โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

Mathematical Method for Schrödinger Equation and Finding Condition of Quasi-normal mode frequencies for various potentials

ชื่อนิสิต นายเจริญศักดิ์ ยินดีเทศ 593 35076 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หัวข้อโครงงาน	วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ
โดย	นายเจริญศักดิ์ ยินดีเทศ
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	รองศาสตราจารย์ ดร.เพชรอาภา บุญเสริม

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

เพชรอาภา บุญเสริม .... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพชรอาภา บุญเสริม)

อมร วาสนาวิจิตร์ .... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อมร วาสนาวิจิตร์)

ณัฏฐนาถ ไตรภพ .... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ณัฏฐนาถ ไตรภพ)

นายเจริญศักดิ์ ยินดีเทศ : วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์-มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ (Mathematical Method for Schrödinger Equation and Finding condition of Quasi-normal mode frequencies for various potentials)
อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รองศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม, 112 หน้า

ในการศึกษาและทำความเข้าใจปรากฏการณ์ในกลศาสตร์ควอนตัมสมการชเรอดิงเงอร์นับว่ามีบทบาทเป็นอย่างยิ่งเนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองซึ่งเขียนอยู่ในรูปพลังงานรวมของอนุภาคและมีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันคลื่นและมีค่าเปลี่ยนไปตามพลังงานศักย์ที่ใช้ โดยฟังก์ชันคลื่นสามารถใช้ทำนายพฤติกรรมต่าง ๆ ของคลื่นได้ สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาและสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ในโครงงานนี้เราสนใจศึกษาการผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและแสดงวิธีการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนจากสูตรของการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี พร้อมทั้งแสดงวิธีการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านที่ได้จากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีที่จะนำไปสู่การหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าความถี่ของโหมดกึ่งปกติสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต เจริญศักดิ์ ยินดีเทศ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ. ที่ปรึกษาโครงงาน เพชรอาภา บุญเสริม

ปีการศึกษา 2562

593350763: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS: SCHRODINGER’S EQUATION / WKB APPROXIMATION / QUASI-NORMAL FREQUENCIES.

CHAROENSAK YINDETET: MATHEMATICAL METHOD FOR SCHRODINGER EQUATION AND FINDING CONDITION OF QUASI-NORMAL MODE FREQUENCIES.
ADVISOR: ASSOC. PROF. PETARPA BOONSERM, Ph.D., 112 pp.

In the studying and understanding of phenomena in quantum mechanics, the Schrodinger equation is of significant importance. Schrodinger’s equation is a second order differential equation written as the total energy of particles, with the solution of the equation being a wave function. The value of the solution changes according to the potential energy being used, such that the wave function can be used to predict the various behaviors of waves. The Schrodinger equation can be divided into 2 types; the time-dependent Schrodinger equation and the time-independent Schrodinger equation. In this project, we are interested in studying the solution of the time-independent Schrodinger equation by using the WKB approximation method. We will show the methods of calculating the probability of transmission and reflections from formulas, while also showing how the transmission probability can be found from the solution of Schrodinger equation using the WKB approximation method. This will lead to the condition of the quasi-normal mode frequencies for various potentials.

Department: Mathematics and Computer Science Student’s Signature เจริญศักดิ์ ยินดีเทศ

Field of Study: Mathematics Advisor’s Signature เพชรอาภา บุญเสริม

Academic Year: 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่องวิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะได้รับการอนุเคราะห์และความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลายท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินการโครงงานจึงใคร่ขอขอบพระคุณในความช่วยเหลือ ๆ ดังต่อไปนี้

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม อย่างสูง ที่กรุณารับผู้ดำเนินโครงงานเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษาในเรื่องต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นขั้นตอนวิธีการดำเนินงาน การติดตามความก้าวหน้าในการทำโครงงาน ให้คำสอนเกี่ยวกับข้อคิดและวินัยในการทำงานและข้อคิด ดูแลเอาใจใส่ ให้ข้อเสนอแนะและชี้ให้เห็นถึงข้อผิดพลาดต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นในการทำโครงงาน จนกระทั่งทำโครงงานสำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. อมร วาสนาวิจิตร์ และรองศาสตราจารย์ณัฏฐนาถ ไตรภพ ที่กรุณารับเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงานครั้งนี้ พร้อมทั้งยังให้ข้อเสนอแนะและข้อคิดที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่ง รวมถึงชี้ให้เห็นถึงปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ เพื่อนำไปแก้ไขและปรับปรุงโครงงานให้เกิดความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ นางสาวกุลภัทร แสนสุข ที่ได้ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะแก่ผู้จัดทำโครงงานจนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

สารบัญ

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและเหตุผลในการวิจัย

วิชาฟิสิกส์แบบดั้งเดิม (classical physics) ที่นักวิทยาศาสตร์ได้ค้นคว้าศึกษาและพัฒนาต่อยอดตั้งแต่อดีตเป็นเวลานับสหัสวรรษ ครอบคลุมปรากฏการณ์ธรรมชาติพื้นฐาน (วิรุฬห์, 2552) ที่อยู่รอบตัวเรา เช่น วัตถุไถลลงบนพื้นที่ลาดชัน การขว้างหรือปาวัตถุต่าง ๆ ออกไปในอากาศ การเกิดคลื่นบนผิวน้ำและการนำมาประยุกต์ใช้เพื่อสร้างความสะดวกในชีวิตประจำวันตั้งแต่การประดิษฐ์รอกเพื่อช่วยในการผ่อนแรงหรือเปลี่ยนทิศทาง การออกแบบสิ่งก่อสร้างต่าง ๆ จนไปถึงการสร้างยานอวกาศเพื่อไปสำรวจสิ่งต่าง ๆ นอกโลก (ทีปานีส, 2553) โดยสิ่งที่ได้กล่าวมาในข้างต้นนั้นล้วนเป็นผลจากการศึกษาและพัฒนาอย่างไม่หยุดยั้งของฟิสิกส์แบบดั้งเดิม ไม่พบว่ามีปรากฏการณ์ทางธรรมชาติใดที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยฟิสิกส์แบบฉบับได้ (วิรุฬห์, 2552) วิวัฒนาการของฟิสิกส์แบบดั้งเดิมนั้นรุดหน้าเรื่อยมาจนกระทั่งถึงตอนต้นของคริสต์ศตวรรษที่ 19 ผลการทดลองต่าง ๆ ที่ไม่สามารถอธิบายและทำความเข้าใจได้ด้วยฟิสิกส์แบบฉบับได้เริ่มปรากฏขึ้น กล่าวคือ เมื่อใช้ฟิสิกส์แบบฉบับมาอธิบายจะเกิดข้อขัดแย้งบางประการอย่างรุนแรง โดยเฉพาะปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระดับอะตอม (ธิติ และนคร, 2557) ปรากฏการณ์ที่ถือว่าเป็นปฐมบทที่สำคัญในการศึกษาฟิสิกส์ในยุคนี้คือ การศึกษาเกี่ยวกับการแผ่รังสีของวัตถุดำ (black body) สำหรับความหมายของวัตถุดำในที่นี้คือวัตถุที่สามารถดูดรับรังสีเข้าสู่ตัวมันเองได้หมดจากการศึกษาสเปกตรัมของการกระจายความเข้มของรังสีที่แผ่ออกจากวัตถุดำพบว่าเกิดการขัดแย้งบางอย่างหากใช้ฟิสิกส์แบบฉบับอธิบาย (วิรุฬห์, 2552) ในเวลาต่อมา มักซ์ พลังค์ นักฟิสิกส์ชาวเยอรมันได้เสนอแนวคิดควอนตัมของพลังงานมีใจความว่า การแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับสสารจะเกิดขึ้นได้เมื่อพลังงานที่แลกเปลี่ยนมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มคูณกับ hf เมื่อ h เรียกว่าค่าคงตัวของพลังค์และ f คือความถี่ของคลื่น เรียกพลังงานที่ไม่ต่อเนื่องนี้ว่า ควอนตัม (Quantum) อันเป็นการแก้ปัญหาความขัดแย้งของฟิสิกส์แบบฉบับที่มีต่อผลการทดลองนี้ได้สำเร็จในปี ค.ศ. 1905 (ไตรทศ และเพชรอาภา, 2558) นอกจากนี้ยังมีการทดลองที่มีความสำคัญต่อการเกิดฟิสิกส์ควอนตัม เช่น ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ที่ถูกเสนอโดย อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์ ในปีเดียวกัน โดยนำแนวคิดของ มักซ์ พลังค์มาอธิบาย กล่าวคือ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถประพฤติตัวเป็นอนุภาคได้ภายใต้สภาวะบางอย่าง เรียกอนุภาคที่เกิดขึ้นนั้นว่า โฟตอน

(ธิติ และนคร, 2557) ต่อมาในปี ค.ศ. 1913 นีลส์ บอร์ ได้เสนอแบบจำลองอะตอมของไฮโดรเจนและอธิบายว่าการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างอะตอมกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะเกิดขึ้นได้เมื่อพลังงานที่แลกเปลี่ยนนั้นมีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มคูณกับ hf เท่านั้น เป็นการยืนยันว่าแนวคิดที่ มักซ์ พลังค์ ได้เสนอไว้ก่อนหน้านี้มีความถูกต้องและในปี ค.ศ. 1923 หลุยส์ เดอ บรอย นักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศสได้เสนอแนวคิดว่า ไม่เพียงแต่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่สามารถประพฤติตัวเป็นอนุภาคได้เท่านั้นแต่อนุภาคก็สามารถประพฤติตัวเป็นคลื่นได้เช่นเดียวกัน จนกระทั่งในปี 1925 แนวคิดของบอร์และทฤษฎีต่าง ๆ ได้ถูกผนวกรวมกันและถือกำเนิดขึ้นเรียกทฤษฎีนี้ว่า กลศาสตร์ควอนตัม (ไตรทศ และเพชรอาภา, 2558) อนึ่ง ตามประวัติศาสตร์ที่ได้มีการบันทึกไว้มีผู้วางรากฐานของกลศาสตร์ควอนตัมไว้สองแนวทาง แนวทางแรกผู้ที่ประสบความสำเร็จเป็นบุคคลแรกคือ แวร์เนอร์ ไฮเซินแบร์ก นักฟิสิกส์ทฤษฎีชาวเยอรมัน โดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า เมทริกซ์ (Matrix) เข้ามาช่วยแก้ปัญหา เรียกกลศาสตร์แขนงนี้ว่า กลศาสตร์เมตริกซ์ (Matrix Mechanics) แนวทางที่สองถูกวางรากฐานโดย แอร์วิน ชเรอดิงเงอร์ นักวิทยาศาสตร์ชาวออสเตรีย ชเรอดิงเงอร์ได้นำแนวคิดของหลุยส์ เดอ บรอย ไปเขียนใหม่ให้เป็นสมการคลื่น เราจึงเรียกกลศาสตร์แขนงนี้ว่า กลศาสตร์คลื่น (Wave mechanics) กลศาสตร์ทั้งสองแนวทางถึงแม้จะมีความแตกต่าง แต่ผลลัพธ์ของการคำนวณในทางฟิสิกส์ ปรากฏผลตรงกันเกือบทุกกรณี (วิรุฬห์, 2552)

โดยสรุป กลศาสตร์แบบดั้งเดิม (classical mechanics) นั้น มีข้อจำกัดบางประการที่สามารถอธิบายได้เพียงแค่ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติของอนุภาคที่มีขนาดใหญ่กว่าอะตอมหรือโมเลกุลและต้องเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำหรือใกล้เคียงกับแสงเท่านั้น นอกจากนี้ในกลศาสตร์แบบดั้งเดิมเรายังสามารถระบุตำแหน่งของอนุภาคออกมาได้อย่างชัดเจนแต่ในทางกลศาสตร์ควอนตัม (quantum mechanics) เราสามารถอธิบายครอบคลุมไปถึงปรากฏการณ์ธรรมชาติที่มีขนาดเล็กกว่าอะตอมหรือโมเลกุลได้และให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วใกล้เคียงกับแสง ถึงแม้การระบุตำแหน่งของอนุภาคจะระบุได้เพียงความน่าจะเป็นในการพบอนุภาคในรูปของกลุ่มคลื่นเท่านั้น

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการคลื่น สามารถหาผลเฉลยออกมาเป็นฟังก์ชันคลื่น และฟังก์ชันคลื่นสามารถอธิบายพฤติกรรมของคลื่นได้ดังนั้นเราจึงสนใจวิธีที่จะหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์และการคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้จากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์

1.2 วัตถุประสงค์

ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ และหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นและหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาใน 1 มิติ และคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นและหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.4 ขั้นตอนการวิจัย

1.4.1 ศึกษาที่มาของกลศาสตร์ควอนตัม

1.4.2 ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์

1.4.3 หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและหาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน

1.4.4 หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ เช่น พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

1.4.5 หาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.4.6 จัดทำสรุป

1.4.7 จัดทำเอกสารเพื่อนำเสนอโครงงานเป็นรูปเล่ม

1.4.8 เตรียมส่งโครงงานฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

- สามารถหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์ที่มีความซับซ้อนเช่น พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

1.5.2 ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่พัฒนาขึ้น

- สามารถนำเทคนิคการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเพื่อนำไปสู่การหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด

1.6 โครงสร้างของรายงาน

1.6.1 บทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่ใช้ในการทำโครงงาน

1.6.2 บทที่ 3 จะกล่าวถึงวิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์

1.6.3 บทที่ 4 จะกล่าวถึงค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

1.6.4 บทที่ 5 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับควอซีนอร์มอลโหมดและหาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดค่าความถี่ของโหมดกึ่งปกติ

1.6.5 บทที่ 6 จะกล่าวถึงข้อสรุปจากการทำโครงงานและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งได้แก่ สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา และสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

หากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันทั้งสามข้อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจและพัฒนากลศาสตร์แบบดั้งเดิมเราอาจกล่าวได้ว่าสมการชเรอดิงเงอร์นั้นมีความสำคัญและบทบาทในการศึกษาทำความเข้าใจและพัฒนากลศาสตร์แบบควอนตัมเป็นอย่างมาก สมการชเรอดิงเงอร์ถูกค้นพบโดย แอร์วิน ชเรอดิงเงอร์ (Erwin-Schrödinger) นักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย ในปี ค.ศ. 1925 ซึ่งเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ประเภทสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อยู่ในรูปพลังงานรวมของอนุภาค (total energy) ระหว่างพลังงานศักย์ (potential energy) และ พลังงานจลน์ (kinetic Energy) (นรา, 2553)

