

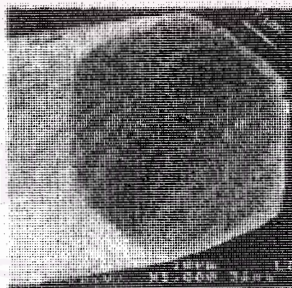
โครงการวิจัยย่อยลำดับที่ 6

เรื่อง ซอฟต์แวร์คำนวณวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและโฟโตนิกส์ ปีที่ 3 : ซอฟต์แวร์วิเคราะห์ เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์-บิมพรอพากชัน

ผู้รับผิดชอบโครงการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัล (photonic crystal optical fiber) เป็นเส้นใยนำแสงแบบใหม่ที่กำลังได้รับความสนใจในการนำมาใช้งานทางด้านการสร้างสิ่งประดิษฐ์ในระบบสื่อสารทางแสง เริ่มต้นในปี 1996 Knight, Birks, Russell และ Atkin^[1] ได้ทดลองสร้างเส้นใยนำแสง โฟโตนิกคริสตัลที่มีแกนทำจากแท่งแก้วที่เจาะเป็นรูอากาศรูปวงกลมซึ่งจัดเรียงแบบรวงผึ้งตลอดทางยาวหลายวง โดยมีขนาดของแกนเส้นผ่านศูนย์กลาง 4.6 ไมโครเมตร, ระยะพิตช์ (ระยะห่างระหว่างรูอากาศที่ใกล้กัน) 2.3 ไมโครเมตร, ขนาดของรูอากาศ 0.2 ไมโครเมตรและความยาวของเส้นใยนำแสง 1 เมตร ดังรูปที่ 1.1 เมื่อกลุ่มนักวิจัยกลุ่มนี้ทดลองยิงแสงเลเซอร์ที่ต้นทางเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัลแล้วนำกล้องไมโครสแกนอิเล็กตรอนไว้ที่ปลายทางของเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัล ปรากฏว่ามองเห็นแสงที่มีความเข้มของแสงมาก ๆ อยู่ที่บริเวณแกนกลางและความเข้มของแสงจะค่อยๆลดลงที่บริเวณระหว่างรูอากาศที่ใกล้กัน คุณสมบัติที่พบคือเกิดแบบแผนคลื่นเดี่ยว (single mode) ในช่วงความยาวคลื่นกว้างตั้งแต่ 337-1550 นาโนเมตร

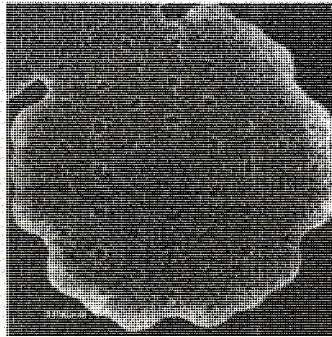


รูปที่ 1.1 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัลของ Knight, Birks, Russell and Atkin (1996)

หลังจากการทดลองของกลุ่มวิจัยของ Knight ได้ผลเป็นที่น่าสนใจและมีความเป็นไปได้ที่จะนำมาประดิษฐ์เป็นอุปกรณ์นำแสงแบบต่างๆ นอกเหนือจากการใช้เส้นใยนำแสงแบบที่ใช้กันทั่วไป มี

[1] Knight, J.C., Birks, T.A., Russell, P.St.J., and Atkin, D.M. All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. *Optics Letters* 21, 19 (October 1996) : 1547-1549.

นักวิจัยอีกกลุ่มหนึ่งได้พัฒนาเทคโนโลยีในการผลิตและการเชื่อมต่อเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลกับเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน ในปี ค.ศ. 1999 โดย Bennett, Monro และ Richardson ^[2] ได้สร้างเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลมีความยาว 50 เมตร, เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 250 ไมโครเมตร, ขนาด 0.34 ไมโครเมตรและระยะพิทซ์ 1.8 ไมโครเมตร ดังรูปที่ 1.2 ได้ทดลองวัดการสูญเสียในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลได้ 0.24 dB/m หรือ 240 dB/km (เส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน 0.2 dB/km) และวัดดิสเพอร์ชันที่ความยาวคลื่น 1550 นาโนเมตรได้ $50 \text{ ps} \cdot \text{nm}^{-1} \text{km}^{-1}$

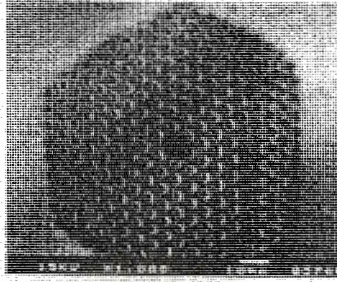


รูปที่ 1.2 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลของ Bennett, Monro and Richardson (1999)

ในปีเดียวกันนั้นได้มีงานวิจัยของกลุ่มนักวิจัย Birk, Mogilevtsev, Knight และ Russell ^[3] ได้สร้างเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลที่มีดิสเพอร์ชันต่ำมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของแกน 0.98 ไมโครเมตร ดังรูปที่ 1.3 ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยของ Knight, Birks, Russell และ Atkin (1996) โดยสร้างเส้นใยนำแสงที่มีดิสเพอร์ชันสูงกว่าเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน เมื่อทำการทดลองวัดดิสเพอร์ชันแล้วได้ $2,000 \text{ ps} \cdot \text{nm}^{-1} \text{km}^{-1}$ ซึ่งมีค่าต่ำกว่าเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน 100 เท่าซึ่งเป็นข้อดีของเส้นใยนำแสงประเภทนี้ที่สามารถใช้ชดเชยดิสเพอร์ชันได้ถึง $\pm 0.2\%$ และสามารถชดเชยดิสเพอร์ชันได้ถึง 35 เท่าของเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานที่อยู่ในช่วงความยาวของเส้นใยนำแสง 100 นาโนเมตร

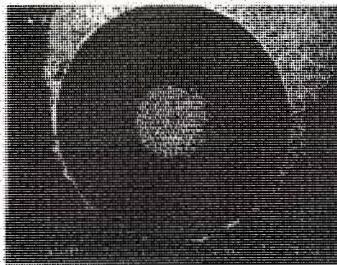
[2] Bennett, P.J., Monro, T.M., and Richardson, D.J. Toward practical holey fiber technology: fabrication, splicing, modeling, and characterization. *Optics Letters* 24, 17 (October 1999) : 1203-1205.

[3] Birks, T.A., Mogilevtsev, D., Knight, J.C., and Russell, P.St.J. Dispersion compensation using single-material fiber. *IEEE Photonic technology letters* 11, 6 (June 1999) : 674-676.



รูปที่ 1.3 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลของ Birk, Moglievtsev, Knight and Russell (1999)

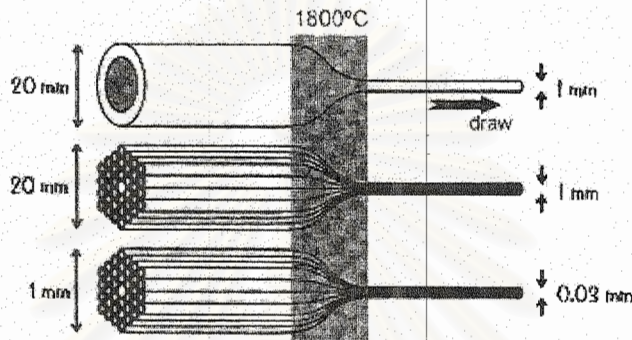
ในปี ค.ศ. 1999 ผลการทดลองเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลพบว่าการสูญเสียมากในเส้นใยนำแสงดังนั้นในปี ค.ศ. 2001 จึงมีกลุ่มนักวิจัย Kubota, Suzuki, Kawanishi, Nakazawa, Tanaka และ Fujita ^[4] สร้างเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลให้มีคุณสมบัติของการสูญเสียในเส้นใยนำแสงให้ลดลง เส้นใยนำแสงที่สร้างขึ้นมีความยาว 2 กิโลเมตร, ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของแกน 3.1 ไมโครเมตร, ขนาดของรูอากาศ 1.51 ไมโครเมตร และระยะพิตซ์ 2.26 ไมโครเมตรดังรูปที่ 1.4 วัดการสูญเสียในเส้นใยนำแสงได้ 3.2 dB/km ที่ความยาวคลื่น 1,550 นาโนเมตร และมีดิสเพอร์ชันเป็นศูนย์ที่ 810 นาโนเมตรซึ่งการสูญเสียในเส้นใยนำแสงประเภทนี้ลดลงจากงานวิจัยปี ค.ศ. 1999 มากและใกล้เคียงกับเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน



รูปที่ 1.4 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลของนักวิจัย Kubota, Suzuki, Kawanishi, Nakazawa, Tanaka and Fujita (2001)

[4] Kubota, H., Suzuki, K., Kawanishi, S., Nakazawa, M., Tanaka, M., and Fujita, M. Low-loss 2-km long photonic crystal fiber with zero GVD in the near IR suitable for picosecond pulse propagation at the 800 nm band. *In Proc. Cof. Laser Electrooptics, Baltimore, MD* (2001) : Postdeadline paper CPD3-1.

การผลิตเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลมีกรรมวิธี 2 ขั้นตอนคือการจัดเรียงแท่งแก้ว (stack) ให้อยู่ในลักษณะของรวงผึ้งและการดึงแท่งแก้ว (draw) ขั้นตอนแรกนำแท่งแก้วต้นมาจะเป็นรูอากาศแล้วนำแท่งแก้วต้นที่มีขนาดตามที่ต้องการอยู่ตรงกลางโดยการจัดเรียงให้แท่งแก้วที่เจาะรูอากาศมีลักษณะคล้ายรวงผึ้งขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 20 มิลลิเมตร ดังรูปที่ 1.5 จากนั้นให้นำแท่งแก้วทั้งหมดไปหลอมด้วยอุณหภูมิ 1800°C แล้วใช้เครื่องมือดึงแท่งแก้วในทางยาวเพื่อให้แท่งแก้วยืดและมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกลดลงเหลือเพียง 1 มิลลิเมตร ดังนั้นถ้าต้องการนำให้ขนาดของแกนลดลงอีกจึงนำไปหลอมและดึงอีกให้ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกเหลือเพียง 0.03 มิลลิเมตร



รูปที่ 1.5 การผลิตเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอล

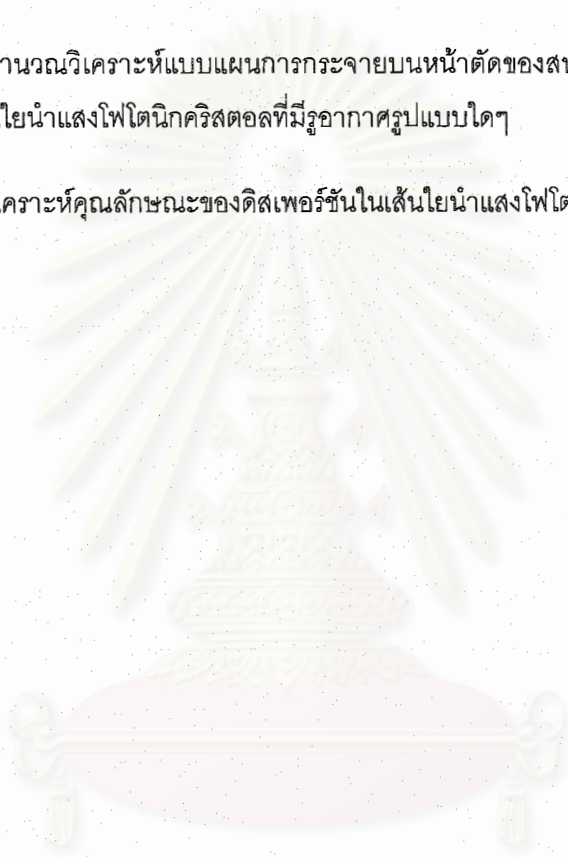
จากงานวิจัยที่ผ่านมาจะสังเกตว่าเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลแต่ละแบบให้ค่าดิสเพอร์ชันและการสูญเสียในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลมากบ้างน้อยบ้างขึ้นอยู่กับขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของแกน, ขนาดของรูอากาศและระยะพิชต์ ดังนั้นจึงได้มีงานวิจัยอีกกลุ่มหนึ่งที่พยายามหาวิธีคำนวณวิเคราะห์แสงซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเพื่อหาลักษณะการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบนหน้าตัด, แถบช่องโฟโตนิกคริสตอล (photonic band gap) และแถบความยาวคลื่นที่ใช้งานในสถานะของการนำคลื่น (guide mode) ซึ่งมีวิธีการคำนวณหลายวิธีด้วยกันเช่น plane wave expansion, scalar finite element, full vector finite element, semivectorial finite difference, two dimension cylindrical finite difference และ full vector imaginary distance beam propagation ในแต่ละวิธีมีข้อดีและข้อเสียแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับว่าจะนำวิธีนั้นมาใช้คำนวณหาคุณสมบัติอะไรของเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอล

วิธีการคำนวณวิเคราะห์เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลวิธีหนึ่งที่มีประสิทธิภาพและสามารถปรับเปลี่ยนโครงสร้างหน้าตัดใดๆ ได้คือวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอวิธีวิเคราะห์แสงที่สามารถนำไปใช้ในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลในลักษณะของการสร้างแบบจำลองการแพร่กระจายลำแสงจากต้นทางของเส้นใยนำแสงไปตามความยาว เพื่อศึกษาว่าการกระจายพลังงานคลื่นแสงในบริเวณหน้าตัดแต่ละหน้า และแบบแผนคลื่นบนหน้าตัดแต่ละหน้าวิธีคำนวณในลักษณะนี้เรียกว่า วิธีบีเอ็ม

พหุพหุเกชัน เมื่อนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มาใช้ในลักษณะการคำนวณดังที่กล่าวมา จึงเรียกว่า “วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมีพหุพหุเกชัน (Finite element – beam propagation method)”

วัตถุประสงค์ของการวิจัยในหัวข้อนี้คือ เพื่อสร้างระเบียบวิธีคำนวณเชิงเลขที่สามารถทำเป็นซอฟต์แวร์ที่มีความสามารถดังนี้

1. คำนวณวิเคราะห์แบบแผนการกระจายบนหน้าตัดของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและโพลาริเซชันของแสงในเส้นใยนำแสงไฟโตนิกคริสตอลที่มีรูอากาศรูปแบบใดๆ
2. วิเคราะห์คุณลักษณะของดิสเพอร์ชันในเส้นใยนำแสงไฟโตนิกคริสตอล



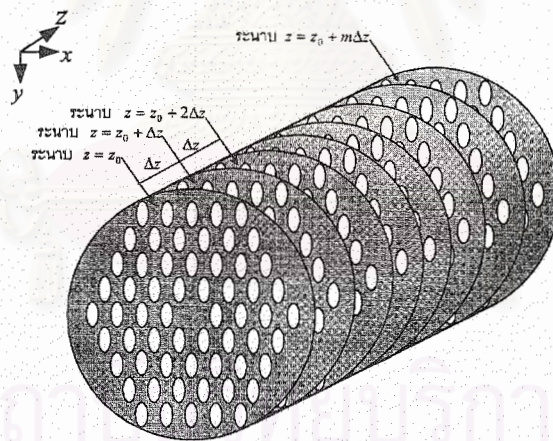
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าโดยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพagation

2.1 หลักการของวิธีบีมพรอพagation

กระบวนการจำลองการเดินทางของคลื่นแสงในท่อนำคลื่นแสงด้วยระเบียบวิธีบีมพรอพagation (BPM) จะเริ่มต้นจากการแบ่งระนาบหน้าตัดของท่อนำคลื่นแสงออกเป็นระนาบส่วนย่อยจำนวน m ระเบียบนาบ โดยระเบียบนาบแต่ละระเบียบนาบจะวางตัวตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่นแสงดังรูปที่ 2.1 ระเบียบนาบ $z = z_0$ จะอยู่ที่ต้นทางที่แสงถูกส่งเข้าสู่ท่อนำคลื่นแสง ส่วนระเบียบนาบ $z = z_0 + m\Delta z$ จะอยู่ที่ปลายทางด้านที่แสงออกจากท่อนำคลื่นแสงและระเบียบนาบแต่ละแผ่นจะอยู่ห่างกันเป็นระยะ Δz จากนั้นจึงสร้างสมการคลื่นสำหรับคลื่นแสงที่เดินทางไปในท่อนำคลื่นแสงต่อมาจึงจัดรูปสมการคลื่นเพื่อให้ได้มาซึ่งสมการ (BPM) เพื่อใช้แสดงความสัมพันธ์ของคลื่นแสงบนระเบียบนาบแต่ละระเบียบนาบแต่ละระเบียบนาบที่อยู่ต่อเนื่องกัน

การกำหนดฟังก์ชันของคลื่นแสงเป็นอินพุตที่ระเบียบนาบ $z = z_0$ จะทำให้คำนวณหาค่าฟังก์ชันของคลื่นแสงที่ระเบียบนาบถัดไป คือ $z = z_0 + \Delta z$ ได้ฟังก์ชันของคลื่นแสงที่คำนวณได้นี้ใช้เป็นคลื่นแสงอินพุตของระเบียบนาบถัดไปคือ $z = z_0 + 2\Delta z$ ดำเนินการคำนวณเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆจนกระทั่งสามารถหาค่าฟังก์ชันคลื่นแสงที่ระเบียบนาบ $z = z_0 + m\Delta z$ ได้จึงเป็นการสิ้นสุดกระบวนการคำนวณ ทั้งนี้ในการคำนวณหาฟังก์ชันของคลื่นแสงบนระเบียบนาบแนวขวางของท่อนำคลื่นแสง จะทำได้โดยอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบอื่นๆ โดยงานวิจัยนี้จะเลือกใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์



รูปที่ 2.1 การแบ่งระนาบหน้าตัดของเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอล
รูอากาศรูปวงรีออกเป็นจำนวน m ระเบียบนาบ

สมการบีมพรอพagationเป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามในระเบียบนาบทั้งสองดังสมการ (2.1) เมื่อบ้อนสนามอินพุตเข้าที่ระเบียบนาบแรกจึงคำนวณด้วยสมการบีมพรอพagation หาเอาท์พุตที่

ระนาบที่สอง ค่าสนามเอทพุตของการคำนวณในระนาบถัดไปดังรูปที่ 2.2 เมื่อคำนวณเป็นระนาบๆ ไปเรื่อยๆ จะสามารถหาสนามได้ตลอดความยาวของท่อนำคลื่นแสง

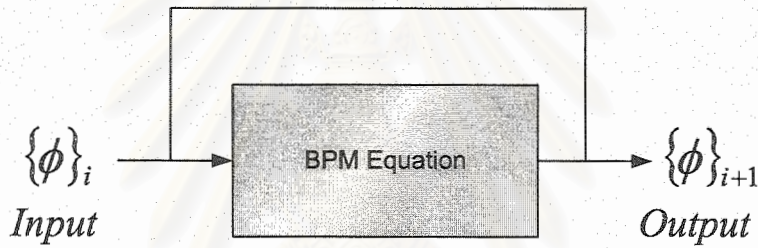
$$[A]\{\phi\}_{i+1} = [B]\{\phi\}_i \quad (2.1)$$

