เอกสารวิชาการ

เอกสารฉบับที่ ๒๕๐๑

"การประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อมีขนาดตัวอย่างน้อย : ลักษณะปัญหา วิธีแก้ และคอมพิวเตอร์โปรแกรม"

โดย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัยวุฒิ ชัยพันธุ์

หน่วยเศรษฐศาสตร์วิจัย
คณะเศรษฐศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<u>เอกสารฉบับที่ ๒๔๐๑</u>

"การประมาณค่าพารามีเตอร์เมื่อมีขนาดตัวอย่างน้อย : ลักษณะปัญหา วิธีแก้ และคอมพิวเตอร์โปรแกรม"

โดย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัยวุฒิ ชัยพันธุ์

คณะเศรษฐศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มิถุนายน ๒๕๒๔

หน่วยเศรษฐศาสตร์วิจัย คณะเศรษฐศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หน่วยเศรษฐศาสตร์วิจัย เป็นหน่วยงานของคณะเศรษฐศาสตร์ ก่อตั้งขึ้นในปี พ.ศ. ๒๕๒๐ เพื่อทำหน้าที่ส่งเสริม ประสานงาน และ สนับสนุนการวิจัยของคณาจารย์ และนิสิตบัณฑิตศึกษาของคณะเศรษฐศาสตร์ และเผยแพร่ความรู้จากผลการค้นคว้าวิจัยแก่หน่วยงานที่เกี่ยวข้องและสาธารณชนผู้สนใจโดยทั่วไป โดยมีที่ตั้งปัจจุบันอยู่ ณ ห้อง ๒๑๗ - ๒๑๘ ตึกคณะเศรษฐศาสตร์

กิจกรรมในปัจจุบันที่หน่วยเศรษฐศาสตร์วิจัยดำเนินการจัดเป็นโครงการรวม ๗ โครงการ กล่าวคือ

- โครงการส่งเสริมการวิจัย	เพื่อดำเนินการจัดประชุมทางวิชาการ สัมมนา ประชุมเชิงปฏิบัติการ บรรยาย และเสนอผลการวิจัย สำหรับคณาจารย์ นิสิตบัณฑิตศึกษา และบุคคลทั่วไป
- โครงการทำเนียบวิจัย	เพื่อจัดทำและเสนอรายงานเกี่ยวกับโครงการวิจัยและผลงานวิจัยของคณาจารย์ ทั้งในอดีตและปัจจุบัน รายงานนี้จะแยกประเภทตามชื่อคณาจารย์ เรื่องที่ทำการวิจัย ลำดับปี และแหล่งทุนโดยปรับรายงานให้ทันสมัยอยู่เสมอ
- โครงการจดหมายข่าววิจัย	เพื่อจัดทำจดหมายข่าวเสนอให้คณาจารย์เป็นรายสัปดาห์เกี่ยวกับแหล่งทุนวิจัย ความคืบหน้าและความเคลื่อนไหวในวงการวิจัยทั้งภายในและภายนอกคณะ ฯ รวมทั้งประกาศและข่าวต่าง ๆ เกี่ยวกับการวิจัยของคณะ ฯ และจุฬา ฯ
- โครงการจัดทุนวิจัย	เพื่อพิจารณาให้การสนับสนุน และรับรองโครงร่างวิจัยของคณาจารย์และนิสิตบัณฑิตศึกษา ที่ยื่นขอรับทุนวิจัยจากแหล่งภายนอก รวมทั้งจัดหาทุนวิจัยจากแหล่งภายนอกแก่คณาจารย์ที่พร้อมจะดำเนินการวิจัย
- โครงการบริการการวิจัย	เพื่อจัดหาและอำนวยความสะดวกในด้านอุปกรณ์ เครื่องมือและบริการต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับการวิจัย โดยเฉพาะ การพิมพ์ ทำสำเนา เข้าเล่ม เครื่องคำนวณ เอกสาร และอื่น ๆ
- โครงการประสานงานวิจัยกับการศึกษา	เพื่อส่งเสริม และประสานงานให้การวิจัยของคณาจารย์สอดคล้องเอื้ออำนวย และเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาทั้งระดับปริญญาตรีและบัณฑิตศึกษา
- โครงการเอกสารวิชาการ	เพื่อสนับสนุนและเผยแพร่งานเขียนทางวิชาการ และงานวิจัยของคณาจารย์และนิสิตบัณฑิตศึกษา ในขั้นต้นเพื่อขอคำแนะนำและวิจารณ์ และเพื่อกระจายความรู้โดยทั่วไป รวมทั้งรายงานสรุปผลการสัมมนา และการประชุมทางวิชาการ

เอกสารวิชาการนี้ เป็นเอกสารขั้นต้นเพื่อเผยแพร่สำหรับขอคำแนะนำและวิจารณ์ รวมทั้งเสนอสรุปผลการสัมมนาและการประชุมทางวิชาการ ความถูกต้องและส่วนประกอบของเนื้อหา รวมทั้งการพิสูจน์อักษร อยู่ในความรับผิดชอบของผู้เขียน การอ้างอิงบางส่วนหรือทั้งหมดของเอกสารนี้ ต้องได้รับความยินยอมเห็นชอบจากผู้เขียนก่อน

หน่วยเศรษฐศาสตร์วิจัย

คณะเศรษฐศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยนั้น เป็นปัญหาทางเศรษฐมิติที่เกิดขึ้นบ่อยครั้งในประเทศไทย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลเศรษฐศาสตร์มหภาค[1/] ลักษณะปัญหาเกี่ยวข้องกับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละวิธี เพราะวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ ที่ได้รับการพัฒนาขึ้นมาจนถึงปัจจุบันนั้นมีข้อจำกัดว่าจะต้องมีขนาดของตัวอย่างขั้นต่ำเท่าที่กำหนด มิเช่นนั้นวิธีดังกล่าวจะไม่สามารถใช้ได้อีกต่อไป

ถึงแม้ว่าจนถึงปัจจุบันจะได้มีการพัฒนาวิธีการที่จะแก้ไขปัญหาดังกล่าวขึ้นมามากมายหลายวิธีแล้วก็ตาม แต่ปัญหาดังกล่าวก็ยังนับว่าเป็นเรื่องที่ยังใหม่อยู่มาก เพราะยังไม่มีตำราเศรษฐมิติเล่มใดที่กล่าวถึงปัญหานี้ อย่างเป็นระบบแต่อย่างใด มีเพียงตำราบางเล่มที่เขียนถึงปัญหานี้แต่ก็ยังเป็นเพียงเรื่องใดเรื่องหนึ่งเท่านั้น ไม่ครอบคลุมถึงขอบเขตทั้งหมดของปัญหา นอกจากนั้นวิธีการแก้ปัญหาที่ได้รับการพัฒนาขึ้นมานั้นส่วนใหญ่เป็นเพียงทฤษฎี ซึ่งยังต้องการการทดสอบทางปฏิบัติอยู่อีกมาก มีเพียงบางวิธีเท่านั้นที่ได้มีการนำไปใช้ทดสอบในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของเศรษฐมิติโมเดล ส่วนบางวิธีนั้นยังมิได้มีการทดสอบแต่อย่างใด

สำหรับในประเทศไทย การแก้ปัญหาดังกล่าวยังไม่ได้รับการพัฒนาไปเท่าที่ควร ส่วนใหญ่ปัญหานี้มักจะถูกละเลย หรือถึงแม้ได้รับการพัฒนาไปบ้างก็ยังเป็นเพียงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ไปทีละสมการ[2/] ซึ่งยังไม่สามารถให้ค่าพารามิเตอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงสุดได้ วัตถุประสงค์สำคัญของงานวิจัยนี้ จึงอยู่ที่ความพยายามที่จะจำกัดขอบเขตของปัญหา และหาทางแก้ไขปัญหาดังกล่าว ซึ่งประโยชน์ที่จะได้รับไม่เพียงแต่จะทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับโมเดลของประเทศไทย

[1/] ในจำนวนนี้มีโมเดลที่เป็นที่รู้จักดี เช่น วีรพงษ์ รามางกูร (2519), CHAIPRAVAT O., MEESOOK K. and GARNJARERNDEE S. (1977), และกองวางแผนเศรษฐกิจและสังคม (2523)

[2/] ความพยายามในการแก้ปัญหาดังกล่าวปรากฏอยู่ใน วีรพงษ์ รามางกูร (2519)

มีประสิทธิภาพสูงขึ้นเท่านั้น ยังมีส่วนสำคัญในการเพิ่มพูนความรู้ในสาขาวิชาเศรษฐมิติโดยทั่วไปอีกด้วย

สำหรับในบทแรกนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ โดยย่อเสียก่อน เพื่อเป็นพื้นฐานและใช้อ้างอิงในบทต่อ ๆ ไป

1.1 โครงสร้างโมเดลสำหรับการวิเคราะห์

กำหนดโครงสร้างโมเดล ซึ่งเป็นระบบสมการเส้นตรงและเป็นขีมัลเทเนียสคือ[1/]

(1.1) $Y\Gamma = XB + W$

โดยที่

$Y \;\underline{\Delta}\; [y_1 \ldots\ldots y_M, y_{M+1} \ldots\ldots y_G]$

$\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายในจำนวน G ตัว และมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T

$M \;\underline{\Delta}$ จำนวนสมการพฤติกรรม

$G \;\underline{\Delta}$ จำนวนสมการทั้งหมดของโมเดล

$G-M \;\underline{\Delta}$ จำนวนสมการเอกลักษณ์

$\Gamma \;\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ขนาด $G \times G$ ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายใน

$X \;\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ขนาด $T \times K$ ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนเป็นจำนวน K ตัว และมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T

$B \;\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ขนาด $K \times G$ ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อน

$W \;\underline{\Delta}\; [u_1 \ldots\ldots u_M, \underline{0} \ldots\ldots \underline{0}]$

$\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ของตัวแปรผันกระทบ ซึ่งสำหรับทุกสมการพฤติกรรมจนถึง M สมการจะมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T ส่วนสมการเอกลักษณ์จะมีค่าเป็นศูนย์

สมการถอดรูปของระบบสมการโครงสร้าง (1.1) จะเป็น

$$Y = XB\Gamma^{-1} + W\Gamma^{-1}$$
$$= X\Pi + V$$

[1/] Theil (1971) p. 439.

โดยที่ $\Pi = B\Gamma^{-1}$ และ $V = W\Gamma^{-1}$

ระบบสมการโครงสร้างตามแบบ (1.1) นั้นสามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งดังนี้[1]

(1.2) $y = Z\delta + u$

โดยที่

$y \;\underline{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix}$ $\underline{\Delta}$ เวคเตอร์ขนาด $(MT \times 1)$ ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายในจำนวน M ตัว และมีจำนวนข้อมูลเท่ากับT

$Z \;\underline{\Delta} \begin{bmatrix} Z_1 & \underline{0} \cdots\cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & Z_2 \cdots\cdots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \\ \underline{0} & \underline{0} & Z_M \end{bmatrix}$ $\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ขนาด $(MT \times N)$ ของตัวแปรผันทางด้านขวามือ ซึ่งมี N ตัว ของสมการพฤติกรรม ซึ่งมี M สมการ และมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T

$\delta \;\underline{\Delta} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_M \end{bmatrix}$ $\underline{\Delta}$ เวคเตอร์ขนาด $(N \times 1)$ ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรผันทางด้านขวามือของสมการ ซึ่งมี N ตัว

$u \;\underline{\Delta} \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_M \end{bmatrix}$ $\underline{\Delta}$ เวคเตอร์ขนาด $(MT \times 1)$ ของตัวแปรผันกระทบจำนวน M สมการและมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T

สำหรับสมการที่ μ ของระบบสมการ (1.2) นั้นก็คือ

(1.3) $y_\mu = Z_\mu \delta_\mu + u_\mu$

โดยมีตัวแปรผันทางด้านขวามือเป็นจำนวน n_μ ตัว และเมื่อรวมกันแล้ว

$$N = \sum_{\mu=1}^{M} n_\mu$$

สมการ (1.3) นั้นเขียนอีกอย่างหนึ่งได้ว่า

---

[1] GOLDBERGER (1964) p. 347

$$(1.4) \qquad y_\mu = Y_\mu \gamma_\mu + X_\mu \beta_\mu + u_\mu$$

โดยที่ $\quad Z_\mu \ \underline{\Delta} \ \begin{bmatrix} Y_\mu & X_\mu \end{bmatrix}$

และ

$$\delta_\mu \ \underline{\Delta} \ \begin{bmatrix} \gamma_\mu \\ \beta_\mu \end{bmatrix}$$

ซึ่ง $\quad n_\mu \ \underline{\Delta} \ g_\mu + k_\mu$

มี $\quad g_\mu \ \underline{\Delta}$ จำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายในที่อยู่ทางด้านขวามือของสมการที่ μ

$k_\mu \ \underline{\Delta}$ จำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนในสมการที่ μ

สมมติให้

$Eu = \underline{0}$ และ

(1.5) $\quad Euu' = \Sigma \otimes I \ \underline{\Delta}$ ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรผันกระทบของสมการพฤติกรรมจำนวน M สมการ

โดยที่

$$\Sigma \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{M1} & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix}$$

Σ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(M \times M)$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้ส่วนกันและเป็นพ็อซซิทิฟว - เด็ฟฟินิท

1.2 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบกำลังสองน้อยที่สุด

จาก (1.2) เอาเมทริกซ์ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนคูณตลอดจะได้

$$(1.6) \quad (I \otimes X')y = (I \otimes X')Z\delta + (I \otimes X')u$$

โดยที่

$$(1.7) \quad \mathrm{Var}\ X'u = \Sigma \otimes X'X$$

จากการใช้วิธีของ Aitken กับ (1.6) จะได้วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เรียกว่า Three Stage Least Squares, 3SLS[1] แต่เนื่องจากเมทริกซ์ Σ^{-1} นั้นไม่ทราบค่า ZELLNER and THEIL จึงแนะนำให้ใช้ค่าอินเวอสของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของส่วนเหลือจากวิธี Two Stage Least Squares, 2SLS หรือ $\hat{\Sigma}^{-1}$ แทน ดังนั้นสูตรของ 3SLS ก็คือ

$$(1.8) \quad \hat{\delta}\ 3SLS = (Z'[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X']Z)^{-1} Z'[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1}X']y$$

พารามิเตอร์ที่ได้ตามสูตร (1.8) นี้จะมีคุณสมบัติลำเอียง แต่คงเส้นคงวา

ถ้า Σ เป็นเมทริกซ์แบบเส้นทะแยงมุมแล้วสูตร (1.8) ก็คือวิธี 2 SLS[2] ซึ่งสำหรับสมการที่ μ จะมีสูตรดังนี้

$$(1.9) \quad \hat{\delta}_\mu\ 2SLS \quad \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_\mu \\ \\ \hat{\beta}_\mu \end{bmatrix} = [Z'_\mu X(X'X)^{-1}X'Z_\mu]^{-1} Z'_\mu X(X'X)^{-1}X'y_\mu$$

1/ ZELLNER and THEIL (1962)

2/ THEIL (1971) p 451-454

$$(1.10) \quad \hat{\delta}_{\mu}\,2SLS = \begin{bmatrix} Y'_{\mu}X(X'X)^{-1}X'Y_{\mu} & Y'_{\mu}X_{\mu} \\ X'_{\mu}Y_{\mu} & X'_{\mu}X_{\mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y'_{\mu}X(X'X)^{-1}X'y_{\mu} \\ X'_{\mu}y_{\mu} \end{bmatrix}$$

สูตร 2 SLS ที่แสดงมานี้อาจหามาได้โดยการเอา X' คูณตลอดสมการ (1.3) แล้วใช้วิธีของ Aitken

$$(1.11) \quad X'y_{\mu} = X'Z_{\mu}\delta_{\mu} + X'u_{\mu}$$

ในอีกทางหนึ่ง 2 SLS อาจหามาได้ดังนี้

กำหนดให้

$$(1.12) \quad Y_{\mu} = X\hat{\Pi}_{\mu} + \hat{V}_{\mu}$$

เป็นสมการถอดรูป โดยที่

$\hat{\Pi}_{\mu} = (X'X)^{-1}X'Y_{\mu}$ $\underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(K \times g_{\mu})$ ของสัมประสิทธิ์ซึ่งได้มาจากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี OLS

$\hat{V}_{\mu}$ $\underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(T \times g_{\mu})$ ของส่วนเหลือ จำนวน g_{μ} ตัวและมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T

แทนค่า $\hat{\Pi}_{\mu}$ ใน (1.12) จะได้

$$(1.13\ a) \quad Y_{\mu} = X(X'X)^{-1}X'Y_{\mu} + \hat{V}_{\mu}$$

หรือ

$$(1.13\ b) \quad Y_{\mu} - \hat{V}_{\mu} = \hat{Y}_{\mu} = X(X'X)^{-1}X'Y_{\mu}$$

โดยที่

$\hat{Y}_{\mu}$ = เมทริกซ์ขนาด $(T \times g_{\mu})$ ของค่าประมาณเป็นจำนวน T ค่า ของตัวแปรผันทางด้านขวามือจำนวน g_{μ} ตัว ของสมการที่ μ

แทนค่า Y_μ ด้วย $\hat{Y}_\mu$ ใน (1.4) แล้วใช้วิธี OLS ระหว่าง $\hat{Y}_\mu$ กับ X_μ ก็จะได้สูตร 2 SLS ดังนี้

$$(1.14) \quad \hat{\delta}_\mu \; 2\,SLS = \begin{bmatrix} Y'_\mu Y_\mu & Y'_\mu X_\mu \\ X'_\mu Y_\mu & X'_\mu X_\mu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}'_\mu y_\mu \\ X'_\mu y_\mu \end{bmatrix}$$

ซึ่งสูตร (1.14) นี้จะเหมือนกับสูตร (1.10)นอกจากนั้นยังแสดงสูตรในแบบของ k-class ได้ดังนี้[1]

$$(1.15) \quad \hat{\delta}_\mu \; k = \begin{bmatrix} Y'_\mu Y_\mu - k\hat{V}'_\mu \hat{V}_\mu & Y'_\mu X_\mu \\ X'_\mu Y_\mu & X'_\mu X_\mu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y'_\mu y_\mu - k\,\hat{V}'_\mu y_\mu \\ X'_\mu y_\mu \end{bmatrix}$$

ซึ่ง k เป็นค่าคงที่ใด ๆ เมื่อ k = 1 สูตร (1.15) จะเหมือนกับสูตร (1.14) เมื่อ k = 0 สูตร (1.15) จะเหมือนกับสูตรการประมาณค่าพารามีเตอร์ด้วยวิธี OLS และ ถ้า $k = \hat{1}$ โดยที่ $\hat{1}$ เป็นรากที่น้อยที่สุดของสมการ ดีเทอมินันทซึ่งจะไม่กล่าวถึงโดยละเอียดในที่นี้ สูตร (1.15) จะเหมือนกับสูตรการประมาณค่าพารามีเตอร์ด้วยวิธี Limited-Information Maximum Likelihood, LIML[2]

ทั้ง k-class, 2SLS และ LIML จะมีคุณสมบัติลำเอียง แต่คงเส้นคงวา ส่วน $\hat{\delta}$ 3 SLS นั้นจะมีคุณสมบัติคือมีประสิทธิภาพ เมื่อข้อมูลไม่จำกัด[3]

ถ้า $\Gamma = I$

หรือ

$$(1.16) \quad Z_\mu = \begin{bmatrix} 0 & X_\mu \end{bmatrix} \qquad \mu = 1, \ldots\ldots M$$

---

[1] JOHNSTON (1963) p.260

[2] ผู้สนใจจะหาอ่านได้จาก GOLDBERGER(1964) p 338-344 และ THEIL(1971) p 503-504

[3] พิสูจน์ใน ZELLNER and THEIL (1962)

