รายการอ้างอิง

[1] Yaghjian, A. D. An overview of near-field antenna measurements. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-34 (January 1986) : 30-45.

[2] Baird, R. C., Newell, A. C., and Stubenrauch, C. F. A brief history of near-field measurements of antennas at the National Bureau of Standards. IEEE Trans. Antennas and Propagation 36 (June 1988) : 727-733.

[3] Joy, E. B. A brief history of the development of the near-field measurement techique at the Georgia Institute of Technology. IEEE Trans. Antennas and Propagation 36 (June 1988) : 740-745.

[4] Wang, J. J. H. An example of the theory and practices of planar near-field measurement. IEEE Trans. Antennas and Propagation 36 (June 1988) : 746-753.

[5] Hajian, M., Ligthart, L. P., and Tian, M. The theory and practice of planar near-field measurements at Delft University of Technology. IEEE Trans. Antennas and Propagation (1993) : 191-196.

[6] Joy, E. B. Spatial sampling and filtering in near-field measurements. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-20 (May 1972) : 253-261.

[7] Kraus, J. D. Antennas. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1988.

[8] Kerns, D. M., Plane-wave scattering-matrix theory of antennas and antenna-antenna interactions: formulation and applications. Journal of Research of the National. Bureau of Standards-B. Mathematical Sciences. 80B (January-March 1976) : 5-51

[9] Paris, D. T., Leach, W. M., and Joy, E. B. Basic theory of probe-compensated near-field measurements. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-26 (May 1978) : 373-379.

[10] Joy, E. B., Leach, W. M., Rodrigue G. P., and Paris, D. T. Applications of probe-compensated near-field measurements. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-26 (May 1978) : 379-389.

[11] Repjar, A. G., Newell, A. C., and Francis, M. H. Accurate determination of planar near-field correction parameters for linearly polarized probes. IEEE Trans. Antennas and Propagation 36 (June 1988) : 855-868.

[12] Lee, K. F. Principles of antenna theory. John Wiley & Sons Ltd., 1984.

[13] Yaghjian, A. D. Approximate formulars for the far field and gain of open-ended rectangular waveguide. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-32 (April 1984) :378-384.

[14] Bucci, O. M., Schirinzi, G., and Leone, G. A compensation technique for positioning errors in planar near-field measurements. IEEE Trans. Antennas and Propagation 36 (August 1988) : 1167-1172.

[15] Narasimhan, M. S., and Karthikeyan M. Evaluation of fourier transform integrals using FFT with improved accuracy and its applications. IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-32 (April 1984) : 404-408.

[16] สมชาย จิตะพันธ์กุล. ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม. เอกสารประกอบการสอนวิชาฟูเรียร์ ทรานส์ฟอร์ม

[17] Balanis, C. A. Advanced engineering electromagnetics. John Wiley & Sons, Inc., 1989.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

การวิเคราะห์เวกเตอร์

<u>เอกลักษณ์ผลคูณเวกเตอร์</u>

ถ้า $\overline{A},\overline{B}$ และ $\overline{C}$ เป็นเวกเตอร์

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C}) = \overline{C}\cdot(\overline{A}\cdot\overline{B}) = \overline{B}\cdot(\overline{C}\cdot\overline{A}) \quad \text{(ก.1)}$$

$$\overline{A}\cdot(\overline{B}\times\overline{C}) = \overline{C}\cdot(\overline{A}\times\overline{B}) = \overline{B}\cdot(\overline{C}\times\overline{A}) \quad \text{(ก.2)}$$

$$\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = (\overline{A}\cdot\overline{C})\overline{B}-(\overline{A}\cdot\overline{B})\overline{C} \quad \text{(ก.3)}$$

<u>เอกลักษณ์เวกเตอร์รูปอนุพันธ์</u>

กำหนดให้ Φ, Ψ เป็นปริมาณสเกลาร์ และ $\overline{A},\overline{B}$ เป็นเวกเตอร์

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{A}) = 0 \quad \text{(ก.4)}$$

$$\nabla\times\nabla\Phi = 0 \quad \text{(ก.5)}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\overline{A}) = \nabla(\nabla\cdot\overline{A})-\nabla^2\overline{A} \quad \text{(ก.6)}$$

$$\nabla\cdot(\Psi\overline{A}) = \nabla\Psi\cdot\overline{A}+\Psi\nabla\cdot\overline{A} \quad \text{(ก.7)}$$

$$\nabla\times(\Psi\overline{A}) = \nabla\Psi\times\overline{A}+\Psi\nabla\times\overline{A} \quad \text{(ก.8)}$$

<u>ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divegence theorem)</u>

$$\int_V (\nabla \cdot \bar{A})\, dV = \oint_S (\bar{A} \cdot \hat{n})\, dS \qquad \text{(ก.9)}$$