1. พลังงานศักย์ (potential energy) คือ พลังงานที่มีอยู่ในวัตถุอันเนื่องมาจากตำแหน่งของวัตถุ ตัวอย่างเช่น วัตถุหรือสิ่งของที่วางอยู่บนที่สูง ณ ตำแหน่งต่าง ๆ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551) โดยเราสามารถจำแนกพลังงานศักย์ออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่ พลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานศักย์แบบยืดหยุ่น

1.1 พลังงานศักย์โน้มถ่วง (gravitational potential energy) คือ พลังงานศักย์ของวัตถุเมื่อวัตถุอยู่สูงจากระดับอ้างอิง พลังงานมีความสัมพันธ์กับมวลของวัตถุและความสูงจากระดับอ้างอิงของวัตถุซึ่งเกี่ยวข้องกับความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (เฉลิมชัย, 2562)

1.2 พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (elastic potential energy) คือ พลังงานศักย์ของสปริงที่ถูกแรงอัดหรือดึงออกจากแนวสมดุล (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551)

2. พลังงานจลน์ (kinetic energy) คือพลังงานของวัตถุที่เกิดขึ้นขณะวัตถุกำลังเคลื่อนที่อันเนื่องจากมีแรงมากระทำต่อวัตถุ พลังงานแปรผันตรงกับมวลและความเร็วของวัตถุ ตัวอย่างเช่น พลังงานคลื่น พลังงานเสียง พลังงานลม เป็นต้น (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551)

พลังงานศักย์และพลังงานจลน์นั้นมักจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันเช่น เมื่อเราปล่อยวัตถุจากที่สูง ณ เวลาก่อนปล่อยวัตถุจะมีพลังงานสะสมอยู่ในวัตถุคือพลังงานศักย์โน้มถ่วงและเมื่อเริ่มปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่มีความเร็วค่าหนึ่งจนถึงระดับอ้างอิงวัตถุจะมีพลังงานสะสมคือพลังงานจลน์

2.1 สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (time-independent Schrödinger equation)

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการคลื่นชนิดหนึ่งดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว ดังนั้นเพื่อให้เข้าใจสมการชเรอดิงเงอร์มากยิ่งขึ้น เราจึงมีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาที่มาของสมการคลื่นเป็นอันดับแรก

พิจารณาแบบจำลองการสั่นในเส้นลวด

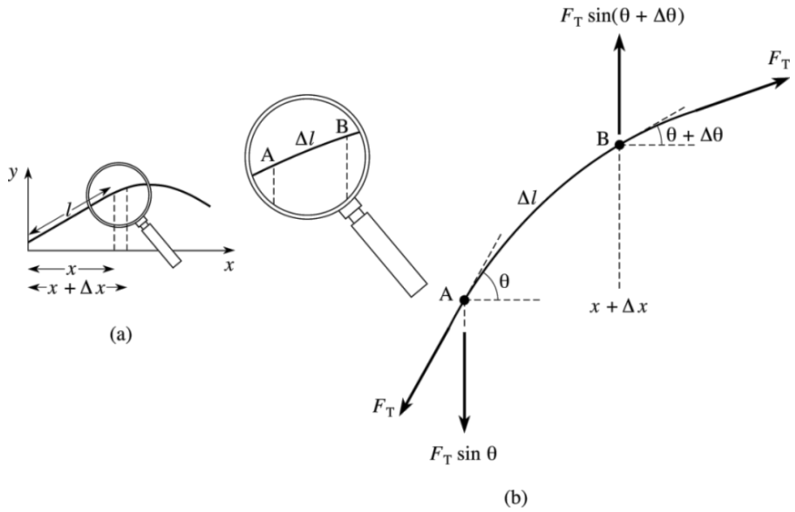
ให้เส้นลวดยาว L เคลื่อนที่ในแนวดิ่งที่แต่ละจุดมีการเคลื่อนที่ในแนวตรงน้อยมาก

ให้ $u(x,t)$ คือ ระยะในแนวดิ่ง

$\rho(x)$ คือ ความหนาแน่นของเส้นลวด

$T(x)$ คือ ความตึงที่แต่ละจุด x ที่สัมผัสกับเส้นลวด

α, β คือ มุมที่กระทำกับแกนนอนในช่วง x ถึง $x+\Delta x$



ภาพที่ 2.1 แรงกระทำบนส่วนกึ่งกลางของเส้นลวด

(http://www.met.rdg.ac.uk/pplato2/h-flap/math6_4.html#top)

พิจารณาแรงกระทำในแนวแกนนอน

โดยกฎข้อหนึ่งของนิวตัน จะได้ว่า $$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta \qquad (2.1.1)$$

พิจารณาแรงกระทำในแนวแกนตั้ง

เนื่องจากมีแรงลัพธ์ จากกฎข้อสองของนิวตัน $\vec{F} = m\vec{a}$

เมื่อ $\vec{F}$ คือแรงลัพธ์และ $\vec{a}$ คือความเร่งของการเคลื่อนที่ ณ จุดใดจุดหนึ่งซึ่งอยู่ระหว่าง x ถึง $x+\Delta x$

ดังนั้น
$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = ma = \rho\Delta x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2.1.1)$$

จากรูปภาพ (a) จะได้ว่า $\tan\beta = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ และ $\tan\alpha = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}$ แทนค่าลงใน (2.1.2)

ดังนั้น
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} = \frac{\rho\Delta x}{T}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) = \frac{\rho}{T}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2.1.3)$$

พิจารณา Δx มีค่าน้อยมาก นั่นคือ Δx เข้าใกล้ศูนย์และกำหนดให้ $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

จะได้ว่า
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.1.4)$$

เรียกสมการ (2.1.4) ว่า **สมการคลื่นในหนึ่งมิติ**

จากเงื่อนไขขอบเขตการเคลื่อนที่ของเส้นลวด ณ จุดปลาย $x=0$ และ $x=L$

ดังนั้น $$u(0,t)=u(L,t)=0 \;\; ; \;\; t\geq 0$$

ให้ $$u(x,0)=f(x)$$

เมื่อ $f(x)$ คือฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของเส้นลวดก่อนที่จะปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่

และให้ $$u_t(x,0)=g(x)$$

เมื่อ $g(x)$ คือ ความเร็ว ณ จุดต่าง ๆ บนเส้นลวด

โดยสรุปเราจะได้ปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบของสมการคลื่นในหนึ่งมิติ คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0<x<L \;\; , \;\; t>0 \tag{2.1.5}$$

$$u(0,t)=u(L,t)=0 \quad ,t\geq 0 \tag{2.1.6}$$

$$u(x,0)=f(x) \;\; , \;\; u_t(x,0)=g(x) \quad , \;\; 0<x<L \tag{2.1.7}$$

ต่อไปจะพิจารณาการหาผลเฉลยโดยใช้เทคนิคการแยกตัวแปร (พรชัย, 2550)

สมมติให้ $u(x,t)=F(x)G(t)$ (2.1.8)

แทนค่า $u(x,t)$ ลงในสมการ (2.1.5)

ดังนั้น $$F(x)G''(t)=c^2F''(x)G(t)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{1}{c^2}\frac{G''(t)}{G(t)}=k$$

กรณีที่ 1 ถ้า $k<0$ ให้ $k=-q^2, \; q>0$

จาก $$\frac{F''(x)}{F(x)}=k$$

$$F''(x)=kF(x)=-q^2F(x)$$

ดังนั้น $$F''(x)+q^2F(x)=0 \tag{2.1.9}$$

โดยสมการช่วย จะได้ว่า $m^2+q^2=0$ ดังนั้น $m=\pm qi$

ดังนั้นสมการ (2.1.9) มีผลเฉลยเป็น $F(x)=c_1\cos qx+c_2\sin qx$ (2.1.10)

จาก $$\frac{1}{c^2}\frac{G''(t)}{G(t)}=k$$

$$G''(t)=kc^2G(t)=-q^2c^2G(t)$$

ดังนั้น $$G''(t)+q^2c^2G(t)=0 \tag{2.1.11}$$

โดยสมการช่วย จะได้ว่า $m^2+q^2c^2=0$ ดังนั้น $m=\pm qci$

ดังนั้นสมการ (2.1.9) มีผลเฉลยเป็น $G(t)=c_3\cos qct+c_4\sin qct$ (2.1.12)

จากเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$, $t\geq 0$

จะได้ว่า $c_1=0$ และ $c_2=0$ แทนค่าลงใน (2.1.10) จะได้ว่า $F(x)=0$

จาก $u(x,t)=F(x)G(t)$

ดังนั้น $u(x,t)=0$ นั่นคือเส้นลวดไม่มีการสั่นซึ่งขัดแย้งกับปัญหา เพราะฉะนั้น $c_2\neq 0$

และจากเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) จะได้ว่า $\sin qL=0$

นั่นคือ $qL=n\pi$ หรือ $q_n=\dfrac{n\pi}{L}$ เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $c_2=1$

จะได้ว่าผลเฉลยที่สมนัยคือ $$F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x \quad \text{เมื่อ } n=1,2,3,\ldots \tag{2.1.13}$$

และจากสมการ (2.1.11) จะได้ว่า $G''(t)+q_n^2c^2G(t)=0$

ดังนั้น (2.1.11) มีผลเฉลยเป็น $G_n(t) = A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t$ (2.1.14)

โดยที่ A_n, B_n เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ดังนั้น $u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t \right)\sin\frac{n\pi}{L}x$ (2.1.15)

กรณีที่ 2 ถ้า $k = 0$ จะได้ว่า $F''(x) = 0$ และ $G''(t) = 0$

ดังนั้นผลเฉลยของ $F(x) = c_5 + c_6 x$ และ $G(t) = c_7 + c_8 t$

จากเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) จะได้ว่า $c_5 = c_6 = 0$ ดังนั้น $F(x) = 0$ ทำให้ $u(x,t) = 0$

นั่นคือ เส้นลวดไม่มีการสั่นซึ่งขัดแย้งกับปัญหา (พรชัย, 2550)

กรณีที่ 3 ถ้า $k > 0$ ให้ $k = q^2$, $q > 0$

จะได้ว่า $F''(x) = q^2 F(x) = 0$

มีผลเฉลยเป็น $F(x) = c_9 \cosh qx + c_{10} \sinh qx$ (2.1.15)

และ $G''(t) - q^2 c^2 G(t) = 0$

มีผลเฉลย $G(t) = c_{11} \cosh qct + c_{12} \sin qct$ (2.1.16)

จากเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) จะได้ว่า $c_9 = c_{10} = 0$ ดังนั้น $F(x) = 0$ ทำให้ $u(x,t) = 0$

นั่นคือเส้นลวดไม่มีการสั่นซึ่งขัดแย้งกับปัญหา (พรชัย, 2550)

จาก $u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin\frac{cn\pi}{L}t \right)\sin\frac{n\pi}{L}x$, $n = 1,2,3,...$

จากเงื่อนค่าเริ่มต้น (2.1.7) ให้ $t = 0$

จะได้ว่า $u_n(x,0) = A_n \sin\frac{n\pi}{L}x$ (2.1.17)

จากหลักการซ้อนทับ (The superposition principle) จะได้ว่า

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{2.1.18}$$

เป็นผลเฉลยของ (2.1.8) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (2.1.6) (พรชัย, 2550)

จาก (2.1.18) ให้ $t=0$

จะได้ว่า $$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{2.1.19}$$

จาก (2.1.9) จะเห็นว่าคือการกระจายครึ่งช่วงของ $f(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $0<x<L$

โดยที่ $$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\left(f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad , n=1,2,3,...$$

พิจารณาหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ t ในสมการ (2.1.18) จะได้ว่า

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{cn\pi}{L}\sin\frac{cn\pi}{L}t+B_n\frac{cn\pi}{L}\cos\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \ , n=1,2,3,... \tag{2.1.20}$$

ให้ $t=0$ แทนค่าใน (2.1.20)

ดังนั้น $$u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(\frac{cn\pi}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , n=1,2,3,... \tag{2.1.21}$$

จาก (2.1.21) จะเห็นว่าคือการกระจายครึ่งช่วงของ $g(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์บนช่วง $0<x<L$

โดยที่ $\frac{cn\pi}{L}B_n$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์

ดังนั้น $$\frac{cn\pi}{L}B_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad , n=1,2,3,...$$

$$B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad , n=1,2,3,...$$

ดังนั้น ผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขค่าขอบ (2.1.6) และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (2.1.7) คือ

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{cn\pi}{L}t+B_n\sin\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \quad , n=1,2,3,...$$

โดยที่ $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx$ และ $B_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right)dx$, $n=1,2,3,...$

จากผลลัพธ์ของค่า k ที่แสดงไว้ข้างต้น จะเห็นว่าในกรณีที่ $k<0$ และ $k>0$ ที่จะทำให้สมการคลื่นในหนึ่งมิติมีผลเฉลยที่สอดคล้องข้องกับค่าขอบและละปัญหาค่าเริ่มต้น

จาก (2.1.4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

ซึ่งมีผลเฉลยในรูป $u(x,t)=F(x)G(t)$ (2.1.22)

แทนค่า (2.1.22) ใน (2.1.4) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2(F(x)G(t))}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2(F(x)G(t))}{\partial x^2}$$

$$F(x)\frac{d^2G(t)}{dt^2}=c^2G(t)\frac{d^2F(x)}{dx^2} \tag{2.1.23}$$

หาร (2.1.22) ด้วย $F(x)G(t)$ ทั้งสองข้างของสมการ

ดังนั้น
$$\frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2}=\frac{c^2}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

สมมติให้
$$\frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2}=\frac{c^2}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2}=k \tag{2.1.24}$$

ให้ $k=-q^2$ โดยที่ $q>0$

ดังนั้น
$$\frac{1}{G(t)}\frac{d^2G(t)}{dt^2}=-q^2$$

สมมติให้ $q=\omega$

โดยที่ ω คือ อัตราเร็วเชิงมุม กล่าวคือ มุมที่จุดศูนย์กลางที่รัศมีกวาดไปได้ในหนึ่งหน่วยเวลา

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} = -G(t)\omega^2 \qquad (2.1.25)$$

จะได้ว่า (2.1.25) มีผลเฉลยเป็น $G(t) = c_{13}\cos\omega t + c_{14}\sin\omega t$ (2.1.26)

