกวาดวัดค่า

หลักการของย่านทดสอบสายอากาศชนิดสนามไกลเชิงระนาบ

หลักการสำคัญในทฤษฎีของกรรมวิธีการทดสอบสายอากาศด้วยย่านทดสอบสายอากาศชนิดสนามไกลเชิงระนาบก็คือการหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลสนามไฟฟ้า ที่ได้มาจากการกวาดวัดค่าบนระนาบการกวาดวัด (scan plane) กับแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบดังแสดงในรูป 2.1



รูป 2.1 หลักการของย่านทดสอบสายอากาศชนิดสนามไกลเชิงระนาบ พารามิเตอร์ที่สำคัญคือระยะห่าง z_t ระหว่างระนาบช่องเปิดและระนาบการกวาดวัดกับระยะห่างในการชักตัวอย่างบนระนาบการกวาดวัด $\Delta x, \Delta y$

ระนาบช่องเปิด (aperture plane) เป็นระนาบที่ผ่านช่องเปิดของสายอากาศทดสอบ กำหนดให้ระนาบช่องเปิดนี้ตั้งอยู่ที่ $z=0$ และถือว่า \vec{E}_a ซึ่งเป็นการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดของสายอากาศทดสอบ เป็นแหล่งกำเนิดคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณ $z>0$ ซึ่งในสถานการณ์จริง \vec{E}_a เป็นค่าที่เราไม่รู้ ส่วนระนาบการกวาดวัดเป็นระนาบที่หัววัดเคลื่อนที่ไปมาเพื่อกวาดวัดค่าสนามไฟฟ้า \vec{E}_s ที่ละจุดดังแสดงในรูป 2.1 โดยระนาบการกวาดวัดตั้งอยู่ที่ $z=z_t$ เมื่อรู้การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด \vec{E}_s แล้วสามารถนำไปคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล \vec{E}_f ได้โดยวิธีที่จะกล่าวถึงต่อไป

เนื่องจากพื้นผิวที่ห้วงเคลื่อนที่เทียบกับสายอากาศทดสอบเป็นระนาบ ดังนั้นเราจะหาความสัมพันธ์ดังกล่าวได้โดยพิจารณาจากแนวคิดสเปกตรัมคลื่นระนาบ (Plane Wave Spectrum - PWS) ดังต่อไปนี้

แนวคิดสเปกตรัมคลื่นระนาบ

จากแนวคิดสเปกตรัมคลื่นระนาบจะเห็นว่า การกระจายของสนามไฟฟ้าใด ๆ สามารถกระจายออกเป็นผลรวมของสนามไฟฟ้าของกลุ่มคลื่นระนาบที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางต่าง ๆ กัน โดยที่แอมพลิจูดของสนามไฟฟ้าและเฟสที่จุดกำเนิดของสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบในแต่ละทิศทางนั้นสามารถมีค่าแตกต่างกันออกไป เขียนเป็นสมการได้เป็น[4],[5]

$$\bar{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{A}(k_x, k_y) e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} dk_x dk_y \quad (2.1)$$

$\bar{A}(k_x, k_y) e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ เป็นสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางตามเวกเตอร์ \bar{k} เวกเตอร์ $\bar{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งในระบบพิกัดฉาก ส่วนเวกเตอร์ \bar{k} เมื่อเป็นเวกเตอร์ค่าจริงจะเป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นระนาบ เวกเตอร์ \bar{k} สามารถแตกองค์ประกอบในระบบพิกัดฉากได้เป็น $\bar{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ โดยขนาดของ \bar{k} ก็คือค่าคงที่เลขคลื่น (wave number constant)

$$|\bar{k}| = k = \omega/c = 2\pi/\lambda$$

เนื่องจากในกรณีของคลื่นระนาบ สนามไฟฟ้าต้องตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ และ \bar{A} เป็นสนามไฟฟ้าในทิศทางการเคลื่อนที่ \bar{k} ดังนั้น $\bar{k} \perp \bar{A}$ หรือ $\bar{k} \cdot \bar{A} = 0$ ซึ่งกระจายออกได้ดังสมการ (2.2)

$$k_x A_x(k_x, k_y) + k_y A_y(k_x, k_y) + k_z A_z(k_x, k_y) = 0 \quad (2.2)$$

สมการ (2.2) นี้ยังสามารถหาได้จากสมการ (2.1) โดยใช้สูตร $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ สำหรับบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด

สังเกตว่าสนามไฟฟ้า \bar{E} ตามที่ได้จากสมการ (2.1) นี้เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเฮล์มโฮลทซ์ (Helmholtz equation)

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0$$

โดยอินทิกรัล 2 ชั้นบนโดเมน (k_x, k_y) ในสมการ (2.1) แสดงถึงผลรวมของสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบใน ทุกโมดที่ค่า k_x และ k_y เป็นค่าจริง ดังนั้น k_z จึงสามารถมีค่าเป็นจำนวนจินตภาพได้ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป ในเรื่องของคลื่นที่จางหายไป (evanescent wave)

เนื่องจาก $e^{-jk \cdot \vec{r}}$ เมื่อเวกเตอร์ \vec{k} เป็นเวกเตอร์ค่าจริงจะแสดงถึงการเปลี่ยนค่าเฟสของสนามไฟฟ้า ตามตำแหน่งของคลื่นระนาบ ที่เคลื่อนที่ตามทิศทางของเวกเตอร์ \vec{k} เทียบกับค่าเฟส ณ จุดกำเนิด ดังนั้น เวกเตอร์ \vec{A} ก็คือเวกเตอร์แสดงค่าแอมพลิจูดของสนามไฟฟ้ารวมกับเฟสของสนามไฟฟ้าในส่วนที่ไม่แปรค่า ตามตำแหน่ง เวกเตอร์ \vec{A} จึงเป็นเวกเตอร์ค่าเชิงซ้อน เราเรียกเวกเตอร์ \vec{A} ว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบซึ่งเป็น ฟังก์ชันของเวกเตอร์แสดงทิศทาง \vec{k} แต่ไม่เป็นฟังก์ชันของเวกเตอร์ตำแหน่ง \vec{r} โดยคลื่นระนาบในที่นี้จะ เป็นคลื่นระนาบเอกรูป (uniform plane wave) ถ้าเวกเตอร์ \vec{k} เป็น เวกเตอร์ค่าจริง

จากสมการ (2.1) เมื่อแทน z ด้วย z_i ตามรูป 2.1 และกระจายออกเป็นสมการสเกลาร์จะได้

$$E_x(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} A_x(k_x, k_y) e^{-jk_z z_i} e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.3ก)$$

$$E_y(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} A_y(k_x, k_y) e^{-jk_z z_i} e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.3ข)$$

สมการในองค์ประกอบ z ไม่จำเป็นเนื่องจาก E_z หาได้จาก $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ เมื่อรู้ E_x และ E_y ทางซ้ายของสมการ (2.3ก),(2.3ข) คือสนามไฟฟ้าในแนวสัมผัสที่ระนาบการกวาดวัด สมการ (2.3) นี้เข้ารูปแบบของการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติจากโดเมน (k_x, k_y) มาสู่โดเมน (x, y) ดังนั้นองค์ประกอบของ สเปกตรัมคลื่นระนาบ A_x และ A_y สามารถหาได้จากการแปลงกลับฟูริเยร์ดังนี้

$$A_x(k_x, k_y) = \frac{e^{jk_z z_i}}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} E_x(x, y, z_i) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.4ก)$$

$$A_y(k_x, k_y) = \frac{e^{jk_z z_i}}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty\infty} E_y(x, y, z_i) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.4ข)$$

ในการวัดและทดสอบจริงนั้นจะคำนวณค่าสเปกตรัมคลื่นระนาบจากข้อมูลค่าสนามไฟฟ้าที่กวาดวัด ค่าได้บนระนาบการกวาดวัด แล้วจึงหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากสเปกตรัมคลื่นระนาบตาม สมการ (2.6) แต่สำหรับการคำนวณจำลองสถานการณ์ สิ่งที่น่าสนใจว่ารู้ในตอนแรกก็คือการกระจายของสนาม

ไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดซึ่งสมมุติให้ตั้งอยู่ที่ระนาบ $z = 0$ จากข้อมูลการกระจายของสนามไฟฟ้านี้จึงนำไปคำนวณค่าสเปกตรัมคลื่นระนาบ ดังสมการต่อไปนี้ ซึ่งได้มาจากการแทน z , เป็นศูนย์ในสมการ (2.4)

$$A_x(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} E_x(x, y, 0) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.5ก)$$

$$A_y(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{\infty} E_y(x, y, 0) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (2.5ข)$$

สำหรับการคำนวณจำลองสถานการณ์นั้นเมื่อหาค่าสเปกตรัมคลื่นระนาบได้แล้วก็สามารถคำนวณย้อนกลับไปหาข้อมูลค่าสนามไฟฟ้าที่กาวัดค่าได้บนระนาบการกาวัดโดยใช้สมการ (2.3)

ความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมคลื่นระนาบกับแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล

ส่วนแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศนั้น ในกรณีที่หัววัดเป็นแบบอุดมคติสามารถหาได้จากสเปกตรัมคลื่นระนาบดังนี้ (ภาคผนวก ง.)

$$\bar{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \frac{j e^{-jkr}}{r} k_z \bar{A}(k_{x0}, k_{y0}) \quad (2.6)$$

โดยที่

$$k_{x0} = k \sin \theta \cos \phi \quad (2.7ก)$$

$$k_{y0} = k \sin \theta \sin \phi \quad (2.7ข)$$

$$k_{z0} = k \cos \theta \quad (2.7ค)$$

จะเห็นได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลนั้นมีความสัมพันธ์โดยตรงกับสเปกตรัมคลื่นระนาบของสายอากาศทดสอบ ซึ่งหาจากการแปลงฟูริเยร์ของสนามไฟฟ้าบนระนาบการกาวัดในย่านสนามไกล และมีการใช้ข้อมูลสเปกตรัมคลื่นระนาบเฉพาะโมดที่มีค่า k_z เป็นจำนวนจริงตามสมการ (2.7ค)

คลื่นที่จางหายไป (evanescent wave)