โดยที่พื้นผิว S คือพื้นผิวปิดที่ล้อมรอบบริเวณ และเวกเตอร์ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S และมีทิศพุ่งออกจากพื้นผิว S

<u>การแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดคาร์ทีเชียนไปเป็นระบบพิกัดทรงกลมและกลับกัน</u>

1. การแปลงตัวแปร

$$x = r \sin\theta \cos\phi \qquad \text{(ก.10ก)}$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi \qquad \text{(ก.10ข)}$$

$$z = r \cos\theta \qquad \text{(ก.10ค)}$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \qquad \text{(ก.11ก)}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \qquad \text{(ก.11ข)}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right] \qquad \text{(ก.11ค)}$$

2. การแปลงเวกเตอร์หน่วย

$$\hat{x} = \hat{r} \sin\theta \cos\phi + \hat{\theta} \cos\theta \cos\phi - \hat{\phi} \sin\phi \qquad \text{(ก.12ก)}$$

$$\hat{y} = \hat{r} \sin\theta \sin\phi + \hat{\theta} \cos\theta \sin\phi + \hat{\phi} \cos\phi \qquad \text{(ก.12ข)}$$

$$\hat{z} = \hat{r} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta \qquad \text{(ก.12ค)}$$

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z} \quad \text{(ก.13ก)}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} \quad \text{(ก.13ข)}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y} \quad \text{(ก.13ค)}$$

3. การแปลงเวกเตอร์ใดๆ $\overline{A}$

$$A_r = \overline{A}\cdot\hat{r} = A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \quad \text{(ก.14ก)}$$

$$A_\theta = \overline{A}\cdot\hat{\theta} = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \quad \text{(ก.14ข)}$$

$$A_\phi = \overline{A}\cdot\hat{\phi} = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi \quad \text{(ก.14ค)}$$

$$A_x = \overline{A}\cdot\hat{x} = A_r\sin\theta\cos\phi + A_\theta\cos\theta\cos\phi - A_\phi\sin\phi \quad \text{(ก.15ก)}$$

$$A_y = \overline{A}\cdot\hat{y} = A_r\sin\theta\sin\phi + A_\theta\cos\theta\sin\phi + A_\phi\cos\phi \quad \text{(ก.15ข)}$$

$$A_z = \overline{A}\cdot\hat{z} = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta \quad \text{(ก.15ค)}$$

ภาคผนวก ข.

ทฤษฎีการชักตัวอย่าง

<u>ทฤษฎีการชักตัวอย่างของไนควิสต์</u>

ให้ฟังก์ชัน $f(x)$ มีผลการแปลงฟูริเยร์ตามสมการ (ข.1ก) เป็น $F(s)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัดอยู่ในช่วง $|s| \le s_m$ โดยที่ s_m เป็นจำนวนบวกใดๆ และการแปลงกลับฟูริเยร์ที่สัมพันธ์กับสมการ (ข.1ก) เป็นดังสมการ (ข.1ข)

$$F(s) = \Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi xs}ds \qquad (ข.1ก)$$

$$f(x) = \Im^{-1}\{F(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j2\pi xs}dx \qquad (ข.1ข)$$

สมมติว่าฟังก์ชัน $f(x)$ ถูกชักตัวอย่างด้วยระยะห่างการชักตัวอย่างเป็น Δx จะได้ชุดของค่าชักตัวอย่างเป็น

$$\begin{aligned} f_s(x) &= f(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\Delta x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x)\delta(x-n\Delta x) \end{aligned} \qquad (ข.2)$$

โดยที่ $\delta(x)$ เป็นเดลตาฟังก์ชัน ผลการแปลงฟูริเยร์ของสมการ (ข.2) จะเป็น

$$\begin{aligned} F_s(s) &= F(s) * \frac{1}{\Delta x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s-\frac{n}{\Delta x}) \\ &= \frac{1}{\Delta x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s-\frac{n}{\Delta x}) \end{aligned} \qquad (ข.3)$$

โดยที่ $*$ หมายถึงการคอนโวลูชัน และ $\frac{1}{\Delta x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s-\frac{n}{\Delta x})$ เป็นผลการแปลงฟูริเยร์ของ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\Delta x)$ [16]ดังนั้นจะเห็นได้จากสมการ (ข.3) ว่าถ้า $\frac{1}{\Delta x}\geq 2s_m$ แล้วจะทำให้ฟังก์ชัน $F_s(s)$ เป็นฟังก์ชันรายคาบที่แต่ละคาบมีรูปร่างของ $F(s)$ ปรากฏอยู่โดยไม่ผิดเพี้ยน ทำให้เราสามารถหา $F(s)$ กลับคืนมาจาก $F_s(s)$ ได้แต่ถ้า $\frac{1}{\Delta x}<2s_m$ จะทำให้ $F(s-\frac{n}{\Delta x})$ เกยซ้อนกับ $F(s-\frac{n-1}{\Delta x})$ และ $F(s-\frac{n+1}{\Delta x})$ ที่ทุกๆค่า n ทำให้ฟังก์ชัน $F_s(s)$ เป็นฟังก์ชันรายคาบที่ไม่ปรากฏรูปร่างของ $F(s)$ ที่สมบูรณ์อยู่เลย โดยการผิดเพี้ยนจะยิ่งมีมากขึ้นเมื่อ $\frac{1}{\Delta x}$ ยิ่งน้อยกว่า $2s_m$ เนื่องจากการเกยซ้อนกันจะยิ่งลึกเข้าไปมากขึ้น ดังนั้นค่าระยะการชักตัวอย่าง Δx จะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $1/2s_m$ โดยค่า Δx ที่มากที่สุดที่ยังสามารถหา $F(s)$ กลับคืนมาจาก $F_s(s)$ ก็คือ $1/2s_m$