แทนค่า (2.1.26) ใน (2.1.23) จะได้ว่า

$$F(x)\left(\frac{d}{dt}\left(-\omega c_{13}\sin\omega t + \omega c_{14}\cos\omega t\right)\right) = c^2(c_{13}\cos\omega t + c_{14}\sin\omega t)\frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

$$-\omega^2F(x)(c_{13}\cos\omega t + c_{14}\sin\omega t) = c^2(c_{13}\cos\omega t + c_{14}\sin\omega t)\frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

$$-\omega^2F(x) = c^2\frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

ดังนั้น
$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}F(x) \qquad (2.1.27)$$

ให้ $c = v$ โดยที่ v คือ ความเร็วของอนุภาค

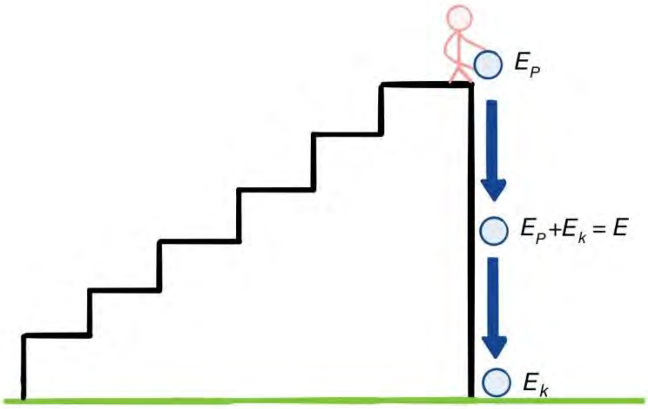
แทนค่าลงใน (2.1.27)

ดังนั้น
$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}F(x) \qquad (2.1.28)$$

เราใช้ค่าคงตัวของพลังค์ในการอธิบายควอนไทเซชัน (Quantization) ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระดับเล็กมาก ๆ เช่น อนุภาคอิเล็กตรอนหรืออนุภาคโปรตอน โดยคุณสมบัติทางฟิสิกส์บางอย่างของอนุภาคเหล่านี้จะมีค่าเป็นไปได้เป็นจำนวนเต็มบวกเท่าของค่าคงตัวหนึ่งเท่านั้น ตัวอย่างเช่น คือพลังงานแสง (E) ที่มีความสัมพันธ์กับความถี่ (f) เป็น $E = hf$ โดยที่ h คือค่าคงตัวของพลังค์ (Plank's constant) มีค่าประมาณ $6.626\times10^{-34}\ J.s$ คำนวณได้จาก และจากความสัมพันธ์ของอัตราเร็วเชิงมุมและความถี่ที่ว่า $\omega = 2\pi f$ ดังนั้น $E = \frac{h}{2\pi}\omega$ และนิยามค่าคงตัว $\frac{h}{2\pi}$ ว่า ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า (Reduced Plank constant) หรือค่าคงตัวของดิแรค (Dirac's constant) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\hbar$ มีค่าประมาณ $1.054\times10^{-34}\ J.s$

อนึ่ง เราสามารถเขียนพลังงานรวมของอนุภาคในรูปของพลังงานจลน์ (kinetic energy) และพลังงานศักย์ (potential energy)

$$E = K + V$$



ภาพที่ 2.2 พลังงานรวมของอนุภาค (กุลภัทร, 2562)

โดยที่ K คือพลังงานงานจลน์ และ V คือพลังงานศักย์

ดังนั้น
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \tag{2.1.29}$$

และจากความสัมพันธ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น (p) ที่ทราบว่า

$$p = mv \tag{2.1.30}$$

โดยที่ m คือ มวลของอนุภาคและ v คือ ความเร็วของอนุภาค

จาก (2.1.29) และ (2.1.30) จะได้ว่า

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

ดังนั้น
$$p = \sqrt{2m(E - V(x))} \tag{2.1.31}$$

หลุยส์ เดอ บรอย (Louis de Broglie) นักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศส ได้เสนอสมมติฐานไว้ว่า คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือคลื่นแสงสามารถประพฤติตัวได้เป็นทั้งอนุภาคและคลื่น ภายหลังสมมติฐานดังกล่าวได้ถูกพิสูจน์และรับรองว่าเป็นจริง

จากทฤษฎีของไอน์สไตน์

$$E = mc^2 \tag{2.1.32}$$

โดยที่ m คือ มวลของอนุภาค c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

จากสูตรของพลังค์

$$E = hf \tag{2.1.33}$$

โดยที่ h คือ มวลของอนุภาค f คือ ความถี่ของอนุภาค

จาก (2.1.32) และ (2.1.33) จะได้ว่า

$$hc = mc^2 \tag{2.1.34}$$

จาก (2.1.30) แทนค่า $v = c$ เมื่อ c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

ดังนั้น
$$p = mc \tag{2.1.35}$$

จาก (2.1.32) และ (2.1.35) จะได้ว่า

$$p = \frac{E}{c}$$

ดังนั้น
$$E = pc \tag{2.1.36}$$

จาก (2.1.32) และ (2.1.36) จะได้ว่า

$$pc = hf \tag{2.1.37}$$

จาก
$$v = f\lambda \tag{2.1.38}$$

โดยที่ λ คือ ความยาวคลื่น

แทนค่า $v=c$ ใน (2.1.38) จะได้ว่า

$$c = f\lambda$$

ดังนั้น $$f=\frac{c}{\lambda} \tag{2.1.39}$$

จาก (2.1.39) และ (2.1.37) จะได้ว่า

$$\lambda=\frac{h}{p}$$

เรียกสมการดังกล่าวว่า ความยาวคลื่นเดอบรอย

ดังนั้น $$p=\frac{h}{\lambda} \tag{2.1.40}$$

จาก (2.1.31) และ (2.1.40) จะได้ว่า

$$\frac{h}{\lambda}=\sqrt{2m(E-V(x))}$$

ดังนั้น $$\lambda=\frac{h}{\sqrt{2m(E-V(x))}} \tag{2.1.41}$$

จะได้ว่า $$\frac{\omega^2}{v^2}=\frac{(2\pi f)^2}{(f\lambda)^2}=\frac{4\pi^2}{\lambda^2}=\frac{4\pi^2 2m\left(E-V(x)\right)}{h^2}=\frac{4\pi^2 2m\left(E-V(x)\right)}{4\pi^2\hbar^2}$$

ดังนั้น $$\frac{\omega^2}{v^2}=\frac{2m\left[E-V(x)\right]}{\hbar^2} \tag{2.1.42}$$

จาก (2.1.28) และ (2.1.42) จะได้ว่า

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2}=\frac{-2m\left[E-V(x)\right]}{\hbar^2}F(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2}=EF(x)-V(x)F(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2}+V(x)F(x)=EF(x) \tag{2.1.43}$$

เรียก สมการ (2.1.43) ว่า **สมการชเรอดิงเงอร์ในหนึ่งมิติ (One-dimensional Schrödinger equation)**

จากสมการ $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;\; ; \;\; c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

ซึ่งเป็นสมการคลื่นใน 1 มิติเราสามารถขยายเป็น 3 มิติและพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.44}$$

แทนค่า $c = v$ ใน (2.1.44) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.45}$$

โดยที่ $\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ เรียกว่า ตัวดำเนินการลาปลาซ (Laplacian operator)

ซึ่ง $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ เป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับสองในระบบพิกัดฉาก (กุลภัทร, 2561)

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (2.1.45) ในรูปตัวดำเนินการลาปลาซ ได้เป็น

$$\nabla^2 = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1.46}$$

โดยเทคนิคการแยกตัวแปรให้ $u(x,y,z,t)=F(x,y,z)G(t)$

หรือ $$u(\vec{r},t) = F(\vec{r})G(t) \tag{2.1.47}$$

อนึ่ง พอสซูเลต (postulates) ข้อที่ 4 ในกลศาสตร์ควอนตัมมีใจความสำคัญว่า ตัวดำเนินการของการวัดปริมาณฟิสิกส์ใดหาได้จากการคำนวณปริมาณฟิสิกส์นั้นโดยอาศัยฟิสิกส์คลาสสิก แล้วจึงเปลี่ยนตัวแปรต่าง ๆ ให้เป็นตัวดำเนินการ (นรา, 2553)

พลังงานรวมของอนุภาคในกลศาสตร์แฮมิลตันซึ่งเป็นกลศาสตร์แบบดั้งเดิมประเภทหนึ่งเรียกว่า แฮมิลโทเนียน (Hamiltonian) เขียนอยู่ในรูปของตำแหน่งกับโมเมนตัม นั่นคือ

$$H = T + V \tag{2.1.48}$$

เมื่อ T คือพลังงานจลน์และ V คือพลังงานศักย์ (นรา, 2553)

จากความสัมพันธ์ของพลังงานจลน์และโมเมนตัมเชิงเส้น

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

และ $$p = mv$$

ดังนั้น $$T = \frac{p^2}{2m} \tag{2.1.49}$$

เมื่อ p คือ โมเมนตัมเชิงเส้น m คือ มวลของอนุภาค และ v คือความเร็วของอนุภาค

แทนค่าสมการ (2.1.49) ลงใน สมการ (2.1.48) จะได้ว่า

$$H = \frac{p^2}{2m} + V$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z) \tag{2.1.50}$$

ตัวดำเนินแฮมิลโทเนียนหาได้จากจากสมการ (2.1.50) โดยการเปลี่ยนตัวแปร p และ x, y, z ให้เป็นตัวดำเนินการตามพอสซูเลตข้อที่ 4 ดังที่กล่าวมาในข้างต้นแล้ว ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ (2.1.46) ได้เป็น

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x, y, \hat{z})$$

$$H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla^2) + V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \tag{2.1.51}$$

ดังนั้นหากเราขยายสมการ (2.1.43) ให้เป็น 3 มิติ จะได้ว่า

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\hat{x},\hat{y},\hat{z})\right]F(\hat{x},\hat{y},\hat{z})=EF(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \tag{2.1.52}$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})\right]F(\vec{r})=EF(\vec{r}) \tag{2.1.53}$$

เรียกสมการ (2.1.53) ว่า **สมการชเรอดิงเงอร์ใน 3 มิติ (Three-dimensional Schrödinger equation)**

จากสมการ (2.1.52) และ สมการ (2.1.53) จะได้ว่า

$$HF(\vec{r})=EF(\vec{r}) \tag{2.1.54}$$

ซึ่งสมการในลักษณะ (2.1.54) มีลักษณะเฉพาะกล่าวคือเมื่อนำตัวดำเนินการ กระทำกับฟังก์ชันแล้วได้ค่าคงตัวคูณกับฟังก์ชันนั้น เราจะเรียกสมการลักษณะนี้ว่า สมการค่าไอเกน (eigenvalue equation) โดยที่ค่าคงตัวที่ปรากฏในสมการจะเรียกว่า ค่าไอเกน (Eigen value) และ ฟังก์ชันที่ปรากฏในสมการจะเรียกว่า ฟังก์ชันไอเกน (Eigen function) ดังนั้นในสมการ (2.1.53) ค่าฟังก์ชันไอเกนและค่าไอเกน คือ $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})$ และ E ตามลำดับ (ธิติและนคร, 2557)

จากสมการชเรอดิงเงอร์ในหนึ่งมิติ จะได้ว่า

$$HF(x)=EF(x)$$

จะได้ว่าค่าฟังก์ชันไอเกนและค่าไอเกน คือ $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$ และ E ตามลำดับ

ในลำดับต่อไปจะแก้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในสามมิตินั้นใช้วิธีแยกตัวแปร (กุลภัทร, 2561)

โดยวิธีแยกตัวแปร ให้ $F(x,y,z)=\alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ (2.1.55)

จากสมการชเรอดิงเงอร์ในสามมิติ

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right]F(x,y,z) = EF(x,y,z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\beta(y)\gamma(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x) + \alpha(x)\gamma(z)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\beta(y) + \alpha(x)\beta(y)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\gamma(z)\right]$$

$$+ V(x,y,z)F(x,y,z) = EF(x,y,z) \qquad (2.1.56)$$

นำ $F(x,y,z)$ หารตลอดสมการ (2.1.57) จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\alpha(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x) + \frac{1}{\beta(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\beta(y) + \frac{1}{\gamma(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\gamma(z)\right) + V(x,y,z) = E$$

สำหรับปริภูมิสามมิติ เขียนพลังงานศักย์ของอนุภาคได้ว่า

$$V(x,y,z) = V(x) + V(y) + V(z) \qquad (2.1.57)$$

โดยที่ x, y และ z เป็นตัวแปรที่อิสระต่อกัน (ธิติและนคร, 2557)

จากสมการ (2.1.56) จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\alpha(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x) + \frac{1}{\beta(y)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\beta(y) + \frac{1}{\gamma(z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\gamma(z)\right) + V(x) + V(y) + V(z) = E$$

(2.1.58)

ให้ $E = E_x + E_y + E_z$ และเนื่องจากตัวแปร x, y และ z เป็นตัวแปรที่อิสระต่อกัน ดังนั้น

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\alpha(x)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x) + V(x)\right) = E_x$$

นั่นคือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x) + V(x)\right) = E_x\alpha(x) \qquad (2.1.59)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\beta(y) + V(y)\right) = E_y\beta(y) \qquad (2.1.60)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\gamma(z)+V(z)\right)=E_z\gamma(z) \tag{2.1.61}$$

พิจารณาบ่อศักย์อนันต์ นิยามโดย

$$V(x)=\begin{cases}0 & ; \quad 0 \le x \le L \\ \infty & ; \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

โดยที่
$$\alpha(x)=\begin{cases}\alpha_1(x) & ; \quad 0 \le x \le L \\ \alpha_2(x) & ; \quad \text{otherwise}\end{cases}$$

กรณีที่ 1 $x<0$ หรือ $x>L$ ดังนั้น $V(x)=\infty$ นั่นคือ เนื่องจาก V มีขนาดใหญ่มาก ดังนั้นจึงสามารถตัดเทอมอื่น ๆ ในสมการ (2.1.56) ทิ้งได้

ดังนั้น
$$V(x)\alpha_2(x)=0$$

เนื่องจาก $V \neq 0$ จะได้ว่า
$$\alpha_2(x)=0 \tag{2.1.62}$$

กรณีที่ 2 $0 \le x \le L$ ดังนั้น $V(x)=0$ จากสมการ (2.1.59) จะได้ว่า

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_1(x)=E_x\alpha_1(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_1(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}E_x\alpha_1(x)$$

ให้ $\mu=\sqrt{\frac{2mE_x}{\hbar^2}}$

จะได้ว่า
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha_1(x)=-\mu\alpha_1(x) \tag{2.1.63}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.1.63) คือ $\alpha_1(x)=A_1\cos\mu x+A_2\sin\mu x$ (2.1.64)