ในย่านทดสอบชนิดสนามใกล้เชิงระนาบนั้น ปัจจัยสำคัญประการหนึ่งที่ต้องคำนึงถึง ได้แก่ระยะห่างที่เหมาะสมระหว่างระนาบช่องเปิด (aperture plane) ดังรูป 2.1 ซึ่งเป็นระนาบที่อยู่ใกล้กับสายอากาศทดสอบมาก และในที่นี้ถือเป็นระนาบที่ใช้แทนการมีอยู่ของสายอากาศทดสอบ กับระนาบการกวาดวัด (scan plane) ซึ่งต้องห่างมากพอที่จะสามารถละลายผลกระทบจากคลื่นที่จางหายไปได้ ปัจจัยอื่น ๆ ได้แก่แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามใกล้ของหัววัดที่ใช้ในการกวาดวัดเพื่อนำไปใช้ในการชดเชยผลจากหัววัด และผลกระทบจากความคลาดเคลื่อนทางตำแหน่งของหัววัด (probe positioning error) ซึ่งจะกล่าวถึงในบทต่อไป

ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อการทดสอบสายอากาศชนิดสนามใกล้เชิงระนาบพิจารณาได้ที่เงื่อนไขของ k_z โดยเนื่องจาก $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$k_z = \begin{cases} (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} & ; k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 \\ -j(k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2} & ; k_x^2 + k_y^2 > k^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

การกำหนดเครื่องหมายเมื่อ k_z เป็นจำนวนจินตภาพตามสมการ (2.8) นี้จะทำให้พจน์ $e^{-jk_z z}$ ซึ่งโดยปกติเมื่อ k_z เป็นจำนวนจริงนั้นแสดงถึงการเปลี่ยนแปลงเฟสของคลื่นระนาบตามทิศทางแนวแกน z กลายเป็นพจน์ที่จะลดทอนมากขึ้นตามค่า z แต่ถ้าเปลี่ยน $-j$ ในสมการ (2.8) เป็น $+j$ เมื่อ k_z เป็นจำนวนจินตภาพ จะทำให้พจน์ $e^{-jk_z z}$ กลายเป็นพจน์ที่มีค่าเพิ่มมากขึ้นตามค่า z ซึ่งไม่สอดคล้องกับสถานการณ์จริงที่ว่าสำหรับคลื่นแต่ละโมดที่แผ่กระจายออกไปจากแหล่งกำเนิดนั้นแอมพลิจูดของคลื่นจะต้องไม่เพิ่มขึ้น ในที่นี้แหล่งกำเนิดคือระนาบช่องเปิดและในกรณีนี้จะพิจารณาว่าคลื่นแต่ละโมดแผ่กระจายออกไปทางขวาของระนาบนี้เท่านั้น ดังนั้นจากสมการ (2.8) จะได้ว่าคลื่นโมดที่ $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ เป็นคลื่นโมดที่จางหายไปและไม่สามารถไปถึงย่านสนามใกล้ได้ แต่ในระยะสนามใกล้คลื่นโมดเหล่านี้จะยังมีอยู่และทำให้เกิดผลเสียต่อการ กวาดวัดค่าในระยะสนามใกล้ดังจะกล่าวต่อไป การหาตำแหน่งของระนาบการกวาดวัดที่สามารถละลายผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปได้ก็คือการหาระยะ z_r ที่ทำให้คลื่นโมดที่จางหายไปถูกลดทอนจนน้อยมากพอที่จะไม่มีผลกระทบต่อค่าสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด

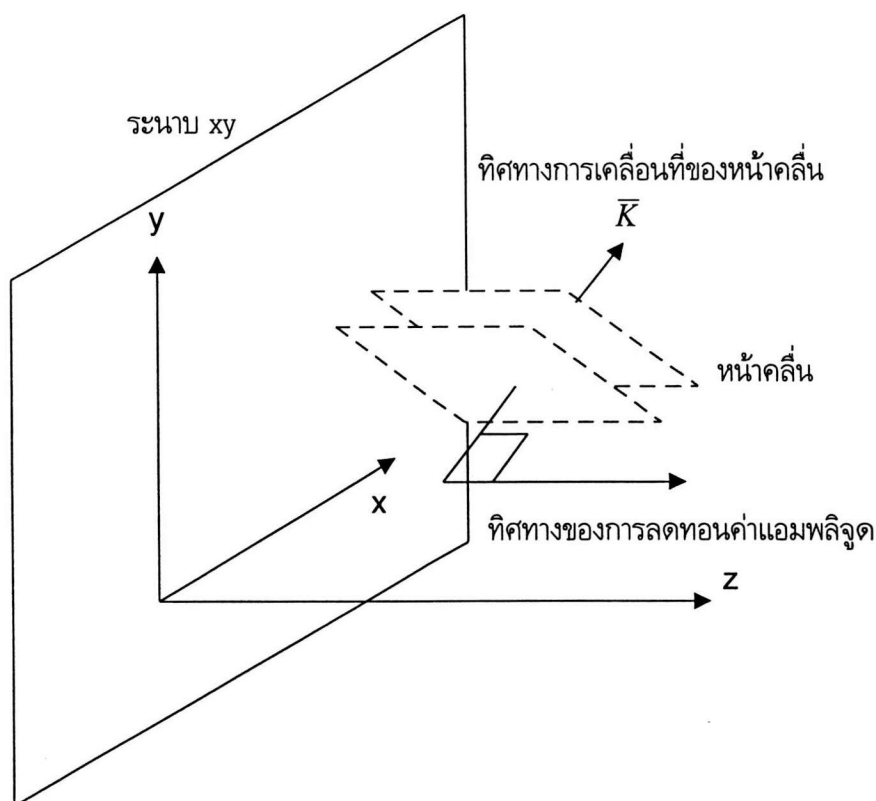
ลักษณะทางกายภาพของคลื่นที่จางหายไปเหล่านี้สามารถพิจารณาได้จากนิพจน์ที่แทนสนามไฟฟ้าของคลื่นระนาบแต่ละโมด ซึ่งก็คือ $\bar{A}(k_x, k_y)e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ พจน์นี้เมื่อ k_z มีค่าเป็นจำนวนจินตภาพสามารถเขียนได้ในรูปของนิพจน์ดังต่อไปนี้

$$\bar{A}(k_x, k_y)e^{-\alpha z}e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

โดยที่เวกเตอร์ $\bar{K} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$ เป็นเวกเตอร์แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของหน้าคลื่นของคลื่นระนาบซึ่งในกรณีนี้ไม่ใช่คลื่นระนาบเอกรูปเพราะมีการลดทอนในทิศทางตามแนวแกน z เนื่องจากพจน์ $e^{-\alpha z}$ ดังแสดงในรูป 2.2

ส่วน α เป็นค่าคงที่การลดทอนและเป็นจำนวนจริงบวกมีค่าตามสมการต่อไปนี้

$$\alpha = jk_z = (k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2} \quad (2.9)$$



รูป 2.2 ลักษณะทางกายภาพของคลื่นที่จางหายไป

คลื่นที่จางหายไปเป็นคลื่นพื้นผิว (surface wave) [17] แบบหนึ่งเนื่องจากทิศทางการลดทอนตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของหน้าคลื่น และเนื่องจากลักษณะของมันที่ถูกลดทอนจนหมดในระยะเวลาไม่กี่วินาทีแต่มีค่ามากในบริเวณใกล้สายอากาศโดยเฉพาะในย่านสนามใกล้กัมมันต์ คลื่นโหมดเหล่านี้จึงสามารถเป็นตัวแทนของกำลังงานสะสมในย่านสนามใกล้กัมมันต์ของสายอากาศ

ผลกระทบจากคลื่นที่จางหายไปกับระยะห่างในการชักตัวอย่างบนระนาบการกวาดวัด

ในการทดสอบสายอากาศผู้ทดสอบจะไม่สามารถกวาดวัดสนามไฟฟ้าได้ที่ทุก ๆ จุดบนระนาบการกวาดวัด การกวาดวัดจะมีลักษณะเป็นการชักตัวอย่างบนระนาบที่มีขนาดจำกัดดังแสดงในรูป 2.1 จำนวนการชักตัวอย่างที่มากเกินไปจะทำให้เสียเวลาในการกวาดวัดค่าและการประมวลผลมาก จำนวนการชักตัวอย่างที่น้อยเกินไปจะทำให้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่คำนวณได้ผิดพลาด ระยะห่างในการชักตัวอย่างที่น้อยที่สุดสามารถหาได้จากทฤษฎีของไนควิสต์เป็น $\lambda/2$ หรือครึ่งความยาวคลื่น ระยะห่างนี้สามารถใช้ในทางปฏิบัติได้ดีก็ต่อเมื่อ Δz ตำแหน่งที่ตั้งของระนาบการกวาดวัดนั้นสามารถละเลยผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปทุก ๆ โมดได้ทั้งหมด

ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปที่มีต่อการกวาดวัดค่าในระยะสนามไกลนั้นเกิดขึ้นเนื่องจากคลื่นโมดเหล่านี้มีค่า k_x และ k_y ซึ่งเป็นค่าคงที่เฟส (phase constant) ในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับมากกว่าของคลื่นระนาบเอกรูป ดังนั้นคลื่นที่จางหายไปจึงมีการแปรค่าตามตำแหน่งในแนวแกน x และแนวแกน y มากกว่าคลื่นระนาบเอกรูป และเพราะว่าการคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลใช้ข้อมูลสเปกตรัมคลื่นระนาบเฉพาะโมดที่เป็นคลื่นระนาบเอกรูปเท่านั้น ดังนั้นถ้าคลื่นที่จางหายไปเหล่านี้มีขนาดต่ำจนสามารถละเลยได้แล้วระยะห่างในการชักตัวอย่างที่ระนาบการกวาดวัดจะมีค่าต่ำที่สุด เนื่องจากในกรณีนี้เราต้องการให้การชักตัวอย่างสอดคล้องกับการแปรค่าตามตำแหน่งของพวกคลื่นระนาบเอกรูปได้เท่านั้นก็เพียงพอ แต่ถ้าที่ระนาบการกวาดวัดไม่สามารถละเลยคลื่นที่จางหายไปได้ การชักตัวอย่างก็ต้องสามารถตามการแปรค่าตามตำแหน่งของพวกคลื่นที่จางหายไปเหล่านี้ไปจนถึงโมดที่มีการแปรค่าตามตำแหน่งมากที่สุดที่ยังไม่สามารถละเลยได้ เพื่อไม่ให้ข้อมูลจากการกวาดวัดค่าเกิดความเพี้ยนขึ้น

