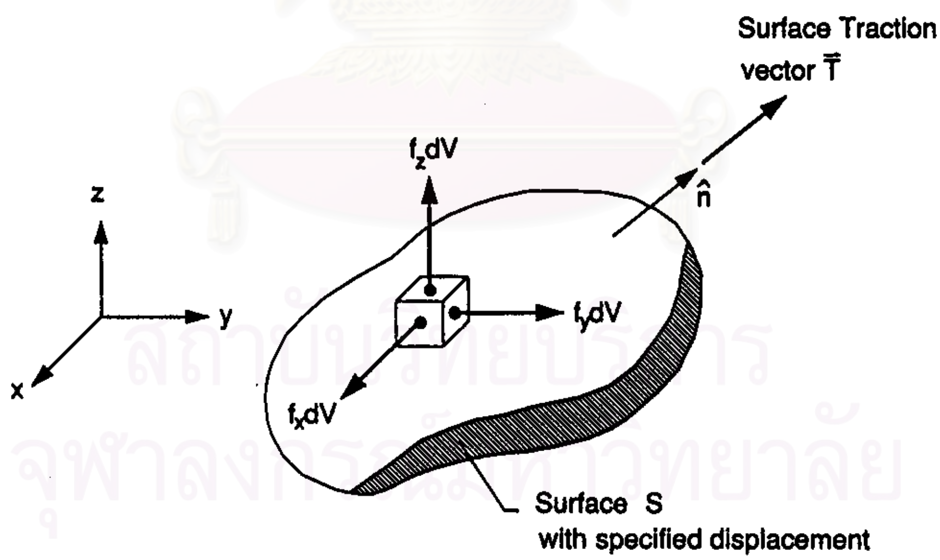
บทที่ 2
ทฤษฎีพื้นฐานสำหรับวิเคราะห์ความเค้นในของแข็ง เนื่องจากอุณหภูมิ (Thermal Stress)

ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ความเค้นและการเสียรูปของของแข็งในสามมิติ ซึ่งประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แสดงความสมดุลของของแข็ง สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว และลักษณะเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆที่กระทำกับปัญหาของแข็งในสามมิติ โดยแยกอธิบายเป็นระบบพิกัดต่าง ๆ เพื่อความสะดวกต่อการพิจารณาให้สอดคล้องกับปัญหา จากนั้นจึงอธิบายรายละเอียดเกี่ยวกับขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของของแข็งในสามมิติ

ของแข็งที่มีการยืดหยุ่นได้ในสามมิติ มีแรงภายนอกต่าง ๆมากระทำภายใต้ความสมดุลได้แสดงในรูปที่ 2.1