โดยที่

$\{\phi\}_{i+1}$ คือ ขนาดของสนามที่ระนาบ $i+1$

$\{\phi\}_i$ คือ ขนาดของสนามที่ระนาบ i

$[A]$, $[B]$ เป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธี BPM



รูปที่ 2.2 การคำนวณด้วยวิธี BPM

2.3 สมการปมพรอพagation

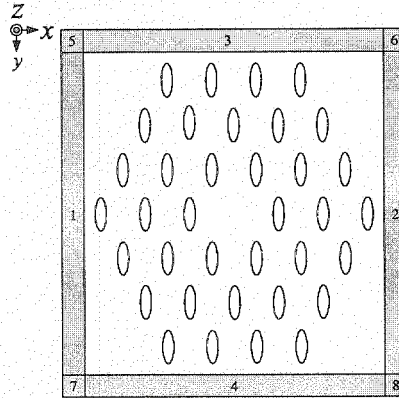
2.3.1 สมการคลื่นในท่อนำคลื่นแสงทั่วไป

เมื่อพิจารณาแสงซึ่งเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าดังนั้นจึงมีความสัมพันธ์เป็นไปตามสมการแมกซ์เวลล์ในรูปโดเมนความถี่ที่ไม่มีแหล่งกำเนิดตัวกลางภายในแบบไอโซทรอปิก เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขตแอนไอโซทรอปิกประเภท PML (Perfect Matched Layer) ดังรูปที่ 2.3

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} [\mathbf{s}]^{-1} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r [\mathbf{s}] \vec{E} = 0 \quad (2.2)$$

โดยที่ $\mu_r = 1$ และ $\epsilon_r = n^2$

กำหนดให้ n คือ ค่าดัชนีหักเหของตัวกลางถ้าเป็นตัวกลางอากาศมีค่าเท่ากับ 1 ถ้าเป็นตัวกลางแก้วซิลิกา มีค่าเท่ากับ 1.45



รูปที่ 2.3 หน้าตัดที่ใช้ในการคำนวณโดยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ และกรอบจำลองบริเวณเปิดโล่งด้วยชั้น Phase matched layer (PML)

$$[s] = \begin{bmatrix} s_y s_z / s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_z s_x / s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_x s_y / s_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

โดย s_x, s_y, s_z เป็นพารามิเตอร์ของ PML ในบริเวณต่างๆดังตารางที่ 2.1 ดังนี้

ตารางที่ 2.1 พารามิเตอร์ของ PML

พารามิเตอร์ PML	บริเวณของ PML							
	1	2	3	4	5	6	7	8
s_x	s_1	s_2	1	1	s_1	s_2	s_1	s_2
s_y	1	1	s_3	s_4	s_3	s_3	s_4	s_4

โดยกำหนดให้ $s_z = 1$ ทุกบริเวณของ PML ดังรูปที่ 2.3

เนื่องจากการวิเคราะห์นี้เป็นแบบแผนคลื่นรั่ว (leaky-mode) ดังนั้นพารามิเตอร์ของ PML จึงอยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

$$s_j = 1 - j\alpha_j \quad (2.4)$$

โดยค่า $j=1,2,3,4$ และค่าของ α_j ในนิยามนี้ใช้เป็นค่าคงที่คือ $\alpha_j = 1$ ทุกบริเวณของ PML มีค่า $s_j = 1 - j1$

จากสมการ (2.2) จะกำหนดให้ $p = \frac{1}{\mu_r}$ และ $q = \epsilon_r$ เพื่อการจัดรูปสมการ (2.2) ใหม่ได้ดังนี้

$$\nabla \times p[s]^{-1} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 q[s] \vec{E} = 0 \quad (2.5)$$

โดยแบ่งเวกเตอร์สนามไฟฟ้าออกเป็น 2 องค์ประกอบคือองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าตามขวาง และองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าตามยาวได้ดังนี้

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_t(x, y, z) + E_z(x, y, z) \vec{i}_z \quad (2.6)$$

และตัวดำเนินการเดล (del operator) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla = \nabla_t + \nabla_z \vec{i}_z \quad (2.7)$$

$$\nabla_t = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.9)$$

นำสมการ (2.7) แทนลงใน (2.5) จะได้สมการที่มีทั้งสนามไฟฟ้าตามขวางและสนามไฟฟ้าตามแนวแกน ดังสมการ (2.10)

$$\nabla \times p[s]^{-1} \nabla \times (\vec{E}_t + E_z \vec{i}_z) - k_0^2 q[s] (\vec{E}_t + E_z \vec{i}_z) = 0 \quad (2.10)$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\nabla \times p[s]^{-1} \nabla \times \vec{E}_t + \nabla \times p[s]^{-1} \nabla \times E_z \vec{i}_z - k_0^2 q[s] \vec{E}_t - k_0^2 q[s] E_z \vec{i}_z = 0 \quad (2.11)$$

นำสมการ (2.7) แทนลงในสมการ (2.11) แล้วจัดรูปจะได้

$$\nabla \times p[s]^{-1} (\nabla_t + \nabla_z \vec{i}_z) \times \vec{E}_t + \nabla \times p[s]^{-1} (\nabla_t + \nabla_z \vec{i}_z) \times E_z \vec{i}_z$$

$$-k_0^2 q[s] \bar{E}_t - k_0^2 q[s] E_z \bar{i}_z = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times p[s]^{-1} \nabla_t \times \bar{E}_t + \nabla \times p[s]^{-1} \nabla_z \bar{i}_z \times \bar{E}_t + \nabla \times p[s]^{-1} \nabla_t \times E_z \bar{i}_z + \nabla \times p[s]^{-1} \nabla_z \bar{i}_z \times E_z \bar{i}_z \\ - k_0^2 q[s] \bar{E}_t - k_0^2 q[s] E_z \bar{i}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_t + \nabla_z \bar{i}_z) \times p[s]^{-1} \nabla_t \times \bar{E}_t + (\nabla_t + \nabla_z \bar{i}_z) \times p[s]^{-1} \nabla_z \bar{i}_z \times \bar{E}_t + (\nabla_t + \nabla_z \bar{i}_z) \times p[s]^{-1} \nabla_t \times E_z \bar{i}_z \\ - k_0^2 q[s] \bar{E}_t - k_0^2 q[s] E_z \bar{i}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \nabla_t \times p[s]^{-1} \nabla_t + \nabla_z \bar{i}_z \times p[s]^{-1} \nabla_t \times \bar{E}_t + \nabla_t \times p[s]^{-1} \nabla_z \bar{i}_z \times \bar{E}_t + \nabla_z \bar{i}_z \times p[s]^{-1} \nabla_z \bar{i}_z \times \bar{E}_t \\ + \nabla_t \times p[s]^{-1} \nabla_t \times E_z \bar{i}_z + \nabla_z \bar{i}_z \times p[s]^{-1} \nabla_t \times E_z \bar{i}_z - k_0^2 q[s] \bar{E}_t - k_0^2 q[s] E_z \bar{i}_z = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

โดยกำหนดให้

$$[s_t] = \begin{bmatrix} s_y s_z / s_x & 0 \\ 0 & s_z s_x / s_y \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$s_t = s_x s_y / s_z \quad (2.17)$$

จัดรูปเมทริกซ์ $[s]$ ใหม่จะได้

$$[s] = \begin{bmatrix} [s_t] & 0 \\ 0 & s_t \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$[s]^{-1} = \begin{bmatrix} [s_t]^{-1} & 0 \\ 0 & s_t^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

แทนสมการ (2.18) และ (2.19) ลงในสมการ (2.15) แล้วแยกองค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบตามยาวจะได้ 2 สมการคลื่นดังนี้

$$\nabla_t \times (p s_t^{-1} \nabla_t \times \bar{E}_t) + \nabla_z \{p [s_t]^{-1} (\nabla_t E_z - \nabla_z \bar{E}_t)\} = k_0^2 q [s_t] \bar{E}_t \quad (2.20)$$

และ

$$\nabla_t \times \{p [s_t]^{-1} (\nabla_t E_z - \nabla_z \bar{E}_t)\} \times E_z = k_0^2 q s_t E_z \bar{i}_z \quad (2.21)$$

2.3.2 สมการบีบพรอพาเกชัน

เขียนผลเฉลยของเวกเตอร์สนามให้อยู่รูปของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลโดยใช้การประมาณแบบ slowly varying envelope คลื่นแสงจะมีขนาดค้อยๆลดลงตามระยะทางดังนี้

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_i(x, y, z)\exp(-jk_0n_0z) + E_z(x, y, z)\exp(-jk_0n_0z)\vec{i}_z \quad (2.22)$$

โดย \vec{E}_i คือขนาดสนามของลำคลื่นแนวหน้าตัด และ E_z คือขนาดของสนามตามแนวแกน z และค่า n_0 คือ ดรรชนีหักเหอ้างอิง (reference refractive index) ที่มีค่าอยู่ระหว่างดรรชนีหักเหของแก้ว $n=1.45$ กับดรรชนีหักเหของรูอากาศ $n=1$ ในวิทยานิพนธ์นี้เลือกค่า $n_0 = 1$ เมื่อแทนสมการ (2.22) ลงในสมการ (2.20) และ (2.21) จะได้

$$\begin{aligned} \nabla_i \times (ps_i^{-1} \nabla_i \times \vec{E}_i \exp(-jk_0n_0z)) + \nabla_z \{p[s_i]^{-1} (\nabla_i E_z \exp(-jk_0n_0z))\} \\ - \nabla_z \{p[s_i]^{-1} (\nabla_z \vec{E}_i \exp(-jk_0n_0z))\} = k_0^2 q[s_i] \vec{E}_i \exp(-jk_0n_0z) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \nabla_i \times [\{p[s_i]^{-1} (\nabla_i E_z \exp(-jk_0n_0z) - \nabla_z \vec{E}_i \exp(-jk_0n_0z))\} \times E_z \exp(-jk_0n_0z)] \\ = k_0^2 qs_i E_z \vec{i}_z \exp(-jk_0n_0z) \end{aligned} \quad (2.24)$$