โดยที่ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปที่มีต่อการคำนวณหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากข้อมูลค่าสนามไฟฟ้าที่ทำการชักตัวอย่างบนระนาบการกวาดวัด สามารถพิจารณาได้จากทฤษฎีการชักตัวอย่างของไนควิสต์แบบ 2 มิติ (ภาคผนวก ข) ดังต่อไปนี้ พิจารณาสมการ (2.3) ซึ่งมีรูปแบบเป็นการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติจากโดเมน (x, y) ไปยังพิสัย (k_x, k_y) ถ้าเรารู้ว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบ \bar{A} เป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัดอยู่ในแถบ (band limited function) คือ

$$\bar{A}(k_x, k_y) = 0 \text{ เมื่อ } |k_x| \geq k_{xm} \text{ และ } |k_y| \geq k_{ym} \quad (2.10)$$

โดยที่ k_{xm} และ k_{ym} เป็นจำนวนบวกใด ๆ แล้วจะได้ว่าเราสามารถหาการกระจายของสนามไฟฟ้า $\bar{E}(x, y, z_r)$ ที่ทุก ๆ จุดบนระนาบ $z = z_r$ ได้จากข้อมูลค่าชักตัวอย่างของสนามไฟฟ้าที่จุดตัดของของโครงตาข่ายดังแสดงในรูป 2.1 ถ้าระยะห่างของแต่ละจุดบนโครงตาข่ายดังกล่าว ซึ่งก็คือ Δx และ Δy น้อยกว่าหรือเท่ากับที่กำหนดโดยสมการต่อไปนี้

$$\Delta x = \frac{\pi}{k_{xm}} \quad (2.11ก)$$

$$\Delta y = \frac{\pi}{k_{ym}} \quad (2.11ข)$$

เมื่อ Δx และ Δy มีค่าตามสมการ (2.11) แล้วจะได้จากทฤษฎีการชักตัวอย่างของไนควิสต์ว่าค่าสนามไฟฟ้าที่ทุกๆจุดบนระนาบการกวาดวัดสามารถคำนวณจากข้อมูลค่าชักตัวอย่างได้ตามสมการ

$$\bar{E}(x, y, z,) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{E}(m\Delta x, n\Delta y) \frac{\sin k_{xm}(x - m\Delta x)}{k_{xm}(x - m\Delta x)} \frac{\sin k_{yn}(y - n\Delta y)}{k_{yn}(y - n\Delta y)} \quad (2.12)$$

สมการ (2.12) นี้ต้องอาศัยข้อมูลค่าชักตัวอย่างตลอดทั้งระนาบอนันต์ แต่ในทางปฏิบัติสามารถใช้ข้อมูลค่าชักตัวอย่างบนระนาบที่มีขนาดจำกัดได้ เมื่อเงื่อนไขดังต่อไปนี้เป็นจริง

$$\bar{E}(m\Delta x, n\Delta y) \approx 0 \text{ เมื่อ } |m|, |n| > \frac{M}{2} \quad (2.13)$$

โดยที่ M เป็นจำนวนข้อมูลค่าชักตัวอย่างใน 1 แถวนอนหรือแถวตั้งบนระนาบการกวาดวัด ดังนั้น $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty}$ ในสมการ (2.12) จะกลายเป็น $\sum_{m=-M/2}^{M/2} \sum_{n=-M/2}^{M/2}$ ซึ่งจะใช้ข้อมูลจากการชักตัวอย่างทั้งหมด M^2 ตัวบนระนาบขนาดจำกัดที่มีขนาดกว้างยาวเป็น $(M-1)\Delta x$ และ $(M-1)\Delta y$ ตามลำดับ เมื่อเงื่อนไขตามสมการ (2.13) ใช้ได้จริง จะสามารถกล่าวได้ว่าข้อมูลค่าสนามไฟฟ้าที่ชักตัวอย่างมา M^2 ตัวนี้สามารถเป็นตัวแทนของค่าสนามไฟฟ้าที่ทุก ๆ จุดบนระนาบการกวาดวัดได้จริงเนื่องจากมันสามารถหาได้ตามสมการ (2.12) แต่ถ้าขนาดของระนาบไม่มากพอที่จะทำให้เงื่อนไข (2.13) เป็นจริงแล้วข้อมูลค่าชักตัวอย่างจะไม่สามารถเป็นตัวแทนของค่าสนามไฟฟ้าที่ทุก ๆ จุดบนระนาบการกวาดวัดได้ ผลก็คือจะเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นกับแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่หามาจากค่าชักตัวอย่างดังกล่าว นี่เป็นความคลาดเคลื่อนในกรณีแรกที่เกิดจากการกวาดวัดบนระนาบที่มีขนาดจำกัด

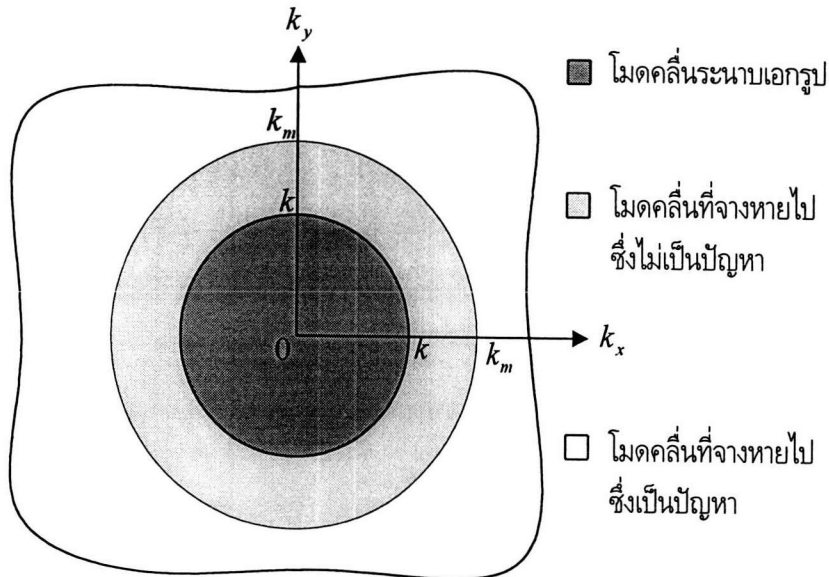
ส่วนความคลาดเคลื่อนในอีกกรณีหนึ่งจะเกิดขึ้นเนื่องจากโดยทั่วไปแล้วสเปกตรัมคลื่นระนาบจะไม่เป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัดอยู่ในแถบ นั่นก็คือเงื่อนไข (2.10) จะไม่เป็นจริง เนื่องจากคลื่นที่จางหายไปสามารถมีได้จนถึงโมดที่ $|k_x|, |k_y| \rightarrow \infty$ แต่เนื่องจากคลื่นที่จางหายไปเป็นคลื่นโมดที่ถูกลดทอน และยิ่งจะลดทอนเป็นอย่างมากเมื่อ $|k_x|, |k_y|$ มีค่ามากขึ้น เนื่องจาก ตามสมการ (2.9) มีค่ามากขึ้น ดังนั้นอาจประมาณได้ว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบของสายอากาศทดสอบที่กำลังพิจารณาอยู่เป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัดอยู่ในแถบได้ ถ้าระนาบการกวาดวัดถูกวางห่างจากระนาบช่องเปิดมากพอจนกระทั่งคลื่นที่จางหายไปโมดที่ $|k_x| \geq k_{xm}$ หรือ

$|k_y| \geq k_{ym}$ ถูกลดทอนจนมากพอที่จะไม่มีนัยสำคัญต่อสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดที่ระยะดังกล่าว นั่นคือถ้า

$$\bar{A}(k_x, k_y) e^{-jk_z z} \approx 0 \text{ เมื่อ } |k_x| \geq k_{xm} > k \text{ และ } |k_y| \geq k_{ym} > k \quad (2.14)$$

แล้วจะทำให้ที่ระยะนี้สามารถใช้ข้อมูลค่าสัมพัทธ์ของสนามไฟฟ้าโดยใช้ระยะห่าง $\Delta x, \Delta y$ ของจุดซัดตัวอย่างตามสมการ (2.11) เป็นตัวแทนของสนามไฟฟ้าที่ทุก ๆ จุดบนระนาบการกวาดวัดได้ สังเกตจากเงื่อนไข (2.14) ว่าคลื่นโมดที่จางหายไปนั้นไม่ได้เป็นปัญหาและต้องการให้ถูกลดทอนไปเสียทุกโมด แต่เฉพาะโมดที่ $|k_x| \geq k_{xm}$ หรือ $|k_y| \geq k_{ym}$ เท่านั้นที่ต้องการให้ถูกลดทอนจนไม่มีผลต่อสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด โดยเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์การลดทอนของคลื่นโมดที่จางหายไปจะประมาณบริเวณบนโดเมน (k_x, k_y) ซึ่งแทนโมดคลื่นที่จางหายไปที่เป็นปัญหาด้วยบริเวณนอกวงกลมใหญ่ในรูป 2.3

ตามที่พิจารณามานี้จะเห็นได้ว่าค่า k_{xm}, k_{ym} ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้จะเกิดขึ้นเมื่อคลื่นโมดที่จางหายไปทุกโมดถูกลดทอนจนมากพอที่จะไม่มีนัยสำคัญต่อสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด ซึ่งในกรณีนี้จะทำให้ $k_{xm} = k_{ym} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ และจะทำให้ค่า $\Delta x, \Delta y$ ตามสมการ (2.11) มีค่ามากที่สุดที่จะเป็นไปได้เป็น $\lambda/2$ อย่างไรก็ตามการจะให้คลื่นโมดที่จางหายไปทุก ๆ โมดถูกลดทอนจนมากพอตามที่ต้องการนั้นเป็นไปได้นอกเสียจากว่าระยะห่าง z , เป็นอนันต์ ดังจะแสดงต่อไป