ซึ่งถ้า $\Delta x\leq 1/2s_m$ แล้วจะได้ว่า $F(s)$ สามารถหาจาก $F_s(s)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F(s) &= \Delta x\Pi(s\Delta x)F_s(s) \\ &= \Pi(s\Delta x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(s-\frac{n}{\Delta x}) \end{aligned} \tag{ข.4}$$

โดยที่ $\Pi(s\Delta x)$ เป็นฟังก์ชันสี่เหลี่ยมมีความกว้าง $1/\Delta x$ ศูนย์กลางที่ $s=0$ และสูงหนึ่งหน่วย ผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันของ (ข.4) จะเป็น

$$\begin{aligned} f(x) &= \Delta x\mathfrak{I}^{-1}\{\Pi(s\Delta x)\}*\mathfrak{I}^{-1}\{F_s(s)\} \\ &= \Delta x\left[\frac{1}{\Delta x}\frac{\sin(\pi x/\Delta x)}{(\pi x/\Delta x)}\right]*f_s(s) \\ &= \frac{\sin(\pi x/\Delta x)}{(\pi x/\Delta x)}*\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta x)\delta(x-n\Delta x) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n\Delta x)\frac{\sin[\pi(x-n\Delta x)/\Delta x]}{[\pi(x-n\Delta x)/\Delta x]} \end{aligned} \tag{ข.5}$$

ความหมายของสมการ (ข.5) คือสามารถหาค่าของ $f(x)$ ที่ทุกๆค่าของ x กลับคืนมาจากชุดค่าชักตัวอย่างของมัน $f(n\Delta x)$ ได้ เมื่อ $\Delta x\leq 1/2s_m$

ที่กล่าวมาเป็นทฤษฎีการชักตัวอย่างของไนควิสต์แบบ 1 มิติ ถ้าเป็นแบบ 2 มิติการพิจารณาก็คล้ายกัน โดยสมมติว่าฟังก์ชัน $f(x,y)$ ถูกชักตัวอย่างด้วยระยะห่างการชักตัวอย่างในแนวแกน x เป็น Δx และระยะห่างการชักตัวอย่างในแนวแกน y เป็น Δy ดังนั้นจะได้ชุดของค่าชักตัวอย่างเป็น

$$
\begin{aligned}
f_s(x,y) &= f(x,y)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-m\Delta x)\delta(y-m\Delta y) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta x,n\Delta y)\delta(x-m\Delta x)\delta(y-m\Delta y)
\end{aligned}
\qquad (ข.6)
$$

เมื่อ $f(x,y)$ มีผลการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติตามสมการ (ข.7ก) เป็น $F(u,v)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัดอยู่ในช่วง $|u| \le u_m$ และ $|v| \le v_m$ โดยที่ u_m และ v_m เป็นจำนวนบวกใดๆ และการแปลงกลับฟูริเยร์ 2 มิติที่สัมพันธ์กับสมการ (ข.7ก) เป็นดังสมการ (ข.7ข)

$$F(u,v) = \Im^2\{f(x,y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \qquad (ข.7ก)$$

$$f(x,y) = \Im^{-2}\{F(u,v)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv \qquad (ข.7ข)$$

ซึ่งโดยการพิจารณาเหมือนกับกรณี 1 มิติจะได้ว่าถ้า $\Delta x \le 1/2u_m$ และ $\Delta y \le 1/2v_m$ แล้วจะสามารถหาค่า $f(x,y)$ ที่ทุกๆจุดบนระนาบ xy กลับคืนมาได้จากชุดค่าชักตัวอย่างของมันตามสมการดังต่อไปนี้

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m\Delta x,n\Delta y)\frac{\sin[\pi(x-m\Delta x)/\Delta x]}{\pi(x-m\Delta x)/\Delta x}\frac{\sin[\pi(y-n\Delta x)/\Delta y]}{\pi(y-n\Delta x)/\Delta y} \qquad (ข.8)$$

สุดท้ายเปรียบเทียบสมการความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดกับสเปกตรัมคลื่นระนาบเช่นสมการ (2.3ข) กับสมการ (ข.7ก) จะได้ว่าถ้า $f(x,y)$ เป็น $E_y(x,y,z_t)$ แล้ว $F(u,v)$ จะเป็น $\frac{1}{2\pi}A_y(k_x,k_y)e^{-jk_z z_t}$ โดยที่ $u=-k_x/2\pi$ และ $v=-k_y/2\pi$ ดังนั้นจะได้ว่าช่วง $|u| \le u_m$ จะกลายเป็น $|k_x| \le 2\pi u_m = k_{xm}$ และช่วง $|v| \le v_m$ จะกลายเป็น $|k_y| \le 2\pi v_m = k_{ym}$ หรือก็คือ $u_m = k_{xm}/2\pi$ และ $v_m = k_{ym}/2\pi$ ซึ่งเป็นผลให้เงื่อนไขของระยะชักตัวอย่าง $\Delta x \le 1/2u_m$ และ $\Delta y \le 1/2v_m$ เปลี่ยนไปกลายเป็น

$$\Delta x \leq \pi / k_{xm} \quad , \quad \Delta y \leq \pi / k_{ym} \qquad (ข.9)$$

<u>สเปกตรัมคลื่นระนาบในรูปของอนุกรมฟูริเยร์ของข้อมูลชักตัวอย่างสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัด</u>

จากสมการ (2.1) โดยแทน $z = z_t$ จะได้ว่า

$$\overline{E}(x,y,z_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{A}(k_x,k_y) e^{-jk_z z_t} e^{-j\overline{K}\cdot\overline{P}} dk_x dk_y$$

$$= \int_{-k_{ym}}^{k_{ym}}\int_{-k_{xm}}^{k_{xm}} \bar{f}(\overline{K}) e^{-j\overline{K}\cdot\overline{P}} dk_x dk_y \qquad (ข.10)$$

โดยที่ $\bar{f}(\overline{K}) = \frac{1}{2\pi}\overline{A}(k_x,k_y)e^{-jk_z z_t}$ ส่วนเวกเตอร์ $\overline{K} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y}$ และ $\overline{P} = x\hat{x} + y\hat{y}$

ซึ่งลิมิตของการอินทิเกรตเปลี่ยนจากลบอนันต์ถึงอนันต์ไปเป็น $-k_{xm}$ ถึง k_{xm} และ $-k_{ym}$ ถึง k_{ym} ได้เนื่องจากเงื่อนไข (2.14) บอกว่า $\bar{f}(\overline{K})$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าจำกัดอยู่ในแถบ (band limited function) หรือก็คือ

$$\bar{f}(\overline{K}) \approx 0 \text{ เมื่อ } |k_x| \geq k_{xm} > k \text{ และ } |k_y| \geq k_{ym} > k \qquad (ข.11)$$

เนื่องจากค่าของ $\bar{f}(\overline{K})$ มีนัยสำคัญเฉพาะในช่วง $|k_x| < k_{xm}$ และ $|k_y| < k_{ym}$ ดังนั้นสามารถสมมติได้ว่า $\bar{f}(\overline{K})$ เป็นฟังก์ชันรายคาบ 2 มิติที่มีคาบ T_x ในแนวแกน k_x เป็น $2k_{xm}/2\pi = k_{xm}/\pi$ และคาบ T_y ในแนวแกน k_y เป็น k_{ym}/π ซึ่งทำให้ $\bar{f}(\overline{K})$ สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมฟูริเยร์ 2 มิติดังต่อไปนี้

$$\bar{f}(\overline{K}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{C}_{mn} e^{j\overline{K}\cdot\overline{P}_{mn}} \qquad (ข.12ก)$$

โดยที่

$$\overline{P}_{mn} = \frac{m}{T_x}\hat{x} + \frac{n}{T_y}\hat{y} = \frac{m\pi}{k_{xm}}\hat{x} + \frac{n\pi}{k_{ym}}\hat{y} = m\Delta x\hat{x} + n\Delta y\hat{y} \qquad (ข.12ข)$$

สัมประสิทธิ์ $\overline{C}_{mn}$ ซึ่งไม่ขึ้นกับ $\overline{K}$ นั้นสามารถหาได้โดยใช้คุณสมบัติตั้งฉาก (orthogonality) ของ $e^{-j\overline{K}\cdot\overline{P}_{mn}}$ ดังต่อไปนี้

$$\int_{-k_{ym}}^{k_{ym}}\int_{-k_{xm}}^{k_{xm}} e^{-j\overline{K}\cdot\overline{P}_{mn}} e^{j\overline{K}\cdot\overline{P}_{m'n'}} dk_x dk_y = \begin{cases} 4k_{xm}k_{ym} & ;\ m'=m, n'=n \\ 0 & ;\ \text{กรณีอื่น ๆ} \end{cases} \qquad (ข.13)$$