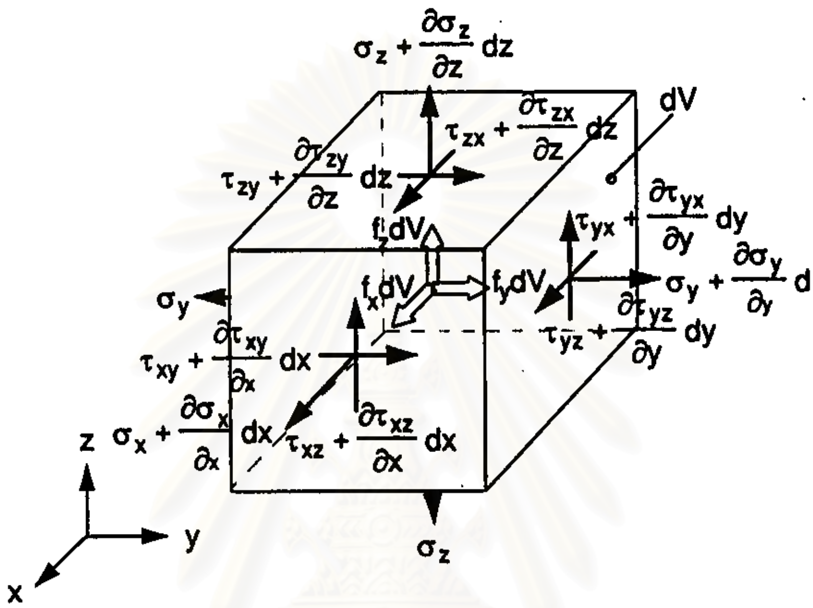


รูปที่ 2.1 ความสมดุลของแข็งในสามมิติ

เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับวัตถุจะทำให้เกิดการเสียรูปและความเค้นขึ้น สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงความสมดุลของแข็งสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยพิจารณาความเค้นต่าง ๆที่กระทำกับเอลิเมนต์เล็ก ๆ ปริมาตร dV ในที่นี้จะแยกพิจารณาในแต่ละระบบพิกัด ดังต่อไปนี้

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system)

สำหรับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน เอลิเมนต์เล็กๆภายใต้สภาวะความสมดุลเมื่อมีความเค้นต่างๆมากระทำ ได้แสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆ ปริมาตร dV ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

โดย σ_x, σ_y, σ_z แทนความเค้นตั้งฉาก (Normal stress) ในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ และ τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} แทนความเค้นเฉือน (Shear stress) ส่วน f_x, f_y, f_z แทนแรงวัตถุ (Body force) ในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ เมื่อพิจารณาถึงความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆ ปริมาตร dV ในรูปที่ 2.2 โดยการสมดุลแรงตามแนวแกน x, y, z จะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970] ซึ่งแสดงความสมดุลของของแข็งในสามมิติ ดังนี้

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + f_z = 0$$

โดย f_x, f_y, f_z แทนแรงวัตถุ (Body force) ในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ ซึ่งแรงวัตถุนี้อาจประกอบด้วย แรงเหวี่ยงรอบตัว แรงเนื่องจากน้ำหนักวัตถุ นอกจากแรงต่างๆเหล่านี้ที่มากระทำกับของแข็งก่อให้เกิดความเค้นและการเคลื่อนตัวแล้ว ของแข็งในสามมิติในรูป 2.1 อาจมีความเครียดชั้นต้น (Prestrain) ซึ่งเกิดขึ้นอยู่ก่อน โดยความเครียดชั้นต้นอาจเกิดมาจากหลายสาเหตุ สำหรับปัญหาที่มีการถ่ายเทความร้อนในของแข็ง ความเครียดชั้นต้นเป็นผลมาจากอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆกันซึ่งอาจมีค่าไม่เท่ากัน เวกเตอร์ของความเค้นชั้นต้นเนื่องจากอุณหภูมิ คือ

$$\{\varepsilon_0\}^T = \lfloor \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rfloor \tag{2.2}$$

โดย α แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัว และ ΔT แทนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปจากอุณหภูมิ T_0 ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น โดย

$$\Delta T = T(x, y, z) - T_0 \tag{2.3}$$

เนื่องจากความเครียดชั้นต้นเป็นความเค้นที่เกิดขึ้นก่อน ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relations) โดยทั่วไป สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ ดังนี้ [Chandrupatla, T. R. and Belegundu, A. D., 1991]

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon - \varepsilon_0\} \tag{2.4}$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\right] \tag{2.5}$$

$$\{\varepsilon\}^T = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\right] \tag{2.6}$$

โดย ε_x, ε_y, ε_z แทนความเครียดในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ (Normal Strain) ส่วน γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} แทนความเครียดเฉือน (Shear Strain) และ