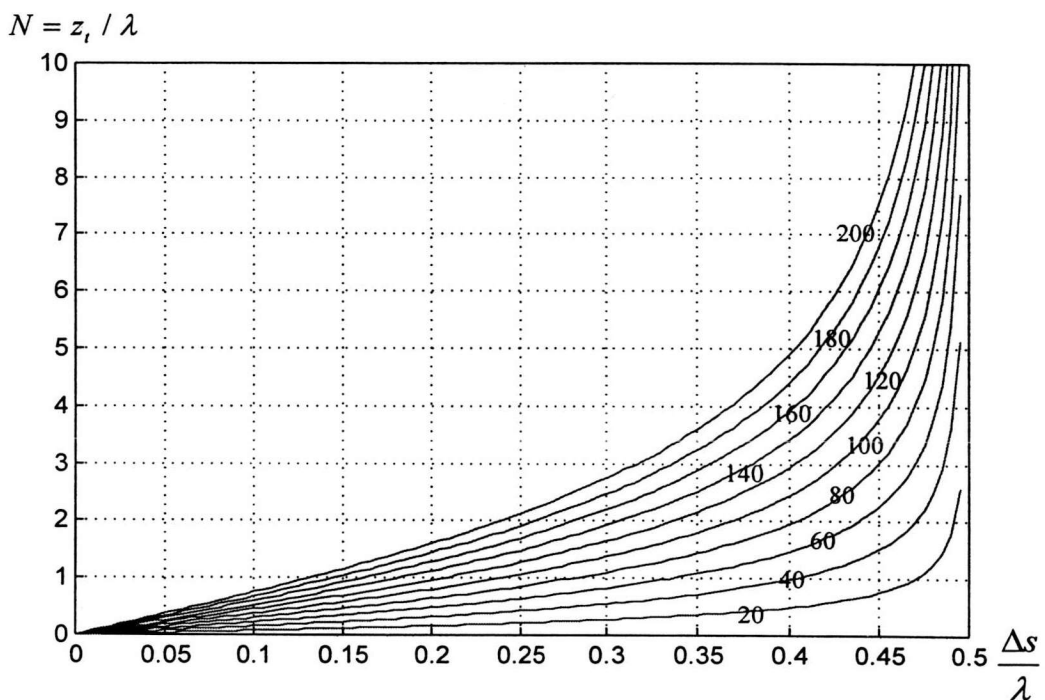
รูป 2.3 บริเวณบนโดเมน (k_x, k_y) ของโหมดคลื่นระนาบเอกรูป โหมดคลื่นที่จางหายไปที่ไม่เป็นปัญหา และโหมดคลื่นที่จางหายไปที่เป็นปัญหาและต้องการให้ถูกลดทอนจนไม่มีผลต่อสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด

พิจารณาพจน์การลดทอนในทิศทางตามแนวแกน z ของคลื่นโมดที่จางหายไปแต่ละโมด ณ ระยะเวลาการกวาดวัด ($z = z_i$) เป็นฟังก์ชันของ k_x, k_y โดยที่ α มีค่าตามสมการ (2.9) และระยะห่าง $z_i = N\lambda$ ดังนี้

$$\text{atten}(k_x, k_y) = e^{-\alpha(k_x, k_y)z_i} \cong 8.7N\lambda\alpha \text{ dB} \quad (2.15)$$

เนื่องจาก α มีค่ามากขึ้นเมื่อ $k_x^2 + k_y^2$ มีค่ามากขึ้นดังนั้นในบรรดาโมดคลื่นที่จางหายไปที่เป็นปัญหาและต้องการให้ถูกลดทอนนั้นโมดที่อยู่ ณ วงกลมที่กำหนดโดยสมการ $k_x^2 + k_y^2 = k_m^2$ ในรูป 2.3 จะถูกลดทอนน้อยที่สุด นิยามค่าการลดทอนของคลื่นโมดดังกล่าวเป็น atten_{\min} ดังนั้นเราสามารถหาค่าของมันได้โดยแทน $k_x^2 + k_y^2 = k_m^2$ ในสมการ (2.9) และสมการ (2.15) ซึ่งโดยทั่วไปมักใช้ $\Delta x = \Delta y$ ดังนั้นเพื่อความสะดวกจะนิยาม $\Delta s = \Delta x = \Delta y$ และ $k_m = k_{xm} = k_{ym} = \pi / \Delta s$ ดังนี้[6]

$$\begin{aligned} \text{atten}_{\min} &\cong 8.7N\lambda(k_m^2 - k^2)^{1/2} \\ &\cong 54.6N \left[\left(\frac{\lambda}{2\Delta s} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.16)$$



รูป 2.4 ความสัมพันธ์ในหน่วยความยาวคลื่นของระยะห่างระหว่างจุดซัดตัวอย่างบนระยะเวลาการกวาดวัด ($\Delta s / \lambda$) กับระยะห่างของระยะเวลาการกวาดวัดจากระยะห่างของเปิดของสายอากาศทดสอบ (N) โดยที่ตัวเลขกำกับแต่ละเส้นคือค่าต่ำสุดของการลดทอนของคลื่นที่จางหายไปโมดที่ไม่ต้องการ (atten_{\min}) ในหน่วย dB

คลื่นที่จางหายไปโมดอื่น ๆ ที่อยู่นอกวงกลมใหญ่ในรูป 2.3 นั้นจะมีการลดทอนที่มากกว่าค่า $atten_{min}$ นี้ ดังนั้นมันจึงเป็นค่าต่ำสุดของการลดทอนของคลื่นที่จางหายไปโมดที่ไม่ต้องการ เมื่อนำสมการ (2.16) ไปเขียนกราฟโดยให้ N เป็นแกนตั้งและ $\Delta s/\lambda$ เป็นแกนนอนโดยกำหนดค่า $atten_{min}$ เป็นพารามิเตอร์ต่าง ๆ กันจะได้ดังกราฟรูป 2.4 จากกราฟจะเห็นได้ว่าเมื่อ Δs เข้าสู่ $\lambda/2$ นั้น N จะวิ่งเข้าสู่ค่าอนันต์ ตัวอย่างการใช้ค่าจากกราฟแสดงได้ดังนี้ เช่นเมื่อกวาดวัดค่าที่ระยะห่างจากระนาบช่องเปิดของสายอากาศทดสอบเพียง 1 ความยาวคลื่น และต้องการให้สนามไฟฟ้าของคลื่นที่จางหายไปโมดซึ่งเป็นปัญหาทุก ๆ โมดถูกลดทอนอย่างน้อย 100 เท่าหรือ 40 dB ณ ระนาบการกวาดวัด ดังนั้นจากกราฟ 2.4 จะได้ว่าต้องใช้ระยะห่างของจุดซัดตัวอย่างบนระนาบการกวาดวัดเป็น 0.4 เท่าของความยาวคลื่นโดยประมาณ

อย่างไรก็ตามสมการ (2.16) นี้ค่อนข้างเคร่งครัดมากเกินไป เพราะเมื่อพิจารณาจากสมการจะเห็นว่าถ้าใช้ $\Delta s = \lambda/2$ แล้วจะทำให้ค่า $atten_{min} = 0$ ไม่ว่า N จะมีค่าเท่าใดนั่นคือไม่ว่าระนาบการกวาดวัดจะอยู่ห่างจากสายอากาศทดสอบมากเพียงใด ที่เป็นเช่นนี้เพราะเมื่อ $\Delta s = \lambda/2$ จะทำให้ $k_m = k$ ผลก็คือวงกลมใหญ่ในรูป 2.3 จะซ้อนทับวงกลม $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ ซึ่งเป็นเส้นแบ่งระหว่างโมดคลื่นระนาบเอกกับโมดคลื่นที่จางหายไป ค่า $atten_{min}$ ในกรณีนี้จึงเป็นค่าการลดทอนของคลื่นระนาบเอกรูปโมดที่ $k_z = 0$ เนื่องจากเป็นคลื่นระนาบเอกจึงไม่มีการลดทอนใด ๆ ไม่ว่าระยะห่าง z , จะมากเท่าใดก็ตาม ซึ่งอันที่จริงแล้วการใช้ $\Delta s = \lambda/2$ นั้นสามารถทำได้ถ้าสเปกตรัมคลื่นระนาบของสายอากาศทดสอบมีโมดคลื่นที่จางหายไปที่มีขนาดต่ำมากพอจนกระทั่งเงื่อนไข (2.14) ยังสามารถใช้ได้ ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการคำนวณจำลองสถานการณ์เพื่อดูผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลของสายอากาศทดสอบที่มีการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดต่าง ๆ กัน โดยที่ใช้ $\Delta s = \lambda/2$ และระยะห่างของระนาบการกวาดวัดจากระนาบช่องเปิดเท่ากับ 1 ความยาวคลื่น

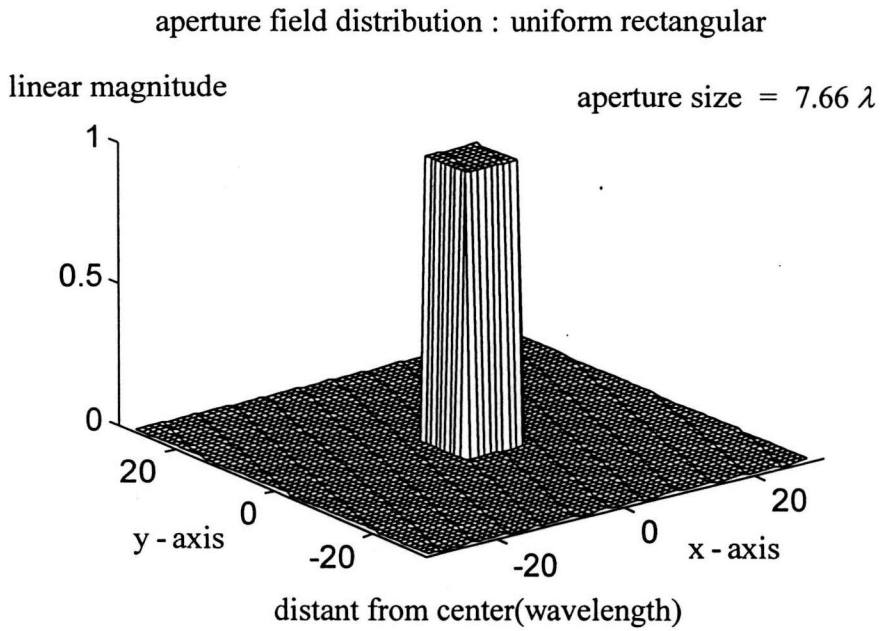
ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลเมื่อใช้ระยะห่างในการชักตัวอย่างเป็น
ครึ่งความยาวคลื่น