ดังนั้นจากสมการ (ข.12ก) และ (ข.13) จะได้ว่า

$$\overline{C}_{mn} = \frac{1}{4k_{xm}k_{ym}} \int_{-k_{ym}}^{k_{ym}}\int_{-k_{xm}}^{k_{xm}} \bar{f}(\overline{K}) e^{-j\overline{K}\cdot\overline{P}_{mn}} dk_x dk_y \qquad (ข.14)$$

สมการ (ข.14) เทียบกับสมการ (ข.10) จะได้ว่า

$$\overline{C}_{mn} = \frac{1}{4k_{xm}k_{ym}} \overline{E}(m\Delta x, n\Delta y, z_t) \qquad (ข.15)$$

แทนค่า $\overline{C}_{mn}$ จากสมการ (ข.15) และ $\bar{f}(\overline{K}) = \frac{1}{2\pi}\overline{A}(k_x,k_y)e^{-jk_z z_t}$ ลงในสมการ (ข.12ก) จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ของสเปกตรัมคลื่นระนาบกับข้อมูลชักตัวอย่างของสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดในรูปของอนุกรมฟูริเยร์ดังต่อไปนี้

$$\overline{A}(k_x,k_y) = \frac{\pi e^{jk_z z_t}}{2k_{xm}k_{ym}} \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{E}(m\Delta x, n\Delta y, z_t) e^{j\overline{K}\cdot\overline{P}_{mn}} \qquad (ข.16)$$

สมการ (ข.16) ต้องอาศัยข้อมูลชักตัวอย่างของสนามไฟฟ้าบนระนาบการกวาดวัดตลอดทั้งระนาบอนันต์ แต่ในทางปฏิบัติสามารถใช้ข้อมูลชักตัวอย่างบนระนาบที่มีขนาดจำกัดได้ เมื่อเงื่อนไขตามสมการ (2.13) ในบทที่ 2 เป็นจริง

ภาคผนวก ค.

ทฤษฎีทางคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกี่ยวข้อง

<u>ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับของลอเรนซ์</u>

สมมติว่าในตัวกลางซึ่งมีคุณสมบัติเชิงเส้นและไอโซทรอปิก ปรากฏแหล่งกระแสอยู่ 2 แหล่งคือ $\bar{J}_1$ และ $\bar{J}_2$ ซึ่งอาจจะเป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าบนสายอากาศ 1 และสายอากาศ 2 ตามลำดับ ให้แหล่งกระแสทั้งสองแพร่กระจายคลื่นที่ความถี่เดียวกันโดยจะแพร่กระจายคลื่นพร้อมกันหรือต่างเวลากันก็ได้ ให้คลื่นที่แพร่กระจายออกจากแหล่งกระแสทั้งสองเป็น $\overline{E}_1,\overline{H}_1$ และ $\overline{E}_2,\overline{H}_2$ ตามลำดับ ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับกล่าวว่า[17]

$$-\nabla\cdot(\overline{E}_1\times\overline{H}_2-\overline{E}_2\times\overline{H}_1) = \overline{E}_1\cdot\bar{J}_2-\overline{E}_2\cdot\bar{J}_1 \qquad (ค.1)$$

สมการ (ค.1) เป็นทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับในรูปอนุพันธ์ ทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับในรูปอินทิกรัลจะหาได้โดยใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์กับสมการ (ค.1) ดังนี้

$$-\oint_S(\overline{E}_1\times\overline{H}_2-\overline{E}_2\times\overline{H}_1)\cdot\hat{n}ds = \int_V(\overline{E}_1\cdot\bar{J}_2-\overline{E}_2\cdot\bar{J}_1)dv \qquad (ค.2)$$

และถ้าพื้นผิวปิด S เป็นทรงกลมรัศมีอนันต์จะได้ว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนพื้นผิว S เป็นศูนย์ ซึ่งทำให้

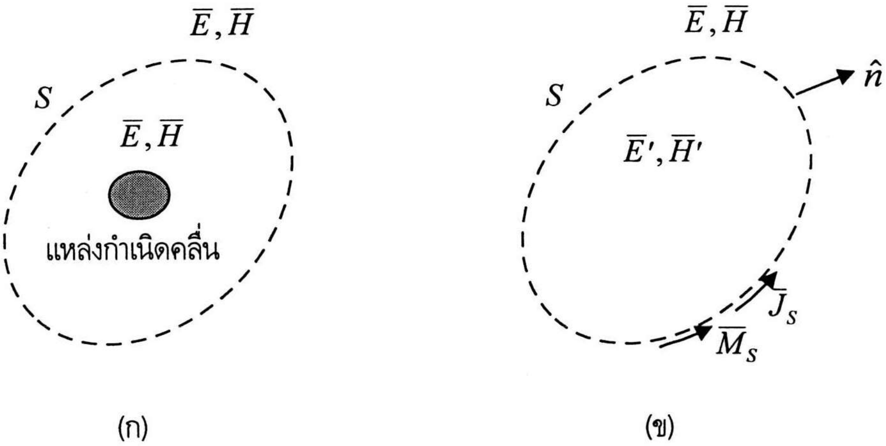
$$\oint_S(\overline{E}_1\times\overline{H}_2-\overline{E}_2\times\overline{H}_1)\cdot\hat{n}ds = 0$$