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

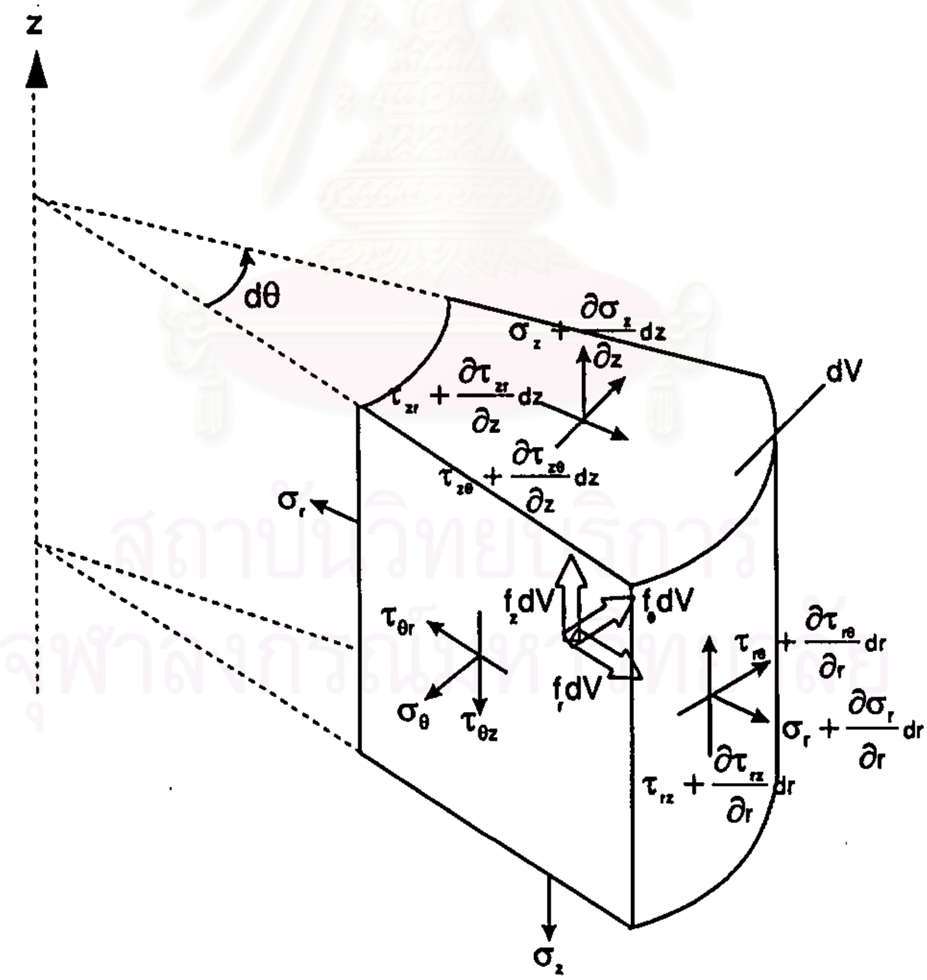
โดย ν คืออัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson ratio), E คือค่าคงที่ของการยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว (Strain-displacement relation) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \qquad (2.7)$$

โดย u, v, w แทนการเคลื่อนตัวในแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate system)

สำหรับระบบพิกัดทรงกระบอก เอลิเมนต์เล็กๆปริมาตร dV ภายใต้สภาวะความสมดุลเมื่อมีความเค้นต่างๆมากระทำ ได้แสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆปริมาตร dV ในระบบพิกัดทรงกระบอก

โดย σ_r, σ_θ, σ_z แทนความเค้นในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ (Normal stress) และ $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ แทนความเค้นเฉือน (Shear stress) ส่วน f_r, f_θ, f_z แทนแรงวัตถุในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ เมื่อพิจารณาถึงความสมดุลของเอลิเมนต์เล็กๆปริมาตร dV ในรูปที่ 2.3 ในแนวแกน r, θ, z จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [Johns, D. J., 1965] ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \sigma_\theta + r f_r &= 0 \\
\frac{\partial(r\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \tau_{r\theta} + r f_\theta &= 0 \\
\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + r\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + r f_z &= 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

ส่วนความเครียดชั้นต้น (Prestrain) เนื่องจากอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆกันซึ่งอาจมีค่าไม่เท่ากันสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon_0\}^T = \lfloor \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rfloor \tag{2.9}$$

โดย α แทนสัมประสิทธิ์การขยายตัว และ ΔT แทนอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปจากอุณหภูมิ T_0 ซึ่งเป็นอุณหภูมิที่วัสดุนั้นไม่มีความเค้น เช่นเดียวกับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