ในการคำนวณจำลองสถานการณ์เพื่อดูผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่าน
สนามไกล จะใช้การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นรูปแบบต่าง ๆ กันเนื่องจากการกระจายของ
สนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดต่างกันก็จะให้สเปกตรัมคลื่นระนาบแตกต่างกันไป วิธีการที่ใช้ในการคำนวณ
จำลองสถานการณ์จะให้เมทริกซ์ซึ่งแทนการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นเมทริกซ์ขนาดใหญ่
ซึ่งมีระยะห่างของแต่ละจุดข้อมูลของการกระจายสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นเศษส่วนของ ระยะการ
ชักตัวอย่างบนระนาบการกวาดวัดหรือก็คือ

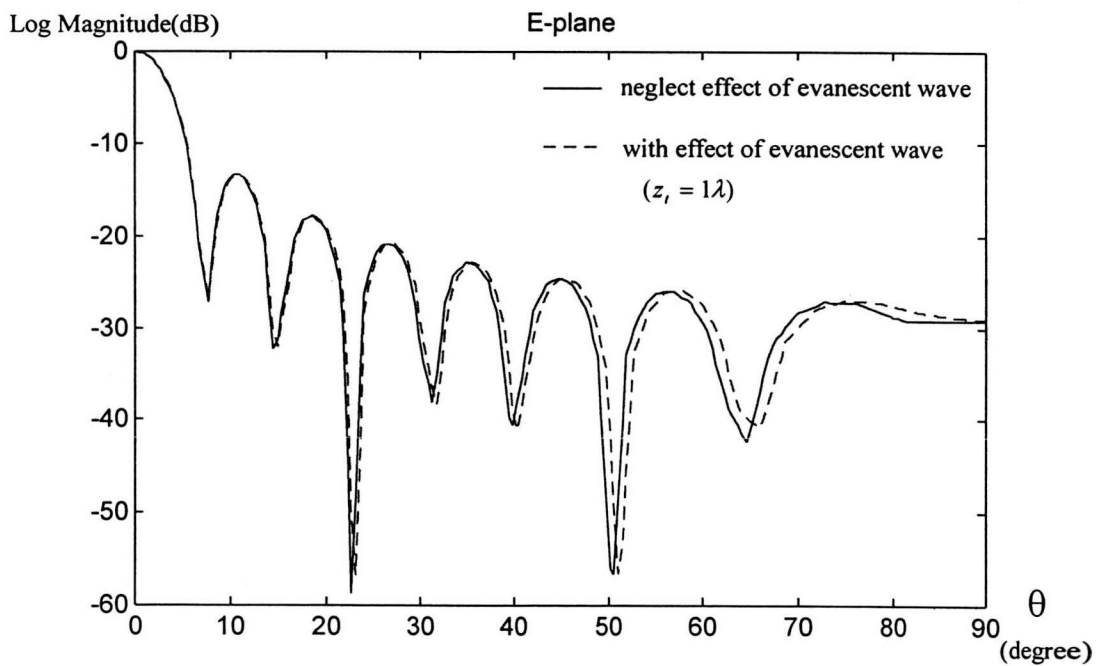
$$\Delta s_a = \Delta s / n \text{ ซึ่งจากสมการ (2.11) จะทำให้ } k_{ma} = \pi / \Delta s_a = n\pi / \Delta s = nk_m$$

โดยที่ตัวห้อย a หมายถึงเป็นค่าที่ระนาบช่องเปิด ค่า k_{ma} บอกถึงขนาดของ k_x, k_y สูงสุดของคลื่นที่จาง
หายไปที่ปรากฏอยู่ในเมทริกซ์ซึ่งแทนสเปกตรัมคลื่นระนาบในการคำนวณจำลองสถานการณ์ ในสถานการณ์
จริงนั้นการกระจายของสนามไฟฟ้ามีค่าต่อเนื่องจะหมายถึง $\Delta s_a \rightarrow 0$ ซึ่งก็คือ $n \rightarrow \infty$ ดังนั้นจะได้ว่า
 $k_{ma} \rightarrow \infty$ ซึ่งหมายถึงสเปกตรัมคลื่นระนาบของสายอากาศทดสอบในสถานการณ์จริงสามารถมีโมดคลื่นที่
จางหายไปได้จนถึงโมดที่ขนาดของ k_x, k_y เป็นอนันต์ การที่เมทริกซ์ซึ่งแทนสเปกตรัมคลื่นระนาบในการ
คำนวณจำลองสถานการณ์ไม่ได้มีโมดคลื่นที่จางหายไปจนถึงโมดที่ขนาดของ k_x, k_y เป็นอนันต์เหมือนกับใน
สถานการณ์จริงนั้นไม่เป็นปัญหาแต่อย่างใดสำหรับการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดทั้ง 3 แบบใน
หัวข้อนี้และแบบอื่น ๆ ซึ่งแทบจะไม่มีคลื่นที่จางหายไปโมดที่ขนาดของ k_x, k_y มีค่ามากกว่า k_m

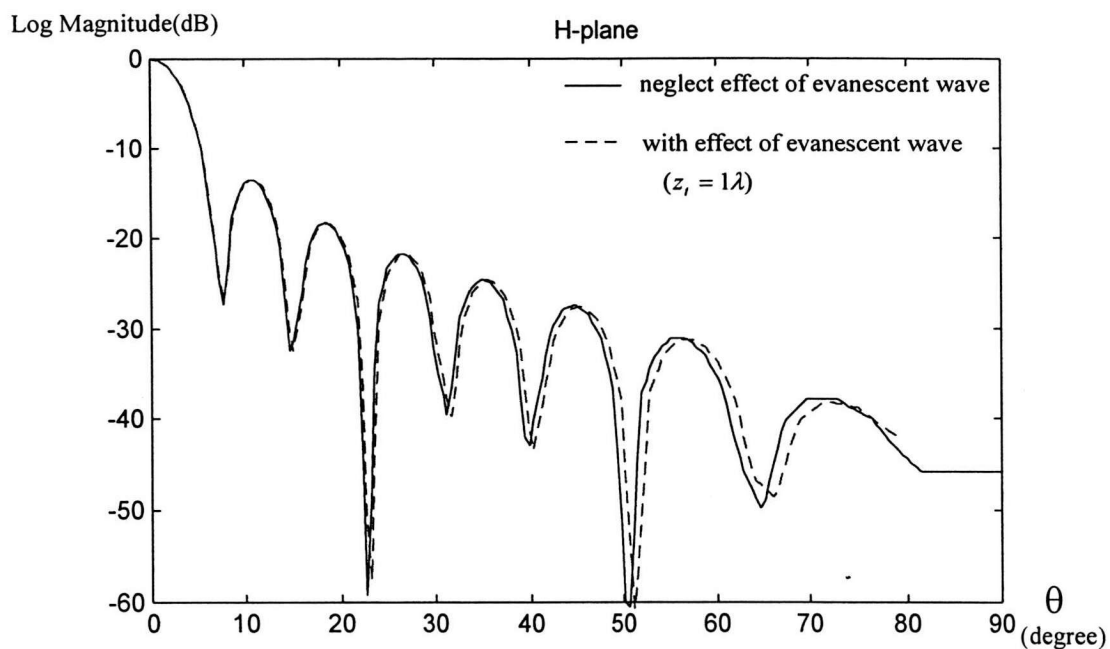
ต่อจากนั้นในการคำนวณจำลองสถานการณ์เมื่อคำนวณได้การกระจายของสนามไฟฟ้าที่ระนาบการ
กวาดวัดคือที่ระนาบ $z = z_1$ ในกรณีที่รวมผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปจะใช้วิธีการชักตัวอย่างโดยการลบ
ออก (sample by deletion) ทำให้ระยะห่างของแต่ละจุดข้อมูลของการกระจายสนามไฟฟ้าบนระนาบการ
กวาดวัดกลายเป็น Δs เหมือนกับในสถานการณ์จริง ขนาดของเมทริกซ์ซึ่งแทนการกระจายของสนามไฟฟ้า
บนระนาบการกวาดวัดจะลดลง n เท่าจากเดิม ผลจากการชักตัวอย่างแบบนี้ก็คือสเปกตรัมคลื่นระนาบโมดที่
 $nk_m \geq |k_x|, |k_y| \geq k_m$ จะเป็นคลื่นระนาบโมดที่มีปัญหาซึ่งจะทำให้เกิดผลกระทบต่อแบบรูปการแผ่
พลังงานย่านสนามไกล ถ้ามันไม่ได้ถูกลดทอนมากพอที่ระนาบการกวาดวัดนี้ โดยในที่นี้ใช้เมทริกซ์ซึ่งแทน
การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดขนาด 360×360 และค่า $n=3$ โดยที่ $z_1 = 1\lambda$ และ
 $\Delta s = \lambda/2$ ทำให้ $k_m = k$ และ $k_{ma} = 3k$ และให้ขนาดของช่องเปิดบนระนาบช่องเปิดเป็น 7.66λ โดยที่
การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นดังรูป 2.5 รูป 2.8 และรูป 2.11 ผลลัพธ์เป็นการเปรียบเทียบ
แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กของกรณีที่รวมผล
กระทบของคลื่นที่จางหายไปกับกรณีที่ไม่รวมผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปซึ่งเป็นกรณีอุดมคติ