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตค่า $x=0$ และ $x=L$

กรณี $x=0$ จะได้ว่า
$$\alpha_1(0)=\alpha_2(0)=0$$

ดังนั้น $$A_1 = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.1.64) คือ $$\alpha_1(x) = A_2 \sin \mu x \qquad (2.1.65)$$

กรณี $x = L$ จะได้ว่า $$\alpha_1(L) = \alpha_2(L) = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.1.64) คือ $$A_2 \sin \mu L = 0$$

เนื่องจาก $A_2 \neq 0$ ดังนั้น $$\mu = \frac{n_x \pi}{L}$$ โดยที่ $n_x = 1, 2, 3, \ldots$

นั่นคือ $$\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E_x} = \frac{n_x \pi}{L}$$

$$E_x = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2 \qquad (2.1.66)$$

ดังนั้น $$\alpha_{n_x}(x) = A_2 \sin\left(\frac{n_x \pi}{L}\right) x$$

สามารถหาค่า E_y, E_z, $\beta_{n_y}(y), \gamma_{n_z}(z)$ ได้ในทำนองเดียวกันกับการหา E_x และ $\alpha_{n_x}(x)$

ดังนั้น $$E_y = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_y \pi}{L}\right)^2$$ โดยที่ $n_y = 1, 2, 3, \ldots$

$$\beta_{n_y}(y) = A_2' \sin\left(\frac{n_y \pi}{L}\right) y$$

$$E_z = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_z \pi}{L}\right)^2$$ เมื่อ $n_z = 1, 2, 3, \ldots$

$$\gamma_{n_z}(z) = A_2'' \sin\left(\frac{n_z \pi}{L}\right) z$$

จาก $E = E_x + E_y + E_z$ จะได้ว่า

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x \pi}{L}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_y \pi}{L}\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_z \pi}{L}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \tag{2.1.67}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในสามมิติ (2.1.55) คือ $F(x,y,z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$

$$F(x,y,z) = A_2A_2'A_2''\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right) \tag{2.1.68}$$

โดยที่ $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, ...$

ลำดับถัดไปเราจะพิจารณาหาค่า A_2, A' และ A_2'' ซึ่งเป็นค่าคงที่ในสมการ (2.1.68) จากหลักการของมักซ์ บอร์น (Max Born) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน ที่ได้นำฟังก์ชันความน่าจะเป็นมาอธิบายสมการชเรอดิงเงอร์ มีใจความโดยสังเขปว่า โอกาสที่จะพบอนุภาคขณะที่ $|\alpha(x)|^2\,dx$ ของฟังก์ชันคลื่นในช่วง x ถึง $x + dx$ มีความหมายในทางฟิสิกส์คือ แอมปลิจูดของโอกาส (probability amplitude) นั่นเอง ดังนั้นในการคำนวณโอกาสที่จะพบอนุภาคในปริภูมิ (space) จึงต้องทำการนอร์มอลไลซ์เซชัน (normalization) เพื่อให้ผลรวมของโอกาสมีค่าเป็น 1 (ธิติและนคร, 2557)

ดังนั้น
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha(x)|^2\,dx = 1$$

ดังนั้น จะหาค่าคงที่ A_2, A' และ A_2'' โดยเงื่อนไขการนอร์มอลไลซ์เซชันข้างต้น

จากสมการ $\alpha(x) = A_2\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}\right)x$ เมื่อ $0 \le x \le L$

จะได้ว่า
$$\int_0^L|\alpha(x)|^2\,dx = 1$$

$$\int_0^L\left|A_2\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}\right)x\right|^2 dx = 1$$

$$|A_2|^2\int_0^L\sin^2\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)dx = 1$$

$$\frac{|A_2|^2}{2}\int_0^L\left(1 - \cos^2\frac{n_x\pi x}{L}\right)dx = 1$$

$$\frac{|A_2|^2}{2}\left(\int_0^L dx-\int_0^L\left(\frac{L}{2n_x\pi}\cos\frac{2n_x\pi x}{L}\right)d\left(\frac{2n_x\pi x}{L}\right)\right)=1$$

$$\frac{|A_2|^2}{2}\left[x-\frac{L}{2n_x\pi}\sin\frac{2n_x\pi x}{L}\right]_{x=0}^{x=L}=1$$

$$\frac{|A_2|^2}{2}L=1$$

ดังนั้น $$A_2=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

ฉะนั้น เราสามารถหาค่า A_2' และ A_2'' ได้ในทำนองเดียวกันกับการหาค่า A_2

จะได้ว่า $A_2=A_2'=A_2''=\sqrt{\frac{2}{L}}$ แทนค่าในสมการ (2.1.68) จะได้ว่า

$$F(x,y,z)=\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^3\sin\left(\frac{n_x\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{L}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{L}z\right)$$

เป็น**ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ในสามมิติ** โดยที่ $n_x,n_y,n_z=1,2,3,...$

2.2 สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา (Time- independent Schrödinger equation)

พิจารณาคลื่นในระนาบ (Plane wave) ที่เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็วที่ไปในทิศเดียวกัน มีเฟสต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน และมีความถี่และแอมพลิจูดเท่ากัน สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ในรูปฟังก์ชันไซน์ได้ดังนี้ (กุลภัทร, 2561)

$$\psi(x,t)=\left\{\psi_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(x-vt\right)+\frac{\pi}{2}\right],\psi_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)\right\}$$

ดังนั้น $$\psi(x,t)=\left\{\psi_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right),\psi_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)\right\} \quad (2.2.1)$$

โดยที่ ψ_0 คือแอมพลิจูดและ v คืออัตราเร็วของคลื่น

เพราะฉะนั้น สามารถเขียนสมการ (2.2.1) ให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้

ดังนั้น $$\psi(x,t)=\psi_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)+i\psi_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)$$

$$\psi(x,t)=\psi_0\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)+i\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)\right)$$

นั่นคือ $$\psi(x,t)=\psi_0\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right\} \tag{2.2.2}$$

จาก $$v=f\lambda \tag{2.2.3}$$

โดยที่ v คือ อัตราเร็วและ λ คือ ความยาวคลื่น

แทนค่าสมการ (2.2.3) ลงในสมการ (2.2.2) จะได้ว่า

$$\psi(x,t)=\psi_0\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-f\lambda t)\right\}$$

$$\psi(x,t)=\psi_0\exp\left\{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-ft\right)\right\} \tag{2.2.4}$$

โดยที่ ψ_0 คือแอมพลิจูด f คือความถี่ และ λ คือความยาวคลื่น

จากสมการ (2.2.4) $$\psi(x,t)=\psi_0\exp\left\{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-ft\right)\right\}$$

จากทฤษฎีของพลังค์และความยาวคลื่นเดอบรอย สามารถเขียนสมการ (2.2.4) ได้เป็น

$$\psi(x,t)=\psi_0\exp\left\{i2\pi\left(\frac{xp}{h}-\frac{E}{h}t\right)\right\} \tag{2.2.5}$$

จาก $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ โดยที่ k คือ เลขคลื่นหรือค่าคงตัวของการแผ่ (กุลภัทร, 2561)

จากความยาวคลื่นเดอเบรย จะได้ว่า $$k=\frac{2\pi p}{\hbar}$$

ดังนั้น $$k=\frac{p}{\hbar} \tag{2.2.6}$$

โดยที่ $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า

เราอาจกล่าวได้ว่า ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า (reduced Plank’s constant) คือ ควอนไทเซชัน (Quantization) โมเมนตัมเชิงมุม ตัวอย่างเช่น โมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียสของอะตอม

จาก $\omega = 2\pi f$ โดยที่ ω คือ อัตราเร็วเชิงมุม และ $E = hf$

ดังนั้น
$$\omega = \frac{2\pi E}{h} \tag{2.2.7}$$

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

หรือ
$$E = \hbar\omega \tag{2.2.8}$$

แทนค่า ω และ k ที่หาได้จากข้างต้นลงในสมการ (2.2.5)

จะได้ว่า
$$\psi(x,t) = \psi_0 \exp\left\{i\left(kx - \omega t\right)\right\} \tag{2.2.9}$$

จากสมการ (2.2.5) จะเห็นว่าฟังก์ชันคลื่น $\psi(x,t)$ มีคุณสมบัติต่าง ๆ ขึ้นกับค่าโมเมนตัม (p) และพลังงาน (E) ซึ่งอยู่ในรูปของเลขคลื่น (k) และอัตราเร็วเชิงมุม (ω) สอดคล้องกับพอสซูเลตข้อที่ 1 ของกลศาสตร์ควอนตัม (นรา, 2553)

พิจารณาหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ t จากสมการ (2.2.9) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (-i\omega)\psi_0 \exp\left\{i\left(kx - \omega t\right)\right\} \tag{2.2.10}$$

คูณ $i\hbar$ ตลอดสมการ (2.2.10) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (i\hbar)(-i\omega)\psi_0 \exp\left\{i\left(kx - \omega t\right)\right\}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=(\hbar\omega)\psi_0\exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

จากสมการ (2.2.8) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=E\psi_0\exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\} \tag{2.2.11}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=E\psi(x,t) \tag{2.2.12}$$

จากผลรวมของพลังงานอนุภาค $E=\dfrac{p^2}{2m}+V(x)$ จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left[\frac{p^2}{2m}+V(x)\right]\psi(x,t) \tag{2.2.13}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=H\psi(x,t) \tag{2.2.14}$$

เรียก สมการ (2.2.13) ว่า **สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ**

พิจารณาหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเทียบ x สมการ (2.2.9) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_0\exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=(ik)^2\psi_0\exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=-k^2\psi_0\exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

จากสมการ (2.2.6) จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=-\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2\psi_0\exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

จากสมการ (2.2.9) จะได้ว่า

$$p^2\psi(x,t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{2.2.15}$$

แทนค่า (2.2.15) ในสมการ (2.2.13) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) \tag{2.2.16}$$

ซึ่งสมการ (2.2.16) สามารถขยายให้เป็นสามมิติ นั่นคือ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r},t) \tag{2.2.17}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r},t) \tag{2.2.18}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = H\psi(\vec{r},t)$$

เรียก สมการ (2.2.18) ว่า **สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาในสามมิติ**

อนึ่ง สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาสามารถเขียนผลเฉลยได้ในรูป

$$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\varphi(t) \tag{2.2.19}$$

แทนสมการ (2.2.19) ในสมการ (2.2.18)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r})\varphi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r})\varphi(t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r})\varphi(t)$$

$$\psi(\vec{r})i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \varphi(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})$$

นำ $\psi(\vec{r})\varphi(t)$ หารตลอดทั้งสมการ จะได้ว่า

$$\frac{1}{\varphi(t)}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \frac{1}{\psi(\vec{r})}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) \tag{2.2.20}$$

จากสมการ (2.2.20) จะเห็นว่าเทอมทางขวาของสมการเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร t แต่เทอมทางซ้ายของเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ $\vec{r}$ เพราะฉะนั้นสมการจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อฟังก์ชันทั้งสองข้างของสมการเป็นฟังก์ชันคงตัวหรือค่าคงตัว ดังนั้นจึงสมมติให้ค่าคงตัวดังกล่าวเป็น σ

นั่นคือ
$$\frac{1}{\varphi(t)} i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) - \frac{\sigma}{i\hbar}\varphi(t) = 0$$

ดังนั้น
$$\varphi(t) = \exp\left\{\frac{\sigma t}{i\hbar}\right\} \tag{2.2.21}$$

จากสมการ $E = \hbar\omega$

จะได้ว่า
$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชัน $\varphi(t)$ เป็นฟังก์ชันที่เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม

จึงสรุปได้ว่า $\sigma = E$ (กุลภัทร, 2561)

ดังนั้น
$$\varphi(t) = \exp\left\{\frac{Et}{i\hbar}\right\}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

จะได้ว่า
$$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\exp\left\{\frac{Et}{i\hbar}\right\}$$

ในบทนี้เราได้ทำการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องนั่นคือ สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาและสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาซึ่งเป็นสมการที่สำคัญอย่างมากในการศึกษาและทำความเข้าใจศาสตร์ควอนตัม ในการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาและขึ้นกับเวลาและจากสมมติฐานทวิภาคของคลื่นและอนุภาค การที่เราได้ผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรหรือวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) ทั้งในหนึ่งมิติและสามมิติของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาและไม่ขึ้นกับเวลาอยู่ในรูปฟังก์ชันคลื่น (wave function) ทำให้เราสามารถใช้ฟังก์ชันคลื่นทำนายพฤติกรรมของคลื่นหรืออนุภาคบางชนิดได้เช่น การทำนายสมบัติของอะตอมไฮโดรเจน เป็นต้น ในโครงการนี้เราจึงได้สนใจศึกษาหาผลเฉลยสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติของพลังงานศักย์แบบดับเบิลและแบบทริปเปิลของสี่เหลี่ยมผืนผ้าและของกำแพงพาราโบลิก รวมถึงกรณีทั่วไปของทั้งสองแบบด้วยโดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB) เป็นหลัก

บทที่ 3

วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์

ในบทนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน

3.1 วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB approximation) เป็นวิธีการในการหาค่าประมาณของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เส้นตรง (linear differential equation) คิดค้นโดยนักวิทยาศาสตร์ทั้งสามท่าน คือ Wentzel, Kramers และ Brillouin โดยการใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเหมาะสำหรับในระบบที่พลังงานศักย์เปลี่ยนอย่างช้า ๆ จนเกือบจะคงที่โดยคำตอบที่ได้จากวิธีการนี้เป็นคำตอบแบบประมาณ แต่ในบางกรณีก็มีความแม่นยำมาก (เพชรอาภา, 2556)

พิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2}+V(x)F(x)=EF(x)$$

จัดรูปสมการใหม่
$$\frac{d^2F(x)}{dx^2}=-\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(x)\right]F(x) \qquad (3.1.1)$$

เขียนผลเฉลยได้เป็น
$$F(x)=A(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}} \qquad (3.1.2)$$

หาอนุพันธ์อันดับสองเทียบตัวแปร x ใน (3.1.2)