เนื่องจากการรวมถึงความเครียดชั้นต้น ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relation) ในระบบพิกัดทรงกระบอกโดยทั่วไป คือ

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon - \varepsilon_0\} \tag{2.10}$$

โดย

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{rz} \quad \tau_{\theta z}] \tag{2.11}$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{r\theta} \quad \gamma_{rz} \quad \gamma_{\theta z}] \tag{2.12}$$

โดย ε_r, ε_θ, ε_z แทนความเครียดในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ (Normal Strain) ส่วน $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}, $\tau_{\theta z}$ แทนความเครียดเฉือน (Shear Strain)

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

(2.13)

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเคลื่อนตัว (Strain-displacement relation) ในระบบพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

โดย u, v, w แทนการเคลื่อนตัวในแนวแกน r, θ, z ตามลำดับ

2.2 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions)

ตลอดผิวนอกของของแข็งดังแสดงในรูป 2.1 อาจประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่ต่างๆกัน เช่น มีการกำหนดค่าการเคลื่อนตัวบนผิวของแข็งบางส่วน เช่นที่พื้นที่ผิว S ดังรูป 2.1 มีการกำหนดการเคลื่อนตัว ในขณะที่ผิวส่วนอื่นอาจมีการกำหนดความเค้นที่ผิว (Surface traction) เช่น ความดันที่กระทำกับผิวของแข็ง ซึ่งแสดงด้วยเวกเตอร์ $\vec{T}$

2.2.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

ความเค้นที่ผิว ซึ่งแทนด้วยเวกเตอร์ $\vec{T}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน คือ

$$\vec{T} = T_x\hat{i} + T_y\hat{j} + T_z\hat{k} \tag{2.15}$$

โดย T_x, T_y, T_z แทนความเค้นที่ผิวในทิศแกน x, y, z ตามลำดับ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นย่อยได้ดังนี้ [Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., 1970]

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

ซึ่ง n_x, n_y, n_z เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น

$$\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} + n_z\hat{k} \tag{2.17}$$

2.2.2 ระบบพิกัดของกระบอก

ความเค้นที่ผิว ในระบบพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\bar{T} = T_r\hat{i} + T_\theta\hat{j} + T_z\hat{k} \tag{2.18}$$

โดย T_r, T_θ, T_z แทนความเค้นที่ผิวในแกน r, θ, z ตามลำดับ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเค้นย่อยได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} T_r \\ T_\theta \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_z \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

ซึ่ง n_r, n_θ, n_z เป็นทิศทางโคไซน์เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณาอยู่นั้น

$$\hat{n} = n_r\hat{i} + n_\theta\hat{j} + n_z\hat{k} \tag{2.20}$$

2.3 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ๆทั้งหมด 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้ [ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 2537]

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> การกำหนดลักษณะผลลัพธ์สำหรับแต่ละเอลิเมนต์ ในรูปแบบของฟังก์ชันโดยประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation functions)

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> การสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ (Element equations) โดยการแทนฟังก์ชันโดยประมาณภายในเอลิเมนต์จากขั้นตอนที่ 2 ลงในสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มต้น แล้วทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกันขึ้น

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาประกอบกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม (System of simultaneous equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\sum \text{(Element equations)} \Rightarrow [K]_{sys}\{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \tag{2.21}$$

โดย $\{\phi\}_{sys}$ ในที่นี้ แทนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของระบบสมการรวม

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ลงในระบบสมการรวม (2.21) ในขั้นตอนที่ 4 แล้วจึงแก้ระบบสมการนั้นเพื่อหาค่าของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ $\{\phi\}_{sys}$

<u>ขั้นตอนที่ 6</u> เมื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อได้แล้ว จึงสามารถทำการหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการทราบต่อไป เช่น เมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัว ณ จุดต่อต่าง ๆ ของปัญหาแล้ว สามารถนำค่าการเคลื่อนตัวไปใช้ในการหาความเครียด และความเค้นต่อไปได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนตัว และความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและความเค้น ตามลำดับ