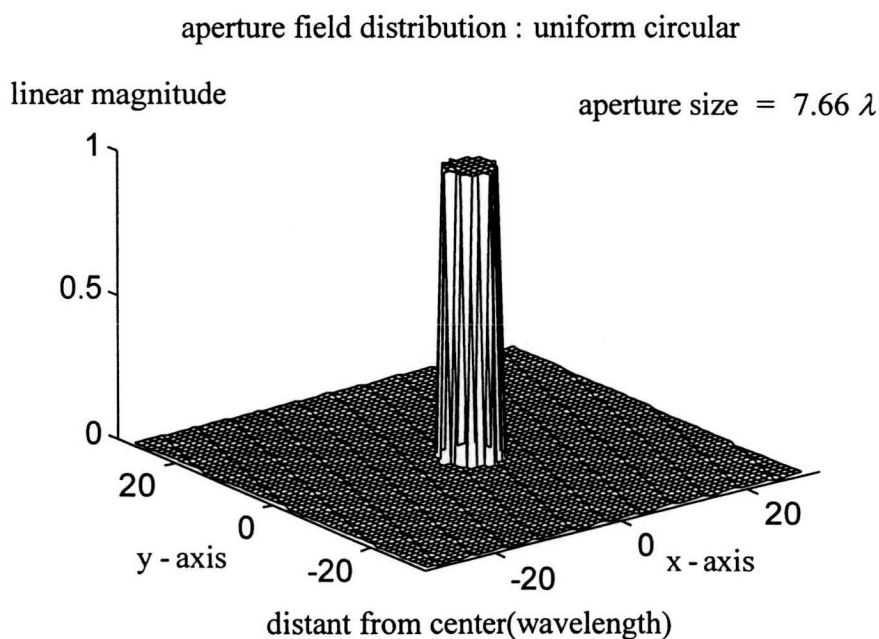
รูป 2.5 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดแบบสี่เหลี่ยมเอกกรุป (uniform rectangular) โดยที่สนามไฟฟ้ามีโพลาไรเซชันในแนวแกน y



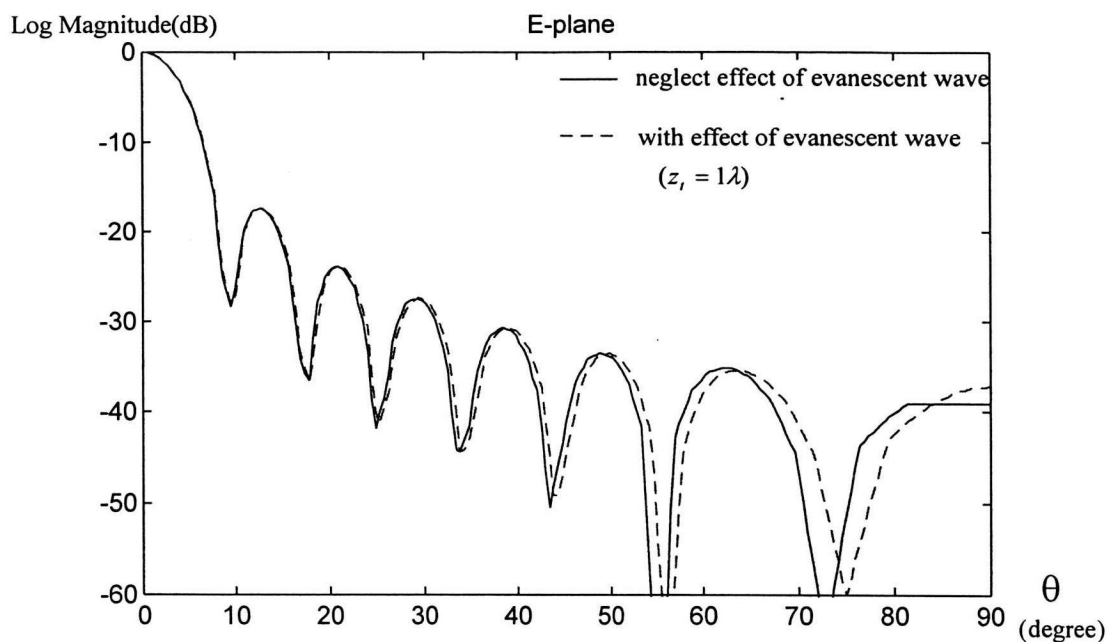
รูป 2.6 ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบสี่เหลี่ยมเอกกรุป โดยที่ $\Delta s = \lambda/2$ และ $z_1 = 1\lambda$



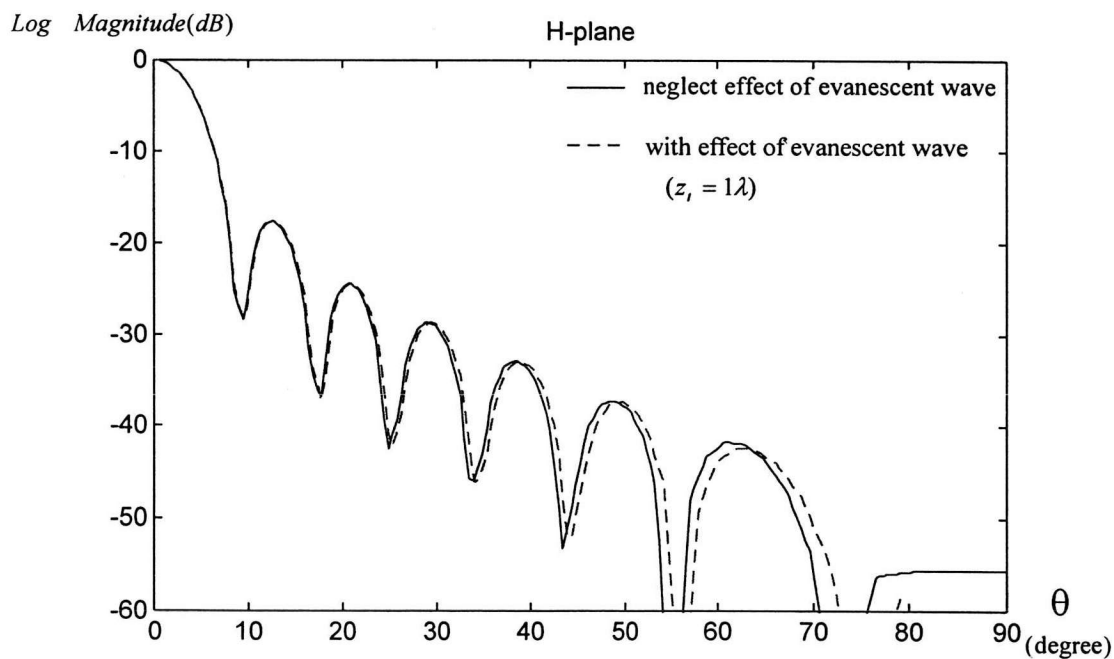
รูป 2.7 ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบสี่เหลี่ยมเอกรูป โดยที่ $\Delta s = \lambda/2$ และ $z_r = 1\lambda$



รูป 2.8 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดแบบวงกลมเอกรูป (uniform circular) โดยที่สนามไฟฟ้ามีโพลาริเซชันในแนวแกน y



รูป 2.9 ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบวงกลมเอกรูป โดยที่ $\Delta s = \lambda/2$ และ $z_i = 1\lambda$

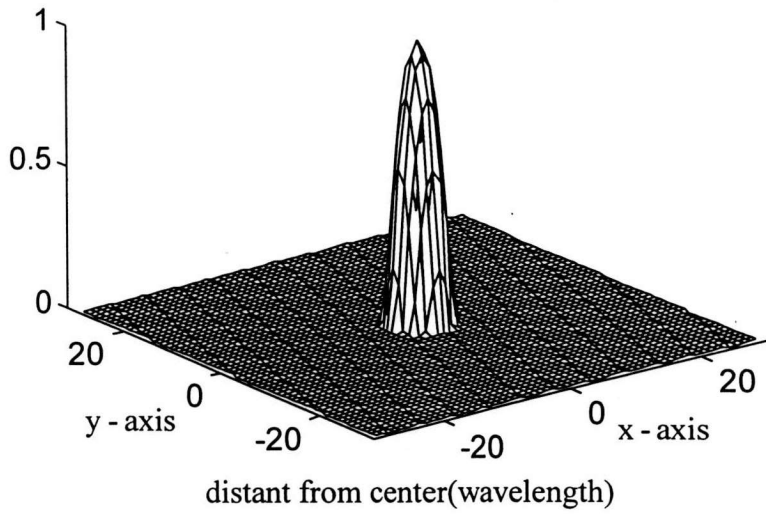


รูป 2.10 ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบวงกลมเอกรูป โดยที่ $\Delta s = \lambda/2$ และ $z_i = 1\lambda$

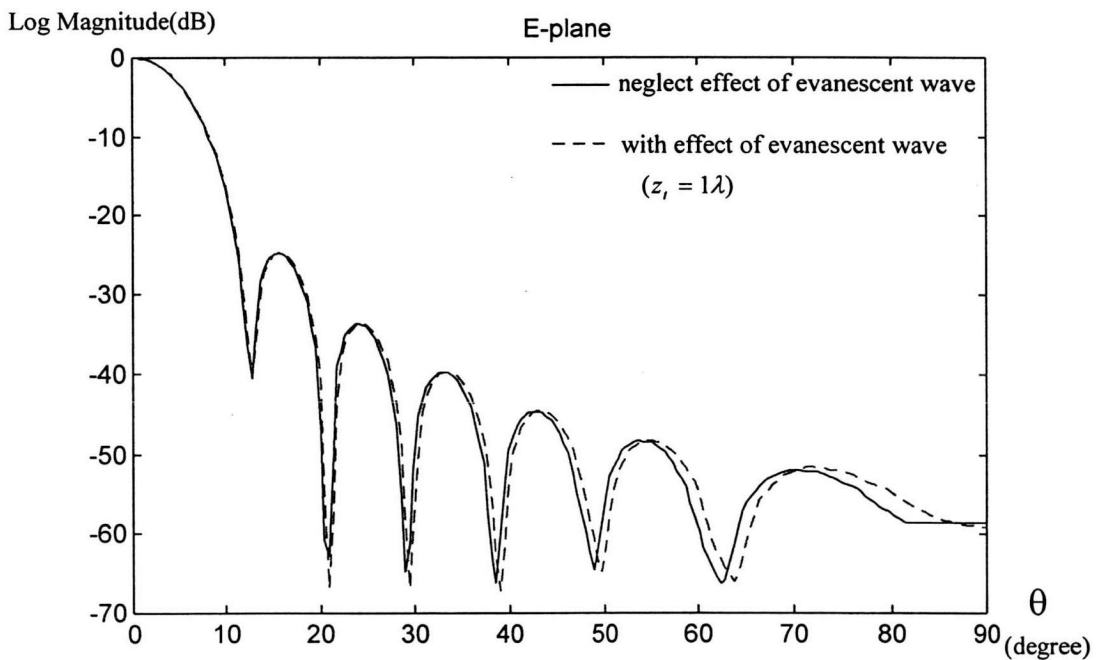
aperture field distribution : circular parabolic taper