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}A(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}=A(x)\frac{d}{dx}e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}+e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}\frac{d}{dx}A(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x)=A(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}\left(\frac{i}{\hbar}\right)B'(x)+e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}A'(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x)=\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B'(x)+A'(x)\right)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x)=\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B'(x)+A'(x)\right)\frac{d}{dx}e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}+e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}\frac{d}{dx}\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B'(x)+A'(x)\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x)=\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B'(x)+A'(x)\right)\frac{i}{\hbar}B'(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}$$
$$+e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}\left(\frac{i}{\hbar}\left(A(x)B''(x)+B'(x)A'(x)\right)+A''(x)\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x)=\frac{i}{\hbar}B'(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B'(x)+A'(x)\right)$$
$$+e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B''(x)+\frac{i}{\hbar}A'(x)B'(x)+A''(x)\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x)=\begin{bmatrix}\frac{i}{\hbar}B'(x)\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B'(x)+A'(x)\right)\\+\left(\frac{i}{\hbar}A(x)B''(x)+\frac{i}{\hbar}A'(x)B'(x)+A''(x)\right)\end{bmatrix}e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\hbar^2}A(x)(B'(x))^2+\frac{2i}{\hbar}A'(x)B'(x)\\+\frac{i}{\hbar}A(x)B''(x)+A''(x)\end{bmatrix}e^{\frac{iB(x)}{\hbar}} \tag{3.1.3}$$

แทนค่า (3.1.2) และ (3.1.3) ใน (3.1.1) จะได้ว่า

$$\left[-\frac{1}{\hbar^2}A(x)(B'(x))^2+\frac{2i}{\hbar}A'(x)B'(x)+\frac{i}{\hbar}A(x)B''(x)+A''(x)\right]e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}$$
$$=-\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(x)\right]A(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}$$

จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$-\frac{1}{\hbar^2}A(x)(B'(x))^2+A''(x)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(x)\right]A(x)$$

$$-A(x)(B'(x))^2+\hbar^2A''(x)=-2m\left[E-V(x)\right]A(x)$$

$$A(x)(B'(x))^2=2m\left[E-V(x)\right]A(x)+\hbar^2A''(x)$$

$$(B'(x))^2=2m\left[E-V(x)\right]+\hbar^2\frac{A''(x)}{A(x)} \qquad (3.1.4)$$

และ จะได้ว่า

$$\frac{2}{\hbar}A'(x)B'(x)+\frac{1}{\hbar}A(x)B''(x)=0$$

$$A(x)B''(x)=-2A'(x)B'(x) \qquad (3.1.5)$$

นำ $A(x)$ คูณตลอด (3.1.5) จะได้ว่า

$$(A(x))^2B''(x)=-2A(x)A'(x)B'(x)$$

$$(A(x))^2B''(x)+2A(x)A'(x)B'(x)=0$$

$$((A(x))^2B'(x))'=0 \qquad (3.1.6)$$

จากสมการ (3.1.6) ชัดเจนว่า $(A(x))^2B'(x)$ เป็นฟังก์ชันคงตัว (Constant function)
สมมติให้ $(A(x))^2B'(x)=K$ โดยที่ K เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $$A(x)=\frac{C}{\sqrt{|B'(x)|}} \quad \text{โดยที่ } C=\sqrt{K} \qquad (3.1.7)$$

จากสมการ (3.1.4) สามารถทำการประมาณให้ $\dfrac{A''(x)}{A(x)}\ll\dfrac{(B'(x))^2}{\hbar^2}$

จะได้ว่า $$(B'(x))^2=2m\left[E-V(x)\right] \qquad (3.1.8)$$

จาก $p(x)=\sqrt{2m\left[E-V(x)\right]}$ ดังนั้น $\left(p(x)\right)^2=2m\left[E-V(x)\right]$

จะได้ว่า $$\left(B'(x)\right)^2=\left(p(x)\right)^2$$

ดังนั้น $$B(x)=\pm\int p(x)dx \tag{3.1.9}$$

แทนค่า (3.1.7) และ (3.1.9) ใน (3.1.2) จะได้ว่า

$$F(x)=\frac{C}{\sqrt{\left|B'(x)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\pm\int p(x)dx}=\frac{C}{\sqrt{\left|B'(x)\right|}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx} \tag{3.1.10}$$

จาก (3.1.1) ให้ $$Q^2(x)=\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(x)\right]$$

$$Q^2(x)=\frac{\left(p(x)\right)^2}{\hbar^2}$$

$$Q^2(x)=\frac{\left(B'(x)\right)^2}{\hbar^2}$$

$$Q(x)=\frac{\left|B'(x)\right|}{\hbar}$$

ดังนั้น $$\left|B'(x)\right|=Q(x)\hbar \tag{3.1.11}$$

แทนค่า (3.1.11) ใน (3.1.10) จะได้ว่า

$$F(x)\approx\frac{C}{\sqrt{\left|B'(x)\right|}}e^{\frac{i}{\hbar}\pm\int p(x)dx}=\frac{C}{\sqrt{\hbar Q(x)}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar Q(x)dx}=\frac{C}{\sqrt{\hbar Q(x)}}e^{\pm i\int Q(x)dx}$$

ให้ $\mu=\frac{C}{\hbar}$ โดยที่ C คือ ค่าคงตัว และ $\hbar$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า

ดังนั้น **ผลเฉลยด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB Approximation)** คือ

$$F(x) \approx \frac{C}{\sqrt{\hbar Q(x)}} e^{\pm i\int Q(x)dx}$$

3.2 วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีกับปัญหาการขุดอุโมงค์

พิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2} + V(x)F(x) = EF(x)$$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น $$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]F(x)$$

บริเวณที่ 1 : $$\frac{d^2F_1(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}EF_1(x) \qquad ; \quad x < a$$

บริเวณที่ 2 : $$\frac{d^2F_2(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)F_2(x) \qquad ; \quad a \le x \le b$$

บริเวณที่ 3 : $$\frac{d^2F_3(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}EF_3(x) \qquad ; \quad x > b$$

ในกรณีที่ $E < V$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์คือ

$$F_1(x) = A\exp\left\{i\int_a^x Q(x)dx\right\} + B\exp\left\{-i\int_a^x Q(x)dx\right\}$$

$$F_2(x) = C\exp\left\{\int_a^x Q(x)dx\right\} + D\exp\left\{-\int_a^x Q(x)dx\right\}$$

$$F_3(x) = H\exp\left\{i\int_b^x Q(x)dx\right\}$$

โดยที่ $Q^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]$

จากเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = a$ และ $x = b$ จะได้ว่า

พิจารณาที่จุด $x = a$ จะได้ว่า

$$F_1(a) = F_2(b)$$

$$A + B = C + D \tag{3.2.1}$$

จาก $F_1(x) = A\exp\left\{i\int_a^x Q(x)dx\right\} + B\exp\left\{-i\int_a^x Q(x)dx\right\}$

$$F_1'(x) = A\exp\left\{i\int_a^x Q(x)dx\right\}\frac{d}{dx}i\int_a^x Q(x)dx + B\exp\left\{-i\int_a^x Q(x)dx\right\}\frac{d}{dx}\left(-i\int_a^x Q(x)dx\right)$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (fundamental theorems of calculus) จะได้ว่า

$$F_1'(x) = A\exp\left\{ i\int_a^x Q(x)dx \right\}(iQ(x)) - B\exp\left\{ i\int_a^x Q(x)dx \right\}(iQ(x))$$

แทนค่า $x = a$ จะได้ว่า

$$F_1'(a)=iAQ(a)-iBQ(a)$$

$$F_1'(a)=(iA-iB)Q(a) \qquad (3.2.2)$$

จาก $F_2(x) = C\exp\left\{ \int_a^x Q(x)dx \right\} + D\exp\left\{ -\int_a^x Q(x)dx \right\}$

$$F_2'(x) = C\exp\left\{ \int_a^x Q(x)dx \right\}Q(x) - D\exp\left\{ -\int_a^x Q(x)dx \right\}Q(x)$$

แทนค่า $x = a$ จะได้ว่า

$$F_2'(a) = CQ(a) - DQ(a) \qquad (3.2.3)$$

เนื่องจาก $F_1'(a) = F_2'(a)$

$$(iA - iB)Q(a) = (C - D)Q(a)$$

จะได้ว่า $iA - iB = C - D$ (3.2.4)

แทนค่า $x = b$ จะได้ว่า

$$F_2(b) = F_3(b)$$

$$C\exp\left\{ \int_a^b Q(x)dx \right\} + D\exp\left\{ -\int_a^b Q(x)dx \right\} = H\exp\left\{ i\int_b^b Q(x) \right\} \qquad (3.2.5)$$

สมมติให้ $\delta = \int_a^b Q(x)dx$ แทนค่าใน (3.2.1) จะได้ว่า

$$C\exp\{\delta\} + D\exp\{-\delta\} = H \tag{3.2.6}$$

จาก $F_2(x) = C\exp\left\{\int_a^x Q(x)dx\right\} + D\exp\left\{-\int_a^x Q(x)dx\right\}$

$$F_2'(x) = C\exp\left\{\int_a^x Q(x)dx\right\}Q(x) + D\exp\left\{-\int_a^x Q(x)dx\right\}\left(-Q(x)\right)$$

แทนค่า $x = b$ จะได้ว่า

$$F_2'(b) = C\exp\left\{\int_a^b Q(x)dx\right\}Q(b) + D\exp\left\{-\int_a^b Q(x)dx\right\}\left(-Q(b)\right) \tag{3.2.7}$$

$$F_2'(b) = C\exp\{\delta\}Q(b) + D\exp\{-\delta\}\left(-Q(b)\right) \tag{3.2.8}$$

จาก $F_3(x) = H\exp\left\{i\int_b^x Q(x)dx\right\}$

$$F_3'(x) = H\exp\left\{i\int_b^x Q(x)dx\right\}(iQ(x))$$

แทนค่า $x = b$ จะได้ว่า $$F_3'(b) = iHQ(b) \tag{3.2.9}$$

เนื่องจาก $$F_2'(b) = F_3'(b)$$

จะได้ว่า $$C\exp\{\delta\}Q(b) - D\exp\{-\delta\}Q(b) = iHQ(b)$$

$$C\exp\{\delta\} - D\exp\{-\delta\} = iH \tag{3.2.10}$$

นำ (3.2.6) + (3.2.10) จะได้ว่า

$$2C\exp\{\delta\} = H + iH$$

ดังนั้น
$$C = \frac{H + iH}{2\exp\{\delta\}}$$

นำ (3.1.10) $+$ (3.1.11) จะได้ว่า

$$2D\exp\{-\delta\} = H - iH$$

$$D = \frac{H - iH}{2\exp\{-\delta\}}$$

แทนค่า C และ D ใน (3.2.1) จะได้ว่า

$$A + B = \frac{H + iH}{2\exp\{\delta\}} + \frac{H - iH}{2\exp\{-\delta\}} \tag{3.2.11}$$

แทนค่า C และ D ใน (3.2.4) จะได้ว่า

$$iA - iB = \frac{H + iH}{2\exp\{\delta\}} - \frac{H - iH}{2\exp\{-\delta\}} \tag{3.2.12}$$

คูณ i ตลอดสมการ (3.2.11) จะได้ว่า

$$iA + iB = \frac{iH - H}{2\exp\{\delta\}} + \frac{iH + H}{2\exp\{-\delta\}} \tag{3.2.13}$$

นำสมการ (3.2.12) $+$ สมการ (3.2.13) จะได้ว่า

$$2Ai = \frac{iH + H}{2\exp\{\delta\}} - \frac{H - iH}{2\exp\{-\delta\}} + \frac{iH - H}{2\exp\{\delta\}} + \frac{iH + H}{2\exp\{-\delta\}}$$

$$A = \frac{H}{2\exp\{\delta\}} + \frac{H}{2\exp\{-\delta\}}$$

$$A = H\left(\frac{1}{2\exp\{\delta\}} + \frac{1}{2\exp\{-\delta\}}\right)$$

ดังนั้น $$\frac{H}{A}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{2\exp\{\delta\}}+\dfrac{1}{2\exp\{-\delta\}}\right)}$$

โดยที่ $\delta=\int_a^b Q(x)dx$ และ $Q^2(x)=\frac{2m}{\hbar^2}[V(x)-E]$

เพื่อให้สอดคล้องกับความหมายในทางฟิสิกส์ที่ว่าค่าของความเข้มแสงที่ตกกระทบย่อมต้องมีค่ามากกว่าค่าความเข้มแสงที่ส่งผ่านหรือสะท้อนจึงสามารถตัดพจน์ของ C ได้ (กุลภัทร, 2562)

ดังนั้น $$\frac{H}{A}=2\exp\{-\delta\}$$

$$\frac{H}{A}=2\exp\left\{-\int_a^b Q(x)dx\right\}$$

$$T=\left|\frac{H}{A}\right|^2=4\exp\left\{-2\int_a^b Q(x)dx\right\}$$

ทำการประมาณให้ $$T=\left|\frac{H}{A}\right|^2=4\exp\left\{-2\int_a^b Q(x)dx\right\}\approx\exp\left\{-2\int_a^b Q(x)dx\right\}$$

ดังนั้น $$T=\left|\frac{H}{A}\right|^2\approx\exp\left\{-2\int_a^b Q(x)dx\right\} \qquad (3.2.14)$$

โดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB Approximation) จะได้ว่าค่า T ที่ได้จาก (3.2.14) เป็นค่าประมาณ เรียกค่าดังกล่าวว่าค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน (Transmission probability) ซึ่งมีค่าเปลี่ยนไปตามพลังศักย์ที่ใช้

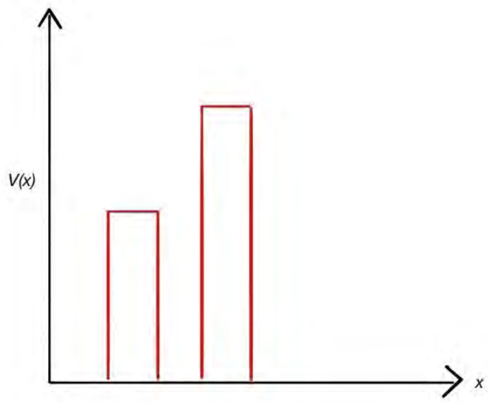
บทที่ 4

ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน สำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี

ในบทนี้จะทำการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน โดยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีที่ได้ทำการศึกษาในบทก่อนหน้านี้ สำหรับพลังงานศักย์ที่ศึกษาเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก และ พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราลิกในกรณีทั่วไป

4.1 พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x)=\begin{cases} 0, & x<L_1 \\ V_1, & L_1\le x<L_2 \\ 0, & L_2\le x<L_3 \\ V_2, & L_3\le x<L_4 \\ 0, & x\ge L_4 \end{cases}$$



ภาพที่ 4.1 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สามารถหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จาก $$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x)-E}\,dx\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2} \sqrt{V_1-E}\,dx + \int_{L_3}^{L_4} \sqrt{V_2-E}\,dx\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\left(L_2-L_1\right)\sqrt{V_1-E} + \left(L_4-L_3\right)\sqrt{V_2-E}\right)\right\}$$