แล้ว สมการโครงสร้างแต่ละสมการจะไม่มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ในกรณีนี้ 3 SLS จะเหมือนกับ Zellner-Aitken Estimator, ZA[1] ซึ่งมีสูตรการคำนวณดังนี้

(1.17) $\hat{\delta}\ ZA = \left[Z' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)Z\right]^{-1} Z'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I)y$

เมทริกซ์ Σ^{-1} ซึ่งไม่ทราบค่านั้นในการคำนวณจะใช้ $\hat{\Sigma}^{-1}$ แทน โดย $\hat{\Sigma}^{-1}$ นั้นจะได้มาจากการหาค่าอินเวอสเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของส่วนเหลือจากวิธี OLS

ถ้าหากเมทริกซ์ Σ เป็นเส้นทะแยงมุมแล้ว ZA จะเหมือนกับ OLS (Ordinary Least Squares) ซึ่งสูตรคำนวณในแต่ละสมการคือ

(1.18) $\hat{\delta}_{\mu}\ OLS = (Z'_{\mu} Z_{\mu})^{-1} Z'_{\mu} y_{\mu}$

$\hat{\delta}$ ZA และ $\hat{\delta}$ OLS นั้นจะให้พารามิเตอร์มีคุณสมบัติไม่ลำเอียง และ ถ้าเมทริกซ์ Σ ไม่เป็นเส้นทะแยงมุม $\hat{\delta}$ ZA จะมีประสิทธิภาพกว่า $\hat{\delta}_{\mu}$ OLS แต่สำหรับระบบสมการที่เป็น ซิมัลเทเนียส แล้ว $\hat{\delta}$ ZA และ $\hat{\delta}_{\mu}$ OLS จะลำเอียงและไม่คงเส้นคงวา

1.3 วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์แบบ Maximum-Likelihood

Full-Information Maximum Likelihood, FIML[2] นั้นเป็นวิธีที่ประมาณค่าพารามิเตอร์ทุกตัวในระบบไปพร้อม ๆ กัน สำหรับวิธีนี้แตกต่างกับ 2 SLS และ 3 SLS โดยสมมติให้ตัวแปรผันกระทบ มีการกระจายแบบปรกติ

$u \sim N(\underline{0},\ \Sigma \otimes I)$

สมมติให้ระบบสมการไม่มีสมการเอกลักษณ์ คือ $G = M$ ดังนั้นฟังก์ชั่นความน่าจะเป็นของตัวแปรผันกระทบจำนวน MT ตัวคือ[3]

---

[1] ZELLNER (1962)

[2] KOOPMANS, RUBIN and LEIPNIK (1950)

[3] ผู้สนใจจะหาอ่านได้จาก ROTHENBERG and LEENDERS (1964)

$$f(u) = (2\pi)^{-1/2\ MT} \det{}^{-1/2} \Psi \exp\left[-\frac{1}{2}u' \Psi^{-1} u\right]$$

โดยที่

$$\Psi = \Sigma \otimes I$$

หรือในรูปของ ln

$$(1.19\ a) \quad L(u,\Psi) = \frac{1}{T} \ln f(u) = k + \frac{1}{2T} \ln \det \Psi^{-1} - \frac{1}{2T} u' \Psi^{-1} u$$

ซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในรูป

$$(1.19\ b) \quad L(\delta,\Sigma,y,Z) = k'+\ln \det \Gamma + \frac{1}{2} \ln \det \Sigma^{-1} - \frac{1}{2T} (y-Z\delta)' \Psi^{-1} (y-Z\delta)$$

โดยที่ k และ k' เป็นค่าคงที่ เมื่อหาค่าดิฟฟีเร้นชิเอชันเทียบกับ Σ^{-1} จะได้

$$(1.20) \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{T} (y_i-Z_i\delta_i)' (y_j-Z_j\delta_j) \ \underline{\Delta}\ s_{ij},\ i,j = 1,.....M$$

ดังนั้น (1.19) จะเป็น

$$L^* (\delta, y,Z) = k' + \ln |\det \Gamma| - \frac{1}{2} \ln \det S - \frac{1}{2T} u'(S^{-1} \otimes I)u$$

โดยที่ $S \ \underline{\Delta}\ [s_{ij}]$ แต่เนื่องจากยังมี δ_i ซึ่งไม่ทราบค่าปรากฏอยู่จึงยังไม่สามารถแทน Σ ด้วย S ได้ แต่เนื่องจากเทอมสุดท้ายของ $L^* (\delta,y,Z)$ นั้นเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$(1.21) \quad L^*(\delta,y,Z) = k^* + |\ln \det \Gamma| - \frac{1}{2} \ln \det S$$

โดยที่ $k^* = k' - \frac{1}{2T} u' (S^{-1} \otimes I)u$ และเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{\partial \ \ln |\det \Gamma|}{\partial \delta} \quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \ \det S}{\partial \delta} \quad = \quad 0$$

เนื่องจากสมการนี้ไม่เป็นสมการเส้นตรง จึงไม่สามารถแก้สมการหาคำตอบได้โดยตรง แต่ทำได้ด้วยการหาค่าประมาณด้วยการทำซ้ำ (Newton Method) ซึ่งสำหรับขั้นที่ $h^{(i)}$ ซึ่งได้ค่าสูงสุดนั้นเขียนได้ดังนี้

(1.22) $$\hat{\delta}^{(i)} = \hat{\delta}^{(i-1)} - h^{(i)} \left[L^{(i-1)}\right]^{-1} \ 1(i-1)$$

หรือ $$\hat{\delta}^{(i)} \quad \hat{\delta}^{(i-1)} - h^{(i)} \ d^{(i)}$$

โดยที่

$\hat{\delta}^{(i)}$ $\underline{\Delta}$ เวคเตอร์ของค่าพารามีเตอร์ในชั้นที่ i

$1^{(i)}$ $\underline{\Delta}$ เวคเตอร์ของค่าดิฟฟีเร็นซิเอชัน ครั้งที่หนึ่งของอนุกรม Taylor ของสมการ (1.21) ในขั้นที่ i

$L^{(i)}$ $\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ของค่าดิฟฟีเร็นซิเอชันครั้งที่สอง

ในตอนเริ่มต้นการทำซ้ำนั้นจะต้องกำหนดค่าเริ่มต้นของ $\hat{\delta}^{(0)}$ เสียก่อนซึ่งค่าดังกล่าวอาจได้มาจากพารามีเตอร์จากวิธี OLS หรือ 2 SLS ก็ได้

ถ้าหากยกเลิกข้อสมมติที่ว่า G = M เสียโดยในโครงสร้างของโมเดลมีสมการเอกลักษณ์ประกอบอยู่ด้วย ก็จะไม่ทำให้วิธีการหาสูตร FIML ต่างออกไป[1/]

FIML จะให้ค่าพารามีเตอร์ที่ลำเอียงแต่คงเส้นคงวา และมีประสิทธิภาพเมื่อข้อมูลไม่จำกัดมากกว่า k-class, 2SLS และ LIML[2/] ถ้าหากโมเดลมีโครงสร้างเป็นรีเคอซีฟ แล้ว FIML จะเหมือนกับ OLS[3/]

[1/] ROTHENBERG and LEENDERS (1964) p 72-73

[2/] THEIL (1971) p 526

[3/] THEIL (1971) p 525

บทที่ 2

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในบทก่อนนั้น โดยทั่วไปพัฒนาขึ้นมาโดยมิได้มีการพิจารณาถึงปัญหาของขนาดของตัวอย่างแต่อย่างใด ข้อสรุปต่าง ๆ เกี่ยวกับคุณลักษณะของพารามิเตอร์ที่ได้มาจากวิธีต่าง ๆ เหล่านั้น นอกจาก OLS และ ZA แล้ว จะเป็นข้อสรุปที่เป็นแบบมีข้อมูลไม่จำกัดทั้งสิ้น ดังนั้นจึงได้มีการศึกษาโดยเฉพาะในแบบ Monte-Carlo Studies เพื่อที่จะหาข้อความรู้ถึงลักษณะของพารามิเตอร์ซึ่งได้มาจากวิธีต่าง ๆ ในกรณีที่มีขนาดของตัวอย่างจำกัด อย่างไรก็ตามก็ไม่สามารถหาข้อสรุปที่เป็นจริงในทุกกรณีได้เหมือนเช่นข้อสรุปในกรณีที่เป็นแบบมีข้อมูลไม่จำกัด ในทางปฏิบัตินั้นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของเศรษฐมิติโมเดลที่สร้างขึ้นมักจะต้องพบกับปัญหาไม่เพียงแต่มีขนาดของตัวอย่างน้อยเท่านั้นแต่ขนาดของตัวอย่างที่หามาได้มักจะมีน้อยมากอีกด้วย ซึ่งปัญหาดังกล่าวนี้เราเรียกรวมกันไปว่าปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย ซึ่งโดยทั่วไปมิได้มุ่งที่จะพิจารณาว่าคุณลักษณะของพารามิเตอร์ที่ได้จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างใด แต่เป็นปัญหาที่ว่าวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ นั้นจะไม่สามารถใช้ได้อีกต่อไป

ในบทนี้จะได้กล่าวถึงลักษณะของปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยโดยละเอียดโดยในหัวข้อ ๒.๑ จะได้กล่าวถึงปัญหาของการมีขนาดตัวอย่างน้อยที่เกิดขึ้นกับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสมการซึ่งได้แก่ k-class, 2 SLS, LIML และ OLS ซึ่งปัญหาแรกก็คือการมีขนาดตัวอย่างหรือจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันในสมการ ซึ่งจะทำให้วิธี k-class, 2 SLS, LIML และ OLS ใช้ไม่ได้อีกต่อไป ปัญหาในลักษณะเช่นนี้มักจะพบน้อยมากในทางปฏิบัติ ส่วนปัญหาที่สองซึ่งจะพบบ่อยครั้งมากในทางปฏิบัติก็คือการมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดล ซึ่งจะทำให้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าว ยกเว้น OLS ไม่สามารถใช้ได้อีกต่อไป

ในหัวข้อ 2.2 จะได้กล่าวถึงปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยที่เกิดขึ้นกับวิธีการประมาณค่าพาราบิเตอร์ทุกสมการไปพร้อม ๆ กันซึ่งได้แก่ 3 SLS และ ZA ซึ่งปัญหาแรกก็คือการมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันอย่างน้อยหนึ่งสมการ ซึ่งจะทำให้ทั้ง 3 SLS และ ZA ไม่สามารถใช้ได้อีกต่อไป ปัญหาที่สองก็คือการมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดลซึ่งจะทำให้ 3 SLS ใช้ไม่ได้ แต่ ZA ยังคงใช้ได้อยู่ ซึ่งปัญหาดังกล่าวพบได้บ่อยครั้งมากในทางปฏิบัติ ส่วนปัญหาที่สามก็คือการมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนสมการพฤติกรรมซึ่งเกิดขึ้นบ่อยครั้งเช่นกัน ในทางปฏิบัติ นอกจากนั้นยังจะได้กล่าวถึงปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยที่เกิดขึ้นกับวิธี FIML ซึ่งก็คือเมื่อจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันทั้งหมดของโมเดล ลักษณะดังกล่าวจะทำให้ FIML ไม่สามารถใช้ได้อีกต่อไป

2.1 ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสมการ

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยที่เกิดขึ้นกับวิธี OLS ตามสูตร (1.18) ก็คือจะทำให้เมทริกซ์ $(Z'_\mu \; Z_\mu)$ ไม่สามารถหาค่าอินเวอสได้ ถ้าหากจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันของสมการคือ $T < n_\mu$ แล้ว $r(Z_\mu) \leq T$ ดังนั้น $r(Z'_\mu \; Z_\mu) \leq T$ ซึ่งโดยทั่วไปอาจเขียนได้ว่า $r(Z'_\mu \; Z_\mu) = T < n_\mu$ ดังนั้น $Z'_\mu \; Z_\mu$ จะไม่สามารถหาค่าอินเวอสได้

สำหรับวิธี 2 SLS นั้นจากสูตร (1.9), (1.10) และ (1.14) จะเห็นได้ว่าจะต้องมีเงื่อนไขว่า

$$(2.1) \qquad T \geq n_\mu$$

เช่นเดียวกับวิธี OLS เพราะตาม (2.1) จะทำให้ $Z'_\mu \; X(X'X)^{-1}X'Z_\mu$ ในสูตร (1.9) สามารถหาค่าอินเวอสได้ และจากสูตร (1.15) จะเห็นว่าทุกวิธีของ k-class รวม LIML จะต้องเป็นไปตามข้อกำหนด (2.1) เช่นกัน

ปัญหาการมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันของสมการนี้มักจะพบได้น้อยในทางปฏิบัติ เพราะเศรษฐมิติโมเดลโดยทั่ว ๆ ไปมักจะมีจำนวนตัวแปรผันไม่เกิน 5 ตัว ซึ่งก็มักจะน้อยกว่าจำนวนข้อมูลที่หามาได้เสมอ

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย k-class หรือ 2 SLS นั้นสิ่งสำคัญที่สุดก็คือ ...กซ์ X'X ซึ่งจะเห็นได้จากสูตร (1.10) สำหรับ 2 SLS และจากสูตร

(1.15) สำหรับ k-class และ LIML กล่าวคือดูได้จาก $(Y'_\mu Y_\mu - k\hat{V}'_\mu \hat{V}_\mu)$ และ $(Y'_\mu y_\mu - k\hat{V}'_\mu \hat{v}_\mu)$ ซึ่งมีเมทริกซ์ $\hat{V}_\mu$ ร่วมอยู่ด้วยและจาก (1.2) เราสามารถเขียน $\hat{V}_\mu$ ได้ดังนี้

$$\hat{V}_\mu = Y_\mu - X(X'X)^{-1} X'Y_\mu$$

ดังนั้น k-class, 2 SLS และ LIML จะไม่สามารถใช้ได้อีกต่อไปถ้าเมทริกซ์ $X'X$ ไม่สามารถหาค่าอินเวอสได้ เมทริกซ์ $X'X$ นั้นมีขนาด $(K \times K)$ ดังนั้นจะมีค่าอินเวอสก็ต่อเมื่อ $r(X'X) = K$ และ $r(X) = K$ เพราะ $r(X'X) = r(X)$ แต่ถ้าจำนวนข้อมูลมีน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดลคือ $T < K$ ดังนั้นเมทริกซ์ X ซึ่งตาม (1.1) มีขนาด $(T \times K)$ จะมี $r(X) \leq T < K$ ซึ่งจะทำให้ $r(X'X) < K$ เมทริกซ์ $X'X$ จึงไม่สามารถหาอินเวอสได้ วิธี 2 SLS และ LIML ซึ่งเป็นวิธีในกลุ่มของ k-class จึงไม่สามารถใช้ได้ ดังนั้นเงื่อนไขที่ 2 SLS และ LIML จะใช้ได้ก็คือ

(2.2) $T \geq K$

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีนี้เกิดขึ้นบ่อยมากในทางปฏิบัติ และในปัจจุบันก็มีความพยายามคิดวิธีแก้ปัญหานี้ไว้หลายวิธีด้วยกัน ซึ่งจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในบทต่อไป ปัญหาดังกล่าวมักจะเกิดขึ้นเมื่อต้องใช้ข้อมูลรายปีมาทำการคำนวณโดยเฉพาะอย่างยิ่งโมเดลเศรษฐศาสตร์มหภาค ซึ่งตัวอย่างสำหรับโมเดลที่เป็นที่รู้จักกันแพร่หลายซึ่งเกิดปัญหานี้ก็เช่น โมเดล KLEIN III[1/] ซึ่งมี

$$T = 21 , \quad K = 28$$

และโมเดล KLEIN and GOLDBERGER[2/] ซึ่งมี

$$T = 18 , \quad K = 31$$

เป็นต้น

[1/] KLEIN (1950)

[2/] KLEIN and GOLDBERGER (1955)

2.2 <u>ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทุกสมการพร้อมกัน</u>

เงื่อนไขที่จะสามารถใช้วิธี ZA ได้นั้นดูได้จากสูตร (1.17) ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีเมทริกซ์

$$\hat{\sigma}^{ij} Z_j' Z_j \quad , \quad i, j = 1, \ldots\ldots M$$

ซึ่งมีขนาด (M x M) ปรากฏอยู่ โดยที่ $\hat{\sigma}^{ij}$ ก็คือ

$$\hat{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} & \cdots\cdots\cdots & \hat{\sigma}^{1M} \\ \vdots & & \\ \hat{\sigma}^{M1} & \cdots\cdots\cdots & \hat{\sigma}^{MM} \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเงื่อนไขสำคัญที่จะทำให้เมทริกซ์นี้มีค่าอินเวอสก็คือ

$$(2.3) \quad T \geq \max n_\mu \quad , \quad \mu = 1, \ldots\ldots M$$

เช่นถ้า $\max_\mu n_\mu = n_1$ และ $n_2 < T < n_1$ โดยที่

$$\max n_{\mu'} = n_2 \quad , \quad \mu' = 2, \ldots\ldots M$$

แล้วจะเห็นได้ว่าเมทริกซ์ย่อย

$$[\hat{\sigma}^{11} \; Z_1' Z_1 \ldots\ldots \hat{\sigma}^{1M} Z_1' Z_M]$$

จะมีแร็งคสูงสุดเท่ากับ T และน้อยกว่า n_1 เช่นเดียวกัน แร็งค ของเมทริกซ์ที่กล่าวมาก็จะไม่ใช่ $n = \sum_{\mu=1}^{M} n_\mu$ แต่จะเป็น $\left[\sum_{\mu'=2}^{M} n_{\mu'} + T\right] < n$ จึงไม่มีค่าอินเวอส วิธี ZA จึงไม่สามารถใช้ได้

เช่นเดียวกันกับวิธี 3 SLS ซึ่งสามารถแสดงได้จากสูตร (1.8) ซึ่งมีส่วนหนึ่งของเมทริกซ์คือ

$$\hat{\sigma}^{ij} \; Z_i' X(X'X)^{-1} X'Z_j \quad , \quad i,j=1,\ldots\ldots M$$

ซึ่งจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (2.3) นอกจากนั้นยังจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (2.2) อีกด้วย เนื่องจากเทอม

$$\sum_{\mu=1}^{M} \hat{\sigma}^{i\mu} Z_i' X(X'X)^{-1} X' y_\mu \quad , i = 1,\ldots M$$

จะไม่สามารถหาค่าได้ถ้า $r(X'X) \leq T < K$

เงื่อนไข (2.3) นั้นเช่นเดียวกับ (2.1) คือไม่ค่อยพบในทางปฏิบัติ ส่วนเงื่อนไข (2.2) นั้น มีความสำคัญมากเพราะเกิดปัญหาขึ้นบ่อย ๆ ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี 3 SLS

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยอีกปัญหาหนึ่งซึ่งจนถึงปัจจุบันนี้ยังมีการค้นคว้าในเรื่องดังกล่าวน้อยมาก[1] ปัญหาเกิดจากว่า σ^{ij} ในสูตร (1.8) และ (1.17) นั้นไม่ทราบค่า และต้องแทนด้วย $\hat{\sigma}^{ij}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของส่วนเหลือซึ่งได้จากวิธี OLS และ 2 SLS ตามลำดับ คือ

$$(2.4) \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \hat{U}'\hat{U}$$

ซึ่งใช้เป็นค่าประมาณของ σ^{ij} ในสูตร ZA และ 3 SLS โดย $\hat{U}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(T \times M)$ ของส่วนเหลือจากจำนวน M สมการซึ่งมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T ถ้า $T < M$ แล้ว $r(\hat{U}) \leq T < M$ ดังนั้น $r(\hat{U}'\hat{U}) < M$ ซึ่งหมายถึงว่า $\hat{\Sigma}$ จะไม่สามารถหาค่าอินเวอสได้ ในกรณีเช่นนี้จึงไม่สามารถใช้วิธี ZA และ 3 SLS ได้ ดังนั้นสำหรับการใช้ ZA และ 3 SLS จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (2.2) และ (2.3) แล้ว ยังจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข

$$(2.5) \qquad T \geq M$$

อีกด้วย

---

[1] มีตำราบางเล่มที่กล่าวถึงปัญหานี้ไว้เล็กน้อยเช่น THEIL (1971), p 529 และ 536 และ KLEIN (1969)