linear magnitude

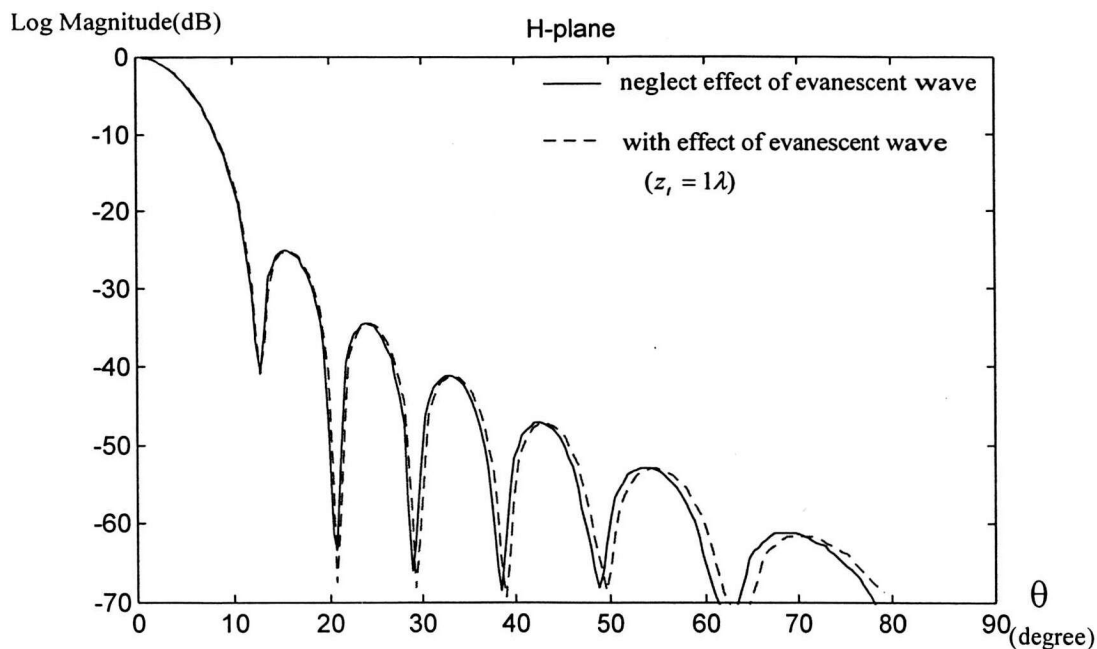
aperture size = 7.66λ



รูป 2.11 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดแบบวงกลมความรีพาราโบลิก (circular parabolic taper) โดยที่สนามไฟฟ้ามีโพลาไรเซชันในแนวแกน y



รูป 2.12 ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้า เมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบวงกลมความรีพาราโบลิก โดยที่ $\Delta r = \lambda/2$ และ $z_i = 1\lambda$



รูป 2.13 ผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดเป็นแบบวงกลมความถี่พาธาโบลิก โดยที่ $\Delta s = \lambda/2$ และ $z, = 1\lambda$

การที่แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กมีความแตกต่างกันเนื่องจากในระนาบสนามแม่เหล็กมี $\cos\theta$ คูณอยู่แต่ในระนาบสนามไฟฟ้าไม่มีด้วยเหตุผลดังต่อไปนี้ จากสมการ (2.6) และสมการ (2.7) จะได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลมีความสัมพันธ์กับสเปกตรัมคลื่นระนาบดังต่อไปนี้

$$\bar{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = C \cos\theta \bar{A}(\bar{k}) \quad \text{เมื่อ } \bar{k} = k\hat{r} \quad (2.17)$$

โดยที่ $C = jke^{-jkr} / r$ เนื่องจากสเปกตรัมคลื่นระนาบ $\bar{A}(\bar{k})$ ตั้งฉากกับ \bar{k} ดังนั้นเมื่อ $\bar{k} = k\hat{r}$ มันจึงตั้งฉากกับ \hat{r} ซึ่งก็คือ \bar{E} ตั้งฉากกับ \hat{r} ด้วยหรือ $\bar{E} \cdot \hat{r} = 0$ ซึ่งก็ตรงกับความจริงที่ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลมีองค์ประกอบในแนวเวกเตอร์หน่วย \hat{r} น้อยมากจนสามารถละเลยได้ ดังนั้นองค์ประกอบในแนว z ของ \bar{E} จะหาได้จากองค์ประกอบในแนว x และองค์ประกอบในแนว y ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{1}{\cos\theta} (\sin\theta \cos\phi E_x + \sin\theta \sin\phi E_y) \\ &= -C \sin\theta \cos\phi A_x - C \sin\theta \sin\phi A_y \end{aligned} \quad (2.18)$$

โดยที่พารามิเตอร์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบละไว้ในฐานที่เข้าใจ ดังนั้น E_θ และ E_ϕ จะได้จากภาคผนวก ก. เป็น

$$E_\theta = \bar{E} \cdot \hat{\theta} = E_x \cos\theta \cos\phi + E_y \cos\theta \sin\phi - E_z \sin\theta \quad (2.19ก)$$

$$E_\phi = \bar{E} \cdot \hat{\phi} = -E_x \sin\phi + E_y \cos\phi \quad (2.19ข)$$

แทนค่า $E_x = C \cos\theta A_x$ กับ $E_y = C \cos\theta A_y$ และ E_z จาก (2.18) ลงใน (2.19) จะได้ว่า

$$E_\theta = C(\sin\phi A_y + \cos\phi A_x) \quad (2.20ก)$$

$$E_\phi = C \cos\theta (\cos\phi A_y - \sin\phi A_x) \quad (2.20ข)$$

แบบรูปการแผ่พลังงานในระนาบ yz และระนาบ xz จะหาจากสมการ (2.20) โดยแทน $\phi = \frac{\pi}{2}$ และ $\phi = 0$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\bar{E}_{yz} = C(A_y \hat{\theta} - \cos\theta A_x \hat{\phi}) \quad (2.21ก)$$

$$\bar{E}_{xz} = C(A_x \hat{\theta} - \cos\theta A_y \hat{\phi}) \quad (2.21ข)$$

ซึ่งเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิดมีโพลาริเซชันในแนวแกน y เพียงอย่างเดียว จะทำให้ A_x เป็นศูนย์ แบบรูปการแผ่พลังงานในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กจะเป็น E_{yz} และ E_{xz} ตามลำดับซึ่งจะต่างกันที่ตัวประกอบ $\cos\theta$

จากรูปที่แสดงผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กทั้ง 6 รูปจะเห็นว่าผลกระทบจากคลื่นที่จางหายไปแทบจะไม่มีเลยในช่วงของพูคลื่นหลัก (main lobe) และพูข้าง (side lobe) แรก ๆ โดยผลกระทบจะปรากฏที่พูข้างที่อยู่ห่างออกไปโดยที่แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่รวมผลกระทบของคลื่นที่จางหายไปจะเลื่อนออกไปทางด้านมุม θ มากขึ้น อย่างไรก็ตามกราฟบางเส้นที่ค่ามุม θ มากกว่าประมาณ 80° ขึ้นไปจะมีลักษณะผิดปกติและเชื่อถือไม่ได้เนื่องจากแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลที่ทำได้ในตอนแรกนั้นมีพารามิเตอร์เป็น k_x, k_y ซึ่งแปรผันกับ $\sin\theta$ จึงต้องนำมาประมาณค่าในช่วง (interpolate) เพื่อแปลงให้พารามิเตอร์อยู่ในรูปของมุม θ โดยในที่นี้เมทริกซ์มีขนาด 360×360 ซึ่งจะแทนระนาบในโดเมน (k_x, k_y) ช่วง

$-3k \leq k_x, k_y \leq 3k$ ดังนั้นเมทริกซ์ฮิลิเมนต์ที่ $180/3=60$ นับจากศูนย์กลางไปในแนวแกน x หรือแนวแกน y จะสัมพันธ์กับค่า k_x หรือ k_y เท่ากับ k โดยประมาณตามลำดับซึ่งถ้าค่า k_x หรือ k_y เท่ากับ k พอดีทั้ง 2 กรณีจะสัมพันธ์กับ $\sin \theta = 1$ หรือ θ เป็น 90° กราฟก็จะใช้ได้ไปจนถึงมุม θ เป็น 90° แต่ถ้าค่า k_x หรือ k_y ไม่เท่ากับ k พอดีเช่นเป็น $0.99k$ มันก็จะสัมพันธ์กับค่า $\sin \theta = 0.99$ หรือก็คือ θ เป็น 81.9° กราฟก็จะใช้ได้ไปจนถึงแค่มุม θ เป็น 81.9°

สรุปแล้วในกรณีที่ใช้ $\Delta s = \lambda / 2$ นี้ผลกระทบจากคลื่นที่จางหายไปต่อแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลมีไม่มากนักที่ระยะห่างของระนาบการกวาดวัดจากระนาบช่องเปิด $z = 1\lambda$ เนื่องจากโดยส่วนใหญ่แล้วการกระจายของสนามไฟฟ้าบนระนาบช่องเปิด จะมีสเปกตรัมคลื่นระนาบซึ่งสัมพันธ์กันที่มีโมดคลื่นที่จางหายไปมีขนาดต่ำกว่าจนกระทั่งเงื่อนไข (2.14) เมื่อ $k_{x_m}, k_{y_m} = k$ และ $z = 1\lambda$ ยังพอใช้ได้

การใช้ฟิลเตอร์กรองข้อมูลสนามไฟฟ้าที่กวาดวัดค่าได้เพื่อลดปริมาณข้อมูลในการประมวลผล