ดังนั้น ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

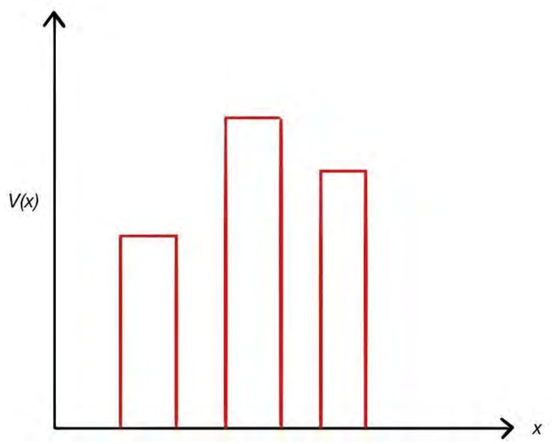
$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\left(L_2-L_1\right)\sqrt{V_1-E} + \left(L_4-L_3\right)\sqrt{V_2-E}\right)\right\}$$

หาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยกฎอนุรักษ์ความน่าจะเป็น

ดังนั้น $$R \approx 1-\exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\left(L_2-L_1\right)\sqrt{V_1-E} + \left(L_4-L_3\right)\sqrt{V_2-E}\right)\right\}$$

4.2 พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x<L_2\\ 0, & L_2\le x<L_3\\ V_2, & L_3\le x<L_4\\ 0, & L_4\le x<L_5\\ V_3, & L_5\le x<L_6\\ 0, & x\ge L_6\end{cases}$$



ภาพที่ 4.2 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สามารถหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จาก $T\approx\exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b\sqrt{V(x-E}dx\right\}$

$$=\exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{V_1-E}dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{V_2-E}dx+\int_{L_5}^{L_6}\sqrt{V_3-E}dx\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\begin{pmatrix}(L_2-L_1)\sqrt{V_1-E}+(L_4-L_3)\sqrt{V_2-E}\\+(L_6-L_5)\sqrt{V_3-E}\end{pmatrix}\right\}$$

ดังนั้น ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

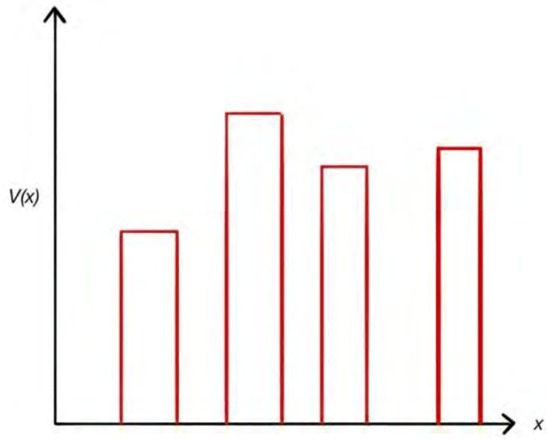
$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\begin{pmatrix}(L_2-L_1)\sqrt{V_1-E}+(L_4-L_3)\sqrt{V_2-E}\\ +(L_6-L_5)\sqrt{V_3-E}\end{pmatrix}\right\}$$

หาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยกฎอนุรักษ์ความ-น่าจะเป็น

ดังนั้น $R \approx 1-\exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\begin{pmatrix}(L_2-L_1)\sqrt{V_1-E}+(L_4-L_3)\sqrt{V_2-E}\\ +(L_6-L_5)\sqrt{V_3-E}\end{pmatrix}\right\}$

4.3 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x<L_2\\ 0, & L_2\le x<L_3\\ V_2, & L_3\le x<L_4\\ 0, & L_4\le x<L_5\\ V_3, & L_5\le x<L_6\\ \vdots & \vdots\\ V_n, & L_{2n-1}\le x<L_{2n}\\ 0, & x\ge L_{2n}\end{cases}$$



ภาพที่ 4.3 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สามารถหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

จาก $T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x)-E}\,dx\right\}$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{V_1-E}\,dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{V_2-E}\,dx+\ldots+\int_{L_{2n-1}}^{L_n}\sqrt{V_n-E}\,dx\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}(L_2-L_1)\sqrt{V_1-E}+(L_4-L_3)\sqrt{V_2-E}\\ +(L_6-L_5)\sqrt{V_3-E}+\ldots+(L_{2n}-L_{2n-1}\sqrt{V_n-E}\end{array}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}(L_{2n}-L_{2n-1})\sqrt{V_n-E}\right)\right\} \text{ โดยที่ } n=1,2,3,\ldots$$

ดังนั้น ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

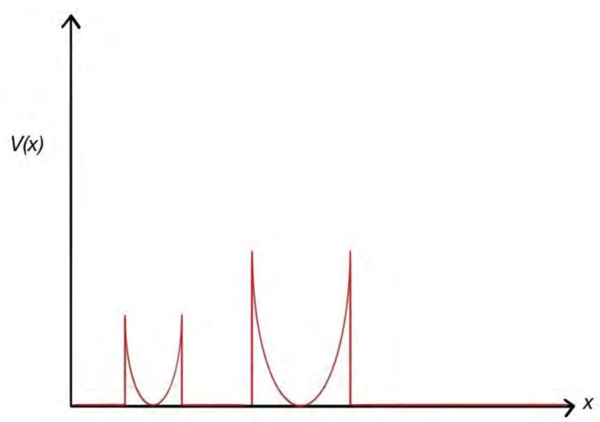
$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}(L_{2n}-L_{2n-1})\sqrt{V_n-E}\right)\right\} \text{ โดยที่ } n=1,2,3,\ldots$$

หาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปโดยกฎอนุรักษ์ความน่าจะเป็น

ดังนั้น $R \approx 1 - \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(L_{2n} - L_{2n-1}\right)\sqrt{V_n - E}\right)\right\}$ โดยที่ $n = 1, 2, 3, \ldots$

4.4 พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ \frac{1}{2}ab^2(x - x_1)^2, & L_1 \le x < L_2 \\ 0, & L_2 \le x < L_3 \\ \frac{1}{2}ab^2(x - x_2)^2, & L_3 \le x < L_4 \\ 0, & x \ge L_4 \end{cases}$$



ภาพที่ 4.4 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สามารถหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

จาก $T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x)-E}dx\right\}$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2 - E}dx + \int_{L3}^{L_4}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2 - E}dx\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-x_1)^2 - \frac{2E}{ab^2}}dx + \int_{L3}^{L_4}\sqrt{(x-x_2)^2 - \frac{2E}{ab^2}}dx\right)\right\}$$

สมมติให้ $z = \frac{2E}{ab^2}$ จะได้ว่า

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-x_1)^2 - z}dx + \int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(x-x_2)^2 - z}dx\right)\right\}$$

ให้ $\alpha = x - x_1$ ดังนั้น $d\alpha = dx$ และ $\beta = x - x_2$ ดังนั้น $d\beta = dx$ จะได้ว่า

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2}\left(\int_{L_1-x_1}^{L_2-x_1}\sqrt{\alpha^2 - z}d\alpha + \int_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}\sqrt{\beta^2 - z}d\beta\right)\right\} \qquad (4.4.1)$$

ให้ $\alpha = \sqrt{z}\sec\phi$ ดังนั้น $d\alpha = \sqrt{z}\sec\phi\tan\phi d\phi$ และ $\phi = \operatorname{arcsec}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z}}\right)$

จะได้ว่า $\int\sqrt{\alpha^2 - z}d\alpha = \int\sqrt{z}\tan\phi(\sqrt{z}\sec\phi\tan\phi)d\phi$

$$\int\sqrt{\alpha^2 - z}d\alpha = z\int\sec\phi\tan^2\phi d\phi = z\int\sec\phi(\sec^2\phi - 1)d\phi$$

ดังนั้น $\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = z\int (\sec^3\phi - \sec\phi)d\phi = z\left[\int \sec^3\phi d\phi - \int \sec\phi d\phi\right]$ (4.4.2)

หาค่าของ $\int \sec^3\phi d\phi$ โดยการหาปริพันธ์ทีละส่วน (By part Integration)

สมมติให้ $u = \sec\phi$ ดังนั้น $du = \sec\phi\tan\phi d\phi$

และ $dv = \sec^2\phi d\phi$ ดังนั้น $v = \tan\phi$

จะได้ว่า $\int \sec^3\phi d\phi = \sec\phi\tan\phi - \int \sec\phi\tan^2\phi d\phi$

$$\int \sec^3\phi d\phi = \sec\phi\tan\phi - \int \sec\phi(\sec^2\phi - 1)d\phi$$

$$\int \sec^3\phi d\phi = \sec\phi\tan\phi - \int \sec^3\phi d\phi + \int \sec\phi d\phi$$

$$2\int \sec^3\phi d\phi = \sec\phi\tan\phi + \int \sec\phi d\phi$$

$$\int \sec^3\phi d\phi = \frac{1}{2}\sec\phi\tan\phi - \frac{1}{2}\log\left(\sec\phi + \tan\phi\right) \tag{4.4.3}$$

นำสมการ (4.4.3) แทนค่าในสมการ (4.4.22) จะได้ว่า

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = z\left[\frac{1}{2}\sec\phi\tan\phi - \frac{1}{2}\log\left(\sec\phi + \tan\phi\right) + \log\left(\sec\phi + \tan\phi\right)\right]$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = z\left[\frac{1}{2}\sec\phi\tan\phi + \frac{1}{2}\log\left(\sec\phi + \tan\phi\right)\right]$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = \frac{z}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z}}\right)\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z}}\right)\right) + \log\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z}}\right) + \tan\left(\arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z}}\right)\right)\right)\right]$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = \frac{z}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{z}}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right) + \log\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = \frac{z}{2}\left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - z}}{z} + \log\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)$$

ดังนั้น $$\int_{L_1 - x_1}^{L_2 - x_1} \sqrt{\alpha^2 - z}\, d\alpha = \left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1 - x_1}^{L_2 - x_1} \tag{4.4.4}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\int \sqrt{\beta^2 - z}\, d\beta = \frac{\beta\sqrt{\beta^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)$$

ดังนั้น $$\int_{L_3 - x_2}^{L_4 - x_2} \sqrt{\beta^2 - z}\, d\beta = \left[\frac{\beta\sqrt{\beta^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3 - x_2}^{L_4 - x_2} \tag{4.4.5}$$

แทนค่าสมการ (4.4.4) และสมการ (4.4.5) ในสมการ (4.4.1) จะได้ว่า

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}\left[\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha^2 - z}}{2} + \dfrac{z}{2}\log\left(\dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1 - x_1}^{L_2 - x} \\ + \left[\dfrac{\beta\sqrt{\beta^2 - z}}{2} + \dfrac{z}{2}\log\left(\dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3 - x_2}^{L_4 - x_2}\end{array}\right)\right\}$$

ดังนั้น ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิกโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1-x_1}^{L_2-x} + \left[\frac{\beta\sqrt{\beta^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}\right)\right\}$$

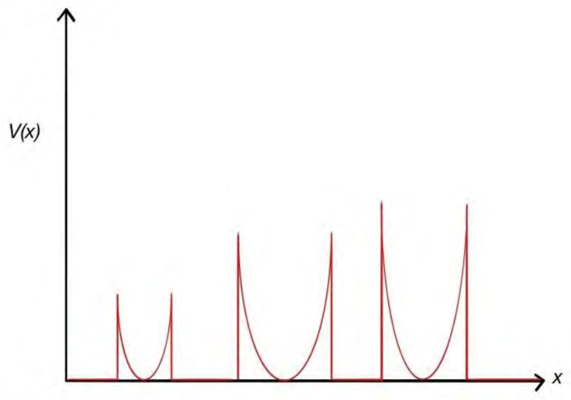
หาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยกฎอนุรักษ์ความ-น่าจะเป็น จะได้ว่า

$$R \approx 1-\exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1-x_1}^{L_2-x} + \left[\frac{\beta\sqrt{\beta^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}\right)\right\}$$

โดยที่ $\alpha = x - x_1,\ \beta = x - x_2$ และ $z = \dfrac{2E}{ab^2}$

4.5 พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

$$V(x)=\begin{cases} 0, & x<L_1 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2, & L_1\le x<L_2 \\ 0, & L_2\le x<L_3 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2, & L_3\le x<L_4 \\ 0, & L_4\le x<L_5 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_3)^2, & L_5\le x<L_6 \\ 0, & x\ge L_6 \end{cases}$$



ภาพที่ 4.5 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สามารถหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

จาก

$$=\exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\begin{matrix}\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2-E}dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2-E}dx \\ +\int_{L_5}^{L_6}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_3)^2-E}dx\end{matrix}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\begin{aligned}&\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-x_1)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(x-x_2)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx\\&+\int_{L_5}^{L_6}\sqrt{(x-x_3)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx\end{aligned}\right)\right\}$$

สมมติให้ $z=\dfrac{2E}{ab^2}$ จะได้ว่า

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-x_1)^2-z}\,dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(x-x_2)^2-z}\,dx+\int_{L_5}^{L_6}\sqrt{(x-x_3)^2-z}\,dx\right)\right\}$$

ให้ $\alpha = x - x_1$, $\beta = x - x_2$ และ $\gamma = x - x_3$

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1-x_1}^{L_2-x_1}\sqrt{\alpha^2-z}\,d\alpha+\int_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}\sqrt{\beta^2-z}\,d\beta+\int_{L_5-x_3}^{L_6-x_3}\sqrt{\gamma^2-z}\,d\gamma\right)\right\}$$

โดยที่ $\displaystyle\int_{L_1-x_1}^{L_2-x_1}\sqrt{\alpha^2-z}\,d\alpha=\left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1-x_1}^{L_2-x_1}$

$$\int_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}\sqrt{\beta^2-z}\,d\beta=\left[\frac{\beta\sqrt{\beta^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}$$

$$\int_{L_5-x_3}^{L_6-x_3}\sqrt{\gamma^2-z}\,d\gamma=\left[\frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_5-x_3}^{L_6-x_3}$$

ดังนั้น $$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}\left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1-x_1}^{L_2-x_1} \\ +\left[\frac{\beta\sqrt{\beta^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3-x_2}^{L_4-x_2} \\ +\left[\frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_5-x_3}^{L_6-x_3}\end{array}\right)\right\}$$

ดังนั้น ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิกโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}\left[\frac{\alpha\sqrt{\alpha^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1-x_1}^{L_2-x_1} \\ +\left[\frac{\beta\sqrt{\beta^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3-x_2}^{L_4-x_2} \\ +\left[\frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-z}}{2}+\frac{z}{2}\log\left(\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_5-x_3}^{L_6-x_3}\end{array}\right)\right\}$$