ดังนั้นจากสมการ (ค.2) จะได้ว่า

$$\int_V\overline{E}_1\cdot\bar{J}_2dv = \int_V\overline{E}_2\cdot\bar{J}_1dv \qquad (ค.3)$$

สมการ (ค.3) เป็นทฤษฎีบทภาวะย้อนกลับในรูปแบบที่ใช้กันมากที่สุด

ทฤษฎีสมมูลเชิงพื้นผิว (surface equivalence theorem)



รูป ค.1 การแทนแหล่งกำเนิดคลื่นภายในพื้นผิว S ตามรูป (ก)
ด้วยแหล่งกระแสสมมูลบนพื้นผิว S ดังรูป (ข)

พิจารณารูป ค.1ก แหล่งกำเนิดคลื่นซึ่งอาจจะเป็นสายอากาศกำเนิดสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็น $\overline{E},\overline{H}$ ทั้งบริเวณภายในและภายนอกพื้นผิว S เมื่อเอาแหล่งกำเนิดคลื่นออกไปและต้องการให้สนามบริเวณภายนอกพื้นผิว S มีค่าเป็น $\overline{E},\overline{H}$ เหมือนเดิม ส่วนสนามภายในบริเวณพื้นผิว S มีค่าใดๆแล้วแต่ความเหมาะสมเป็น $\overline{E}',\overline{H}'$ ดังในรูป ค.1ข ทำให้ปรากฏมีความไม่ต่อเนื่องของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กขึ้นที่พื้นผิว S ดังนั้นจึงต้องมีแหล่งกระแสสมมูล $\overline{J}_S,\overline{M}_S$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตต่อไปนี้ โดยที่ดัชนีล่าง S หมายถึงเป็นค่าที่พื้นผิว S

$$\overline{J}_S = \hat{n}\times(\overline{H}_S-\overline{H}'_S) \qquad \text{(ค.4ก)}$$

$$\overline{M}_S = -\hat{n}\times(\overline{E}_S-\overline{E}'_S) \qquad \text{(ค.4ข)}$$

จะเห็นได้ว่าแหล่งกระแสสมมูลนี้นอกจากจะมีค่าขึ้นกับ $\overline{E},\overline{H}$ ที่พื้นผิว S ยังขึ้นกับ $\overline{E}',\overline{H}'$ ตามรูป ค.1ข บนพื้นผิว S อีกด้วย ซึ่งโดยทั่วไป $\overline{E}',\overline{H}'$ ภายในพื้นผิว S จะกำหนดให้มีค่าเป็นแบบหนึ่งแบบใดใน 3 แบบดังต่อไปนี้

1. $\overline{E}'=0,\overline{H}'=0$ แบบนี้จะทำให้ (ค.4) กลายเป็น

$$\bar{J}_S = \hat{n}\times\overline{H}_S \qquad (ค.5ก)$$

$$\overline{M}_S = -\hat{n}\times\overline{E}_S \qquad (ค.5ข)$$

ซึ่งแหล่งกระแสสมมูลในกรณีนี้จะเหมือนกับหลักการของฮอยเกนส์ที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 3

2. $\overline{E}'=0, \overline{H}'_S=\overline{H}_S$ ซึ่งทำได้โดยให้บริเวณภายในพื้นผิว S ทั้งหมดเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (perfect electric conductor) แบบนี้จะทำให้ (ค.4) กลายเป็น

$$\bar{J}_S = 0 \qquad (ค.4ก)$$

$$\overline{M}_S = -\hat{n}\times\overline{E}_S \qquad (ค.4ข)$$

$\bar{J}_S$ เป็นศูนย์เนื่องจากตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบจะลัดวงจรกระแสไฟฟ้าทั้งหมด ส่วน $\overline{E}'_S$ เป็นศูนย์เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายในและบนตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบต้องเป็นศูนย์ตลอด

3. $\overline{E}'_S=\overline{E}_S, \overline{H}'=0$ ซึ่งทำได้โดยให้บริเวณภายในพื้นผิว S ทั้งหมดเป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ (perfect magnetic conductor) แบบนี้จะทำให้ (ค.4) กลายเป็น

$$\bar{J}_S = \hat{n}\times\overline{H}_S \qquad (ค.6ก)$$

$$\overline{M}_S = 0 \qquad (ค.6ข)$$

$\overline{M}_S$ เป็นศูนย์เนื่องจากตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบจะลัดวงจรกระแสแม่เหล็กทั้งหมด ส่วน $\overline{H}'_S$ เป็นศูนย์เนื่องจากสนามแม่เหล็กภายในและบนตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบต้องเป็นศูนย์ตลอด

โดยในแบบที่ 2 และ 3 นั้นตัวนำสมบูรณ์แบบสามารถเอาออกได้โดยใช้ทฤษฎีภาพเสมือน (image theory) กับแหล่งกระแสสมมูล

ภาคผนวก ง.