ถ้าต้องการรู้แบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลเฉพาะในช่วงมุม $\theta \leq \theta_0$ ก็ไม่จำเป็นต้องนำข้อมูลสนามไฟฟ้าที่กวาดวัดได้ทั้งหมดไปใช้ในการคำนวณ ซึ่งการลดปริมาณข้อมูลลงนี้จะเสมือนกับการเพิ่มค่า Δs โดยที่สามารถเพิ่มค่า Δs ได้สูงสุดเป็น $\lambda / (2 \sin \theta_0)$ เนื่องจากสเปกตรัมคลื่นระนาบโมดที่จำเป็นจริง ๆ สำหรับการคำนวณแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลในช่วงมุม $\theta \leq \theta_0$ คือสเปกตรัมคลื่นระนาบโมดที่ขนาดของ k_x, k_y น้อยกว่าหรือเท่ากับ $k_m = k \sin \theta_0$ ซึ่งดูได้จากสมการความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมคลื่นระนาบกับแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลสมการ (2.6) และ (2.7) แต่เนื่องจากในกรณีนี้ $k_m < k$ จึงจะทำการลดปริมาณข้อมูลลงโดยการชักตัวอย่างจากข้อมูลที่ได้จากการกวาดวัดเลยทันทีที่ไม่ได้ต้องใช้ฟิลเตอร์ทำการกรองสเปกตรัมคลื่นระนาบโมดที่ขนาดของ k_x, k_y มากกว่า k_m ทิ้งไปให้หมดเสียก่อน เนื่องจากในกรณีนี้แม้ว่าจะไม่ใช่โมดคลื่นที่จางหายไปแต่ก็จะเป็นโมดที่เป็นปัญหาทำให้เกิดการผิดเพี้ยนในแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลได้ถ้ามันเป็นโมดที่มีขนาดของ k_x, k_y มากกว่า k_m

อย่างไรก็ตามสำหรับย่านทดสอบชนิดสนามไกลซึ่งระยะเวลาที่ใช้ในการประมวลผลเพื่อหาแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลจากข้อมูลสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดถือว่าน้อยเมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้ในการกวาดวัดค่า จึงไม่มีความจำเป็นต้องลดปริมาณข้อมูลในการประมวลผล

การหาค่าสภาพเจาะจงทิศทาง (directivity) โดยใช้ข้อมูลสนามไฟฟ้าจากการกวาดวัดในย่านทดสอบชนิดสนามไกลซึ่งระนาบ

จากนิยามของสภาพเจาะจงทิศทาง[7] จะได้ว่า

$$D = \frac{U_m}{U_{av}} \quad (2.22)$$

โดยที่ U_m เป็นความเข้มการแผ่พลังงานสูงสุด (maximum radiation intensity) ส่วน U_{av} เป็นความเข้มการแผ่พลังงานเฉลี่ย (average radiation intensity) ซึ่งเป็นผลรวมของความเข้มการแผ่พลังงานในทิศทางใดๆ ทารด้วย 4π ดังนั้นสมการ (2.22) จึงกลายเป็น

$$D = \frac{U_m}{\frac{1}{4\pi} \iint_{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{4\pi U_m}{P} \quad (2.23)$$

โดยที่ Ω คือมุมตัน (solid angle) และ $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ และ P คือกำลังงานรวมของการแผ่พลังงานของสายอากาศ จากสมการ (2.23) จะได้ว่า

$$DP = 4\pi U_m \quad (2.24)$$

สภาพเจาะจงทิศทางยังมีความสัมพันธ์กับขนาดของช่องเปิดและความยาวคลื่นดังต่อไปนี้

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{ep} \quad (2.25)$$

โดยที่ A_{ep} คือขนาดประสิทธิภาพของช่องเปิด (effective aperture) ซึ่งคำนวณได้จากแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกล ซึ่งสำหรับสายอากาศที่มีขนาดใหญ่เทียบกับความยาวคลื่นจะได้ว่า A_{ep} มีขนาดใหญ่ที่สุดเท่ากับขนาดทางกายภาพของช่องเปิดซึ่งเกิดขึ้นเมื่อการกระจายของสนามไฟฟ้าบนช่องเปิดเป็นการกระจายแบบเอกรูป ดังนั้นในกรณีเช่นนี้จากสมการจะได้ (2.26) ว่าค่าสภาพเจาะจงทิศทางที่มากที่สุดเป็น

$$D_m = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_p \quad (2.26)$$

โดยที่โดยทั่วไป A_p คือขนาดทางกายภาพของช่องเปิด แต่สำหรับในกรณีการหาค่าสภาพเจาะจงทิศทางโดยใช้ข้อมูลจากการกวาดวัดในย่านทดสอบชนิดสนามไกลเชิงระนาบสามารถให้ค่าของ A_p เป็นขนาดของบริเวณการกวาดวัดบนระนาบการกวาดวัดได้

สมมุติว่าในกรณีแรกนั้นมีการกระจายของสนามไฟฟ้าบนบริเวณ A_p เป็นการกระจายแบบเอกรูปทำให้สภาพเจาะจงทิศทางมีค่ามากที่สุดเป็น D_m และมีกำลังงานรวมของการแผ่พลังงานที่สัมพันธ์กันเป็น P'

ส่วนในอีกกรณีหนึ่งนั้นให้สภาพเจาะจงทิศทาง D เป็นของสายอากาศทดสอบที่มีกำลังงานรวมของการแผ่พลังงานเป็น P ดังนั้นถ้าความเข้มการแผ่พลังงานสูงสุดมีค่าคงที่แล้วจะได้จากสมการ (2.24) ว่า

$$DP = D_m P' \quad (2.27)$$

เงื่อนไขที่ทำให้ความเข้มการแผ่พลังงานสูงสุด U_m ในทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากันจะเกิดขึ้นเมื่อสนามไฟฟ้าในย่านสนามไกลในทิศทางแนวเล็ง (boresight) มีค่าเท่ากัน ดังนั้นจะได้จากสมการความสัมพันธ์ของแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลกับสเปกตรัมคลื่นระนาบ สมการ (2.6) และ (2.7) โดยแทนค่ามุม θ เป็นศูนย์ว่าสเปกตรัมคลื่นระนาบโมดที่ $k_x, k_y = 0$ นั้นมีค่าเท่ากัน ซึ่งเมื่อย้อนกลับไปพิจารณาจากสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y, z) dx dy = \iint_{A_p} E_x(x, y) dx dy \quad \text{กับ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, y, z) dx dy = \iint_{A_p} E_y(x, y) dx dy$$

ในทั้งสองกรณีนั้นต่างต้องมีค่าเท่ากัน ซึ่งก็คือผลรวมของสนามไฟฟ้าบนบริเวณ A_p ต้องมีค่าเท่ากัน โดยที่ลิมิตของการอินทิเกรตสามารถเปลี่ยนไปเป็นในบริเวณ A_p ได้นั้นเนื่องจากสามารถประมาณได้ว่าสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดมีค่าเฉพาะในบริเวณที่ทำการกวาดวัด

เมื่อรู้ว่าผลรวมของสนามไฟฟ้าในบริเวณ A_p ต้องมีค่าเท่ากัน ทำให้สามารถหาค่าสนามไฟฟ้าในกรณีแรกซึ่งสภาพเจาะจงทิศทางมีค่ามากที่สุดและมีการกระจายของสนามไฟฟ้าในบริเวณ A_p เป็นแบบเอกรูปได้เป็นค่าเฉลี่ยของสนามไฟฟ้าในบริเวณ A_p ของกรณีหลังซึ่งมีการกระจายของสนามไฟฟ้าบนช่องเปิดเป็นรูปแบบใด ๆ หรือเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$E_{av,x} = \frac{1}{A_p} \iint_{A_p} E_x(x, y) dx dy \quad (2.28ก)$$

$$E_{av,y} = \frac{1}{A_p} \iint_{A_p} E_y(x, y) dx dy \quad (2.28ข)$$

ดังนั้นค่า P' ที่สัมพันธ์กับสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด D_m จึงสามารถหาได้เป็น

$$P' = \frac{|E_{av,x}|^2 + |E_{av,y}|^2}{Z} A_p \quad (2.29)$$

ส่วน P ซึ่งเป็นกำลังงานรวมของการแผ่พลังงานจากสายอากาศทดสอบจะหาได้จากสมการต่อไปนี้ โดยสมมติว่ากำลังงานของการแผ่พลังงานทั้งหมดของสายอากาศไหลผ่านบริเวณ A_p

$$P = \iint_{A_p} \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{Z} dx dy \quad (2.30)$$

โดยที่ Z เป็นค่าอินทรินซิกอิมพีแดนซ์ (intrinsic impedance) ของตัวกลาง ดังนั้นจากสมการ (2.27) จึงสามารถหาค่า D ได้เป็น

$$D = D_m \frac{P'}{P} = 4\pi \left(\frac{A_p}{\lambda}\right)^2 \frac{|E_{av,x}|^2 + |E_{av,y}|^2}{\iint_{A_p} (|E_x|^2 + |E_y|^2) dx dy} \quad (2.31)$$

สมการ (2.31) นี้เป็นสมการที่ต้องการใช้เพื่อหาสภาพเจาะจงทิศทาง จากข้อมูลสนามไฟฟ้าจากการกวาดวัดในย่านทดสอบชนิดสนามใกล้เชิงระนาบ โดยถ้าสนามไฟฟ้าในบริเวณ A_p มีโพลาไรเซชันในแนวแกน x หรือแกน y เพียงอย่างเดียวและให้เป็น $E(x, y)$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเป็น E_{av} จะสามารถจัดรูปสมการ (2.31) ใหม่ได้ดังต่อไปนี้[7]

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_p \frac{1}{\frac{1}{A_p} \iint_{A_p} \left[\frac{E(x, y)}{E_{av}} \right] \left[\frac{E(x, y)}{E_{av}} \right]^* dx dy} \quad (2.32)$$

สมการ (2.32) นี้เป็นสมการความสัมพันธ์ของเบรชเวลล์ (Bracewell's relation)

เมื่อรู้ค่าสภาพเจาะจงทิศทางแล้วจะสามารถหาอัตราขยาย (gain) ของสายอากาศได้ดังนี้

$$G = k_0 D \quad (2.33)$$

โดยที่ k_0 เป็นตัวประกอบประสิทธิภาพ (efficiency factor) ของสายอากาศซึ่งเป็นค่าที่สัมพันธ์กับการสูญเสียโอห์มมิก (ohmic loss) ของสายอากาศ