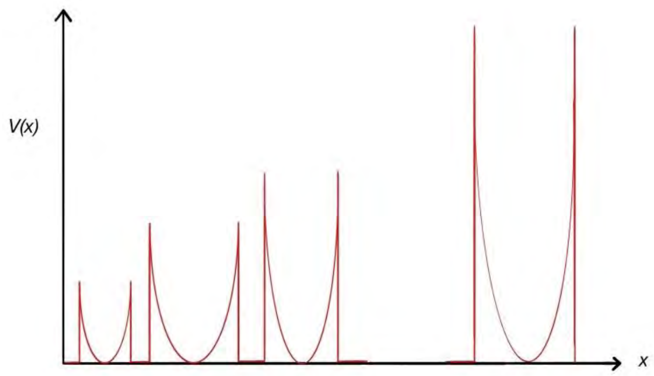
หาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิกโดยกฎอนุรักษ์ความ-น่าจะเป็น จะได้ว่า

$$R \approx 1-\exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}\left[\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha^2-z}}{2}+\dfrac{z}{2}\log\left(\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_1-x_1}^{L_2-x_1} \\ +\left[\dfrac{\beta\sqrt{\beta^2-z}}{2}+\dfrac{z}{2}\log\left(\dfrac{\beta+\sqrt{\beta^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_3-x_2}^{L_4-x_2} \\ +\left[\dfrac{\gamma\sqrt{\gamma^2-z}}{2}+\dfrac{z}{2}\log\left(\dfrac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_5-x_3}^{L_6-x_3}\end{array}\right)\right\}$$

โดยที่ $\alpha = x - x_1,\ \beta = x - x_2,\ \gamma = x - x_3$ และ $z = \dfrac{2E}{ab^2}$

4.6 พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ \dfrac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2, & L_1\le x<L_2\\ 0, & L_2\le x<L_3\\ \dfrac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2, & L_3\le x<L_4\\ 0, & L_4\le x<L_5\\ \dfrac{1}{2}ab^2(x-x_3)^2, & L_5\le x\le L_6\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{1}{2}ab^2(x-x_n)^2, & L_{2n-1}\le x<L_{2n}\\ 0, & x\ge L_{2n}\end{cases}$$



ภาพที่ 4.6 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

จากสูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สามารถหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

จาก $T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_a^b \sqrt{V(x-E}dx\right\}$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2-E}+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2-E} \\ +\int_{L_5}^{L_6}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_3)^2-E}+...+\int_{L_{2n-1}}^{L_{2n}}\sqrt{\frac{1}{2}ab^2(x-x_n)^2-E}\end{array}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\begin{array}{l}\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-x_1)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(x-x_2)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx \\ +\int_{L_5}^{L_6}\sqrt{(x-x_3)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx+...+\int_{L_{2n-1}}^{L_{2n}}\sqrt{(x-x_n)^2-\frac{2E}{ab^2}}dx\end{array}\right)\right\}$$

สมมติให้ $z = \frac{2E}{ab^2}$ จะได้ว่า

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1}^{L_2}\sqrt{(x-x_1)^2-z}dx+\int_{L_3}^{L_4}\sqrt{(x-x_2)^2-z}dx+...+\int_{L_{2n-1}}^{L_{2n}}\sqrt{(x-x_n)^2-z}dx\right)\right\}$$

ให้ $\alpha_n = x - x_n$ จะได้ว่า

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\int_{L_1-x_1}^{L_2-x_1}\sqrt{\alpha_1^{\ 2}-z}d\alpha_1+\int_{L_3-x_2}^{L_4-x_2}\sqrt{\alpha_2^{\ 2}-z}d\alpha_2+...+\int_{L_{2n-1}-x_n}^{L_{2n}-x_n}\sqrt{\alpha_n^{\ 2}-z}d\alpha_n\right)\right\}$$

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{L_{2n-1}-x_n}^{L_{2n}-x_n}\sqrt{\alpha_n^{\ 2}-z}d\alpha_n\right)\right)\right\}$$

โดยที่ $\int_{L_{2n-1}-x}^{L_{2n}-x_n} \sqrt{\alpha_n{}^2 - z}\,d\alpha_n = \left[\frac{\alpha_n\sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha_n + \sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_{2n-1}-x_n}^{L_{2n}-x_n}$

ดังนั้น

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{\alpha_n\sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha_n + \sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_{2n-1}-x_n}^{L_{2n}-x_n}\right)\right)\right\}$$

ดังนั้น ค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไปโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$T \approx \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{\alpha_n\sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha_n + \sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_{2n-1}-x_n}^{L_{2n}-x_n}\right)\right)\right\}$$

หาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไปโดยกฎอนุรักษ์ความ-น่าจะเป็น จะได้ว่า

$$R \approx 1 - \exp\left\{-2\sqrt{\frac{mab^2}{\hbar^2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{\alpha_n\sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{2} + \frac{z}{2}\log\left(\frac{\alpha_n + \sqrt{\alpha_n{}^2 - z}}{\sqrt{z}}\right)\right]\Bigg|_{L_{2n-1}-x_n}^{L_{2n}-x_n}\right)\right)\right\}$$

โดยที่ $\alpha_n = x - x_n$ และ $z = \frac{2E}{ab^2}$

ในบทที่ 3 ได้ทำการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก และพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไปโดยใช้สูตรของวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีซึ่งจะเห็นว่าในการคำนวณนั้นมีความซับซ้อนและยุ่งยากน้อยกว่าการใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีหรือวิธีแม่นตรง

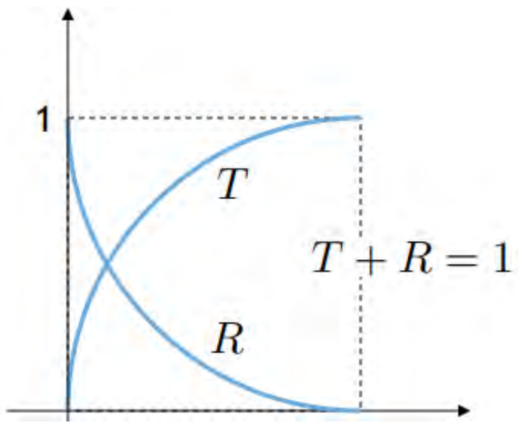
บทที่ 5

โหมดกึ่งปกติ

จากการศึกษาพบว่าสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการคลื่นที่สามารถเขียนอยู่ในรูปพลังงานรวมของอนุภาคระหว่างพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ ซึ่งในทางฟิสิกส์แบบดั้งเดิมพลังงานศักย์ของอนุภาคย่อมต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับผลรวมของอนุภาคอย่างแน่นอน กล่าวคือ ในฟิสิกส์แบบดั้งเดิมอนุภาคจะทะลุผ่านทั้งหมดไม่ปรากฏอนุภาคตัวใดสะท้อนกลับมาเลย แต่ปรากฏการณ์ของฟิสิกส์ควอนตัม อนุภาคบางส่วนสามารถสะท้อนกลับมาได้หรือบางส่วนจะทะลุผ่านได้ เรียกปรากฏการณ์ที่อนุภาคบางส่วนทะลุผ่านได้ว่า ปรากฏการณ์ขุดอุโมงค์ ในการศึกษาหรือการทำความเข้าใจกับปรากฏการณ์ทางควอนตัมล้วนเกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นการส่งผ่านและความน่าจะเป็นของการสะท้อน ซึ่งผลลัพธ์จะเป็นไปตามกฎอนุรักษ์ความน่าจะเป็น

$$R + T = 1$$

โดยที่ R คือความน่าจะเป็นในการสะท้อนและ T คือความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน



รูปภาพที่ 5.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน [https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-007-electromagnetic-energy-from-motors-to-lasers-spring-2011/lecture-notes/MIT6_007S11_lec41.pdf]

อนึ่ง ในปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ พลังงานศักย์จะมีค่าความแตกต่างกันไปในแต่ละระบบ โดยในบางระบบพลังงานศักย์มีรูปแบบไม่ซับซ้อนซึ่งสามารถคำนวณหาผลเฉลยแม่นตรงของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านได้ อย่างไรก็ตามในบางระบบพลังงานศักย์มีรูปแบบซับซ้อนมากจนกระทั่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านได้

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษากรณีพิเศษที่เรียกว่า ควอซีนอร์มอลหรือโหมดกึ่งปกติ (Quasi-normal mode) ซึ่งเกิดจากเมื่อมีการรบกวนวัตถุในระบบ เช่น สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้า เป็นต้น นอกจากนั้นยังมีตัวอย่างของการรบกวนระบบที่น่าสนใจเช่น การใช้ปลายมีดเคาะไปที่แก้วไวน์แล้วเกิดคลื่นเสียง ความถี่ของคลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจะทับซ้อนกับความถี่ธรรมชาติของแก้วไวน์โดยเกิดการหักล้างหรือการเสริมกัน ซึ่งหากไม่มีการเพิ่มความหน่วง (Damping force) แก้วไวน์ก็จะมีการสั่นตลอดไปเรียกระบบแบบนี้ว่า **โหมดปกติ (Normal mode)** แต่ในกรณีที่มีความหน่วงเกิดขึ้นค่าแอมปลิจูดของการแกว่งไปมาจะลดลงไปจนหมดที่ระยะอนันต์ ซึ่งเรียกระบบแบบนี้ว่า **โหมดกึ่งปกติ (Quasi-normal mode)** (เพชรอาภา, 2552)
โดยที่การสั่นหรือความกังวานของควอซีนอร์มอลโหมดสามารถประมาณโดย

$$\psi(t) \approx \exp(-\omega'' t)\cos(\omega' t)$$

โดยที่ $\psi(t)$ คือค่าแอมปลิจูดของการสั่น, ω' คือความถี่ และ ω'' คืออัตราการสลาย
เราสามารถเขียน **ความถี่ควอซีนอร์มอล** (Quasi-normal frequency) ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

นั่นคือ $$\omega = (\omega', \omega'') = \omega' + i\omega''$$

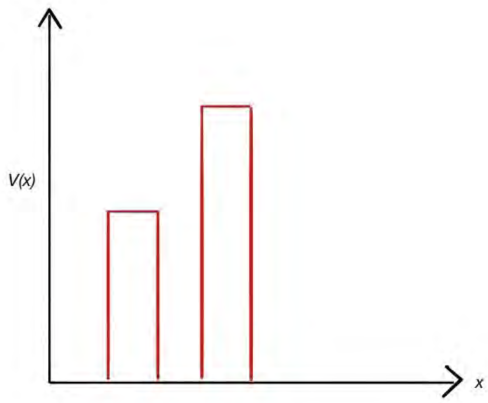
ให้
$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{i\omega t\})$$
$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{i(\omega' + i\omega'')t\})$$
$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{-\omega'' t\}.\exp\{i\omega t\}$$
$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{-\omega'' t\}.(\cos\omega' t + i\sin t))$$
$$\psi(t) = \exp\{-\omega'' t\}.\cos\omega' t$$

ทำการประมาณให้ $$\psi(t) \approx \exp\{-\omega'' t\}$$

โดยที่ ω คือความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดและส่วนจริงของ ω หมายถึงการแกว่งชั่วขณะหนึ่ง (เพชรอาภา, 2552)

5.1 ควอซีนอร์มอลสำหรับพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2\le x\le L_3\\ V_2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & x>L_4\end{cases}$$



รูปภาพที่ 5.2 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กรณี $E>V_i$ โดยที่ $i=1,\ 2$ จะได้ว่าผลเฉลยโดยวิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีคือ

$$F_1(x)=Ae^{i\int k\mathrm{dx}}+Be^{-i\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_2(x)=Ce^{i\int k_1\mathrm{d}x}+De^{-i\int k_1\mathrm{d}x}$$

$$F_3(x)=Fe^{i\int k\mathrm{d}x}+Ge^{-i\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_4(x)=He^{i\int k_2\mathrm{d}x}+Ie^{-\int k_2\mathrm{d}x}$$

$$F_5(x)=Je^{i\int k\mathrm{d}x}$$

โดยที่ $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\ k_1=\sqrt{\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}},\ k_2=\sqrt{\frac{2m(E-V_2)}{\hbar^2}}$

จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$Ae^{ikL_1}+Be^{-ikL_1}=Ce^{ik_1L_1}+De^{-ik_1L_1}$$

$$\alpha A+\frac{B}{\alpha}=\beta C+\frac{D}{\beta} \tag{5.1.1}$$

$$ikAe^{ikL_1}-ikBe^{-ikL_1}=ik_1Ce^{ik_1L_1}-ik_1De^{-ik_1L_1}$$

$$k\alpha A-k\frac{B}{\alpha}=k_1\beta C-k_1\frac{D}{\beta} \tag{5.1.2}$$

โดยที่ $\alpha=e^{ikL_1}$ และ $\beta=e^{ik_1L_1}$

$$Ce^{ik_1L_2}+De^{-ik_1L_2}=Fe^{ikL_2}+Ge^{-ikL_2}$$

$$\gamma C+\frac{D}{\gamma}=\delta F+\frac{G}{\delta} \tag{5.1.3}$$

$$ik_1Ce^{ik_1L_2}-ik_1De^{-ik_1L_2}=ikFe^{ikL_2}-ikGe^{-ikL_2}$$

$$k_1\gamma C-k_1\frac{D}{\gamma}=k\delta F-k\frac{G}{\delta} \tag{5.1.4}$$

โดยที่ $\gamma=e^{ik_1L_2}$ และ $\delta=e^{-ikL_2}$

$$Fe^{ikL_3}+Ge^{-ikL_3}=He^{ik_2L_3}+Ie^{-ik_2L_3}$$

$$\eta F+\frac{G}{\eta}=\mu H+\frac{I}{\mu} \tag{5.1.5}$$

$$ikFe^{ikL_3}-ikGe^{-ikL_3}=ik_2He^{ik_2L_3}-ik_2Ie^{-ik_2L_3}$$

$$k\eta F-k\frac{G}{\eta}=k_2\mu H-k_2\frac{I}{\mu} \tag{5.1.6}$$

โดยที่ $\eta = e^{ikL_3}$ และ $\mu = e^{ik_2L_3}$

$$He^{ik_2L_4} + Ie^{-ik_2L_4} = Je^{ikL_4}$$

$$\lambda H + \frac{I}{\lambda} = \rho J \qquad (5.1.7)$$

$$ik_2He^{ik_2L_4} - ik_2Ie^{-ik_2L_4} = ikJe^{ikL_4}$$

$$k_2\lambda H - k_2\frac{I}{\lambda} = k\rho J \qquad (5.1.8)$$

โดยที่ $\lambda = e^{ik_2L_4}$ และ $\rho = e^{ikL_4}$

นำ k_2 คูณสมการ (5.1.7) จะได้ว่า

$$k_2\lambda H + k_2\frac{I}{\lambda} = k_2\rho J \qquad (5.1.9)$$

นำสมการ (5.1.8) + สมการ (5.1.9) จะได้ว่า

$$2k_2\lambda H = (k + k_2)\rho J$$

$$H = \left(\frac{k + k_2}{2k_2}\right)\frac{\rho}{\lambda}J \qquad (5.1.10)$$

นำสมการ (5.1.9) – สมการ (5.1.8) จะได้ว่า

$$2k_2\frac{I}{\lambda} = (k - k_2)\rho J$$

$$I = -\left(\frac{k - k_2}{2k_2}\right)\rho\lambda J \qquad (5.1.11)$$

นำ k คูณสมการ (5.1.5) จะได้ว่า

$$k\eta F + k\frac{G}{\eta} = k\mu H + k\frac{I}{\mu} \qquad (5.1.12)$$

$$k\eta F - k\frac{G}{\eta} = k_2\mu H - k_2\frac{I}{\mu} \tag{5.1.6}$$

นำสมการ (5.1.12) + สมการ (5.1.6) จะได้ว่า

$$2k\eta F = (k+k_2)\mu H + (k-k_2)\frac{I}{\mu}$$

$$F = (\frac{k+k_2}{2k})\frac{\mu}{\eta}H + \left(\frac{k-k_2}{2k}\right)\frac{1}{\mu\eta}I$$