จัดรูปสมการ (2.31) และ (2.32) จะได้สมการ (2.33) และ (2.34)

$$\begin{aligned} \nabla_i \times (ps_i^{-1} \nabla_i \times \vec{E}_i) - (\nabla_z^2 - 2jk_0n_0 \nabla_z - k_0^2 n_0^2) p[s_i]^{-1} \vec{E}_i \\ - k_0^2 q[s_i] \vec{E}_i + (\nabla_z - jk_0n_0) p[s_i]^{-1} \nabla_i E_z = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\nabla_i \times [\{p[s_i]^{-1} \nabla_i E_z\} \times E_z] - \nabla_i \times [\{p[s_i]^{-1} (\nabla_z - jk_0n_0) \vec{E}_i\} \times E_z] = k_0^2 qs_i E_z \vec{i}_z \quad (2.26)$$

ประมาณให้องค์ประกอบ E_i โดยที่ $i = x, y, z$ อยู่ในรูปของผลคูณของฟังก์ชันฐานแบบขอบและพหุนามเตอร์ไมท์ราบค่าดังนี้

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{U\}^T \{E_i\}^e \\ \{V\}^T \{E_i\}^e \\ j\{N\}^T \{E_z\}^e \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$\{U\}, \{V\}$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างดังนี้

$$\{U\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} l_1(y_3 - y) \\ l_2(y_1 - y) \\ l_3(y_2 - y) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\{V\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} l_1(x - x_3) \\ l_2(x - x_1) \\ l_3(x - x_2) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

โดยที่ x_i, y_i คือ พิกัด x, y ของโนดที่ $i = 1, 2, 3$ A คือขนาดพื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม l_i คือ ความยาวของด้านที่ $i = 1, 2, 3$ และเป็นค่าที่กำหนดทิศทางของเวกเตอร์ให้วิ่งในทิศทางที่เสริมกันโดยมีสูตรการหา ดังนี้

$$l_i = \begin{cases} \sqrt{b_k^2 + c_k^2} & \text{for } b_k < 0 \text{ or } b_k = 0, c_k > 0 \\ -\sqrt{b_k^2 + c_k^2} & \text{for } b_k > 0 \text{ or } b_k = 0, c_k < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

ในที่นี้ i, j, k หมุนวนแบบ modulo 3 เมื่อแทนฟังก์ชันฐานสมการ (2.27) ลงในสมการ (2.25) และ (2.26) แล้วหาลดคูณภายในตามระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักข้างแบบกาลีโดยเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักให้มีรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชันรูปร่าง โดยถ่วงน้ำหนักด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ W_i และฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ W_z ดังนี้

$$W_i = \{U\} \bar{i}_x + \{V\} \bar{i}_y \quad (2.31)$$

$$W_z = j\{N\} \quad (2.32)$$

จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} & \sum_e \iint_e W_i \cdot \nabla_i \times (p s_i^{-1} \nabla_i \times (\{U\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_x + \{V\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_y)) dx dy \\ & - \sum_e \iint_e W_i \cdot (\nabla_z^2 - 2jk_0 n_0 \nabla_z - k_0^2 n_0^2) p [s_i]^{-1} (\{U\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_x + \{V\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_y) dx dy \\ & - \sum_e \iint_e W_i \cdot k_0^2 q [s_i] (\{U\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_x + \{V\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_y) dx dy \\ & + \sum_e \iint_e W_i \cdot (\nabla_z - jk_0 n_0) p [s_i]^{-1} \nabla_i (j\{N\}^T \{E_z\}^e) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\sum_e \iint_e W_z \cdot \nabla_i \times [p [s_i]^{-1} \nabla_i (j\{N\}^T \{E_z\}^e) \times (j\{N\}^T \{E_z\}^e)] dx dy$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_e \iint W_z \cdot \nabla_t \times [p[s_i]^{-1} (\nabla_z - jk_0 n_0) (\{U\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_x + \{V\}^T \{E_i\}^e \bar{i}_y)] \times (j\{N\}^T \{E_z\}^e) dx dy \\
& - \sum_e \iint W_z k_0^2 q s_i (j\{N\}^T \{E_z\}^e) \bar{i}_z dx dy = 0
\end{aligned} \tag{2.34}$$

แทนสมการ (2.31) และ (2.32) ลงในสมการ (2.33) และ (2.34) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
& \sum_e \iint p \frac{s_z}{s_x s_y} \left(\frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} - \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} - \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} \right) dx dy \{E_i\}^e \\
& + j \frac{\partial}{\partial z} \sum_e \iint \left(p \frac{s_y}{s_z s_x} \{U\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y s_z} \{V\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right) dx dy \{E_z\}^e \\
& - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_e \iint \left(k_0^2 q \frac{s_y s_z}{s_x} \{U\} \{U\}^T + k_0^2 q \frac{s_z s_x}{s_y} \{V\} \{V\}^T \right) dx dy \{E_i\}^e \\
& - k_0^2 \sum_e \iint \left(q \frac{s_y s_z}{s_x} \{U\} \{U\}^T + q \frac{s_z s_x}{s_y} \{V\} \{V\}^T \right) dx dy \{E_i\}^e = 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_e \iint \left(p \frac{s_y}{s_z s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y s_z} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right) dx dy \{E_z\}^e \\
& + j \frac{\partial}{\partial z} \sum_e \iint \left(p \frac{s_y}{s_z s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \{U\}^T + p \frac{s_x}{s_y s_z} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \{V\}^T \right) dx dy \{E_i\}^e \\
& - k_0^2 q \frac{s_x s_y}{s_z} \sum_e \iint \{N\} \{N\}^T dx dy \{E_z\}^e = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

เนื่องจากเส้นใยนำแสงมีหน้าตัดขวางที่เหมือนกันตลอดแนวแกน z ดังนั้นจึงสามารถนำการประมาณแบบเฟรสเนลช่วยในการประมาณโดยให้ $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx 0$ การใช้การประมาณแบบเฟรสเนลช่วยลดเมทริกซ์ที่ใช้ในการคำนวณลงและช่วยลดเวลาในการคำนวณ ดังนั้นจะกำหนดสนามตามยาวดังสมการดังนี้

$$E_z(x, y, z) \exp(-jk_0 n_0 z) = j \frac{\partial}{\partial z} \{E'_z(x, y, z) \exp(-jk_0 n_0 z)\} \tag{2.37}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$E_z(x, y, z) \exp(-jk_0 n_0 z) = j \{N\}^T \{E_z\}^e \exp(-jk_0 n_0 z) = j \left(j \frac{\partial \{N\}^T}{\partial z} \right) \{E_z\}^e \quad (2.38)$$

จะเห็นได้ว่าการแปลงตัวแปรองค์ประกอบสนามไฟฟ้าในแนวยาว $\{N\}^T$ สามารถแทนด้วย $j \frac{\partial \{N\}^T}{\partial z}$ ได้
จะสังเกตว่าสมการ (2.35) มีเทอมของ $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ จึงสามารถตัดทิ้งได้แล้วจัดรูปใหม่ให้เหลืออนุพันธ์อันดับหนึ่ง
ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \sum_e \iint_e p \frac{s_z}{s_x s_y} \left(\frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} - \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} - \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} \right) dx dy \{E_i\}^e \\ & + j \frac{\partial}{\partial z} \sum_e \iint_e \left(p \frac{s_y}{s_z s_x} \{U\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y s_z} \{V\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right) dx dy \{E_z\}^e \\ & - k_0^2 \sum_e \iint_e \left(q \frac{s_y s_z}{s_x} \{U\} \{U\}^T + q \frac{s_z s_x}{s_y} \{V\} \{V\}^T \right) dx dy \{E_i\}^e = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \iint_e \left(p \frac{s_y}{s_z s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y s_z} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right) dx dy \{E_z\}^e \\ & + j \frac{\partial}{\partial z} \sum_e \iint_e \left(p \frac{s_y}{s_z s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \{U\}^T + p \frac{s_x}{s_y s_z} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \{V\}^T \right) dx dy \{E_i\}^e \\ & - k_0^2 q \frac{s_x s_y}{s_z} \sum_e \iint_e \{N\} \{N\}^T dx dy \{E_z\}^e = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

จากนั้นจัดรูปสมการใหม่จะได้สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$-2jk_0 n_0 [M] \frac{d\{E\}}{dz} + ([K] - k_0^2 n_0^2 [M]) \{E\} = \{0\} \quad (2.41)$$

โดยมีพารามิเตอร์ดังนี้

$$\{E\} = \begin{bmatrix} \{E_i\} \\ \{E_z\} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{uu}] & [M_{uz}] \\ [M_{zu}] & [M_{zz}] \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$[K_u] = \sum_e \iint \left[k_0^2 q \frac{s_y s_z}{s_x} \{U\} \{U\}^T + k_0^2 q \frac{s_z s_x}{s_y} \{V\} \{V\}^T - p \frac{s_z}{s_x s_y} \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} - p \frac{s_z}{s_x s_y} \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} + p \frac{s_z}{s_x s_y} \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} + p \frac{s_z}{s_x s_y} \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.45)$$

$$[M_{uu}] = \sum_e \iint \left[p \frac{s_y}{s_z s_x} \{U\} \{U\}^T + p \frac{s_x}{s_y s_z} \{V\} \{V\}^T \right] dx dy \quad (2.46)$$

$$[M_{uz}] = [M_{zu}]^T = \sum_e \iint \left[p \frac{s_y}{s_z s_x} \{U\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y s_z} \{V\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.47)$$

$$[M_{zz}] = \sum_e \iint \left[-k_0^2 q \frac{s_x s_y}{s_z} \{N\} \{N\}^T + p \frac{s_y}{s_z s_x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + p \frac{s_x}{s_y s_z} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.48)$$

จากสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งสมการ (2.41) แก้ปัญหาโดยใช้อัลกอริทึมแคลงนิโคลสัน (Crank-Nicholson algorithm) ซึ่งเป็นสมการปริมาตรพหุคูณโดยใช้สมการ (2.49) แก้ไขปัญหาในแนวแกน z

$$[A]_i \{E\}_{i+1} = [B]_i \{E\}_i \quad (2.49)$$

โดยให้พารามิเตอร์ $[A]$ และ $[B]$ ดังนี้

$$[A]_i = -2jk_0 n_{0,i} [M]_i + 0.5\Delta z ([K]_i - k_0^2 n_{0,i}^2 [M]_i) \quad (2.50)$$

$$[B]_i = -2jk_0 n_{0,i} [M]_i - 0.5\Delta z ([K]_i - k_0^2 n_{0,i}^2 [M]_i) \quad (2.51)$$

ค่า Δz คือระยะห่างระหว่างหน้าตัดขวางของเส้นใยนำแสงที่ i กับ $i+1$ โดยหลักการคำนวณแล้วเริ่มต้นคำนวณสนามไฟฟ้าที่ระนาบแรกด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แล้วจึงใช้สมการปริมพอพาเกชันสมการ (2.49) แก้สมการเพื่อหาสนามในระนาบที่สอง แล้วใช้สนามที่ได้จากระนาบที่สองไปหาสนามในระนาบที่สามทำเช่นนี้เรื่อยไปจะได้สนามไฟฟ้าที่ระยะต่างๆ ตามที่ต้องการ

เมื่อสามารถหาสนามไฟฟ้าได้คุณสมบัติต่อไปคือการหาค่าดรรชนีประสิทธิผล (effective index) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของค่าคงที่ของการแพร่กระจายคลื่นแสงในเส้นใยนำแสง (β) กับค่าคงที่ของการแพร่กระจายคลื่นแสงในอากาศ (k_0) ซึ่งเป็นดรรชนีหักเหที่แสงใช้ในการเดินทางในเส้นใยนำแสงตามความยาวคลื่นต่างๆ ดังสมการ (2.61) งานวิจัยนี้ นำวิธีการแพร่กระจายระยะทางจินตภาพ (Imaginary-distance propagation method) ซึ่งเป็นวิธีการที่ใช้กับท่อนำคลื่นที่ให้แบบแผนคลื่นเป็นจำนวนเชิงซ้อนในการปรับเปลี่ยนระยะห่างระหว่างระนาบ (Δz) ให้เป็นระยะทางจินตภาพ แล้วนำ Δz นี้ไปหาดรรชนีประสิทธิผล (n_{eff})

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} \quad (2.61)$$

ความสัมพันธ์ในเส้นใยนำแสงโพโตนิคคริสตัลแล้วค่าของ n_{eff} จะมีค่าอยู่ระหว่างดรรชนีหักเหของแก้ว ($n=1.45$) และดรรชนีของรูอากาศ ($n=1$) ทุกค่าของความยาวคลื่น

สมมติให้ดรรชนีประสิทธิผล ($n_{eff,j}$) ของลำดับ j เป็นแบบแผนเจาะจง (eigen mode) และมี $\{f_j\}$ เป็นสนามไฟฟ้าลำดับที่ j ดังนั้นสมการค่าเจาะจงดังสมการ (2.61)

$$[K]\{f_j\} = k_0^2 n_{eff,j}^2 [M]\{f_j\} \quad (2.62)$$

โดยค่า $[K]$ และ $[M]$ จากสมการ 2.43 และ 2.44 ตามลำดับ

จากสมการ (2.49)-(2.51) และ (2.62) จะได้สมการ (3.3)

$$\{f_j\}_{i+1} = \frac{-2jk_0 n_0 - 0.5\Delta z k_0^2 (n_{eff,j}^2 - n_0^2)}{-2jk_0 n_0 + 0.5\Delta z k_0^2 (n_{eff,j}^2 - n_0^2)} \{f_j\}_i \quad (2.63)$$

$$\{\phi\}_i = \sum_{j=1}^m A_{j,i} \{f_j\} \quad (2.64)$$

โดยที่ $A_{j,i}$ คือ แอมพลิจูดเชิงซ้อนของแบบแผนเจาะจง, $\{f_j\}$ คือการกระจายของสนาม

จะได้ค่า Δz ระยะห่างระหว่างระนาบที่เหมาะสมและ n_{eff} ดรรชนีประสิทธิผล ดังสมการ (2.65) และ (2.66) ตามลำดับ

$$\Delta z = j \frac{4n_0}{(n_{eff,j}^2 - n_0^2)k_0} \quad (2.65)$$

$$n_{eff,ji}^2 = \frac{\{\phi\}_i^\dagger [K] \{\phi\}_i}{k_0^2 \{\phi\}_i^\dagger [M] \{\phi\}_i} \quad (2.66)$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.67)$$

โดย λ คือความยาวคลื่นที่ใช้ป้อนในเส้นใยนำแสง

กำหนดให้ i คือ ขั้นตอนของการแพร่กระจาย (propagation step) และ เครื่องหมาย สัญลักษณ์ \dagger คือการสังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate) และ ทรานสโพส (transpose)

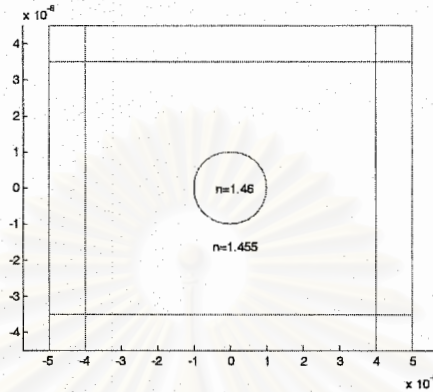
หลักการคำนวณหา Δz และ n_{eff} โดยใช้ Imaginary – distance propagation method เริ่มต้นจากการสมมติค่า n_{eff} โดยเลือกค่าที่มากที่สุดแล้วจึงนำ n_{eff} มาคำนวณหา Δz จากสมการ (2.65) จากนั้นจึงนำค่า Δz ที่ถูกปรับไปคำนวณหา n_{eff} ที่เข้าสู่ค่าตอบจากสมการ (2.66) ค่าของ n_0 ให้เลือกค่าดรรชนีหักเหที่น้อยที่สุด

เมื่อป้อนอินพุตแก๊สเซียนที่มีโพลาไรเซชันทางแกน y แล้วคำนวณค่าดรรชนีประสิทธิผลที่ความยาวของเส้นใยนำแสงระยะหนึ่งที่มีค่าดรรชนีประสิทธิผลแตกต่างกันไม่เกินระดับ 0.001 จะได้ค่าดรรชนีประสิทธิผลแนวแกน y (n_{eff}^y) และเช่นเดียวเมื่อป้อนอินพุตแก๊สเซียนที่มีโพลาไรเซชันทางแกน x แล้วคำนวณค่าดรรชนีประสิทธิผลที่ความยาวของเส้นใยนำแสงระยะหนึ่งที่มีค่าดรรชนีประสิทธิผลแตกต่างกันไม่เกินระดับ 0.001 จะได้ค่าดรรชนีประสิทธิผลแนวแกน x (n_{eff}^x) การวัดค่าโพลาไรเซชันว่าเส้นใยนำแสงประเภทใดสามารถรักษาค่าโพลาไรเซชันให้ค่าคงที่ต่อวัดจากไบรีฟรินเจนซ์ (Δn_{eff}) คือผลต่างของค่าดรรชนีประสิทธิผลที่มีโพลาไรเซชันทางแกน y กับค่าดรรชนีประสิทธิผลที่มีโพลาไรเซชันทางแกน x ดังสมการ (2.68)

$$\Delta n_{eff} = |n_{eff}^y - n_{eff}^x| \quad (2.68)$$

2.4 ผลการคำนวณในกรณีตัวอย่าง และการทดสอบความถูกต้องของวิธีการ

กรณีตัวอย่างที่นำมาใช้ในการทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันคือ เส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน เหตุผลที่เลือกคือ เป็นเส้นใยนำแสงที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) เพื่อใช้เปรียบเทียบ



รูปที่ 2.4 ภาคตัดขวางในระนาบ xy ของเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน

เส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานมีลักษณะตามรูปที่ (2.4) ซึ่งแกนกลาง (core) เป็นทำจากวัสดุแก้วซิลิกาที่มีดรรชนีหักเหเท่ากับ 1.46 มีขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 1 ไมโครเมตรและถูกล้อมรอบด้วยวัสดุหุ้ม (clad) ที่ทำจากวัสดุแก้วซิลิกาที่มีดรรชนีหักเหเท่ากับ 1.455 ซึ่งมีดรรชนีหักเหแตกต่างกัน 0.005 ซึ่งวัสดุหุ้มจะจำลองว่ามีวัสดุติดกันคลื่นโดยใช้ PML (perfect match layer) เสมือนว่าเมื่อคลื่นแสงแผ่กระจายเข้าไปอย่างสม่ำเสมอที่ขนาด 5×5 ตารางไมโครเมตร ต่อไปจะเป็นการทดสอบสนามไฟฟ้าโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพรอพาเกชันที่ระยะทางต่างๆและจากนั้นจะทดสอบเปรียบเทียบค่าดรรชนีประสิทธิผลกับค่า v ของแต่ละวิธีโดยใช้ค่า v ของเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานดังสมการ (2.69) ซึ่งใช้บอกจำนวนแบบแผนคลื่นที่เกิดขึ้นในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน ในการเปรียบเทียบค่าดรรชนีประสิทธิผลจะเลือกเฉพาะแบบแผนคลื่นเดี่ยวเท่านั้นซึ่งมีค่า $v < 2.405$

$$v = \frac{2\pi}{\lambda} d \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \quad (2.69)$$