สำหรับวิธี FIML นั้นก็จำเป็นต้องใช้ค่า $\hat{\Sigma}^{-1}$ อยู่ด้วย และในการคำนวณตามสูตร (1.23) นั้นจำเป็นที่ว่า $\det \hat{\Sigma} \neq 0$ นอกจากนั้นยังต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (2.5) อีกด้วย อย่างไรก็ตามจากการวิจัยของ KLEIN และ SARGAN[1/] แสดงให้เห็นว่าจะใช้วิธี FIML ได้ก็ต่อเมื่อ

(2.6) $T > G + K$

เพราะถ้า $T > G \geq M$ แล้วย่อมเป็นไปตามเงื่อนไข (2.5) เสมอ

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยทั้งหมดที่กล่าวมานี้สามารถแยกออกได้เป็น 4 กรณีด้วยกัน ดังได้สรุปไว้ในตารางท้ายบท การทดสอบการเกิดปัญหามีขนาดตัวอย่างน้อยตามตาราง กับเศรษฐมิติโมเดลนั้นแสดงได้ดังตัวอย่างโมเดลของ KLEIN III และ KLEIN-GOLDBERGER ดังนี้

KLEIN III	KLEIN-GOLDBERGER
$T = 21, \max_{\mu} n_{\mu} = 6$	$T = 18, \max_{\mu} n_{\mu} = 6$
$K = 28, M = 12$	$K = 31, M = 15$
$T > \max_{\mu} n_{\mu}$	$T > \max_{\mu} n_{\mu}$
$T < K$	$T < K$
$T > M$	$T > M$

[1/] KLEIN (1969) และ SARGAN (1975) p 87

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของทั้ง 2 โมเดลนั้นจะเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในการใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบ k-class รวมทั้ง 3 SLS และ FIML

ชนิดของปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยของวิธีการ

ประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ

	OLS	k-class 2 SLS, LIML	ZA	3 SLS	FIML	ชนิดของปัญหา
เงื่อนไขที่ 1	$T \geq n_\mu$	$T \geq n$	$T \geq \max n_\mu$	$T \geq \max n_\mu$	-	กรณีที่ 1
เงื่อนไขที่ 2	-	$T \geq K$	-	$T \geq K$	-	กรณีที่ 2
เงื่อนไขที่ 3	-	-	$T \geq M$	$T \geq M$	$T \geq M$	กรณีที่ 3
เงื่อนไขที่ 4	-	-	-	-	$T \geq G+K$	กรณีที่ 4

บทที่ 3

วิธีแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยสำหรับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ ดังที่กล่าวมานี้ จนถึงปัจจุบันยังไม่มีตำราเศรษฐมิติเล่มใดรวบรวมมาเขียนไว้อย่างเป็นระบบแต่อย่างไร มีตำราบางเล่มที่เขียนถึงปัญหาชนิดใดชนิดหนึ่งไว้เท่านั้น โดยเฉพาะปัญหากรณีที่ 2 (มีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดล) ซึ่งเกิดขึ้นบ่อยที่สุดในทางปฏิบัติ ซึ่งในปัจจุบันก็ได้มีการพัฒนาวิธีแก้ปัญหาดังกล่าวขึ้นไว้มากมายหลายวิธีด้วยกัน ซึ่งบางวิธีสามารถหาอ่านได้จากตำราเศรษฐมิติที่พิมพ์ออกใหม่ ๆ ในระยะไม่กี่ปีมานี้ ส่วนปัญหากรณีที่ 3 (มีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนสมการพฤติกรรม) นั้นจนถึงปัจจุบันยังมิได้มีการกล่าวถึงกันมากนัก สำหรับปัญหากรณีที่ 1 (มีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันของสมการ) และปัญหากรณีที่ 4 (มีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันทั้งหมด) นั้นเกือบจะไม่มีใครพูดถึงเลย ปัญหากรณีที่ 1 นั้นมีความสำคัญน้อยมากในทางปฏิบัติเพราะไม่ค่อยจะเกิดขึ้น ส่วนปัญหากรณีที่ 4 นั้นจนถึงปัจจุบันยังไม่ได้มีการพัฒนาวิธีใด ๆ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวเลย

ในบทนี้จะได้รวบรวมวิธีแก้ปัญหาสำหรับกรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 ซึ่งมีความสำคัญอย่างมากในทางปฏิบัติมากล่าวถึงไว้โดยละเอียดโดยจะได้พยายามวิเคราะห์ข้อดีและข้อเสียของแต่ละวิธีไว้ด้วย

3.1 วิธีแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย ในกรณีมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดล (กรณีที่ 2)

3.1.1 เงื่อนไขบางประการในการนำไปใช้ในทางปฏิบัติ

การที่จะนำวิธีการแก้ปัญหาที่กล่าวถึงในหัวข้อนี้ ไปใช้ในทางปฏิบัตินั้น จำเป็นจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข 2 ประการ ซึ่งจะได้นำมากล่าวถึงโดยละเอียดให้หัวข้อนี้เสียก่อนเป็นเบื้องแรก

กำหนดเมทริกซ์ X_I ซึ่งมีลักษณะดังนี้

(3.1) $X_I \quad \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(T \times k_I)$ ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนเป็นจำนวน k_I ตัว ซึ่งมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ T ตัว ตัวแปรผันนี้เรียก "ตัวแปรผันเครื่องมือ"

เงื่อนไขประการแรกก็คือ

(3.2) $k_I \geq n_\mu$

สำหรับ 2 SLS เราสามารถแสดงเงื่อนไขดังกล่าวได้โดยดูจากสูตร (1.4) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้[1/]

$$(3.3) \quad \left[[\hat{Y}_\mu] \quad [X_\mu] \right] = \left[[(Y_\mu - \hat{V}_\mu)] \quad [X_\mu] \right] = X_I \left[[(X_I' X_I)^{-1} X_I' Y_\mu] \begin{bmatrix} I_{k_\mu} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \right]$$

โดยที่

$I_{k_\mu} \quad \underline{\Delta}$ เมทริกซ์เอกลักษณ์ ซึ่งมีขนาด k_μ

$\underline{0} \quad \underline{\Delta}$ เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิก เป็นศูนย์มีขนาด $(k_I - k_\mu) \times k_\mu$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า

$$(3.4) \quad r\left[\begin{bmatrix} \hat{Y}_\mu' \\ \\ X_\mu' \end{bmatrix} \quad |\hat{Y}_\mu \quad X_\mu| \right] = r[\hat{Y}_\mu \quad X_\mu] \leq r(X_I) \quad ^{2/}$$

[1/] JOHNSTON (1963) p. 259-260

[2/] เป็นไปตามกฎ $r(AB) = \min \; [r(A) \; , \; r(B)]$ ดูได้จาก JOHNSTON (1963) p 92

ถ้าหาก $r(X_I) < n_\mu$ แล้ว เมทริกซ์ทางด้านซ้ายของสมการ (3.4) จะไม่มีค่าอินเวอส วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ตามสูตร (1.14) จะใช้ไม่ได้

นอกจากนั้น เพื่อป้องกันไม่ให้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยเกิดขึ้นได้อีก จำเป็นจะต้องกำหนดว่า

(3.5) $k_I \leq T$

สำหรับ 3 SLS ซึ่งนอกจากจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (3.2) แล้วจะต้องมีเงื่อนไขอีกว่า

(3.6) $k_I > \max n_\mu$, $\mu = 1,\ldots\ldots M$

สำหรับเงื่อนไขประการที่สองก็คือ

(3.7) $X_\mu \quad \varepsilon \quad X_I$

ซึ่งหมายถึงว่าตัวแปรผันเครื่องมือนั้นจะต้องประกอบไปด้วยตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนในแต่ละสมการ เงื่อนไขที่สองนี้แสดงได้จากสูตร (1.14) เช่นกัน ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

(3.8) $\hat{Y}'_\mu X_\mu = Y'_\mu X_I (X'_I X_I)^{-1} X'_I X_\mu = Y'_\mu X_\mu$ [1/]

ซึ่ง (3.8) จะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ

(3.9) $Y'_\mu X_I (X'_I X_I)^{-1} X'_I X_\mu \ \varepsilon \ Y'_\mu X_I (X'_I X_I)^{-1} X'_I X_I = Y'_\mu X_I$

ซึ่งก็คือเมื่อเป็นไปตามเงื่อนไข (3.7) เท่านั้น นอกจากนั้นสำหรับ 3 SLS จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่า

(3.10) $X_\mu \ \varepsilon \ X$, $\mu = 1,\ldots\ldots M$

3.1.2 <u>วิธีแก้ปัญหาโดยเลือกตัวแปรผันเครื่องมือ</u>

การเลือกตัวแปรผันเครื่องมือ X_I สำหรับวิธี 2 SLS, k-class หรือ LIML นั้นจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (3.2), (3.5) และ (3.7) และสำหรับวิธี 3 SLS

[1/] สามารถแทน X ได้ด้วย X_I

จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไข (3.5) (3.6) และ (3.10) การที่จะเลือกตัวแปรผันใดรวมอยู่ใน X_I นั้นอาจพิจารณาได้หลายกรณี เช่นนอกจากตัวแปรผัน X_μ แล้ว อาจจะเลือกตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนเพิ่มไปด้วย สำหรับตัวแปรผันที่มีความสัมพันธ์กับตัวแปรผันที่เลือกไปแล้วก็อาจจะตัดออกไปได้ หรือให้เลือกตัวแปรผันที่มีความสำคัญในการอธิบายพฤติกรรมของโมเดลโดยอาจจะใช้ทฤษฎีทางเศรษฐศาสตร์เป็นเครื่องช่วยในการตัดสินใจ นอกจากนั้นอาจจะเลือกเอาเฉพาะตัวแปรผันที่ไม่มีความแตกต่างของเวลาหรือถ้ามีก็ให้น้อยที่สุด เพราะตัวแปรผันประเภทนี้จะทำให้การประประมาณค่าพารามิเตอร์ในขั้นแรกขาดความคงเส้นคงวาได้ ตัวอย่างของการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวนี้ดูได้จาก KLEIN-GOLDBERGER-Model[1/] และ BROOKINGS-Model[2/]

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากวิธีนี้ไม่มีกฎเกณฑ์ในการเลือกตัวแปรผัน X_I ที่แน่นอน จึงไม่สามารถกล่าวได้ว่าพารามิเตอร์ที่ได้จะมีลักษณะอย่างไร สำหรับวิธี 2 SLS, LIML และ k-class นั้นเรายังสามารถเปลี่ยนแปลง X_I ไปตามความเหมาะสมในแต่ละสมการได้ ซึ่งเราจะทำไม่ได้สำหรับวิธี 3 SLS

3.1.3 การกำหนดตัวแปรผันเครื่องมือด้วยวิธีพรินซิพัล-คัมโพนีนท

การกำหนดตัวแปรผัน X_I ด้วยวิธี พรินซิพัล-คัมโพนีนท นั้นเป็นวิธีแรกที่ได้รับการพัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดล[3/] ซึ่งมีวิธีการโดยละเอียดดังนี้

กำหนดเมทริกซ์ X มีขนาด $(T \times k)$ ซึ่งเนื่องจาก $T < K$ จะมี k แถวตั้งเป็นแบบไม่อิสระเส้นตรงอย่างแน่นอน เขียนเมทริกซ์ X ได้ดังนี้

(3.11) $$X = pa'$$

โดยที่

$p \triangleq$ เวคเตอร์ขนาด $(T \times 1)$

$a \triangleq$ เวคเตอร์ขนาด $(K \times 1)$

1/ KLEIN and GOLDBERGER (1955) p 48-49

2/ DUESENBERRY, FROMM, KLEIN and KUH (1965) p 736-737

3/ KLOEK and MENNES (1960)

ซึ่ง

(3.12) $p'p = 1$

สร้างเมทริกซ์ $(X - pa')$ ซึ่งมีขนาด $(T \times K)$ ผลรวมของกำลังสองของเมทริกซ์นี้จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ เรากำหนดภายใต้เงื่อนไข (3.12) ค่ามูลค่าลักษณะที่สูงที่สุดของเมทริกซ์ $X'X$ จากสมการ[1/]

$$(3.13) \qquad (X'X - \lambda I)\, a = \underline{0}$$

และค่าของรากที่สูงที่สุดจาก

$$(3.14) \qquad |X'X - \lambda I| = 0$$

พรินซิพัล-คัมโพเนนท ที่หนึ่งก็คือ

$$(3.15) \qquad p_1 = \frac{1}{\lambda_1} X a_1$$

โดยที่ λ_1 เป็นค่าของรากที่สูงที่สุดจาก (3.14) และเป็นค่ามูลค่าลักษณะที่สูงที่สุดของ $X'X$ ด้วย ส่วน a_1 เป็น เวคเตอร์ลักษณะของค่าดังกล่าว

จากเงื่อนไข

$$(3.16) \qquad p_2' p_2 = 1 \;,\; p_1' p_2 = 0$$

จะสามารถหาค่า p_2 จากค่าสูงที่สุดเป็นที่สองของมูลค่าลักษณะและเวคเตอร์ลักษณะของค่าดังกล่าวได้

เราสามารถหาค่าความแปรปรวนทั้งหมดของทุกตัวแปรผันได้จาก

$$(3.17) \qquad \hat{\text{var}}(X) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} x_{tk}^2 = \text{tr}\, X'X = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k$$

1/ THEIL (1971) p 46

เราจึงสามารถทราบได้ว่าพรินซิพัล-คัมโพนีนท ที่ k จะมีส่วนในค่าความแปรปรวนทั้งหมดเท่าไรจากสัดส่วน $\lambda_k / tr\ X'X$ เราจะเลือกจำนวน พรินซิพัล-คัมโพนีนท ซึ่งจะมีส่วนในค่าความแปรปรวนทั้งหมดมากที่สุด โดยปกติแล้วจำนวนที่เลือกนี้จะน้อยกว่า K และจะน้อยกว่า T จากเงื่อนไข (3.7) และ (3.10) ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า

$$(3.18) \qquad k_I = k_\mu + k_p$$

โดยที่ $k_p \ \underline{\Delta}$ จำนวนพรินซิพัล-คัมโพนีนทที่เลือก

KLOEK and MENNES ได้ทดลองทั้งหมด 4 วิธีด้วยกัน พบว่าวิธีที่ 4 จะดีที่สุด โดยที่คำนวณหาพรินซิพัล-คัมโพนีนท ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทุกตัวของโมเดล เมทริกซ์ของตัวแปรผันเครื่องมือจะเป็นดังนี้

$$(3.19) \qquad X_I = [X_\mu \quad X_p]$$

โดยที่ X_p เป็นเมทริกซ์ขนาด $(T \times k_p)$ ของพรินซิพัล-คัมโพนีนท จำนวน k_p ตัว โดยมีจำนวนข้อมูลคือ T

วิธีดังกล่าวนี้มีข้อเสียซึ่งพอจะสรุปมาเขียนได้ดังนี้

1) ลักษณะของพารามิเตอร์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไข (3.12) และขนาดของตัวแปรผันเป็นอย่างมาก

2) ไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอนในการเลือกจำนวน พรินซิพัล-คัมโพนีนท

3) ไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่นอนในการเลือกว่าจะเอาตัวแปรผันใดมาคำนวณหาพรินซิพัล-คัมโพนีนท

4) ผลกระทบของตัวแปรผันเครื่องมือจะไม่สามารถมองเห็นได้ง่ายอีกต่อไปเพราะตัวแปรผันดังกล่าวจะถูกแปลงให้อยู่ในรูปลักษณะอื่น

ถึงแม้จะมีข้อเสียดังที่กล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตามวิธีนี้ก็เป็นที่นิยมใช้และจากผลในทางปฏิบัติพบว่าจะได้พารามิเตอร์ที่ดีและจะทำให้ความสามารถในการพยากรณ์ดีขึ้นอย่างมากด้วย[1/]

[1/] KLOEK and MENNES (1960) ใช้โมเดล KLEIN I เป็นโมเดลสำหรับทดสอบ ส่วนโมเดลอื่น ๆ นั้นดูได้จาก DUTTA and SHARMA (1973) และ KLEIN (1969)

อย่างไรก็ตามจนถึงปัจจุบันยังไม่มีการใช้วิธีพรินซิพัล-คัมโพเนนท กับ 3 SLS และ LIML แต่อย่างใด

3.1.4 วิธีของ FISHER[1/]

วิธีนี้เริ่มต้นจากสมการ (1.4) โดยจากสมการนี้เราจะกำหนดให้ Y_μ และ X_μ เป็นตัวแปรผันอันดับที่ศูนย์ จากนั้นจะเปลี่ยนสมการพฤติกรรมทุกสมการให้อยู่ในรูปของ Y_μ ได้ดังนี้

$$(3.20) \quad y_{\mu'}(i) = Y_{\mu'}(i)\gamma'_{\mu}(i) + X_{\mu'}(i)\beta_{\mu'}(i) \left[+ u_{\mu'}(i)\right] , \quad i = 1\ldots g_\mu$$

ตัวแปรผัน u ซึ่งเป็นตัวแปรผันกระทบนั้นในที่นี้ไม่มีความสำคัญ นั่นก็คือสมการ (3.20) อาจจะเป็นสมการเอกลักษณ ก็ได้ สำหรับ $y_{\mu'}$ นั้นจะเป็น $y_{\mu'} \varepsilon Y_\mu$ และตัวแปรผัน $Y_{\mu'}$ และ $X_{\mu'}$ จะเป็นตัวแปรผันอันดับที่สอง สำหรับทุกค่าของ $Y_{\mu'}(i),\ i = 1,\ldots g_\mu$ ของทุกสมการพฤติกรรมจะเป็น

$$(3.21) \quad y_{\mu''}(i,j) = Y_{\mu''}(i,j)\gamma_{\mu''}(i,j) + X_{\mu''}(i,j)\beta_{\mu''}(i,j)\left[+u_{\mu''}(i,j)\right] ,$$

$$j = 1,\ldots .g_{\mu'}(i)$$

$$i = 1,\ldots .g_\mu$$

ตัวแปรผัน $Y_{\mu''}(i,j)$ และ $X_{\mu''}(i,j)$ จะเป็นตัวแปรผันอันดับที่สอง และสำหรับตัวแปรผัน $Y_{\mu''}(i,j)$ ก็จะสามารถเขียนได้ในลักษณะเช่นเดียวกันดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

หลังจากทำไปเช่นนี้จนถึงขั้นที่ p ก็จะทำให้ได้เวคเตอร์ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนแต่ละตัว โดยเวคเตอร์นี้จะประกอบไปด้วยสมาชิก p ตัวด้วยกัน สมาชิกตัวแรกจะมีอันดับที่หนึ่ง สมาชิกตัวที่สองจะมีอันดับเป็นที่สอง เช่นนี้สำหรับอันดับใดที่ไม่มีตัวแปรผันก็จะมีค่าเป็น ∞ เช่น เมื่อ p = 5 และตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนตัวใดตัวหนึ่งจะมีอันดับ 1,2 และ 4 ดังนั้นจะได้เวคเตอร์ที่มีลักษณะดังนี้

[1/] FISHER (1965) p. 621-628

$f = (1, 2, 4, \infty, \infty)$

ทุก ๆ 2 เวคเตอร์ , f และ h เราสามารถสร้างตัวเลข β ได้ดังนี้

(3.22) $\beta(f) > \beta(h) \leftrightarrow f > h$

$$\begin{bmatrix} f_i = h_i \\ \\ f_j > h_j \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots\ldots j-1 \\ \\ j \qquad 1 < j \leq p \end{array}$$