การหาความสัมพันธ์ระหว่างแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลกับสเปกตรัมคลื่นระนาบ

จากหลักการของสเปกตรัมคลื่นระนาบในบทที่ 2 สนามไฟฟ้าเนื่องจากสายอากาศทดสอบที่ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณ $z>0$ ไม่ว่าจะอยู่ในบริเวณสนามใกล้หรือสนามไกลจะมีความสัมพันธ์กับสเปกตรัมคลื่นระนาบดังต่อไปนี้

$$\bar{E}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}(k_x,k_y)e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}\,dk_x dk_y \qquad (2.1)$$

โดยที่ตัวแปรต่าง ๆ ในสมการและความหมายของสมการได้อธิบายไว้แล้วในบทที่ 2

ในบริเวณย่านสนามไกลกล่าวคือ เมื่อระยะทาง r มีค่ามาก ๆ สามารถใช้เทคนิคการคำนวณค่าโดยประมาณที่เรียกว่า วิธีการเฟสคงตัว (method of stationary phase) มาใช้หาค่าโดยประมาณของสมการ (2.1) ได้ดังนี้คือ เมื่อพิจารณานิพจน์ของสมการ (2.1) พบว่า เมื่อค่า r มีค่ามาก ๆ ฟังก์ชัน $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ มีการแกว่งอย่างมาก ดังนั้นการอินทิเกรตมีแน้วโน้มหักล้างกันจนเกือบเป็นศูนย์ ยกเว้นในบริเวณเล็ก ๆ บนระนาบ k_x - k_y รอบจุดที่ $\bar{k}\cdot\bar{r}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ k_x และ k_y มีการเปลี่ยนแปลงช้าที่สุด โดยที่จุดนั้นเรียกว่า จุดเฟสคงตัว (stationary phase point) ซึ่งเป็นจุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\bar{k}\cdot\bar{r}$ เทียบกับ k_x และ k_y เป็นศูนย์ดังสมการ (ง.1)

$$\frac{\partial\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_x} = 0, \quad \frac{\partial\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_y} = 0 \qquad (ง.1)$$

และเนื่องจาก $\bar{k}\cdot\bar{r}$ เท่ากับ $k_x x+k_y y+k_z z$ โดยที่ $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$ และสำหรับในระบบพิกัดทรงกลม $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$ และ $z=r\cos\theta$ ดังนั้น

$$\bar{k}\cdot\bar{r} = r\left(k_x\sin\theta\cos\phi + k_y\sin\theta\sin\phi + \sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\cos\theta\right) \qquad (ง.2)$$

จุดเฟสคงตัวสามารถหาได้จากการแทน $\bar{k}\cdot\bar{r}$ ในสมการ (ง.2) ลงไปในสมการ (ง.1) ผลลัพธ์จะได้ว่าจุดเฟสคงตัว (k_{x0},k_{y0}) เป็นดังนี้

$$k_{x0} = k\sin\theta\cos\phi\ , \qquad k_{y0} = k\sin\theta\sin\phi \qquad (ง.3)$$

เพราะ $k_{x0}^2 + k_{y0}^2 + k_{z0}^2 = k^2$ ดังนั้น

$$k_{z0} = k\cos\theta \qquad (ง.3)$$

ในบริเวณเล็ก ๆ รอบ ๆ จุดเฟสคงตัว เฟสของฟังก์ชัน $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ซึ่งทำให้ผลการอินทิเกรตฝั่งขวาของสมการ (2.1) ในบริเวณดังกล่าวนี้ไม่มีแนวโน้มหักล้างกัน และโดยทั่วไปการเปลี่ยนแปลงของ $\bar{A}(k_x,k_y)$ ในบริเวณเล็ก ๆ จะมีน้อยมากจนสามารถประมาณได้ว่า $\bar{A}(k_x,k_y)$ มีค่าคงที่เท่ากับที่จุดเฟสคงตัวในบริเวณเล็ก ๆ รอบจุดเฟสคงตัว ดังนั้นอินทิกรัลในสมการ (2.1) จึงเหลือเพียงส่วนของฟังก์ชัน $e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$ เพื่อที่จะหาค่าโดยประมาณของอินทิกรัลในสมการ (2.1) จะต้องกระจาย $\bar{k}\cdot\bar{r}$ รอบ ๆ จุดเฟสคงตัว (k_{x0},k_{y0}) โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ไปจนถึงอันดับที่ 2 ดังต่อไปนี้

$$\bar{k}\cdot\bar{r} \;\cong\; kr-(Au^2+Bv^2+Cuv) \qquad (ง.4)$$

โดยที่ $u=k_x-k_{x0}$, $v=k_y-k_{y0}$ ส่วน A, B และ C เป็นค่าคงที่ตามสมการต่อไปนี้