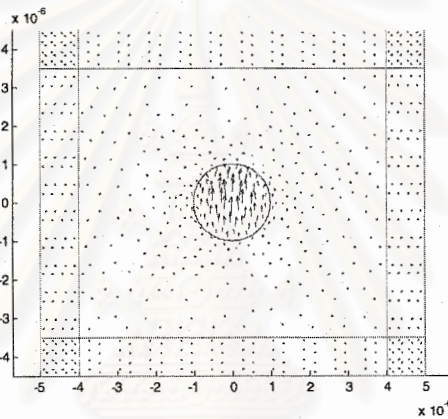
โดยที่ d คือเส้นผ่านศูนย์กลางของเส้นใยแสง, n_{co} คือดรรชนีหักเหของแกน, n_{cl} คือดรรชนีหักเหของวัสดุหุ้ม

ส่วนค่า v ของวิธี FE-BEM เป็นไปตามความสัมพันธ์ดังสมการ (2.70)

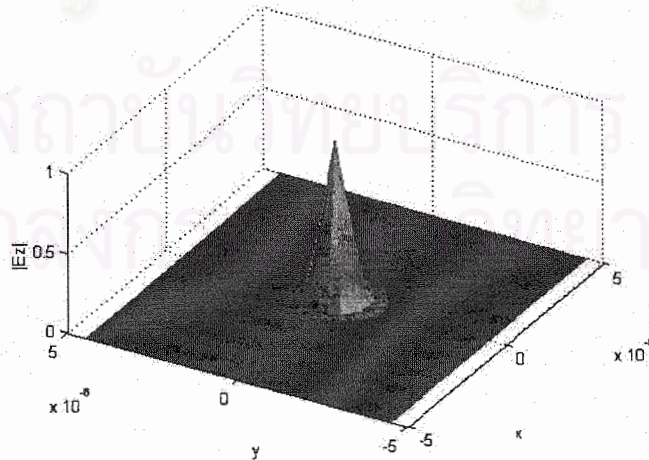
$$v = \frac{\omega \Lambda}{2\pi c} \quad (2.70)$$

โดย ω คือความถี่เชิงมุม, Λ คือ ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของแกนในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานหรือ ระยะห่างระหว่างรูอากาศทั้งสองรูในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัลและ c คือความเร็วของแสงในอากาศ

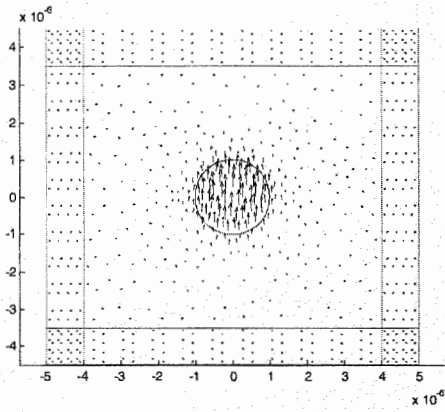
เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าอินพุตดังรูป 2.5 กำหนดให้สนามไฟฟ้า E_y อยู่ในรูปเกาส์เซียนมี ขนาดจุด (spot size) เท่ากับ 0.5 ไมโครเมตร ให้ สนามไฟฟ้า $E_x = 0$ โดยมีระยะชั้นการคำนวณ $\Delta z = 0.1$ ไมโครเมตร ความยาวคลื่นแสง 0.625 ไมโครเมตร ผลการคำนวณสนามที่ระยะทางต่างๆ แสดงดังในรูปที่ 2.7



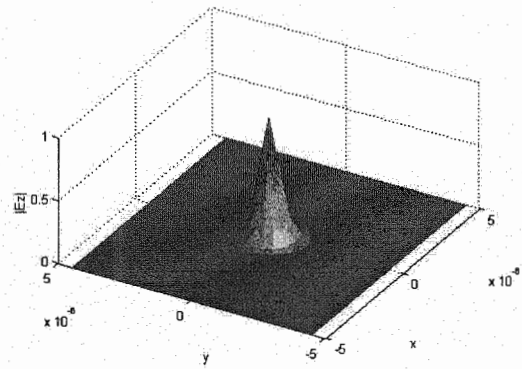
รูปที่ 2.5 สนามไฟฟ้าอินพุตในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน



รูปที่ 2.6 ขนาดของสนามไฟฟ้าอินพุตในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน

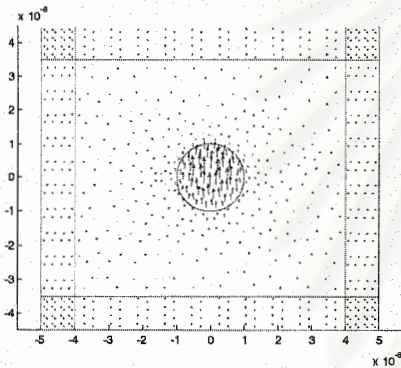


รูปที่ 2.7 (a)

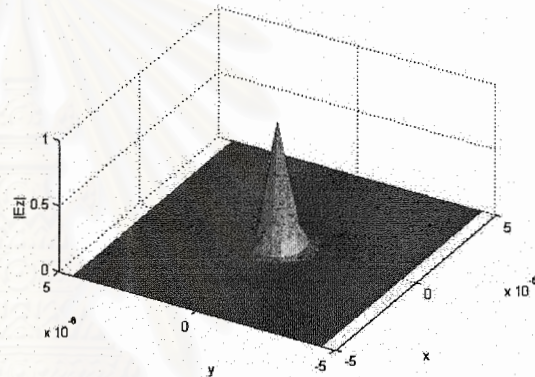


รูปที่ 2.7 (b)

รูปที่ 2.7 (a) สนามไฟฟ้าตามขวางในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน ระยะ 50 ไมโครเมตร
 รูปที่ 2.7 (b) ขนาดสนามไฟฟ้าแนวแกน z ในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน ระยะ 50 ไมโครเมตร



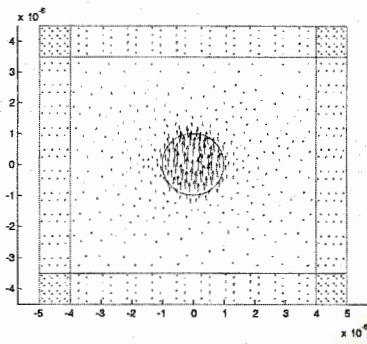
รูปที่ 2.8 (a)



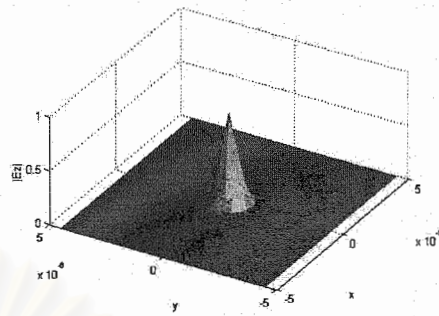
รูปที่ 2.8 (b)

รูปที่ 2.8 (a) สนามไฟฟ้าตามขวางในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานระยะ 500 ไมโครเมตร
 รูปที่ 2.8 (b) ขนาดสนามไฟฟ้าแนวแกน z ในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานระยะ 500 ไมโครเมตร

สถาบันวิทยบริการ
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



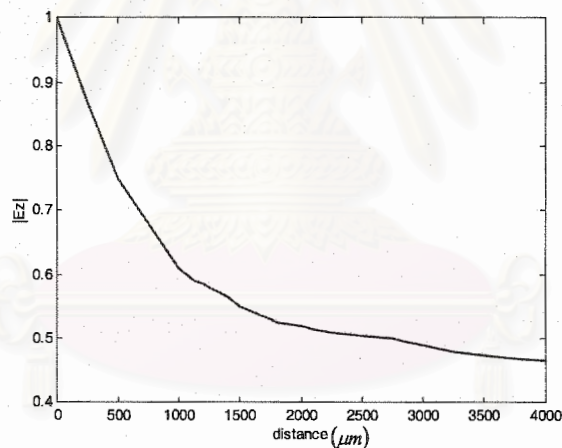
รูปที่ 2.9 (a)



รูปที่ 2.9 (b)

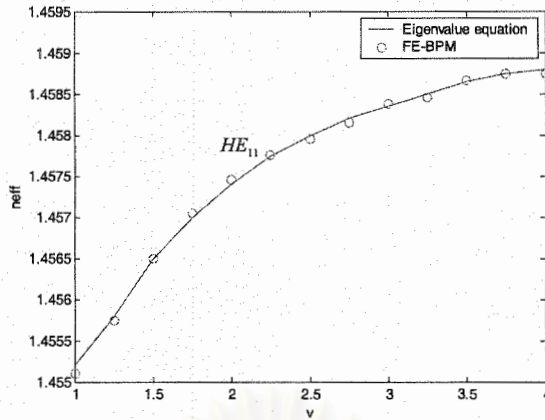
รูปที่ 2.9 (a) สนามไฟฟ้าตามขวางในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานระยะ 1000 ไมโครเมตร
รูปที่ 2.9 (b) ขนาดสนามไฟฟ้าแนวแกน z ในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานระยะ 1000 ไมโครเมตร

ขนาดของความเข้มสนามไฟฟ้าตามขวางในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานที่แปรตามระยะการคำนวณตามแกน z แสดงได้เป็นกราฟดังในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ขนาดสนามไฟฟ้าแนวแกน z ในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐานที่ระยะทางต่างๆ

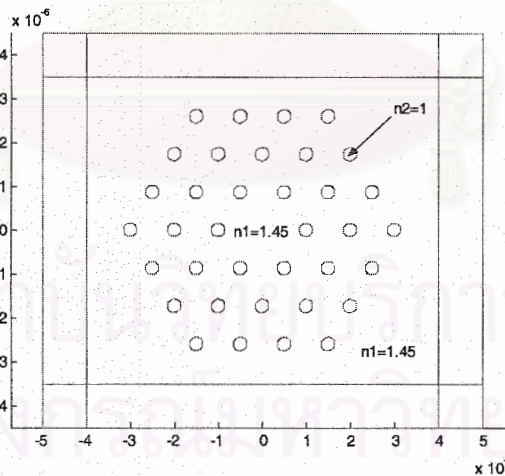
ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z กับระยะทางที่แสงเคลื่อนที่ระยะทางต่างๆสามารถสรุปได้ว่าเมื่อระยะทางเพิ่มขึ้นขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ก็จะลดลงเร็วช่วงระยะทาง 0-2000 ไมโครเมตร แล้วจะลดลงช้าช่วงระยะทาง 2000-4000 ไมโครเมตร ผลการทดสอบความถูกต้องของวิธี Exact solution กับวิธี FE-BPM (finite element beam propagation method) โดยใช้การเปรียบเทียบการคำนวณค่าดัชนีประสิทธิผล (effective index) ของโหมด HE_{11} ในเส้นใยนำแสงแบบมาตรฐาน ระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ที่เสนอในโครงการวิจัย ผลการเปรียบเทียบแสดงในรูปที่ 2.11.