ตามกฎดังกล่าวสามารถกำหนดอันดับที่ β ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทุกตัวได้

ในการสร้าง $\hat{Y}_\mu$ เพื่อแทน Y_μ นั้น ให้เลือกตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนซึ่งมีอันดับของตัวเลข β ต่ำที่สุด ก่อนและตัวต่อไปให้เลือกตัวแปรผันที่มีอันดับของตัวเลข β รองลงไปตามลำดับ ทำเช่นนี้จนได้ตัวแปรผันเครื่องมือ T-2 ตัวก็จะได้เมทริกซ์ของ X_I

ถึงแม้วิธีนี้จะมีวิธีการเลือกตัวแปรผันเครื่องมือโดยอัตโนมัติก็ตามก็ยังมีข้อเสียที่สำคัญ 2 ประการด้วยกัน

ประการแรก ไม่สามารถป้องกันไม่ให้ตัวแปรผันที่มีความแตกต่างของเวลาเข้าไปอยู่ในตัวแปรผันเครื่องมือได้ ซึ่งวิธีแก้นั้น FISHER เสนอให้กำหนดน้ำหนักของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายนอกและตัวแปรผันที่มีความแตกต่างของเวลาให้ต่างกันในการกำหนดตัวเลข β โดยให้โอกาสสำหรับตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายนอกก่อน ซึ่งถ้าเป็นดังนั้นข้อดีของวิธีนี้ที่สามารถเลือกตัวแปรผันเครื่องมือได้โดยอัตโนมัติก็จะหมดไป

ประการที่สอง THEIL[1/] มีความเห็นว่าวิธีดังกล่าวจะไม่ทำให้ 2 SLS เป็นวิธีที่อยู่ในกลุ่มของ Limited Information Method อีกต่อไป เพราะในการเลือกตัวแปรผันเครื่องมือนั้นทำจากสมการโครงสร้างของโมเดล จึงทำให้ไม่สามารถทดสอบไปทีละสมการได้ นอกจากนั้น ข้อผิดพลาดจากการกำหนดตัวแปรผันของโมเดล ยังจะมีผลทำให้ได้ค่า

[1/] THEIL (1972) p 222

ของ Y_{μ} ที่ไม่ดีอีกด้วย ลักษณะดังกล่าวจะทำให้วิธีของ FISHER ไม่สามารถเพิ่มประสิทธิภาพของพารามิเตอร์ขึ้นได้

3.1.5 วิธีของ RUBLE[1]

วิธีนี้มีรายละเอียดในการคำนวณดังนี้คือ

กำหนดเวคเตอร์ $B \;\underline{\Delta}\; [b_1\, b_2 \ldots\ldots b_n]$ และเวคเตอร์ a ซึ่งไม่อยู่ใน B โดยสามารถเขียนเวคเตอร์ a ได้ดังนี้

โดยที่สัญลักษณ์

$||$ หมายถึงเกิดจากแถวตั้งของ

$\perp$ หมายถึงเป็นออโธโกนัล กับ

กำหนดเมทริกซ์ $A \;\underline{\Delta}\; [a_1\, a_2 \ldots\ldots a_M]$ ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$A = A_{||B} + A_{\perp B}$

เช่นเดียวกันสำหรับเมทริกซ์ Y จะเขียนได้ว่า

$$(3.23) \quad Y = Y_{||X} + Y_{\perp X} = X(X'X)^{-1} X'Y + \hat{V}$$

ดังนั้น

$$Y'_{X}\, Y_{||X} = Y'X(X'X)^{-1} X'X(X'X)^{-1} X'Y$$

$$= Y'X(X'X)^{-1} X'Y$$

$$= [Y'Y]_{||X}$$

และ

$$Y'_{\perp X}\, Y_{\perp X} = Y'Y - [Y'Y]_{||X} = [Y'Y]_{\perp X}$$

---

[1] RUBLE (1968) p 39

วิธีการคำนวณก็คือคำนวณหา $|Y'Y|_{||X}$ เสียก่อนแล้วนำไปแทนในสูตรการคำนวณของวิธี 2 SLS วิธีที่ง่ายที่สุดนั้นให้คำนวณหาค่า $|Y'Y|_{\perp X}$ เสียก่อนจะได้ $|Y'Y|_{||X}$ เพราะ

$$(3.25) \qquad [Y'Y]_{||X} = Y'Y\ [Y'Y]_{\perp X}$$

ถ้าหากเมทริกซ์ $X'X$ มีค่าอินเวอสแล้ว $[Y'Y]_{\perp X}$ ก็คือ $\hat{V}'\hat{V}$ นั่นเอง แต่ถ้า $X'X$ ไม่มีค่าอินเวอสจะได้

$$(3.26) \qquad [Y'Y]_{||X} = Y'Y$$

ในการคำนวณหา $[Y'Y]_{\perp X}$ ทำได้โดยสร้างเมทริกซ์

$$(3.27) \qquad \begin{bmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{bmatrix}$$

แล้วใช้วิธีการทำทางแถวนอน ตามวิธีของ Gauss จนกระทั่งข้างใต้เส้นทะแยงมุมของเมทริกซ์ เป็นศูนย์หมดทุกตัวจึงหยุดการคำนวณและจะได้ $[Y'Y]_{\perp X}$ กล่าวคือ

$$(3.28) \qquad \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ \underline{0} & |Y'Y|_{\perp X} \end{bmatrix}$$

โดยที่

A_{XX} เป็นเมทริกซ์มีขนาด $(K \times K)$

A_{XY} เป็นเมทริกซ์มีขนาด $(K \times G)$

วิธีการนี้สามารถใช้บางส่วนของเมทริกซ์ X คือ X_I มาใช้ในการคำนวณแทน X ได้ โดยที่เมทริกซ์ X_I จะต้องเป็นไปตามที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.11 จำนวนของตัวแปรผันเครื่องมือที่จะใช้ประกอบไปด้วย $k_I = k_\mu + k_R$ โดย k_R จะต้องกำหนดขึ้นเอง วิธีการคำนวณจะเป็นไปดังที่ได้กล่าวมาแล้วโดยผลลัพธ์ก็คือ

$$(3.29) \quad [Y'Y] \perp X_I = [Y'Y] \perp [X_\mu \quad X_R]$$

โดยที่ X_R เป็นเมทริกซ์ขนาด $(T \times k_R)$ ของตัวแปรผันเครื่องมือ

วิธีนี้มีข้อดีอยู่ตรงที่ว่าสิ่งที่จะต้องกำหนดขึ้นเองมีเพียงตัวเดียว คือ k_R โดยจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขคือ $k_R \geq g_\mu$ หรือ $k_R \geq \max\limits_{\mu} g_\mu$, $\mu = 1,.....M$ และ $k_R \leq T-k_\mu$

วิธีนี้เช่นเดียวกับวิธีของ FISHER ที่สามารถสังเกตผลกระทบของตัวแปรผันเครื่องมือที่ใช้ได้ เนื่องจากในการหาพิฟวัท ทำให้เรารู้ว่าจะเลือกตัวแปรผันใด ในอีกทางหนึ่งก็มีสิ่งที่จะต้องกำหนดขึ้นเองน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ นอกจากนั้น 2 SLS, k-class และ LIML ที่ใช้วิธีนี้ก็จะยังคงเป็นวิธีในกลุ่มของ Limited Information Method อยู่ อย่างไรก็ตาม วิธีนี้จนถึงปัจจุบันยังไม่มีใครใช้ในทางปฏิบัติ

3.1.6 วิธีของ THEIL[1/]

วิธีนี้พัฒนาขึ้นมาจากวิธี 2 SLS เดิมนั่นเอง โดยเปรียบเทียบแล้ววิธีนี้จะง่ายกว่าวิธีของ FISHER และวิธีกำหนดตัวแปรผันเครื่องมือด้วยวิธี พรินซิพัล-คัมโพนีนท อีกทั้งยังเป็นวิธีที่สามารถจัดอยู่ในกลุ่มของ Limited-Information Method และเป็นวิธีที่มีกฎเกณฑ์แน่นอนกว่าด้วย

[1/] THEIL (1972)

จากสูตรในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี 2 SLS คือ

$$(3.30)\quad \begin{bmatrix} Y'_\mu X(X'X)^{-1} X' y_\mu \\ \\ X'_\mu y_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_\mu X(X'X)^{-1} X'Y_\mu & Y'_\mu X_\mu \\ \\ X'_\mu Y_\mu & X'_\mu X_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_\mu \\ \\ \hat{\beta}_\mu \end{bmatrix}$$

ดึงออกมา k_μ สมการซึ่งอยู่ในส่วนล่างจะได้

$$(3.31)\quad X'_\mu y_\mu = X'_\mu \begin{bmatrix} Y_\mu & X_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_\mu \\ \\ \hat{\beta}_\mu \end{bmatrix} = X'_\mu Z_\mu \hat{\delta}_\mu$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่มีเมทริกซ์ $X'X$ ปรากฏอยู่ สำหรับ β_μ นั้นหาค่าได้ดังนี้

$$(3.32)\quad \hat{\beta}_\mu = (X'_\mu X_\mu)^{-1} (X'_\mu y_\mu - X'_\mu Y_\mu \hat{\gamma}_\mu)$$

ซึ่งเราจะทราบค่าของ $\hat{\beta}_\mu$ ได้ถ้าทราบค่าของ $\hat{\gamma}_\mu$ และ $(X'_\mu X_\mu)^{-1}$ มีค่าอินเวอส

จากระบบสมการทั้งหมดของโมเดลคือ

$$(3.33)\quad X' y_\mu = X' Z_\mu \delta_\mu + X' u_\mu$$

แบ่งออกมา k_μ สมการ แล้วจัดอยู่ในกลุ่มที่หนึ่งคือ

$$(3.34)\quad X'_\mu y_\mu = X'_\mu Z_\mu \delta_\mu + X'_\mu u_\mu$$

และอีก $K - k_\mu$ สมการจัดอยู่ในกลุ่มที่สองคือ

$$(3.35) \qquad \bar{X}'_{\mu}\, y_{\mu} = \bar{X}'_{\mu}\, Z_{\mu}\, \delta_{\mu} + \bar{X}'_{\mu}\, u_{\mu}$$

โดยที่

$\bar{X}_{\mu}$ $\underline{\Delta}$ เมทริกซ์ขนาด $[T \times (K-k_{\mu})]$ ของตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทุกตัวของโมเดลซึ่งไม่รวมอยู่ในสมการที่ μ

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรผันกระทบของระบบสมการ (3.35) นั้นก็คือ $\sigma_{\mu\mu}(\bar{X}'_{\mu}\bar{X}_{\mu})$ แต่เนื่องจากเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ 2 ทำให้ $\bar{X}'_{\mu}\bar{X}_{\mu}$ ไม่มีค่าอินเวอส THEIL จึงเสนอให้แทนเมทริกซ์นี้ด้วยเมทริกซ์ซึ่งจะเรียกว่า D_{μ} ซึ่งมีขนาดเท่ากันและเป็น พ็อซซิทิฟว เด็ฟฟินิท จากนั้นจะสามารถหาสูตรการประมาณค่าพารามิเตอร์ในรูปของ D_{μ} ได้ โดยหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชั่นกำลังสองต่อไปนี้

$$(3.36) \quad Q(d^*_{\mu}) = [\bar{X}'\, y_{\mu} - \bar{X}'_{\mu}\, Z_{\mu} d^*_{\mu}]\, D^{-1}_{\mu}\, [\bar{X}'_{\mu}\, y_{\mu} - \bar{X}'_{\mu}\, Z_{\mu} d^*_{\mu}]$$

$$= (y_{\mu} - Z_{\mu} d^*_{\mu})'\, C_{\mu}\, (y_{\mu} - Z_{\mu} d^*_{\mu})$$

โดยในฟังก์ชั่นนี้ D^{-1}_{μ} แทน $(\bar{X}'_{\mu}\ \bar{X}_{\mu})^{-1}$ และ

$$(3.37) \qquad C_{\mu} = \bar{X}'_{\mu}\, D^{-1}_{\mu}\, \bar{X}_{\mu}$$

ซึ่ง d^*_{μ} จะเป็นเวคเตอร์แถวตั้ง $(n_{\mu} \times 1)$ ของพารามิเตอร์ของโมเดลที่ต้องการ ส่วนสมการข้อจำกัดในการหาค่าต่ำสุดของ (3.36) นั้นก็คือ

$$(3.38) \qquad X'_{\mu}\, y_{\mu} = X'_{\mu}\, Z_{\mu}\, d^*_{\mu}$$

จะได้สูตรการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังนี้

$$(3.39) \begin{bmatrix} Z'_{\mu} C_{\mu} Z_{\mu} & Z'_{\mu} X_{\mu} \\ & \\ X'_{\mu} Z_{\mu} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^*_{\mu} \\ \\ \lambda_{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{\mu} C_{\mu} y_{\mu} \\ \\ X'_{\mu} y_{\mu} \end{bmatrix}$$

โดยที่ λ_μ เป็นเวคเตอร์ $(k_\mu \times 1)$ ของตัวคูณ Lagrange

จากการทดสอบวิธีตามสูตร (3.39) กับโมเดล KLEIN I นั้น ปรากฏว่าจะให้ค่าพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับ 2 SLS มาก แต่มีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานสูงกว่า

หัวใจสำคัญของวิธีนี้อยู่ที่การกำหนดเมทริกซ์ C_μ และ D_μ โดย THEIL แนะนำว่าควรจะสร้างเมทริกซ์ D_μ ให้เป็นเส้นทะแยงมุม โดยสมาชิกที่อยู่บนเส้นทะแยงมุมนั้นก็คือค่าของ $\bar{X}_\mu' \bar{X}_\mu$

จะเห็นได้ว่าวิธีนี้ง่ายกว่าและมีกฎเกณฑ์ที่แน่นอนกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีที่กล่าวมาแล้วในตอนต้น อย่างไรก็ตามวิธีนี้ก็ยังไม่มีใครใช้ในทางปฏิบัติโดยเฉพาะกับโมเดลขนาดใหญ่ และยังไม่มีการดัดแปลงวิธีดังกล่าวเพื่อใช้กับวิธี 3 SLS แต่อย่างใด

3.1.7 <u>วิธีทำซ้ำโดยใช้ตัวแปรผันเครื่องมือ</u>[1]

สูตรการคำนวณด้วยวิธี 2 SLS ที่แสดงไว้ใน (1.14) นั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ตัวแปรผันเครื่องมือได้ดังนี้[2]

$$(3.40) \qquad \hat{\delta}\ 2\ SLS = \left[\begin{bmatrix} \hat{Y}'_\mu \\ \\ X'_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_\mu & X_\mu \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}'_\mu \\ \\ X'_\mu \end{bmatrix} y_\mu$$

$$= \left[\begin{bmatrix} \hat{Y}'_\mu \\ \\ X'_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_\mu & X_\mu \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}'_\mu \\ \\ X'_\mu \end{bmatrix} y_\mu$$

---

[1] MOSBAEK and WOLD (1970), DUTTA and LYTTKENS (1974)

[2] GOLDBERGER (1964) p 284-287 and 331-332

ตัวแปรผันเครื่องมือในที่นี้ก็คือ $\hat{Y}_{\mu}$ แต่เนื่องจากเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย คือ $T < K$ จึงไม่สามารถคำนวณหาค่าได้ วิธีแก้ปัญหานี้ให้ทำดังต่อไปนี้คือ

1) ประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการโครงสร้างครั้งแรกด้วยวิธี OLS

2) สร้างเมทริกซ์ $\hat{\beta}$ และ $\hat{\Gamma}$ ของสมการถอดรูป เช่น ในสมการ (1.1)

3) จาก (1.12) เราจะได้

$$(3.41) \qquad \hat{Y} = X \hat{\beta} \hat{\Gamma}^{-1}$$

โดยที่ $\hat{Y}_{\mu}$, $\mu = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots M$ เป็นเซ็ทย่อยของ $\hat{Y}$

4) แทน (3.41) ใน (3.40) จะได้พารามิเตอร์ของสมการโครงสร้างครั้งที่ 2

5) จากพารามิเตอร์ในข้อ 4 สร้างเมทริกซ์ $\hat{\beta}$ และ Γ ของสมการถอดรูปใหม่ และจะได้ (3.41) ใหม่ และใช้เป็นตัวแปรผันเครื่องมือต่อไป

DUTTA and LYTTKENS[1/] พิสูจน์ให้เห็นว่าโดยทั่วไปวิธีนี้จะเข้าหาดุลยภาพและจะมีคุณสมบัติเมื่อข้อมูลไม่จำกัด เช่น เดียวกับ 2 SLS จากการใช้วิธีนี้ในทางปฏิบัติพบว่าแม้จะมีจำนวนข้อมูลน้อยมาก แต่วิธีนี้ก็ยังสามารถให้ค่าพารามิเตอร์ที่เบี่ยงเบนไปน้อยมาก[2/]

ที่กล่าวมาทั้งหมด 6 วิธีนี้ โดยสรุปแล้ววิธีที่ง่ายที่สุดและมีหลักเกณฑ์ที่แน่นอนที่สุดก็คือวิธีของ RUBLE ส่วนวิธีที่ใช้กันแพร่หลายอย่างมากในทางปฏิบัติก็คือวิธีกำหนดตัวแปรผันเครื่องมือด้วยวิธี พรินซิพัล-คัมโพนีนทและวิธีทำซ้ำโดยใช้ตัวแปรผันเครื่องมือ ซึ่งจากผลในการใช้ในทางปฏิบัติจนถึงปัจจุบันพบว่าทั้ง 2 วิธีนี้แม้ว่าจะมีขนาดข้อมูลน้อยมาก ก็สามารถให้ค่าพารามิเตอร์ที่ เบี่ยงเบนน้อยมาก และสามารถทำให้การพยากรณ์โดยโมเดลดีขึ้นอย่างมากด้วย อย่างไรก็ตามวิธีทำซ้ำโดยใช้ตัวแปรผันเครื่องมือนี้ก็มีข้อเสียตรงที่ต้องใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมาก เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่น ๆ

สำหรับการแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยคือ $T < K$ นี้ยังสามารถทำได้โดยใช้การหาอินเวอสแบบทั่วไป $(X'X)^{+}$ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

[1/] DUTTA and LYTTKENS (1974)

[2/] DUTTA and SHARMA (1973), DUTTA and LYTTKENS (1974)

3.2 <u>วิธีแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย ในกรณีมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนสมการพฤติกรรมของโมเดล (กรณีที่ 3)</u>

3.2.1 <u>เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรผันกระทบเป็นเส้นทะแยงมุม</u>

การหลีกเลี่ยงที่จะไม่ให้เกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ 3 นี้สามารถทำได้โดยสมมติให้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรผันกระทบหรือ Σ เป็นเส้นทะแยงมุมกล่าวคือ

(3.42) $$\Sigma \;\underline{\Delta}\; \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix}$$

ซึ่งในกรณีนี้ Σ จะมีค่าอินเวอสเสมอ อย่างไรก็ตามการที่จะเป็นไปตามข้อสมมตินี้ได้โมเดลจะต้องเป็นโมเดลในแบบของ WOLD[1/] คือเป็นรีเคอซีฟ ซึ่งโมเดลแบบนี้จะต้องมีข้อสมมติต่อไปว่า

(3.43) $$\Gamma \;\underline{\Delta}\; \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1G} \\ 0 & 1 & & \gamma_{2G} \\ & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ในกรณีเช่นนี้ FIML จะให้ค่าพารามิเตอร์เหมือนกับ OLS สำหรับเมทริกซ์ Σ นั้นจะแทนด้วย $\hat{\Sigma}$ ซึ่งสมมติให้เป็น

[1/] คำจำกัดความและลักษณะของโมเดลแบบของ WOLD มีอยู่ใน THEIL (1971) p 460-466, GOLDBERGER (1964) p 354-356, DHRYMES (1970) p. 308-311.

$$(3.44) \qquad \hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \hat{\sigma}_{MM} \end{bmatrix}$$