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_x^2}\bigg|_{k_x=k_{x0},k_y=k_{y0}} = \frac{r}{2k}\left(\frac{k_{x0}^2+k_{z0}^2}{k_{z0}^2}\right) \qquad (ง.5ก)$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_y^2}\bigg|_{k_x=k_{x0},k_y=k_{y0}} = \frac{r}{2k}\left(\frac{k_{y0}^2+k_{z0}^2}{k_{z0}^2}\right) \qquad (ง.5ข)$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{k}\cdot\bar{r}}{\partial k_x\partial k_y}\bigg|_{k_x=k_{x0},k_y=k_{y0}} = \frac{r}{k}\left(\frac{k_{x0}k_{y0}}{k_{z0}^2}\right) \qquad (ง.5ค)$$

ดังนั้นผลเฉลยโดยประมาณของสนามไฟฟ้าในย่านสนามไกลจากสมการ (2.1) จะเป็น

$$\bar{E}(r,\theta,\phi) \;\cong\; \frac{e^{-jkr}}{2\pi}\bar{A}(k_{x0},k_{y0})\iint_{\Delta S} e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}dudv \qquad (ง.6)$$

โดยที่ ΔS เป็นบริเวณเล็ก ๆ รอบ ๆ จุดเฟสคงตัว ซึ่งก็คือจุดที่ $u,\ v=0$ ในระนาบ u-v และเนื่องจากค่าคงที่ $A,\ B$ และ C มีค่ามากเมื่อ r มีค่ามากดังนั้นฟังก์ชัน $e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}$ เกิดการแกว่งอย่างรวดเร็วเมื่อ u และ v ไม่เป็นศูนย์ ทำให้การอินทิเกรตบนระนาบ u-v ภายนอกบริเวณ ΔS จะถูกหักล้างจากการรวมกันทางเฟส ดังนั้นอินทิกรัลในสมการ (ง.6) สามารถขยายขอบเขตครอบคลุมระนาบ u-v ทั้งหมดได้ดังสมการ (ง.7)

$$\iint_{\Delta S} e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}dudv \cong \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(Au^2+Cuv+Bv^2)}dudv \tag{ง.7}$$

อินทิกรัลทางฝั่งขวาของสมการ (ง.7) นี้สามารถคำนวณค่าได้เป็น

$$\frac{2\pi e^{j\pi/2}}{\sqrt{4AB-C^2}} = \frac{j2\pi}{\sqrt{4AB-C^2}}$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า $A,\ B$ และ C จากสมการ (ง.5) จะทำให้อินทิกรัลนี้มีค่าเป็น

$$\frac{j2\pi\ k}{r}\cos\theta$$

แทนค่าอินทิกรัลทางฝั่งขวาของสมการ (ง.7) นี้ลงในสมการ (ง.6) จะได้การกระจายของสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ ในบริเวณสนามไกล หรือแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลเป็นดังสมการต่อไปนี้

$$\overline{E}(r,\theta,\phi) \cong jk\frac{\cos\theta}{r}e^{-jkr}\overline{A}(k\sin\theta\cos\phi,k\sin\theta\sin\phi) \tag{ง.8}$$

โดยที่ θ และ ϕ เป็นมุมในระบบพิกัดทรงกลม โดยจากสมการ (ง.8) จะเห็นได้ว่าแบบรูปการแผ่พลังงานย่านสนามไกลมีความสัมพันธ์กับ $\overline{A}(k\sin\theta\cos\phi,k\sin\theta\sin\phi)$ ซึ่งเป็นค่าสเปกตรัมคลื่นระนาบที่ k_x เท่ากับ $k\sin\theta\cos\phi$ และ k_y เท่ากับ $k\sin\theta\sin\phi$

ประวัติผู้เขียน

นายอนล ศาสตรี เกิดวันที่ 29 ตุลาคม พ.ศ. 2517 ที่เขตพญาไท จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2537 โดยระหว่างการศึกษาได้ฝึกงานที่กรมไปรษณีย์โทรเลข และในปีการศึกษา 2538 ได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิตสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โดยได้รับทุนการวิจัยจากสำนักงานพัฒนาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งชาติ (สวทช.) ในปีการศึกษา 2539 เป็นระยะเวลา 1 ปี

พ.ศ. 2539 ได้นำเสนอผลงานวิจัยในเรื่องที่เป็นส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ในวารสารวิศวกรรมสารฉบับเดือนธันวาคม