รูปที่ 2.11 กราฟเปรียบเทียบค่านีประสิทธิผลระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลจากวิธี FEM-BPM

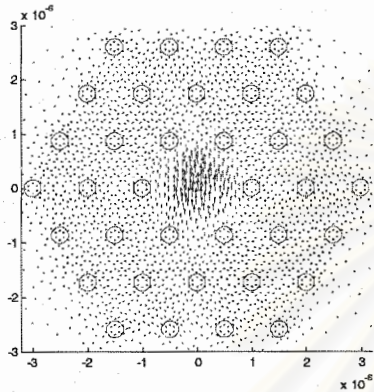
2.5 ตัวอย่างการคำนวณในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลรูปร่างวงกลม (PCF) 3 วง

ตัวอย่างที่ 2 เป็นเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลรูปร่างวงกลมที่มีรูอากาศจัดเรียงคล้ายรวงผึ้ง 3 วง 36 รูอากาศบริเวณตรงกลางเรียกว่าแกน ซึ่งค่าดัชนีหักเห $n_1 = 1.45$ และรูอากาศรูปวงกลมมีรัศมีเท่ากับ 0.1545 ไมโครเมตรซึ่งมีค่าดัชนีหักเห $n_2 = 1$ นอกบริเวณของแกนทั้งหมดเรียกว่าวัสดุหุ้ม เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลถูกล้อมรอบด้วยวัสดุดูดกลืนคลื่นแบบ PML ขนาด 5×5 ไมโครเมตร ดังรูป 2.12

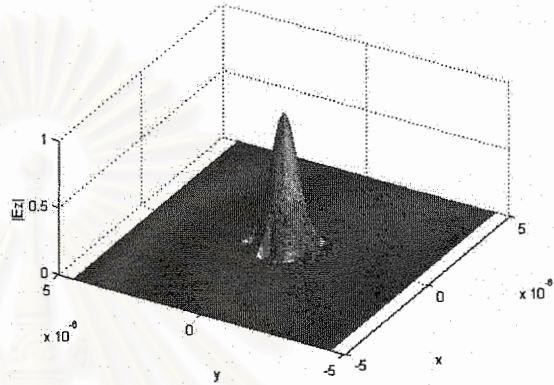


รูปที่ 2.12 ภาคตัดขวางในระนาบ xy ของ PCF 3 วง

เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าอินพุตดังรูป 2.13 และ 2.14 กำหนดให้สนามไฟฟ้า \vec{E}_y อยู่ในรูปเกาส์เซียนมีขนาดจุด (spot size) เท่ากับ 0.6 ไมโครเมตร ให้ สนามไฟฟ้า $\vec{E}_x = 0$ โดยมีระยะชั้นการคำนวณ $\Delta z = 1$ ไมโครเมตร ความยาวคลื่นแสง 0.625 ไมโครเมตร ผลการคำนวณสนามไฟฟ้าตามขวางและขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ที่ระยะทางต่างๆมีดังนี้

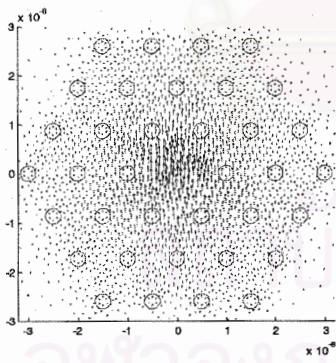


รูปที่ 2.13 สนามไฟฟ้าตามขวางอินพุต

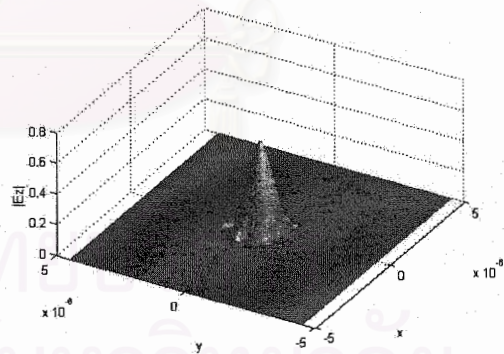


รูปที่ 2.14 ขนาดของสนามไฟฟ้าอินพุตในแกน z

จากนั้นได้คำนวณสนามไฟฟ้าตามขวางและขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ที่ระยะทาง $z = 250 \text{ mm}, 500 \text{ mm}$ ผลแสดงได้ดังรูปที่ 2.15, 2.16, และ 2.17 ดังนี้



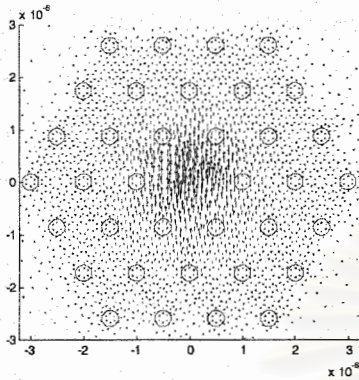
(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง



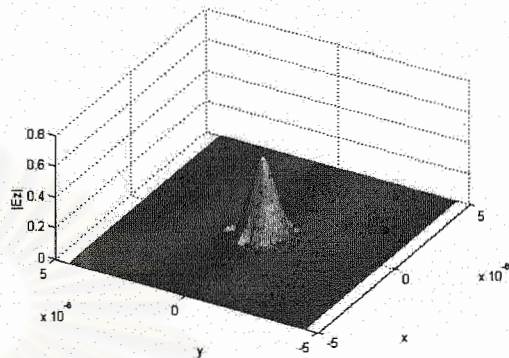
(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.15 (a) สนามไฟฟ้าใน PCF 3 วง ระยะ 250 ไมโครเมตร

สนามไฟฟ้าตามขวางใน PCF ที่ระยะ 250 ไมโครเมตร สนามไฟฟ้าส่วนมากจะอยู่บริเวณแกนกลางของ PCF 3 วง แต่มีสนามไฟฟ้าบริเวณระหว่างรูอากาศทั้งสองที่อยู่ติดกันสามารถหลุดออกจากแกนกลางได้เนื่องจาก PCF มีแบบแผนคลื่นรั่วจึงทำให้คลื่นแสงสามารถรั่วออกไป ทำให้ขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ที่ระยะ 250 ไมโครเมตรลดลงเหลือ 0.85



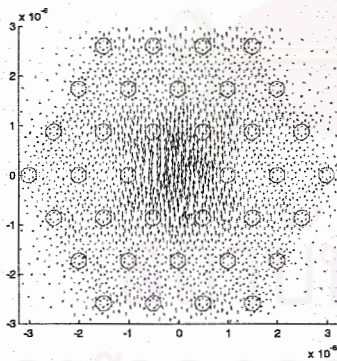
(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง



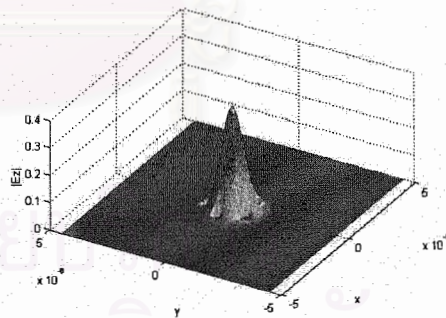
(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.16 การกระจายของสนามไฟฟ้าใน PCF 3 วง ระยะ 500 ไมโครเมตร

สนามไฟฟ้าตามขวางใน PCF ที่ระยะ 500 ไมโครเมตร สนามไฟฟ้าส่วนมากจะอยู่บริเวณแกนกลางของ PCF 3 วง แต่มีแบบแผนคลื่นรั่วจึงทำให้คลื่นแสงสามารถรั่วออกไป ทำให้ขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ที่ระยะ 500 ไมโครเมตรลดลงเหลือ 0.74



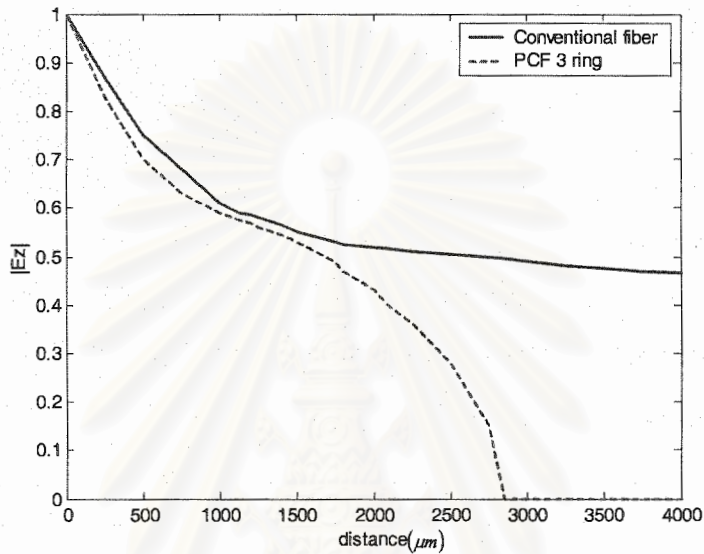
(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง



(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.17 (a) สนามไฟฟ้าใน PCF 3 วง ระยะ 1000 ไมโครเมตร

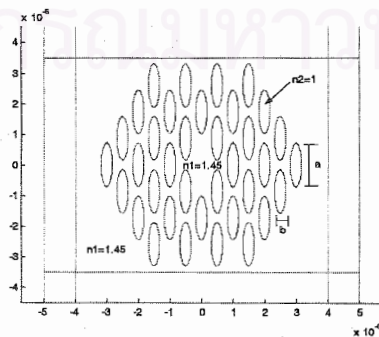
สนามไฟฟ้าตามขวางใน PCF ที่ระยะ 1000 ไมโครเมตร สนามไฟฟ้าส่วนมากจะอยู่บริเวณแกนกลางของ PCF 3 วง เนื่องจากมีคลื่นรั่วจึง ทำให้น้ำหนักของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ที่ระยะ 1000 ไมโครเมตรลดลงเหลือ 0.64 เมื่อสรุปความสัมพันธ์ของขนาดสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z กับระยะทางที่แสงเคลื่อนที่ได้ ผลแสดงได้ดังรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 ขนาดสนามไฟฟ้าแนวแกน z ใน PCF 3 วงที่ระยะทางต่างๆ

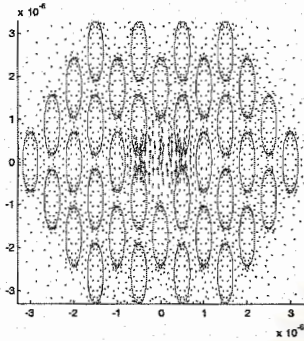
2.6 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลรูอากาศรูปวงรี (EPCF) 3 วง

ตัวอย่างที่ 3 เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลรูอากาศรูปวงรีที่มีรูอากาศจัดเรียงคล้ายรวงผึ้ง 3 วง บริเวณตรงกลางเรียกว่าแกนซึ่งค่าดัชนีหักเห $n_1 = 1.45$ และรูอากาศรูปวงรีมีความยาวแกนเอก (a) เท่ากับ 0.7136 ไมโครเมตรและมีความยาวแกนโท (b) เท่ากับ 0.1784 ไมโครเมตร ซึ่งรูอากาศรูปวงรีมีค่าดัชนีหักเห $n_2 = 1$ นอกบริเวณของแกนทั้งหมดเรียกว่าวัสดุหุ้ม เส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตอลถูกล้อมรอบด้วยวัสดุเคลือบเคลือบแบบ PML ขนาด 5×5 ไมโครเมตร ดังรูป 2.19

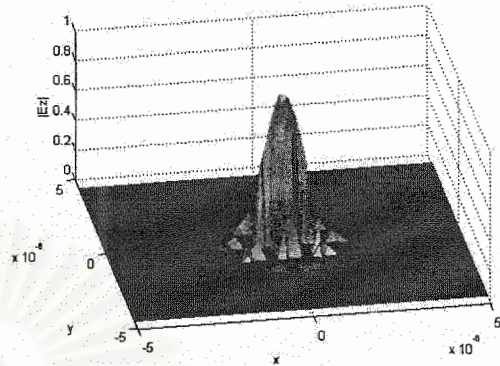


รูปที่ 2.19 ภาคตัดขวางในระนาบ xy ของ EPCF 3 วง

เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าอินพุตดังรูป 2.20 กำหนดให้สนามไฟฟ้า \vec{E}_y อยู่ในรูปเกาส์เซียนมีขนาดจุด (spot size) เท่ากับ 0.8 ไมโครเมตร ให้ สนามไฟฟ้า $\vec{E}_x = 0$ โดยมีระยะชั้นการคำนวณ $\Delta z = 1$ ไมโครเมตร ความยาวคลื่นแสง 0.625 ไมโครเมตร



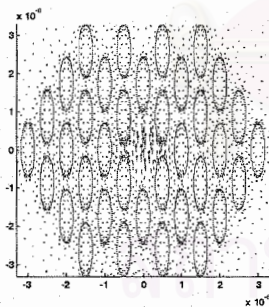
(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง



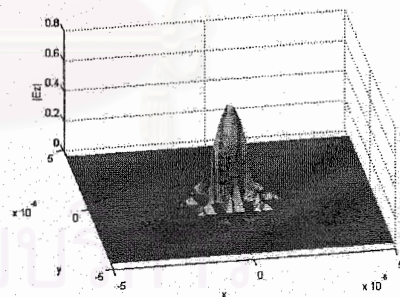
(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.20 สนามไฟฟ้าอินพุตใน EPCF 3 วง

ขนาดของสนามไฟฟ้าอินพุตแนวแกน z ในเส้นใยนำแสง EPCF 3 วง 36 รูอากาศ กำหนดให้มีขนาดของสนามไฟฟ้าเท่ากับ 1 ที่แกนกลางของ EPCF จากนั้นได้คำนวณสนามไฟฟ้าตามขวางและขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ที่ระยะทาง $z = 100 \mu\text{m}$, $250 \mu\text{m}$, และ $500 \mu\text{m}$ ต่างๆ ดังนี้

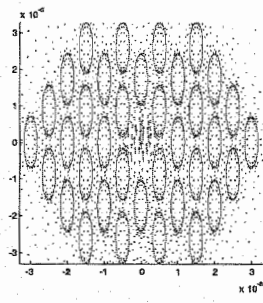


(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง

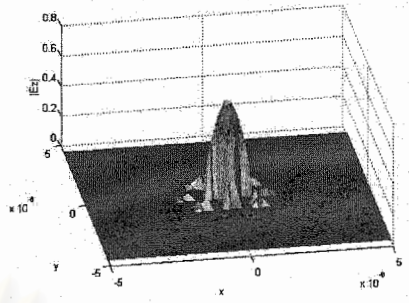


(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.21 สนามไฟฟ้าตามขวางใน EPCF 3 วง ระยะ 100 ไมโครเมตร

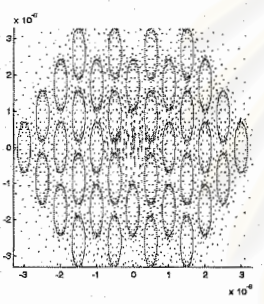


(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง

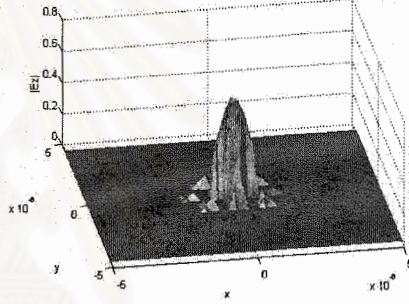


(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.22 สนามไฟฟ้าตามขวางใน EPCF 3 วง ระยะ 250 ไมโครเมตร



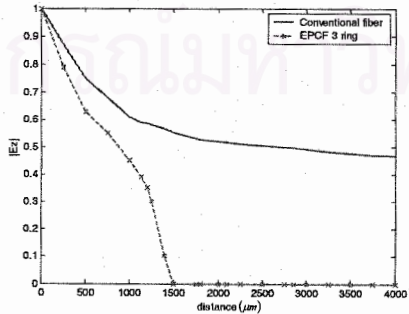
(a) สนามไฟฟ้าตามขวาง



(b) สนามไฟฟ้าตามแกน

รูปที่ 2.23 สนามไฟฟ้าตามขวางใน EPCF 3 วง ระยะ 500 ไมโครเมตร

เราสามารถสรุปความสัมพันธ์ของขนาดสนามไฟฟ้าตามแนวแกน z กับระยะทางที่แสงเคลื่อนที่ได้ดังรูปที่ 2.24



รูปที่ 2.24 ขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ใน EPCF 3 วงที่ระยะทางต่างๆ

จากรูปที่ 2.24 ขนาดของสนามไฟฟ้าแนวแกน z ใน EPCF 3 วง จะลดลงเรื่อยๆ จนกระทั่งมีค่าเป็นเท่ากับศูนย์ที่ระยะ 1500 ไมโครเมตร เนื่องจาก EPCF เพียง 3 วง ไม่สามารถกักคลื่นแสงได้ตลอดระยะทางการเคลื่อนที่เพราะคลื่นแสงจะรั่วออกจากบริเวณระหว่างรูอากาศตลอดเวลา

3. สรุปผลและการดำเนินการต่อไป

งานวิจัยได้เสนอวิธีการวิเคราะห์การแพร่กระจายแสงในเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์บีมพอร์พาเกชัน และได้ทดลองสร้างโปรแกรมเพื่อคำนวณวิเคราะห์ในกรณีตัวอย่างเพื่อทดสอบความถูกต้อง ผลการคำนวณพบว่าวิธีการที่นำเสนอสามารถนำมาใช้วิเคราะห์ได้อย่างมีประสิทธิภาพและใช้เวลาคำนวณที่รวดเร็วกว่าการคำนวณใน 3 มิติ เหมาะสำหรับโครงสร้างที่มีความสม่ำเสมอตามแกนยาว ขั้นตอนที่ดำเนินการต่อไปคือการสร้างซอฟต์แวร์ให้ทำงานง่ายสำหรับผู้ใช้งานทั่วไปเพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์หรือออกแบบเส้นใยนำแสงโฟโตนิกคริสตัลต่อไป

4. การเผยแพร่ผลงานวิจัย

งานวิจัยในหัวข้อนี้ได้นำเสนอในงานประชุมวิชาการ The 4th International Conference on Optical Communications and Networks, 14-16 December 2005, Bangkok, Thailand จัดโดย IEEE Laser and Electr Optic System(LEOS), Optical Society of America (OSA), และ The International Society for Optical Engineering (SPIE) นำเสนอใน Proceeding เรื่อง “Finite Element Beam Propagation Method for Analysis of Optical Integrated Circuits and Photonic Crystal Fiber”, Jirawat Tangwanchareon and Tuptim Angkaew หน้า 418 - 421