ซึ่งข้อสมมติ (3.44) นี้ไม่มีการให้เหตุผลสนับสนุนแต่อย่างใด[1]

ภายใต้ข้อสมมติ (3.44) วิธี 3 SLS จะให้ค่าพารามิเตอร์เหมือนกับ 2 SLS และ ZA จะให้ค่าพารามิเตอร์ที่เหมือนกับ OLS[2]

3.2.2 การแบ่งโมเดลออกเป็นส่วน ๆ

ถ้าหากเราแบ่งโมเดลซึ่งมีสมการโครงสร้าง M สมการ ออกเป็น s ส่วนโดยแต่ละส่วนมีตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายใน G_s ตัว และตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อน K_s ตัว เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรผันกระทบจะมีลักษณะดังนี้

$$(3.45) \qquad \hat{\Sigma} \;\underline{\Delta}\; \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11} & \cdots & \hat{\Sigma}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\Sigma}_{s1} & \cdots & \hat{\Sigma}_{ss} \end{bmatrix}$$

โดยที่เมทริกซ์กำลังสองของแต่ละส่วนคือ $\hat{\Sigma}_{rr}$ จะมีขนาดเท่ากับ M_r ดังนั้นถ้าหากเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยกรณีที่ 3 คือ $T < M$ เราก็สามารถแบ่งโมเดลออกเป็นส่วน ๆ ได้จนกระทั่ง

$$(3.46\ a) \qquad T \geq \max M_r \quad , r = 1,\ldots\ldots s$$

---

[1] BROWN (1959), EISENPRESS (1962) p 344

[2] ZELLNER (1962) p 351, ZELLNER and THEIL (1962) p 58

และเช่นเดียวกัน เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยกรณีที่ 4 ก็จะทำได้โดยแบ่งโมเดลออกเป็นส่วน ๆ จนกระทั่ง

$$(3.46\ b) \qquad T > \max\left[G_r + K_r\right],\ r = 1, \ldots s$$

ดังนั้นในแง่แต่ละส่วนของ s ส่วนจะมี $\hat{\Sigma}_{rr}$ ที่มีค่าอินเวอสเสมอและเราสามารถแยกใช้วิธี FIML, 3 SLS และ ZA กับแต่ละส่วนได้ อย่างไรก็ตามประสิทธิภาพของพารามิเตอร์ที่ได้จะลดลง กล่าวคือ ประสิทธิภาพของ 3 SLS ที่ใช้กับแต่ละส่วนจะมีค่าอยู่ระหว่างประสิทธิภาพของ 2 SLS และ 3 SLS ที่ใช้กับโมเดลทั้งหมด[1] และประสิทธิภาพของ ZA ที่ใช้กับแต่ละส่วนจะอยู่ระหว่าง OLS และ ZA ที่ใช้กับโมเดลทั้งหมด

3.2.3 <u>วิธีของ COURT</u>[2]

วิธีนี้เป็นวิธีใหม่ซึ่งพึ่งจะพัฒนาขึ้นมาเมื่อไม่นานมานี้นี่เองเพื่อแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ 3 เริ่มต้นจากสูตรการประมาณค่าพารามิเตอร์ของ 3 SLS ในสมการ (1.8) ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$(3.47) \qquad \hat{\delta}C = A'(I \otimes X')y$$

โดยที่เมทริกซ์ A สามารถหาค่าได้จากระบบสมการต่อไปนี้

$$(3.48) \qquad \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \otimes X'X & (I \otimes X')Z \\ & \\ Z'(I \otimes X) & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \\ I \end{bmatrix}$$

ซึ่งส่วนแรกของระบบสมการนี้ก็คือ

$$(3.49) \qquad (\hat{\Sigma} \otimes X'X)A = -(I \otimes X')ZC$$

---

[1] THEIL (1971) p 529, 537

[2] COURT (1974)

โดยที่

(3.50) $$A = -\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right] (I \otimes X')ZC$$

แทน (3.50) ในส่วนที่สองของระบบสมการ (3.48) จะได้

(3.51) $$-Z'(I \otimes X)\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right] (I \otimes X')ZC = I$$

และ

(3.52) $$M = -\left(Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X'\right]Z\right)^{-1}$$ [1/]

แทนค่า M ใน (3.50) จะได้

(3.53) $$A = \left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right] (I \otimes X')Z\left(Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X'\right]Z\right)^{-1}$$

หรือ

(3.54) $$A' = \left(Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X'\right] Z\right)^{-1} Z'(I \otimes X) \left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right]$$

แทนใน 3.47) จะได้

(3.55) $$\hat{\delta}C = \left(Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X'\right] Z\right)^{-1} Z'(I \otimes X) \left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right] (I \otimes X')y$$

หรือ

(3.56) $$\hat{\delta}C = \left(Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X'\right] Z\right)^{-1} Z'\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X'\right] y$$

1/ กฎในการแปลงดูได้จาก THEIL (1971) p 304

ซึ่งจะเรียกว่าเป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของ COURT ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายกับวิธี 3 SLS แตกต่างกันตรงที่ว่าถึงแม้ $\hat{\Sigma}$ และ Σ จะไม่มีค่าอินเวอส ซึ่ง 3 SLS จะใช้ไม่ได้อีกต่อไป แต่วิธีของ COURT ตาม (3.47) จะสามารถคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ได้

เงื่อนไขของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ของ COURT นี้มีอยู่ประการเดียวคือ เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \otimes X'X & (I \otimes X')Z \\ Z'(I \otimes X) & \underline{0} \end{bmatrix}$$

จะต้องสามารถหาค่าอินเวอสได้ ในกรณีที่ $\hat{\Sigma}$ ไม่มีค่าอินเวอส เมทริกซ์ดังกล่าวจะสามารถหาค่าอินเวอสได้จากระบบสมการ

$$(3.57) \quad \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} \otimes X'X & (I \otimes X')Z \\ Z'(I \otimes X) & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & A \\ A' & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a & \underline{0} \\ \underline{0} & I_b \end{bmatrix}$$

โดยที่

$A \ \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(MK \times N)$

$D \ \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(N \times N)$

$C \ \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(MK \times MK)$

$I_a \ \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(MK \times MK)$

$I_b \ \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(N \times N)$

COURT ได้ชี้ให้เห็นว่าภายใต้ข้อสมมติที่เกี่ยวกับตัวแปรผันกระทบดังในหัวข้อ (1.2) วิธีดังกล่าวนี้จะมีลักษณะคงเส้นคงวา และ

$$(3.58) \qquad \text{p lim} \quad \sqrt{T}\,(\hat{\delta}C-\delta) \sim N[\underset{\sim}{0}\,,\ A'_x\,(\Sigma \otimes Q)\,A_x]$$

$$\text{p lim} \quad \sqrt{T}\,(\hat{\delta}C-\delta) \sim N[\underset{\sim}{0}\,,\ -D_x]$$

โดยที่

	A_x	p lim TA
	D_x	p lim TD
และ	Q	p lim $\frac{1}{T} X'X$

อย่างไรก็ตามวิธีของ COURT[1/] จนถึงปัจจุบันยังไม่มีการใช้ในทางปฏิบัติแต่อย่างใด วิธีนี้มีข้อเสีย 2 ประการคือ

ประการแรก คุณลักษณะแบบมีข้อมูลไม่จำกัดของวิธีนี้ยังไม่เป็นที่ทราบแน่นอน[1]

ประการที่สอง วิธีดังกล่าวนี้ไม่สามารถใช้กับ FIML ได้

วิธีการแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ $T < M$ นี้สามารถทำได้อีกทางหนึ่ง โดยการใช้การหาอินเวอสแบบทั่วไป ซึ่งจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในบทต่อไป

[1/] COURT (1974) p 557

บทที่ 4

การแก้ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยโดยการหาอินเวอสแบบทั่วไป

4.1 ลักษณะของอินเวอสแบบทั่วไป[1]

กำหนดระบบสมการคือ

$$(4.1) \qquad Ax = b$$

โดยที่

A	$\underline{\Delta}$	เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ
b	$\underline{\Delta}$	เวคเตอร์ขนาด $(n \times 1)$ ของตัวคงที่
x	$\underline{\Delta}$	เวคเตอร์ขนาด $(n \times 1)$ ของตัวแปรผันในปัญหา

ถ้า A มีขนาด $(n \times n)$ แล้ว ดังนั้น $r(A) = n$ ค่าของ x จากระบบสมการ (4.1) จะสามารถหาได้จาก

$$(4.2) \qquad x = A^{-1} b$$

โดยที่ A^{-1} เป็นค่าอินเวอสของ A แต่ถ้า A มีขนาด $(m \times n)$ โดย $m > n$ แล้วจะมีค่าอินเวอสทางด้านซ้ายไม่จำกัดจำนวน แต่จะไม่มีค่าอินเวอสทางด้านขวา เมื่อ $r(A) = n$ อย่างไรก็ตาม เราสามารถใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด เพื่อหาค่าอินเวอสที่แน่นอนของ A ได้

$$(4.3) \qquad x = (A'A)^{-1} A' b \quad \underline{\Delta} \quad A^{+}b$$

$A^{+}b$ ในที่นี้จะเป็นคำตอบของระบบสมการ (4.1) เมื่อ $r(A) = n$ โดยที่ A^{+} ก็คือ อินเวอสแบบทั่วไป ของ A

---

[1] NOBLE (1969) p 142-146, THEIL (1971) p 268-274

สำหรับในกรณีที่ $r(A) < n$ ก็สามารถหาคำตอบที่แน่นอนสำหรับระบบสมการ (4.1) ได้ดังนี้

กำหนดให้ A มีขนาด $(m \times n)$ โดย $m < n$ และ $r(A) = m$ ให้แบ่งระบบสมการออกเป็นดังนี้

$$(4.4) \qquad A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$A_1 \;\underline{\Delta}\;$ เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A มีขนาด $(m \times m)$ และมีค่าอินเวอส

$A_2 \;\underline{\Delta}\;$ เป็นเมทริกซ์ย่อยของ A มีขนาด $[m \times (n - m)]$

$x_1 \;\underline{\Delta}\;$ เป็นเวคเตอร์ย่อยของ x มีขนาด $(m \times 1)$

$x_2 \;\underline{\Delta}\;$ เป็นเวคเตอร์ย่อยของ x มีขนาด $[(n - m) \times 1]$

ระบบสมการ (4.1) คือสามารถเขียนได้ดังนี้

$$(4.5) \qquad A_1 x_1 = b - A_2 x_2$$

คำตอบก็คือ

$$(4.6) \qquad x_1 = A_1^{-1} (b - A_2 x_2)$$

ซึ่งจะมีได้หลายค่าขึ้นอยู่กับค่าของ x_2 ส่วนคำตอบที่แน่นอนนั้นจะสามารถหาได้โดยหาค่าต่ำสุดของ $x'x$ โดยมีเงื่อนไขคือ $Ax = b$ ดังนี้

$$(4.7) \qquad P = x'x + 2\lambda'(b - Ax)$$

โดยที่ P เป็นสเคลาร และ λ เป็นเวคเตอร์ขนาด $(m \times 1)$ ของตัวคูณ Lagrange หาค่าดิฟฟีเร็นซิเอชันของ P เทียบกับ x และ λ แล้วให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$(4.8) \qquad x = A'\lambda$$

และ

(4.9) $Ax = b$

แทน (4.8) ใน (4.9) จะได้

(4.10) $AA'\lambda = b$ $\lambda = (AA')^{-1}b$

สมการ (4.10) นี้ถูกต้องเพราะ $r(AA') = m$ แทนใน (4.8) จะได้

(4.11) $x = A'(AA')^{-1}b$

สมมติให้ A เป็นเมทริกซ์มีแร็งค เท่าไรก็ได้ เช่น $r(A) = k$ โดยที่ $k < m$ และ $k < n$ เมทริกซ์ A จะมีขนาด $(m \times n)$ เช่นเดิม ดังนั้นเราก็จะสามารถหาคำตอบที่แน่นอนของระบบสมการ (4.1) ได้โดย

1) หาค่าต่ำสุดของ $(b - Ax)'(b - Ax)$

2) หาค่าต่ำสุดของ $x'x$

เราสามารถแบ่งเมทริกซ์ A ออกได้เป็น 2 เมทริกซ์คือ

(4.12) $A = BC$

โดยที่

B เมทริกซ์ขนาด $(m \times k)$ และ $r(B) = k$

C เมทริกซ์ขนาด $(k \times n)$ และ $r(C) = k$

หาค่าต่ำสุดตาม 1) จะได้

(4.13) $A'Ax = A'b$

แต่ $r(A'A) = r(A) = k < n$ นั่นคือ $A'A$ ไม่มีค่าอินเวอส สมการ (4.13) จึงไม่สามารถหาคำตอบได้

จาก (4.12) เราสามารถเขียน (4.13) ใหม่ดังนี้

(4.14) $C'(B'B)Cx = C'B'b$

เอา C คูณข้างหน้า

(4.15) $$CC'(B'B)Cx = CC'B'b$$

เนื่องจาก CC' และ $B'B$ มีค่าอินเวอส ดังนั้นเราจึงสามารถคูณ (4.15) ได้ด้วย $(CC')^{-1}$ จากนั้นคูณด้วย $(B'B)^{-1}$ จะได้

(4.16) $$Cx = (B'B)^{-1}B'b$$

เนื่องจาก C เป็นเมทริกซ์ขนาด $(k \times n)$ และ $r(C) = k$ เราจึงสามารถหาคำตอบจาก (4.16) ได้เช่นเดียวกับ (4.11) ดังนี้

(4.17) $$x = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B'b = A^{+}b$$

A^{+} นี้เรียกว่า MOORE-PENROSE-Inverse ของ A[1/] ซึ่งเป็นแบบที่มีความสำคัญมากของอินเวอสแบบทั่วไป MOORE-PENROSE-Inverse มีคำจำกัดความดังนี้คือ

(4.18) $$A^{+} = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B'$$

NOBLE ได้แสดงให้เห็นว่า ไม่ว่า A จะมีลักษณะอย่างใดสามารถเขียนได้ตาม (4.12) เสมอ[2/] MOORE-PENROSE-Inverse จะมีคุณลักษณะ 4 ประการคือ

(4.19) $$AA^{+}A = A$$

(4.20) $$A^{+}AA^{+} = A^{+}$$

(4.21) $$(AA^{+})' = AA^{+}$$

(4.22) $$(A^{+}A)' = A^{+}A$$

[1/] PENROSE (1955)

[2/] NOBLE (1969) p 144-145 ทฤษฎี 5.21

และ MOORE-PENROSE-Inverse ของเมทริกซ์ใด ๆ จะมีเพียงค่าเดียว[1]

วิธีการคำนวณหา MOORE-PENROSE-Inverse นั้นสามารถแสดงได้อีกรูปแบบหนึ่งดังนี้

เริ่มต้นจากเมทริกซ์ A ซึ่งมีขนาด $(m \times n)$ และมีแร็งค คือ k เมทริกซ์ $A'A$ จะได้ส่วนกัน และเป็น พ็อซซิทิฟว-เด็ฟฟินิท ค่ามูลค่าลักษณะและเวคเตอร์ลักษณะของ $A'A$ จะสามารถหาค่าได้จากสมการ

$$(4.23) \qquad (A'A - \lambda I)y = \underset{\sim}{0}$$

และ

$$(4.24) \qquad |A'A - \lambda I| = 0$$

โดยที่ λ เป็นสเกลารและ y เป็นเวคเตอร์ขนาด $(n \times 1)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ต้องการ และเป็นไปตามเงื่อนไข $y'y = 1$

เราสามารถแบ่งเวคเตอร์ลักษณะออกเป็น $[H \quad K]$ โดยที่

$H \quad \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(n \times k)$ ของเวคเตอร์ลักษณะซึ่งมีค่ามูลค่าลักษณะเป็นบวก (เนื่องจาก $r(A'A) = r(A) = k$)

$K \quad \underline{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ ขนาด $[n \times (n-k)]$ ของเวคเตอร์ลักษณะซึ่งมีรากของศูนย์อยู่เป็นจำนวน $(n-k)$ ตัว

เนื่องจากเมทริกซ์ของเวคเตอร์ลักษณะเป็น ออโธโกนัล ดังนั้น

$$(4.25) \qquad H'H = I, \; K'K = I, \; H'K = \underset{\sim}{0}$$

$$[H \quad K] \begin{bmatrix} H' \\ K' \end{bmatrix} = I,$$

$$(4.26) \qquad HH' + KK' = I$$

---

[1] THEIL (1971) p 269

เนื่องจากเวคเตอร์ลักษณะใน K นั้นมีรากของศูนย์อยู่ ดังนั้น $A'AK = \underset{\sim}{0}$ และ $(AK)'AK = \underset{\sim}{0}$ และดังนั้น $AK = \underset{\sim}{0}$, $AKK' = \underset{\sim}{0}$ เอา A คูณข้างหน้าสมการ (4.26) จะได้

$$(4.27) \qquad AHH' = A$$

กำหนดเมทริกซ์ D ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้

D $\underset{\sim}{\Delta}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด (kxk) ที่เป็นเส้นทะแยงมุม โดยค่าที่เส้นทะแยงมุมเป็นค่า มูลค่าลักษณะ ของ A'A ซึ่งเป็นบวก

ดังนั้น

$$(4.28) \qquad A'A = HDH'$$ [1]

MOORE-PENROSE-Inverse ของ A'A ก็คือ

$$(4.29) \qquad (A'A)^{+} = HD^{-1}H'$$

MOORE-PENROSE-Inverse ของ A ก็คือ

$$(4.30) \quad A^{+} = (A'A)^{+}A' = H.D^{-1}H'A'$$

สมการ (4.29) และ (4.30) จะมีคุณสมบัติตาม (4.19) - (4.22) ทุกประการ[2] ค่า MOORE-PENROSE-Inverse นี้จะมีค่าเดียว ดังนั้น (4.29) จะเหมือนกับ (4.18) เมื่อ A ใน (4.12) ได้ส่วนกัน และเป็นพ็อซซิทิฟว เด็ฟฟินิท และสามารถแทน $(A'A)^{+}$ ใน (4.29) ด้วย A^{+} และ $(BC)^{+}$ โดยที่ $B = C'$ จาก (4.29) จะเห็นได้ว่า $(A'A)^{+} = (A'A)^{-1}$ เมื่อ $r(A'A) = n$ ดังนั้น (4.30) จึงเหมือนกับ (4.18) เมื่อ A มีค่าอินเวอส

---

[1] THEIL (1971) p. 270

[2] THEIL (1971) p. 270

4.2 สำหรับปัญหากรณีที่ 1

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ 1 ก็คือการมีขนาดข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันในสมการ ซึ่งดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 ว่า พบน้อยมากในทางปฏิบัติ ดังนั้นในที่นี้จึงจะกล่าวถึงไว้แต่เพียงเล็กน้อยเท่านั้น

สำหรับ OLS จะเกิดปัญหากรณีที่ 1 ขึ้นเมื่อ $T < n_\mu$ กรณีนี้เมทริกซ์ Z_μ จากสมการ (1.3) ซึ่งมีขนาด $(T \times n_\mu)$ จะมี $r(Z_\mu) = T$ วิธีแก้ปัญหาทำได้เช่นเดียวกับ (4.11) คือ

$$(4.31) \qquad \hat{\sigma}_\mu \, OLS = Z'_\mu (Z_\mu Z'_\mu)^{-1} Y_\mu$$

ส่วนวิธี ZA นั้น ปัญหากรณีที่ 1 จะเกิดขึ้นเมื่อ $T < \max n_\mu$ วิธีแก้ปัญหาต้องเขียนสูตร (1.17) เสียใหม่ดังนี้

$$(4.32) \qquad \hat{\delta}ZA \quad \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} Z'_1 Z_1 & \cdots\cdots & \hat{\sigma}^{1M} Z'_1 Z_M \\ & & \\ \hat{\sigma}^{M1} Z'_M Z_1 & \cdots\cdots & \hat{\sigma}^{MM} Z'_M Z_M \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} \sum_{\mu=1}^{M} \hat{\sigma}^{1\mu} Z'_1 y_\mu \\ \\ \sum_{\mu=1}^{M} \hat{\sigma}^{M\mu} Z'_M y_\mu \end{bmatrix}$$

อินเวอสแบบทั่วไป ซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของสมการนั้น สามารถคำนวณได้ตาม (4.29) เพราะเมทริกซ์ที่ต้องการหาค่าอินเวอสนั้นได้ส่วนกัน วิธีการคำนวณนั้นเป็นตามวิธีของ ZA ที่ได้กล่าวมาแล้ว คือใช้ Aitken-Method กับระบบสมการ (1.2) แต่ใช้ อินเวอสแบบทั่วไป ส่วนค่า $\hat{\sigma}^{ij}$ นั้นได้จากวิธี OLS เช่นเดิม ซึ่งสำหรับสมการที่เกิดปัญหาก็ให้ใช้วิธีตาม (4.31)

สำหรับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบอื่น ๆ คือ 2 SLS, LIML, k-class และ 3 SLS นั้น ต้องประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการถอดรูปเสียก่อน และเนื่องมาจากเงื่อนไข (3.2) และ (3.6) ซึ่งทำให้เกิดปัญหากรณีที่ 2 พร้อมกันไปด้วย ดังนั้นปัญหานี้จึงจะได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

4.3 สำหรับปัญหากรณีที่ 2

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยกรณีที่ 2 นี้เกิดขึ้นเมื่อมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อนทั้งหมดของโมเดล หรือเมื่อ $T < K$ ซึ่งจะทำให้ $r(X'X) = r(X) \leq T$ ดังที่แสดงไว้ในบทที่ 2 สำหรับการแก้ปัญหานี้โดยใช้อินเวอสแบบทั่วไปนั้น จะทำให้วิธี 2 SLS, k-class และ LIML เหมือนกับ OLS ซึ่งแสดงได้ดังนี้

สูตรการหาค่าพารามิเตอร์ตามแบบของ k-class ซึ่งได้แสดงไว้ใน (1.15) นั้นก็คือ

$$\hat{\delta}_{\mu} k = \begin{bmatrix} Y'_{\mu} Y_{\mu} - k\hat{V}'_{\mu} \hat{V}_{\mu} & Y'_{\mu} X_{\mu} \\ X'_{\mu} Y_{\mu} & X'_{\mu} X_{\mu} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y'_{\mu} y_{\mu} - k\hat{V}'_{\mu} y_{\mu} \\ X'_{\mu} y_{\mu} \end{bmatrix}$$

วิธี 2 SLS นั้นต่างจาก LIML เฉพาะตรงค่าของ k เท่านั้น และวิธีที่กล่าวนี้ทุกวิธีต่างจาก OLS ตรงเมทริกซ์หรือเวคเรอร์ที่มี $\hat{V}_{\mu}$ อยู่เท่านั้น $\hat{V}_{\mu}$ นั้นตาม (1.13b) ก็คือ

$$(4.33) \qquad \hat{V}_{\mu} = Y_{\mu} - \hat{Y}_{\mu}$$

ถ้า $r(X'X) = X$ แล้ว จาก (1.13 a) $\hat{Y}_{\mu} = X(X'X)^{-1} X'Y$ ซึ่งก็คือการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดกับสมการถอดรูปนั่นเอง และจะเหมือนกับสมการ (4.3)ที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.1 นั่นเอง แต่เมื่อ $T < K$ เราก็สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของสมการถอดรูปได้โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด คือ หาค่าต่ำสุดของ $\tilde{\pi}'\tilde{\pi}$ ภายใต้เงื่อนไข $r(X) = T$[1] สำหรับสมการ (4.33) นั้นจะเขียนได้เป็น

$$(4.34) \qquad \tilde{V}_{\mu} = Y_{\mu} - X\tilde{\pi}_{\mu} = Y_{\mu} - XX'(XX')^{-1} Y_{\mu}$$

$$= \tilde{\pi} \text{ เมื่อ } r(X) = T < K$$

---

[1] NOBLE (1969) p 143, ทฤษฎี 5.18

ดังนั้น $\tilde{V}_\mu = Y_\mu - Y_\mu = \underline{0}$

เมื่อเป็นเช่นนี้สูตรของ k-class จะกลายเป็น

$$(4.35) \quad \hat{\delta}_\mu k = \begin{bmatrix} Y_\mu' Y_\mu & Y_\mu' X_\mu \\ X_\mu' Y_\mu & X_\mu' X_\mu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_\mu' y_\mu \\ X_\mu' y_\mu \end{bmatrix} = \hat{\delta}_\mu \text{ OLS}$$

วิธี k-class จะเหมือนกับ OLS[1/] สูตร (4.35) ซึ่งก็คือสูตร (1.15) เมื่อ $\tilde{V}_\mu = \underline{0}$ นี้จะมีคุณสมบัติเมื่อข้อมูลไม่จำกัดเช่นเดียวกับ 2 SLS , LIML หรือ k-class ทุกประการ อย่างไรก็ตามจนถึงปัจจุบันก็ยังไม่มีคำอธิบายว่าในกรณีที่มีขนาดตัวอย่างน้อย กล่าวคือการใช้ OLS เมื่อเกิดปัญหากรณีที่ 2 นั้นพารามิเตอร์ที่ได้จะมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับคุณสมบัติแบบข้อมูลไม่จำกัดหรือไม่ และการใช้ OLS เมื่อเกิดปัญหากรณีที่ 2 จะให้พารามิเตอร์ที่มีคุณสมบัติด้อยกว่า วิธี 2SLS และ LIML ตามที่กล่าวมาในหัวข้อ 3.1 หรือไม่ อย่างไรก็ตาม THEIL, FISHER and WADYCKI และ RUBLE[2/] มีความเห็นว่า วิธี 2 SLS และ LIML ที่กล่าวมาในหัวข้อ 3.1 จะดีกว่าการใช้ OLS

สำหรับวิธี 3 SLS และ ZA นั้นเมื่อเกิดปัญหากรณีที่ 2 การใช้อินเวอสแบบทั่วไป จะทำให้ 3 SLS เหมือนกับ ZA กล่าวคือ $\hat{\sigma}^{ij} Z_i' X(X'X)^{-1} X'Z_j$ จะเป็น $\hat{\sigma}^{ij} Z_i'Z_j$ และ $\sum_{\mu=1}^{M} \hat{\sigma}^{i\mu} Z_i' X(X'X)^{-1} X'y_\mu$ [3/]

1/ SWAMY and HOLMES (1971), FISHER and WADYCKI (1971)

2/ THEIL (1971) p 534-535, FISHER and WADYCKI (1971) p 464,

3/ RUBLE (1968) p 108-109

จะเป็น $\sum_{\mu=1}^{M} \hat{\sigma}^{i\mu} Z'_i \, y_\mu$ ด้วยวิธีที่ได้แสดงมาแล้วจาก (1.15) ไปเป็น (4.35)[1/] นั่นเอง

4.4 สำหรับกรณีที่ 3

4.4.1 การหาค่าอิสเวอสแบบทั่วไปของเมทริกซ์ $\hat{\Sigma}$

ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยกรณีที่ 3 เกิดขึ้นเมื่อมีจำนวนข้อมูลน้อยกว่าจำนวนสมการพฤติกรรมอันมีผลให้ $\hat{\Sigma}$ ซึ่งจะใช้แทน Σ ไม่มีค่าอิสเวอส ดังที่ได้แสดงมาแล้วในหัวข้อ 2.2 ว่าเมทริกซ์ $\hat{\Sigma}$ ก็คือ

$$(4.36) \qquad \hat{\Sigma} = \frac{1}{2} \hat{U}'\hat{U}$$

โดยที่ $\hat{U}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $(T \times M)$ ของส่วนเหลือ จำนวน T ตัวจากสมการโครงสร้าง M สมการ เมื่อ $T < M$ จะทำให้เมทริกซ์ $\hat{\Sigma}$ ซึ่งมีขนาด $(M \times M)$ มี

$$(4.37) \qquad r(\hat{\Sigma}) = r(\hat{U}) \leq T < M$$

หรือเขียนโดยทั่วไปว่า $r(\hat{\Sigma}) = T < M$ ดังนั้น $\hat{\Sigma}$ จึงไม่มีค่าอิสเวอส

ดังที่ได้แสดงมาแล้วในหัวข้อ 4.1 จากสมการ (4.12) ถึง (4.18) ถึงวิธีการหาค่า อิสเวอสแบบทั่วไปของเมทริกซ์ใด ๆ ซึ่งมีขนาด $(m \times n)$ และมีแร็งค คือ k ในกรณีของ $\hat{\Sigma}$ ก็เช่นกัน คือ $m = M$, $n = m = M$ และ $k = T$ เราสามารถแยก (4.36) ได้เช่นเดียวกับ (4.12) และเพิ่มค่าคงที่ $\frac{1}{T}$ เข้าไปใน (4.36) ซึ่งสามารถทำได้โดยกำหนดให้

$$(4.38) \qquad \hat{U}_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \hat{U}$$

[1/] SWAMY and HOLMES (1971) p 458

และ

$$(4.39) \qquad \hat{\Sigma} = \hat{U}'_T \hat{U}_T$$

โดยที่

U'_T เช่นเดียวกับเมทริกซ์ B ใน (4.12) และมีขนาด (M x T)

มี $r(\hat{U}'_T) = T$

$\hat{U}_T$ เช่นเดียวกับเมทริกซ์ C ใน (4.12) และมีขนาด (T x M)

มี $r(\hat{U}_T) = T$

จากสมการ (4.18) เราจึงสามารถหาค่า อิสเวอสแบบทั่วไปของ $\hat{\Sigma}$ ได้จาก

$$(4.40) \qquad \hat{\Sigma}^+ = \hat{U}'_T (\hat{U}_T \hat{U}'_T)^{-1} (\hat{U}_T \hat{U}'_T)^{-1} \hat{U}_T$$

และเพื่อให้การคำนวณสั้นเข้าเราสามารถหาค่า $\hat{\Sigma}^+$ ได้ตาม (4.29) ดังนี้

$$(4.41) \qquad \hat{\Sigma}^+ = E \Lambda^{-1} E'$$

โดยที่ E $\underline{\Delta}$ เป็น เมทริกซ์ ขนาด (M x T) ของเวคเตอร์ลักษณะ มีจำนวนเท่ากับ T ซึ่งมีค่า มูลค่าลักษณะ ของ $\hat{\Sigma}$ เป็นบวก

Λ $\underline{\Delta}$ เป็น เมทริกซ์ ขนาด (T x T) ซึ่งเป็นเส้นทะแยงมุมซึ่งค่าบนเส้นทะแยงมุม เป็นค่า มูลค่าลักษณะของ $\hat{\Sigma}$ ที่เป็นบวกจำนวน T ตัว

เช่นเดียวกับที่ได้แสดงมาแล้วในหัวข้อ 4.1 สมการ (4.40) จะเหมือนกับ (4.41) เนื่องจาก MOORE-PENROSE-Inverse มีค่าเดียว

4.4.2 <u>สำหรับวิธีกำลังสองน้อยที่สุด</u>

การใช้อิสเวอสแบบทั่วไปกับวิธี 3 SLS นั้นแสดงได้โดยเริ่มต้นจากสมการโครงสร้าง (1.6) ดังนี้

$$(I \otimes X')y = (I \otimes X')Z\delta + (I \otimes X')u$$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ u นั้นจาก (1.7) เขียนได้ดังนี้

$$\text{var}\ [(I \otimes X')u] = \Sigma \otimes X'X \tag{4.42}$$

และ

$$[\text{var}\ [(I \otimes X')u]]^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes (X'X)^{-1} \tag{4.43}$$

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์เราจะแทนด้วย

$$\widehat{\text{var}}\ [(I \otimes X')u] = \hat{\Sigma} \otimes X'X \tag{4.44}$$

เมื่อ $r(\hat{\Sigma}) = T < M$ เราจะไม่สามารถแทน Σ^{-1} ในสูตร (4.43) ได้ด้วย $\hat{\Sigma}^{-1}$ แต่จะต้องแทนด้วย $\hat{\Sigma}^{+}$ ซึ่งคำนวณมาได้ตาม (4.41) การแทนอินเวอสแบบทั่วไปใน (4.43) นั้นเป็นไปตามทฤษฎีของ SCHOENFELD[1] ซึ่งจะได้

$$[\widehat{\text{var}}\ [(I \otimes X')u]]^{+} = \hat{\Sigma}^{+} \otimes (X'X)^{+} = \hat{\Sigma}^{+} \otimes (X'X)^{-1} \tag{4.45}$$

สำหรับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์นั้น ZELLNER and THEIL[2] แสดงไว้โดยเริ่มต้นจาก

$$\text{plim}\ [\hat{\Sigma} \otimes X'X] = \Sigma \otimes X'X \tag{4.46}$$

สูตรการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับวิธี 3 SLS ใหม่จะเป็น

$$\hat{\delta}\ 3\ SLS = [Z'(I \otimes X)\ [\hat{\Sigma}^{+} \otimes (X'X)^{-1}]\ (I \otimes X')\ Z]^{-1} \tag{4.47}$$

$$Z'(I \otimes X)\ [\hat{\Sigma}^{+} \otimes (X'X)^{-1}](I \otimes X')y$$

1/ SCHOENFELD (1973)

2/ ZELLNER and THEIL (1962) p 59-60

จาก (4.46) จะได้

$$(4.48) \quad \text{plim}\left[\hat{\Sigma}^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right] = (\Sigma \otimes X'X)^{-1}$$

$$= \Sigma^{-1} \otimes (X'X)^{-1}$$

และในรูปของอิสเวอสแบบทั่วไปจะได้

$$(4.49) \quad \text{plim} \left[\hat{\Sigma}^{+} \otimes (X'X)^{+}\right] = (\Sigma \otimes X'X)^{+}$$

$$= \Sigma^{-1} \otimes (X'X)^{-1}$$

ซึ่งเนื่องมาจาก $(X'X)^{-1} = (X'X)^{+}$ เมื่อไม่เกิดปัญหากรณีที่ 2 และ $\hat{\Sigma}^{+} = \hat{\Sigma}^{-1}$ เมื่อ $T > K$ ดังนั้น $\text{plim} \ \hat{\Sigma}^{+} = \Sigma^{-1}$ ดังนั้น

$$(4.50) \quad Z'(I \otimes X) \left[\hat{\Sigma}^{+} \otimes (X'X)^{-1}\right] (I \otimes X')Z$$

จึงเป็นค่าประมาณที่มีคุณสมบัติคงเส้นคงวาของ

$$(4.51) \quad Z'(I \otimes X) \left[\Sigma^{-1} \otimes (X'X)^{-1}\right] (I \otimes X')Z$$

ประสิทธิภาพเมื่อข้อมูลไม่จำกัดของ 3 SLS ใหม่นี้จะสูงกว่า 2 SLS[1] เช่นเดียวกับวิธี 3 SLS เดิม เนื่องจากเมื่อ $T > M$ แล้ว $\hat{\Sigma}^{+} = \hat{\Sigma}^{-1}$ และเมื่อจำนวนตัวอย่างหรือข้อมูลเพิ่มขึ้น $\hat{\Sigma}^{-1}$ จะเข้าใกล้ Σ^{-1}หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นค่าประมาณที่คงเส้นคงวาของ Σ^{-1} นั่นเอง [2] วิธีพิสูจน์ดังกล่าวที่เกี่ยวกับ 3 SLS ใหม่จึงไม่เปลี่ยนแปลง นอกจากนั้นข้อสมมติต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับ Σ และ Σ^{-1} ก็ไม่เปลี่ยนแปลง

---

[1] ZELLNER and THEIL (1962) p 61-63

[2] THEIL (1971) p 497

ถึงแม้จะเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยขึ้น เนื่องจากเมทริกซ์ Σ ประกอบด้วยพารามิเตอร์ที่ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างแต่อย่างใด

ดังนั้นการใช้อิสเวอสแบบทั่วไปกับวิธี 3 SLS เมื่อเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยกรณีที่ 3 ตามสูตร (4.47) จะได้พารามิเตอร์ที่มีคุณสมบัติเมื่อข้อมูลไม่จำกัด เช่นเดียวกับ 3 SLS เดิมทุกประการ

4.4.3 <u>สำหรับวิธี Full-Information Maximum-Likelihood</u>

ดังที่ได้แสดงมาแล้วในหัวข้อ 2.2 ว่าเราจะใช้วิธี FIML ได้ก็ต่อเมื่อ $T > (G + K)$ และดังนั้น $T > G \geq M$ ซึ่งหมายถึงว่าถึงแม้ว่า $T \geq M$ ก็ยังไม่สามารถใช้วิธี FIML ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลได้จะต้องมี $T > (G + K)$ ด้วย ดังนั้นในกรณีที่เกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยกรณีที่ 3 คือ $T < M$ ถึงแม้จะใช้อิสเวอสแบบทั่วไป คือ $\hat{\Sigma}^{+}$ ก็จะไม่ทำให้สามารถใช้วิธี FIML ได้แต่อย่างใด วิธีแก้ปัญหาจึงสามารถทำได้โดยใช้ FIML กับโมเดลที่แบ่งออกเป็นส่วน ๆ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 3.22

บทที่ 5

คอมพิวเตอร์โปรแกรมสำหรับ
ปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย

5.1 การเขียนบัตรคำสั่งนำ

คอมพิวเตอร์โปรแกรมที่จะกล่าวถึงต่อไปในที่นี้ได้ถูกเขียนขึ้นและปรับปรุงจนเป็นอิสระ สามารถนำไปใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีขนาดเหมาะสมได้ทุกแบบ ก่อนการคำนวณผู้ใช้จะต้องสอบถามให้ทราบถึงขนาดของ K ขนาดและจำนวนของเทปที่จะใช้ได้และที่สำคัญที่สุดก็คือขนาดของเนื้อที่เก็บข้อมูลบนจานแม่เหล็กที่จะสามารถใช้ได้ เพื่อที่จะได้เลือกหรือกำหนดให้เป็นไปตามความต้องการของแต่ละโปรแกรมต่อไป

ในการใช้โปรแกรมนั้น ผู้ใช้จะต้องมีบัตรคำสั่งนำ ซึ่งจะแตกต่างกันไปตามแบบของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ สำหรับเครื่อง IBM 370 ของสถาบันบริการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยนั้นจะต้องมีบัตรคำสั่งนำดังนี้

```
*bØØbJOBbJNM=xxxxxxxx,CLASS=T
//bJOBbxxxxxxxx
//bOPTIONbLINK
//bEXECbFFORTRAN
            โปรแกรม
/*
//bEXECbLNKEDT
//bASSGNbSYSØØ8, DISK, VOL = CUWRK1, SHR
//bDLBLbIJSYSØ8, 'xxxxxxxx', Ø, SD
//bEXTENTbSYSØØ8, CUWRK1,1,Ø,348Ø,2Ø
//bASSGNbSYSØØ2, X'ØØc'
//bASSGNbSYSØØ3, X'ØØE'
//bASSGNbSYSØØ7, X'281'
```

```
//bASSGNbSYSØØ9, X'283'

//bASSGNbSYSØ1Ø, X'281'

//bASSGNbSYSØ11, X'283'

//bEXEC

          ข้อมูล

/*

/&

*bØØbEOJ
```

แต่เนื่องจากโปรแกรม ที่กล่าวถึงในหัวข้อต่อไปได้มีการเก็บคำสั่งไว้ในระบบแล้ว จึงสามารถเรียกใช้ได้ดังนี้

```
*bØØbJOBbJNM = xxxxxxxx, CLASS = N

//bJOBbxxxxxxxx

//bOPTIONbLINK

//bEXECbFFORTRAN

          โปรแกรม

/*

//bEXECbLNKEDT

//bEXECbPROC = ØØWORK5

          ข้อมูล

/*

/&

*bØØbEOJ
```

5.2 <u>โปรแกรม 3 SLS</u>

5.2.1 <u>ประโยชน์ของโปรแกรม</u>

โปรแกรม 3 SLS นั้นเป็นโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของเศรษฐมิติโมเดลที่เป็นซิมัลเทเนียส ด้วยวิธี 2 SLS และ 3 SLS โดยโปรแกรมนี้เป็นโปรแกรมที่ดัดแปลงมาจาก Two-and Three-Stage Least Squares Estimates ของ IBM-Share-Programms SDA 3495 ซึ่งเขียนไว้เป็นภาษา FORTRAN II. สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสองวิธีนี้ได้กล่าวมาแล้วในบทที่หนึ่ง สำหรับผู้ใช้ที่ต้องการทราบรายละเอียดเพิ่มเติมก็สามารถหาอ่านได้จากตำราเศรษฐมิติเกือบทุกเล่ม และโดยเฉพาะอย่างยิ่งใน ZELLNER and THEIL (1964) GOLDBERGER (1964) ตั้งแต่หน้า 329 เป็นต้นไปและ THEIL (1971) ตั้งแต่หน้า 451 เป็นต้นไป

นอกจากทั้ง 2 วิธีที่กล่าวมาแล้วยังสามารถใช้โปรแกรมเพื่อการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบ OLS และแบบ ZA ได้อีกด้วยซึ่งทั้ง 2 วิธีดังกล่าวได้กล่าวมาแล้วในบทที่หนึ่งเช่นกัน สำหรับผู้ใช้ที่ต้องการทราบรายละเอียดเพิ่มเติมสำหรับวิธีแรกนั้นมีอยู่ในตำราเศรษฐมิติทุกเล่ม ส่วนวิธีที่ 2 สามารถอ่านได้จาก ZELLNER (1962)

ข้อควรสังเกตก็คือในโปรแกรมได้มีส่วน Restricted Efficient Estimates อยู่ด้วย แต่ก็ขอแนะนำว่ายังไม่ควรใช้เพราะยังมีข้อผิดพลาดอยู่ ซึ่งยังไม่สามารถขจัดให้หมดสิ้นไปได้

5.2.2 <u>วิธีใช้โปรแกรม</u>

ในการใช้โปรแกรมเพื่อการคำนวณนั้นให้เรียงบัตรคำสั่งและบัตรข้อมูลไปตามลำดับดังนี้คือ

1. บัตรควบคุมการทำงานของโปรแกรม
2. บัตรรายชื่อตัวแปรผัน
3. บัตรแสดง FORMAT ของข้อมูล
4. บัตรข้อมูล
5. บัตรควบคุมการทำงานในแต่ละสมการสำหรับขั้นที่ 1
6. บัตรควบคุมการทำงานในแต่ละสมการสำหรับขั้นที่ 2

1) บัตรควบคุมการทำงานของโปรแกรม

แถวตั้งที่.......

1-2	=	จำนวนตัวแปรผันที่จะให้เครื่องอ่าน
3	=	1 ถ้าต้องการให้พิมพ์ข้อมูลตาม FORMAT ที่ผู้ใช้กำหนดให้
	=	ปล่อยว่างถ้าไม่ต้องการให้พิมพ์
4-5	=	ปล่อยว่าง
6	=	1 ถ้าต้องการให้เครื่องพิมพ์ค่าพารามิเตอร์ ของ 2 SLS ลงใน File ที่ 13 และของ 3 SLS ลงใน File ที่ 14 ด้วย FORMAT (2X, 6E13.5) ในกรณีนี้ผู้ใช้จะต้องเพิ่มคำสั่ง ASSGN สำหรับการใช้ File ที่ 13 และ 14 ด้วย
	=	ปล่อยว่าง ถ้าไม่ต้องการให้พิมพ์
7-11	=	จำนวนข้อมูลหรือขนาดของตัวอย่าง
11	=	จำนวนบัตร FORMAT ซึ่งจะมีได้ไม่เกิน 2 ใบ
12-13	=	จำนวนสมการในขั้นที่ 1 ซึ่งอาจเป็นศูนย์ได้
14-15	=	จำนวนสมาการในขั้นที่ 2 ซึ่งจะเป็นศูนย์ไม่ได้
16	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรผันทั้งหมดที่ให้เครื่องอ่าน
	=	ปล่อยว่าง ถ้าไม่ต้องการให้พิมพ์
17	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของส่วนเหลือ
	=	2 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของส่วนเหลือ
	=	3 ให้พิมพ์ทั้ง 2 เมทริกซ์
18	=	1 ไม่คำนวณหาพารามิเตอร์ด้วยวิธี 3 SLS
	=	ปล่อยว่าง ถ้าให้คำนวณ
19	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์
	=	2 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของพารามิเตอร์
	=	3 ให้พิมพ์ทั้ง 2 เมทริกซ์
20		

20 = 1 ให้คำนวณค่าการทดสอบแบบ Durbin-Watson ในทุกสมการทั้งในขั้นที่ 1 และ 2

= ปล่อยว่าง ถ้าไม่ให้คำนวณ

21-24 = ปล่อยว่าง

25 = 0 ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน หารด้วยค่า ดีกรีของความเป็นอิสระ

= 1 ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหารด้วยจำนวนข้อมูล

26 = 1 สำหรับกรณีที่ปัญหาใหม่แต่ใช้ข้อมูลชุดเดิม ในกรณีนี้ห้ามใส่บัตร FORMAT และบัตรข้อมูลอีก

27-80 = ชื่อโครงการ จะพิมพ์ให้ทุกหน้า ตลอดการคำนวณ

2) บัตรรายชื่อตัวแปรผัน

แถวตั้งที่...........

1-2 = ปล่อยว่าง

3-6 = ชื่อตัวแปรผันตัวแรก

7-10 = ปล่อยว่าง

11-14 = ชื่อตัวแปรผันตัวที่ 2

.

.

75-78 = ชื่อตัวแปรผัน

79-80 = ปล่อยว่าง

ข้อน่าสังเกตก็คือผู้ใช้จะต้องกำหนดชื่อของตัวแปรผันที่จะเกิดขึ้นใหม่จากกรคำนวณในขั้นแรกด้วย ซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนสมการในขั้นที่ 1 และชื่อของตัวแปรผันใหม่นี้จะเรียงต่อไปจากชื่อของตัวแปรผันที่ให้เครื่องอ่าน

3) และ 4) บัตรแสดง FORMAT ของข้อมูลที่จะให้เครื่องอ่าน และบัตรข้อมูล

บัตรแสดง FORMAT สั้นจะมีได้ไม่เกิน 2 ใบ โดยจะแสดงถึง FORMAT ของข้อมูลที่จะให้เครื่องอ่าน และพิมพ์ออกมาถ้าต้องการ

ส่วนบัตรข้อมูลนั้น ให้เจาะข้อมูลตัวที่หนึ่งของตัวแปรผันทุกตัวที่จะให้เครื่องอ่านก่อนแล้วจึงเริ่มเจาะข้อมูลตัวที่สอง และทำเช่นนี้ต่อไปตามลำดับจนครบจำนวนข้อมูล

5) และ 6) บัตรควบคุมการทำงานในแต่ละสมการของขั้นที่ 1 และขั้นที่2 โดยเริ่มจากขั้นที่ 1 ก่อน

แถวตั้งที่.........

1-4	=	ชื่อของสมการ
5-10	=	ปล่อยว่าง
11	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์
	=	2 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของพารามิเตอร์
	=	3 ให้พิมพ์ทั้งสองเมทริกซ์
12-16	=	ปล่อยว่าง
17-18	=	จำนวนตัวแปรผันอิสระในสมการซึ่งจะต้องนับรวมตัวคงที่ด้วยถ้าต้องการ
19-20	=	หมายเลขของตัวแปรผันไม่อิสระในสมการ
21-22	=	หมายเลขของตัวคงที่ (ถ้ามี) ซึ่งจะเท่ากับศูนย์
23-24	=	หมายเลขของตัวแปรผันอิสระตัวที่ 1
24-25	=	หมายเลขของตัวแปรผันอิสระตัวที่ 2
		และต่อไปเช่นนี้จนถึงตัวแปรผันอิสระตัวสุดท้าย

5.2.3 <u>คำอธิบายทางด้านเทคนิคของโปรแกรม</u>

ในการคำนวณนั้นโปรแกรมจะใช้ File ทั้งสิ้นดังนี้

File 10	สำหรับข้อมูล
File 11	เป็นเมทริกซ์ผลคูณข้ามของข้อมูล ซึ่งจะต้องใช้เนื้อที่บนจานแม่เหล็ก
File 12	เป็นที่เก็บเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ในแต่ละสมการ
File 13	เป็นที่เก็บค่าพารามิเตอร์ของ 2 SLS พิมพ์ด้วย FORMAT (2X, 6E13.5)
File 14	เป็นที่เก็บค่าพวรามิเตอร์ของ 3 SLS พิมพ์ด้วย FORMAT (2X, 6E13.5)

โปรแกรมคำนวณตัวเลขเป็น DOUBLE PRECISION ในกรณีที่ปัญหาไม่ได้ใช้ข้อมูลชุดเดิม โปรแกรมจะพิมพ์ค่ากึ่งกลาง ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและค่าความแปรปรวนของตัวแปรผันทุกตัวให้ด้วย นอกจากนั้นโปรแกรมจะพิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนของส่วนเหลือหรือ Σ^{-1} ให้ด้วยทุกครั้ง สำหรับภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมนี้ใช้ภาษา FORTRAN IV

ในการใช้โปรแกรมผู้ใช้จะต้องคำนึงถึงข้อจำกัดซึ่งโปรแกรมจะต้องตรวจสอบไปเป็นระยะ ดังนี้คือ

1 จำนวนตัวแปรผันที่ให้เครื่องอ่านรวมทั้งจำนวนตัวแปรผันที่เกิดขึ้นใหม่ในขั้นที่ 1 รวมกันแล้วจะต้อง ≤ 80

2 จำนวนสมการในขั้นที่ 1 ≤ 30

3 จำนวนสมการในขั้นที่ 2 ≤ 30

4 จำนวนพารามีเตอร์ที่จะต้องประมาณค่า ≤ 80

5 จำนวนพารามีเตอร์ที่จะต้องประมาณค่าในแต่ละสมการ ≤ 30

6 จำนวนบัตร FORMAT ≤ 2

สำหรับข้อจำกัดที่นอกเหนือไปจากนี้โปรแกรมจะไม่ทดสอบ ผู้ใช้ที่ต้องการการคำนวณที่มีขนาดนอกเหนือไปจากนี้ ก็สามารถขยายขึ้นได้ ตามความจำเป็น อย่างไรก็ตามก็จำเป็นที่จะต้องคำนึงถึงความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ตลอดจนเนื้อที่บนจานแม่เหล็กด้วย

ในการคำนวณของโปรแกรมจะต้องใช้โปรแกรมย่อยดังนี้

DTIN

FTEST

IVLSM

IVTSYM

KZU

LB

LLB

MATRIX

NORMAL

RESEST

ในการคำนวณโปรแกรมจะใช้ประมาณ 51 K สำหรับการทดสอบกับโมเดล KLEIN I ซึ่งมีสมการพฤติกรรม 3 สมการ แต่ละสมการมีตัวแปรผัน 4 ตัว และมีจำนวนข้อมูลเท่ากับ 21 ต้องใช้เวลาคำนวณประมาณ 80-100 วินาที

5.3 โปรแกรม 3 SLS GI

5.3.1 ประโยชน์ของโปรแกรม

โปรแกรม 3 SLS GI เป็นโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของเศรษฐมิติโมเดลที่เป็นซิมัลเทเนียส ด้วยวิธี 2 SLS และ 3 SLS โดยใช้เมื่อเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ 2 และ 3 ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ถึงบทที่ 4 นอกจากนั้นยังสามารถใช้เพื่อการประมาณค่าพารามิเตอร์ตามวิธี ZA เมื่อเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยได้อีกด้วย หรือจะใช้กับวิธี OLS ก็ได้เช่นกัน

สำหรับในกรณีปรกติเราก็สามารถใช้โปรแกรมนี้คำนวณได้เช่นเดียวกับโปรแกรม 3 SLS ที่กล่าวถึงมาแล้ว. โดยโปรแกรม 3 SLS GI จะใช้เวลาในในการคำนวณที่สั้นกว่าโปรแกรม 3 SLS

5.3.2 วิธีใช้โปรแกรม

ในการใช้โปรแกรมเพื่อการคำนวณให้เรียงบัตรคำสั่งและบัตรข้อมูลไปตามลำดับดังนี้คือ

1. บัตรควบคุมการทำงานของโปรแกรม
2. บัตรรายชื่อตัวแปรผัน
3. บัตรแสดง FORMAT ของข้อมูล
4. บัตรข้อมูล
5. บัตรควบคุมการทำงานในแต่ละสมการสำหรับขั้นที่ 1
6. บัตรควบคุมการทำงานในแต่ละสมการสำหรับขั้นที่ 2

1) บัตรควบคุมการทำงานของโปรแกรม ซึ่งจะมี 2 ใบดังนี้

บัตรใบที่ 1

แถวตั้งที่........

1-2	=	จำนวนตัวแปรผันที่จะให้เครื่องอ่าน
3	=	1 ถ้าต้องการให้พิมพ์ข้อมูลตาม FORMAT ที่ผู้ใช้กำหนดให้
	=	ปล่อยว่างถ้าไม่ต้องการให้พิมพ์
4-5	=	ปล่อยว่าง
6	=	1 ถ้าต้องการให้เครื่องพิมพ์ค่าพารามีเตอร์ของ 2 SLS ลงใน File ที่ 13 และของ 3 SLS ลงใน File ที่ 14 ด้วย FORMAT (2X, 6E 13.5) ในกรณีนี้ผู้ใช้จะต้องเพิ่มคำสั่ง ASSGN สำหรับการใช้ File ที่ 13 และ 14 ด้วย
	=	ปล่อยว่าง ถ้าไม่ต้องการให้พิมพ์
7-10	=	จำนวนข้อมูลหรือขนาดของตัวอย่าง
11	=	จำนวนบัตร FORMAT ซึ่งจะมีได้ไม่เกิน 2 ใบ
12-13	=	จำนวนสมการในขั้นที่ 1 ซึ่งจะเป็นศูนย์ไม่ได้
14-15	=	จำนวนสมการในขั้นที่ 2 ซึ่งจะเป็นศูนย์ไม่ได้
16	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรผันทั้งหมดที่ให้เครื่องอ่าน
	=	ปล่อยว่าง ถ้าไม่ต้องการให้พิมพ์
17	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของส่วนเหลือ
		2 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของส่วนเหลือ
		3 ให้พิมพ์ทั้ง 2 เมทริกซ์
18	=	1 ไม่คำนวณหาพารามีเตอร์ด้วยวิธี 3 SLS
	=	ปล่อยว่าง ถ้าให้คำนวณ
19	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามีเตอร์ 3 SLS
	=	2 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของพารามีเตอร์ 3 SLS
	=	3 ให้พิมพ์ทั้ง 2 เมทริกซ์

20	=	1 ให้คำนวณค่าการทดสอบแบบ Durbin-Watson ในทุกสมการทั้งในขั้นที่ 1 และ 2
	=	ปล่อยว่าง ถ้าไม่ให้คำนวณ
21-24	=	ปล่อยว่าง
25	=	0 ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน หารด้วยค่าดีกรีของความเป็นอิสระ
	=	1 ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานหารด้วยจำนวนข้อมูล
26	=	1 สำหรับกรณีที่ปัญหาใหม่แต่ใช้ข้อมูลชุดเดิม ในกรณีนี้ห้ามใส่บัตร FORMAT และบัตรข้อมูลอีก
27-28	=	ชื่อโครงการซึ่งจะพิมพ์ให้ทุกหน้าตลอดการคำนวณ

บัตรใบที่ 2

แถวตั้งที่

1-2	=	จำนวนมูลค่าลักษณะที่ต้องการใช้

2) บัตรรายชื่อตัวแปรผัน

แถวตั้งที่........

1-2	=	ปล่อยว่าง
3-6	=	ชื่อตัวแปรผันตัวแรก
7-10	=	ปล่อยว่าง
11-14	=	ชื่อตัวแปรผันตัวที่ 2
⋮		
75-78	=	ชื่อตัวแปรผัน
79-80	=	ปล่อยว่าง

ผู้ใช้จะต้องกำหนดชื่อของตัวแปรผันที่จะเกิดขึ้นใหม่จากการคำนวณในขั้นแรกด้วย ซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนสมการในขั้นที่ 1 และชื่อของตัวแปรผันใหม่นี้จะเรียงต่อไปจากชื่อของตัวแปรผันที่ให้เครื่องอ่าน

3) และ 4) บัตรแสดง FORMAT ของข้อมูลและบัตรข้อมูล

บัตรแสดง FORMAT นั้นจะมีได้ไม่เกิน 2 ใบ โดยจะแสดงถึง FORMAT ของข้อมูลที่จะให้เครื่องอ่าน และพิมพ์ออกมาถ้าต้องการ

ส่วนบัตรข้อมูลนั้น ให้เจาะข้อมูลตัวที่หนึ่งของตัวแปรผันทุกตัวที่จะให้เครื่องอ่านก่อนแล้วจึงเริ่มเจาะข้อมูลตัวที่สอง และทำเช่นนี้ต่อไปตามลำดับจนครบจำนวนข้อมูล

5) และ 6) บัตรควบคุมการทำงานในแต่ละสมการของขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 โดยเริ่มจากขั้นที่ 1 ก่อน

แถวตั้งที่

1-4	=	ชื่อของสมการ
5-10	=	ปล่อยว่าง
11	=	1 ให้พิมพ์เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามีเตอร์
	=	2 ให้พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์ของพารามีเตอร์
	=	3 ให้พิมพ์ทั้ง 2 เมทริกซ์
12-16	=	ปล่อยว่าง
17-18	=	จำนวนตัวแปรผันอิสระในสมการซึ่งจะต้องนับรวมตัวคงที่ด้วยถ้าต้องการ
19-20	=	หมายเลขของตัวแปรผันไม่อิสระในสมการ
21-22	=	หมายเลขของตัวคงที่ (ถ้ามี) ซึ่งจะเท่ากับศูนย์
23-24	=	หมายเลขของตัวแปรผันอิสระตัวที่ 1
24-25	=	หมายเลขของตัวแปรผันอิสระตัวที่ 2
		และต่อไปเช่นนี้จนถึงตัวแปรผันอิสระตัวสุดท้าย

5.3.3 คำอธิบายทางด้านเทคนิคของโปรแกรม

เนื่องจากเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยในกรณีที่ 3 จึงทำให้โปรแกรม 3 SLS ไม่สามารถหาค่า $\hat{\Sigma}^{-1}$ ได้ สำหรับโปรแกรม 3 SLS GI จะคำนวณหา $\hat{\Sigma}^{+}$ หรือ MOORE-PENROSE-Inverse ของ $\hat{\Sigma}$ ซึ่งมีสูตรการคำนวณตาม (4.41) และในการเขียนโปรแกรมมีขั้นตอนดังนี้

1) สร้างเมทริกซ์ผลคูณข้ามของส่วนเหลือ

$$\hat{U}'\hat{U} \quad \underline{\Delta} \quad \left[(y_i - Z_i\hat{\delta}_i)'(y_j - Z_j\hat{\delta}_j)\right]$$

ในแบบ DOUBLE PRECISION

2) เปลี่ยนเมทริกซ์ $\hat{U}_T'\hat{U}_T$ ให้อยู่ในแบบ SINGLE PRECISION

3) เก็บ $\hat{\Sigma}$ ในแบบ คเตอร์

4) พิมพ์ $\hat{\Sigma}$

5) เปลี่ยน vec $(\hat{\Sigma})$ ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์สหสัมพันธ์โดยใช้โปรแกรมย่อย NORMAL

6) พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์

7) เปลี่ยน $\hat{\Sigma}$ ให้เป็นไทรไดแอ็กโกนัล โดยใช้โปรแกรมย่อย TRIDI

8) คำนวณมูลค่าลักษณะ ของ $\hat{\Sigma}$ โดยใช้โปรแกรมย่อย EIGVAL

9) กำหนดจำนวน มูลค่าลักษณะที่ต้องการใช้
$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \ldots\ldots\ldots \hat{\lambda}_p$, $p < M \rightarrow r(\hat{\Sigma}) = p$

10) คำนวณเว็คเตอร์ลักษณะของ $\hat{\Sigma}$

11) หาค่าอินเวอสของมูลค่าลักษณะ

12) คำนวณ $\hat{\Sigma}^+ = E\Lambda^{-1}E'$

13) เก็บค่า $\hat{\Sigma}^+$ ในรูปเวคเตอร์

14) พิมพ์ค่า $\hat{\Sigma}^+$

15) เปลี่ยน $\hat{\Sigma}^+$ จาก SINGLE PRECISION มาเป็น DOUBLE PRECISION เพื่อนำไปใช้กำหนดค่า s^{ij} ต่อไป

สำหรับในกรณีที่ $p = r(\hat{\Sigma}) = M \rightarrow \hat{\Sigma}^+ = \hat{\Sigma}^{-1}$ ดังนั้นเราจึงสามารถใช้โปรแกรม 3 SLS GI คำนวณในกรณีปกติได้ด้วย

ในการคำนวณนั้นโปรแกรมจะต้องใช้ File ทั้งสิ้นดังนี้

File 10 สำหรับข้อมูล

File 11 เป็นเมทริกซ์ผลคูณข้ามของข้อมูลซึ่งจะต้องใช้เนื้อที่บนจานแม่เหล็ก

File 12 เป็นที่เก็บเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ในแต่ละสมการ

File 13 เป็นที่เก็บค่าพารามิเตอร์ของ 2 SLS พิมพ์ด้วย FORMAT (2X, 6E 13.5)

File 14 เป็นที่เก็บค่าพารามิเตอร์ของ 3 SLS พิมพ์ด้วย MORMAT (2 X, 6E 13.5)

โปรแกรมคำนวณตัวเลขเป็น DOUBLE PRECISION ในกรณีที่ปัญหาไม่ได้ใช้ข้อมูลชุดเดิม โปรแกรมจะพิมพ์ค่ากึ่งกลาง ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าความแปรปรวนของตัวแปรผันทุกตัวให้ด้วย นอกจากนั้นจะพิมพ์ $\hat{\Sigma}^{+}$ ให้ด้วยทุกครั้ง สำหรับภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมนี้ใช้ภาษา FORTRAN IV

โปรแกรมนี้มีข้อจำกัดเช่นเดียวกับโปรแกรม 3 SLS ทุกประการ และเช่นเดียวกันผู้ใช้อาจจะขยายขึ้นได้ตามความจำเป็น

ในการคำนวณโปรแกรมจะต้องใช้โปรแกรมย่อยดังนี้

DTIN

FTEST

INLSM

IVTSYM

KZU

LB

LLB

MATRIX

NORMAL

RESEST

TRIDI

EIGVAL

EIGVEC

โปรแกรมนี้ใช้ประมาณ 51 K และจากการทดสอบกับโมเดล KLEIN I ปรากฏว่าใช้เวลาคำนวณประมาณ 50-60 วินาทีซึ่งเร็วกว่าโปรแกรม 3 SLS

5.4 โปรแกรม 3 SLS U

55.4.1 ประโยชน์ของโปรแกรม

โปรแกรม 3 SLS U เป็นโปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าพารามีเตอร์ของเศรษฐมิติโมเดลที่เป็นซิมัลเทเนียสด้วยวิธี 2 SLS และ 3 SLS เมื่อเกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อย กรณีที่ 2 และ 3 นอกจากนั้นยังสามารถใช้เพื่อการประมาณค่าพารามีเตอร์ตามวิธี ZA ในกรณีที่เกิดปัญหาดังกล่าวได้อีกด้วย หรืออาจจะใช้เพื่อการประมาณค่าพารามีเตอร์ตามวิธี OLS ก็ได้เช่นกัน

โปรแกรมนี้ต่างจากโปรแกรม 3 SLS GI ก็คือจะใช้ได้เฉพาะในกรณีที่เกิดปัญหาการมีขนาดตัวอย่างน้อยเท่านั้น

5.4.2 วิธีใช้โปรแกรม

โปรแกรม 3 SLS U มีโครงสร้างที่แตกต่างไปจากโปรแกรม 3 SLS และ 3 SLS GI อย่างไรก็ตามโปรแกรมไม่ต้องการข้อมูลที่แตกต่างไปจากโปรแกรม 3 SLS วิธีการใช้โปรแกรมจึงออกแบบให้เหมือนกับโปรแกรม 3 SLS ทุกประการซึ่งผู้ใช้จะดูรายละเอียดได้จากหัวข้อ 5.2.2 อย่างไรก็ตามผู้ใช้จะต้องเพิ่มคำสั่ง ASSGN สำหรับ File ที่ใช้ซึ่งแตกต่างไปจากโปรแกรม 3 SLS ดังจะได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

5.4.3 คำอธิบายทางด้านเทคนิคของโปรแกรม

โปรแกรม 3 SLS U นั้นต่างจากโปรแกรม 3 SLS GI กล่าวคือ วิธีคำนวณหา $\hat{\Sigma}^{+}$ หรือ MOORE-PENROSE-Inverse ของ $\hat{\Sigma}$ ตามสูตรการคำนวณที่ (4.40) โดยในการเขียนโปรแกรมมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1) อ่านเมทริกซ์ U_T' จาก File ที่ 15
2) คำนวณ $\hat{\Sigma} = \hat{U}_T' \hat{U}_T$
3) เก็บเมทริกซ์ $\hat{\Sigma}$ ในรูปของเวคเตอร์
4) พิมพ์เมทริกซ์ $\hat{\Sigma}$

5) เปลี่ยน vec $(\hat{\Sigma})$ ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์สหสัมพันธ์โดยใช้โปรแกรมย่อย NORMAL

6) พิมพ์เมทริกซ์สหสัมพันธ์

7) สร้างเมทริกซ์ $\hat{U}_T \hat{U}'_T$

8) หาค่าอินเวอสของ $U_T U'_T$ โดยใช้โปรแกรมย่อย MATIV

9) สร้างเมทริกซ์ $U_T(U_T U'_T)^{-1}$

10) คำนวณ $\hat{\Sigma}^+ = [\hat{U}'_T (\hat{U}_T \hat{U}'_T)^{-1}] * [\hat{U}'_T (\hat{U}'_T \hat{U}'_T)^{-1}]'$

11) เก็บเมทริกซ์ $\hat{\Sigma}^+$ ในรูปเวคเตอร์

12) พิมพ์ $\hat{\Sigma}^+$

วิธีการคำนวณ $\hat{\Sigma}^+$ ในโปรแกรม 3 SLS U ซึ่งได้กล่าวมานี้จะไม่สามารถใช้ได้ในกรณีปรกติ แต่จะทำได้เฉพาะเมื่อ $r(\hat{\Sigma}) = M$ เท่านั้น

ในการคำนวณนั้นโปรแกรมจะต้องใช้ File ดังนี้

File 10	สำหรับข้อมูล
File 11	เป็นเมทริกซ์ผลคูณข้ามของข้อมูลซึ่งจะต้องใช้เนื้อที่บนจานแม่เหล็ก
File 12	เป็นที่เก็บเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของพารามิเตอร์ในแต่ละสมการ
File 13	เป็นที่เก็บค่าพารามิเตอร์ของ 2 SLS พิมพ์ด้วย FORMAT (2X, 6E 13.5)
File 14	เป็นที่เก็บค่าพารามิเตอร์ของ 3 SLS พิมพ์ด้วย FORMAT (2X, 6E 13.5)
File 15	เป็นที่เก็บค่าส่วนเหลือของ 2 SLS

โปรแกรมคำนวณตัวเลขเป็น DOUBLE PRECISION จะพิมพ์ค่ากึ่งกลางส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าความแปรปรวนของตัวแปรผันทุกตัวและค่า $\hat{\Sigma}^+$ ให้ด้วย ภาษาที่ใช้เขียนโปรแกรมคือ FORTRAN IV

โปรแกรมนี้มีข้อจำกัดเช่นเดียวกับโปรแกรม 3 SLS ทุกประการ และเช่นเดียวกันผู้ใช้อาจจะขยายขึ้นได้ตามความจำเป็น

ในการคำนวณโปรแกรมจะต้องใช้โปรแกรมย่อยดังนี้

DTIN

FTEST

IVLSM

IVTSYM

MATIV

KZU

IZU

LB

LLB

MATRIX

NORMAL

RESEST

โปรแกรมนี้จะใช้ประมาณ 51 K และจากการทดสอบพบว่าจะใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าโปรแกรม 3 SLS GI เล็กน้อย

บรรณานุกรม

ภาษาต่างประเทศ

BROWN, T.M. (1959) Simplified Full Maximum Likelihood and Comparative Structural Estimates. Econometrica, 27, p.638-653.

CHERNOFF, H. and N. DIVINSKY (1953) The Computation of Maximum-Likelihood Estimates of Linear Structural Equations. In: Wm.C.HOOD and T.C. KOOPMANS (Eds.), Studies in Econometric Method, Chapter X, p.236-269, New York: J. Wiley & Sons.

CHAIPRAVAT O., MEESOOK K, and GARNJARERNDEE S. (1977) Impacts of Monetary, Fiscal, Debt Management and Exchange Rate Policy Changes in the Thai Economy, A Macroeconometric Model Simulation, Department of Economic Research, Bank of Thailand, October.

COURT, H.R. (1974) Three Stage Least Squares and Some Extensions where the Structural Disturbance Covariance Matrix may be Singular. Econometrica, 42, p. 547-558.

CROCKETT, J.B. and H.CHERNOFF (1955) Gradient Methods of Maximization. Pacific Journal of Mathematics, 5, p. 33-50.

DHRYMES, P.J. (1970) Econometrics: Statistical Foundations and Applications. New York: Harper & Row.

DUESENBERRY, J.S., G. FROMM, L.R.KLEIN and E. KUH(Eds.) (1965) The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States. Amsterdam: North-Holland

DUTTA, M. and E. LYTTKENS (1974) Iterative Instrumental Variables Method and Estimation of Large Simultaneous System. Journal of the American Statistical Association, 69, p. 977-986.

DATTA, M. and P.L. SHARMA (1973) Alternative Estimators and Predictive Power of Alternative Estimators: An Econometric Model of Puerto Rico. The Review of Economics and Statistics, 55, p.381-385.

EISENPRESS, H. (1962) Note on the Computation of Full-Information Maximum-Likelihood Estimates of Coefficients of a Simultaneous System. Econometrica, 30, p.343-348

EISENPRESS, H. (1963) Forecasting by Econometric Systems. IBM Share General Program Library, IBM 7090-7094 Program IB 9 FES.

FISHER, F.M. (1965) Dynamic Structure and Estimation in Economy-Wide Econometric Models. In: J.S. Duesenberry et al. (Eds.), The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States, p. 589-635, Amsterdam: North-Holland.

FISHER, W.D. and W.J. WADYCKI (1971) Estimating a Structural Equation in a Large System. Econometrica, 39, p.461-465.

GOLDBERGER, A.S. (1964) Econometric Theory. New York: J.Wiley & Sons.

IBM (1966) Share Program Library, UOC 3 SLS, SDA3495.

JOHNSTON, J. (1963) Econometric Methods. New York: McGraw-Hill.

KHATRI, C.G. (1968) Some Results for the Singular Normal Multivariate Regression Models. Sankhya, 30. p.267-280.

KLEIN, L.R. (1950) Economic Fluctuations in the United States, 1921-1941. New York: J. Wiley & Sons.

KLEIN, L.R. (1968) An Essay on the Theory of Economic Prediction. Helsinki: The Academic Book Store.

KLEIN, L.R. (1969) Estimation of Interdependent Systems in Macroeconometrics. Econometrica, 37, p.171-192.

KLEIN, L.R. and A.S. GOLDBERGER (1955) An Econometric Model of the United States, 1929-1952. Amsterdam: North-Holland.

KLOEK, T. and L.B.M. MENNES (1960) Simultaneous Equations Estimation Based on Principal Components of Predetermined Variables. Econometrica, 28 . p.45-61

KOOPMANS, T.C. (Ed.)(1950) Statistical Inference in bynamic Economic Models. New York: J. Wiley & Sons.

KOOPMANS, T.C. and Wm. C. HOOD (1953) The Estimation of Simultaneous Linear Economic Relationships. In: Wm. C.Hood and T.C. Koopmans (Eds.), Studies in Econometric Method, Chapter VI, p.112-199, New York: J.Wiley & Sons.

KOOPMANS, T.C., H. RUBIN and R.B. LEIPNIK (1950) Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics. In: T. C. Koopmans (Ed.), Statistical Inference in Dynamic Economic Models, p.53-237, New York: J. Wiley& Sons.

LESERER M and KLAUDY st von (1975) A Note on Full-Information Estimation Using Generalized Inverses, Working Paper No. 29, Institute fuer Agraoeknomie, University of Goettingen.

MARSAGLIA, G. (1964) Conditional Means and Covariances of Normal Variables with Singular Covariance Matrix. Journal of the American Statistical Association, 59, p.1203-1204.

MOSBAEK, E.J. and H.O. WOLD (1970) Interdependent Systems, Structure and Estimation. Amsterdam: North-Holland.

NOBLE, B. (1969) Applied Linear Algebra. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall

PENROSE, R. (1955) A Generalized Inverse for Matrices. Proc. Camb. Phil. Soc., 51, p.406-413

RAO, C.R. and S.K.MITRA (1971) Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York: J. Wiley & Sons.

ROTHENBERG, T.J. and C.T. LEENDERS (1964) Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems. Econometrica, 32, p.57-76.

RUBLE, W.L. (1968) Improving the Computation of Simultaneous Stochastic Linear Equations Estimates. Agricultural Economics Report, No. 116, Michigan State University.

SARGAN, J.G. (1975) Asymptotic Theory and Large Models. International Economic Review, 16, p.75-91

SCHOENFELD P. (1971) Best Linear Minimum Bias Estimation in Linear Regression. Econometrica, 39, p.531-544.

SCHOENFELD P. (1973) A Note on the Measurability of the Pseudo-Inverse. Journal of Econometrics, 1, p313-314

SWAMY, P.A.V.B. and J. HOLMES (1971) The Use of Undersized Samples in the Estimation of Simultaneous Equation Systems. Econometrica, 39, p.455-459.

THEIL, H. (1953) Estimation and Simultaneous Correlation in Complete Equation Systems. Den Haag: Central Planning Bureau.

THEIL, H. (1971) Principles of Econometrics. Amsterdam: North-Holland.

THEIL, H. (1972) Eine einfache Modifikation der zweistufigen Methode der kleinsten Quadrate fur unterdimensionierte Stichproben. Ifo-Studien, 18, p. 203-222.

ZELLNER, A. (1962) An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. Journal of the American Statistical Association, 57, p.348-368

ZELLNER, A. and H. THEIL (1962) Three-Stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations. Econometrica, 30, p.54-78.

<u>ภาษาไทย</u>

วีรพงษ์ รามางกูร (๒๕๑๙) แผนจำลองเศรษฐมิติจุฬาลงกรณ์, หน่วยเศรษฐศาสตร์วิจัย คณะเศรษฐศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ธันวาคม

กองวางแผนเศรษฐกิจและสังคม (๒๕๒๓) แบบจำลองเศรษฐกิจระยะยาว, สำนักงานคณะกรรมการพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ, สิงหาคม

คำศัพท์ไทย-อังกฤษ

ก

การกระจายแบบปรกติ	normal distribution
การกำหนดตัวแปรผัน	specification
การทำทางแถวนอน	row operation

ค

ความแปรปรวนร่วม	covariance
ความแตกต่างของเวลา	time lag
คงเส้นคงวา	consistent
ความแปรปรวน	variance

ซ

ซิมัลเทเนียส	simultaneous

ด

ดิเทอมินันท	determinant
ดิฟฟิเร็นซิเอชัน	differentiation
ได้ส่วนกัน	symmetric

ต

ตัวแปรผันกระทบ	disturbance term
ตัวแปรผันเครื่องมือ	instrumental variable
ตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อน	predetermined variable
ตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายใน	endogenous variable
ตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายนอก	exogevous variable

ถ

แถวตั้ง	column

	ป	
โปรแกรมย่อย		subroutine
	ผ	
ผลคูณข้าม		cross product
	พ	
พิฟวัท		pivot
พ็อซซิทิฟว-เด็ฟฟินิท		positive definit
พรินซิพัล-คัมโพนึนท		principal component
	ม	
มีประสิทธิภาพเมื่อข้อมูลไม่จำกัด		asymtotic efficient
เมทริกซ์ย่อย		submatrix
เมทริกซ์เอกลักษณ์		identity matrix
ไม่อิสระเส้นตรงอย่างแน่นอน		exact linear dependent
มูลค่าลักษณะ		characteristic value
	ร	
รีเคอซีฟ		recursive
แร็งค		rank
	ว	
เวคเตอร์ลักษณะ		characteristic vector
	ส	
เส้นทะแยงมุม		diagonal
ส่วนเหลือ		residue
สมาชิก		element
สเคลาร		scalar
สมการพฤติกรรม		behavioral equation
สมการโครงสร้าง		structural equation
สมการเอกลักษณ์		identity equation

อ

ออโธโกนัล	orthogomal
อินเวอส	inverse
อินเวอสแบบทั่วไป	generalized inverse

คำศัพท์อังกฤษ-ไทย

A

asymtotic efficient	มีประสิทธิภาพเมื่อข้อมูลไม่จำกัด

B

bias	ลำเอียง
behavioral equation	สมการพฤติกรรม

C

covariance	ความแปรปรวนร่วม
consistent	คงเส้นคงวา
column	แถวตั้ง
characteristic value	มูลค่าลักษณะ
characteristic vector	เวคเตอร์ลักษณะ
converge	เข้าหาดุลยภาพ
cross product	ผลคูณข้าม

D

diagonal	เส้นทะแยงมุม
disturbance term	ตัวแปรผันกระทบ
determinant	ดิเทอมินันท
differentiation	ดิฟฟิเร็นชิเอชัน

E

element	สมาชิก
exact linear dependent	ไม่อิสระเส้นตรงอย่างแน่นอน
endogenous variable	ตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายใน
exogenous variable	ตัวแปรผันที่ถูกกำหนดภายนอก

G

generalized inverse	อิสเวอสแบบทั่วไป

I

inverse	อินเวอส
instrumental variable	ตัวแปรผันเครื่องมือ
identity matrix	เมทริกซ์เอกลักษณ์
identity equation	สมการเอกลักษณ์

N

normal distribution	การกระจายแบบปรกติ

O

orthogonal	ออโธโกนัล

P

principal component	พรินซิพัล-คัมโพนีนท
predetermined variable	ตัวแปรผันที่ถูกกำหนดก่อน
pivot	พิฟวัท
positive definit	พ็อซซิทิฟว-เด็ฟฟินิท

R

residue	ส่วนเหลือ
recursive	รีเคอซีฟ
rank	แร็งค
row operation	การทำทางแถวนอน

S

simultaneous	ซิมัลเทเนียส
submatrix	เมทริกซ์ย่อย
specification	การกำหนดตัวแปรผัน
subset	เซ็ทย่อย
subvector	เวคเตอร์ย่อย
scalar	สเคลาร
symmetric	ได้ส่วนกัน
subroutine	โปรแกรมย่อย

T

time lag	ความแตกต่างของเวลา
tridiagonal	ไทรไดแอ็กโกนัล

V

variance	ความแปรปรวน