$$F = \left(\frac{k+k_2}{2k}\right)\frac{\mu}{\eta}\left[\left(\frac{k+k_2}{2k_2}\right)\frac{\rho}{\lambda}J\right] - \left(\frac{k-k_2}{2k}\right)\frac{1}{\mu\eta}\left[\left(\frac{k-k_2}{2k_2}\right)\rho\lambda J\right]$$

$$F = \frac{1}{4kk_2}\left[\left(k+k_2\right)^2\frac{\mu\rho}{\lambda\eta} - \left(k-k_2\right)^2\frac{\lambda\rho}{\mu\eta}\right]J \tag{5.1.13}$$

นำสมการ (5.1.12) – สมการ (5.1.6) จะได้ว่า

$$2k\frac{G}{\eta} = \left(k-k_2\right)\mu H + (k+k_2)\frac{I}{\mu}$$

$$\frac{G}{\eta} = \left(\frac{k-k_2}{2k}\right)\mu H + \left(\frac{k+k_2}{2k}\right)\frac{I}{\mu}$$

$$G = \left(\frac{k-k_2}{2k}\right)\eta\mu\left(\left(\frac{k+k_2}{2k_2}\right)\frac{\rho}{\lambda}J\right) + \left(\frac{k+k_2}{2k}\right)\frac{\eta}{\mu}\left(\left(\frac{k-k_2}{2k_2}\right)\rho\lambda J\right)$$

$$G = \frac{\left(k^2-k_2^{\,2}\right)}{4kk_2}\left[\frac{\rho\mu\eta}{\lambda} + \frac{\rho\eta\lambda}{\mu}\right]J \tag{5.1.14}$$

นำ k_1 คูณสมการ (5.1.3) จะได้ว่า

$$k_1\gamma C + k_1\frac{D}{\gamma} = k_1\delta F + k_1\frac{G}{\delta} \tag{5.1.15}$$

$$k_1\gamma C - k_1\frac{D}{\gamma} = k\delta F - k\frac{G}{\delta} \tag{5.1.4}$$

นำสมการ (5.1.15) + สมการ (5.1.4) จะได้ว่า

$$2k_1\gamma C=(k+k_1)\delta F-(k-k_1)\frac{G}{\delta}$$

$$C=\left(\frac{k+k_1}{2k_1}\right)\frac{\delta}{\gamma}F-\left(\frac{k-k_1}{2k_1}\right)\frac{1}{\delta\gamma}G$$

$$\begin{aligned}C=&\left(\frac{k+k_1}{2k_1}\right)\frac{\delta}{\gamma}\left(\frac{\rho}{4kk_2}\left[\left(k+k_2\right)^2\frac{\mu}{\lambda\eta}+\left(k-k_2\right)^2\frac{\lambda}{\mu\eta}\right]J\right)\\&-\left(\frac{k-k_1}{2k_1}\right)\frac{1}{\delta\gamma}\left(\frac{\left(k^2-k_2{}^2\right)\rho}{4kk_2}\left[\frac{\mu\eta}{\lambda}+\frac{\eta\lambda}{\mu}\right]J\right)\end{aligned}$$

$$C=\frac{1}{8kk_1k_2}\left[\begin{aligned}&\left(\left[\left(k+k_1\right)\left(k+k_2\right)^2\frac{\mu\delta\rho}{\lambda\eta\gamma}+\left(k+k_1\right)\left(k-k_2\right)^2\frac{\lambda\delta\rho}{\mu\eta\gamma}\right]\right)\\&-\left(\left(k-k_1\right)\left(k^2-k_2{}^2\right)\left[\frac{\mu\eta\rho}{\delta\gamma\lambda}+\frac{\eta\lambda\rho}{\delta\gamma\mu}\right]\right)\end{aligned}\right]J \qquad (5.1.16)$$

นำสมการ (5.1.15) – สมการ (5.1.4) จะได้ว่า

$$2k_1\frac{D}{\gamma}=-\left(k-k_1\right)\delta F+\left(k+k_1\right)\frac{G}{\delta}$$

$$D=-\left(\frac{k-k_1}{2k_1}\right)\delta\gamma F+\left(\frac{k+k_1}{2k_1}\right)\frac{\gamma}{\delta}G$$

$$D=\frac{1}{8kk_1k_2}\left[\begin{aligned}&\left(\left[-\left(k-k_1\right)\left(k+k_2\right)^2\frac{\mu\rho\delta\gamma}{\lambda\eta}-\left(k-k_1\right)\left(k-k_2\right)^2\frac{\lambda\rho\delta\gamma}{\mu\eta}\right]\right)\\&+\left(\left(k+k_1\right)\left(k^2-k_2{}^2\right)\left[\frac{\rho\mu\eta\gamma}{\lambda\delta}+\frac{\rho\eta\lambda\gamma}{\mu\delta}\right]\right)\end{aligned}\right]J \qquad (5.1.17)$$

นำ k คูณสมการ (5.1.1) จะได้ว่า

$$k\alpha A+k\frac{B}{\alpha}=k\beta C+k\frac{D}{\beta} \qquad (5.1.18)$$

$$k\alpha A-k\frac{B}{\alpha}=k_1\beta C-k_1\frac{D}{\beta} \tag{5.1.2}$$

นำสมการ (5.1.18) + สมการ (5.1.2) จะได้ว่า

$$2k\alpha A=\left(k+k_1\right)\beta C+\left(k-k_1\right)\frac{D}{\beta}$$

$$A=\left(\frac{k+k_1}{2k}\right)\frac{\beta}{\alpha}C+\left(\frac{k-k_1}{2k}\right)\frac{D}{\alpha\beta}$$

$$A=\frac{1}{16k^2k_1k_2}\left[\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\left(k+k_1\right)^2\left(k+k_2\right)^2\dfrac{\beta\mu\delta\rho}{\alpha\lambda\eta\gamma}+\left(k+k_1\right)^2\left(k-k_2\right)^2\dfrac{\beta\lambda\delta\rho}{\alpha\mu\eta\gamma}\\ -\left(k^2-k_1^{\,2}\right)\left(k^2-k_2^{\,2}\right)\left[\dfrac{\beta\mu\eta\rho}{\alpha\delta\gamma\lambda}+\dfrac{\beta\eta\lambda\rho}{\alpha\delta\gamma\mu}\right]\end{array}\right)\\ +\left(\begin{array}{l}-\left(k-k_1\right)^2\left(k+k_2\right)^2\dfrac{\mu\rho\delta\gamma}{\alpha\beta\lambda\eta}-\left(k-k_1\right)^2\left(k-k_2\right)^2\dfrac{\lambda\rho\delta\gamma}{\alpha\beta\mu\eta}\\ +\left(\left(k^2-k_1^{\,2}\right)\left(k^2-k_2^{\,2}\right)\left(\dfrac{\rho\mu\eta\gamma}{\alpha\beta\lambda\delta}+\dfrac{\rho\eta\lambda\gamma}{\alpha\beta\mu\delta}\right)\right)\end{array}\right)\end{array}\right]J$$

$$A=\frac{1}{16k^2k_1k_2}\left[\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\left(k+k_1\right)^2\left(k+k_2\right)^2\dfrac{\beta\mu\delta\rho}{\alpha\lambda\eta\gamma}+\left(k+k_1\right)^2\left(k-k_2\right)^2\dfrac{\beta\lambda\delta\rho}{\alpha\mu\eta\gamma}\\ -\left(k-k_1\right)^2\left(k+k_2\right)^2\dfrac{\mu\rho\delta\gamma}{\alpha\beta\lambda\eta}-\left(k-k_1\right)^2\left(k-k_2\right)^2\dfrac{\lambda\rho\delta\gamma}{\alpha\beta\mu\eta}\end{array}\right)\\ +\left(\left(k^2-k_1^{\,2}\right)\left(k^2-k_2^{\,2}\right)\left(\dfrac{\rho\mu\eta\gamma}{\alpha\beta\lambda\delta}+\dfrac{\rho\eta\lambda\gamma}{\alpha\beta\mu\delta}-\dfrac{\beta\mu\eta\rho}{\alpha\delta\gamma\lambda}-\dfrac{\beta\eta\lambda\rho}{\alpha\delta\gamma\mu}\right)\right)\end{array}\right]J \tag{5.1.19}$$

สมมติให้

$$\begin{aligned}\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k)=&\left(k+k_1\right)^2\left(k+k_2\right)^2\frac{\beta\mu\delta\rho}{\alpha\lambda\eta\gamma}+\left(k+k_1\right)^2\left(k-k_2\right)^2\frac{\beta\lambda\delta\rho}{\alpha\mu\eta\gamma}\\&-\left(k-k_1\right)^2\left(k+k_2\right)^2\frac{\mu\rho\delta\gamma}{\alpha\beta\lambda\eta}-\left(k-k_1\right)^2\left(k-k_2\right)^2\frac{\lambda\rho\delta\gamma}{\alpha\beta\mu\eta}\\&+\left(k^2-k_1^{\,2}\right)\left(k^2-k_2^{\,2}\right)\left(\frac{\rho\mu\eta\gamma}{\alpha\beta\lambda\delta}+\frac{\rho\eta\lambda\gamma}{\alpha\beta\mu\delta}-\frac{\beta\mu\eta\rho}{\alpha\delta\gamma\lambda}-\frac{\beta\eta\lambda\rho}{\alpha\delta\gamma\mu}\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\frac{J}{A}=\frac{16k^2k_1k_2}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k)} \tag{5.1.20}$$

โดยที่ $k_1=\sqrt{k^2-\frac{2mV_1}{\hbar^2}}$ และ $k_2=\sqrt{k^2-\frac{2mV_1}{\hbar^2}}$

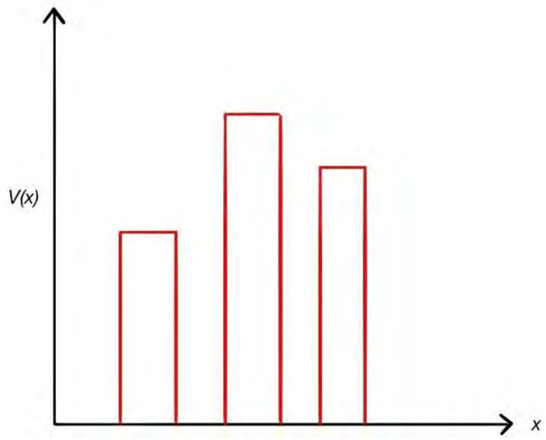
จากสมการ (5.1.20) จะได้ว่า ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน (Transmission probability) คือ

$$T=\left|\frac{J}{A}\right|^2=\left|\frac{16k^2k_1k_2}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k)}\right|^2 \tag{5.1.21}$$

ดังนั้น เงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล (The quasi-normal frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน ซึ่งกำหนดโดย k_{QNF} โดยที่ $\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k_{\mathrm{QNF}})=0$

5.2 ควอซีนอร์มอลสำหรับพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2\le x\le L_3\\ V_2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & L_4\le x\le L_5\\ V_3, & L_5\le x\le L_6\\ 0, & x>L_6\end{cases}$$



รูปภาพที่ 5.3 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กรณี $E > V_n$ โดยที่ $\mathrm{n} = 1, 2, 3$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$F_1(x) = Le^{\int k\mathrm{dx}} + Me^{-i\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_2(x) = Ne^{i\int k_1\mathrm{d}x} + Oe^{-i\int k_1\mathrm{d}x}$$

$$F_3(x) = Ae^{i\int k\mathrm{dx}} + Be^{-i\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_4(x) = Ce^{i\int k_2\mathrm{d}x} + De^{-\int k_2\mathrm{d}x}$$

$$F_5(x) = Fe^{i\int k\mathrm{d}x} + Ge^{-\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_6(x) = He^{i\int k_3\mathrm{d}x} + Ie^{-i\int k_3\mathrm{d}x}$$

$$F_7(x) = Je^{i\int k\mathrm{d}x}$$

โดยที่ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},\ k_1 = \sqrt{\frac{2m\left(E - V_1\right)}{\hbar^2}},\ k_2 = \sqrt{\frac{2m\left(E - V_2\right)}{\hbar^2}}$ และ $k_3 = \sqrt{\frac{2m(E - V_3)}{\hbar^2}}$

จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$Le^{ikL_1} + Me^{-ikL_1} = Ne^{ik_1L_1} + Oe^{-ik_1L_1}$$

$$L\omega + \frac{M}{\omega} = N\xi + \frac{O}{\xi} \qquad (5.2.1)$$

$$kLe^{ikL_1} - kMe^{-ikL_1} = k_1Ne^{ik_1L_1} - k_1Oe^{-ik_1L_1}$$

$$k\omega L - k\frac{M}{\omega} = k_1N\xi - k_1\frac{O}{\xi} \qquad (5.2.2)$$

โดยที่ $\omega = e^{ikL_1}$ และ $\xi = e^{ik_1L_1}$

$$Ne^{ik_1L_2} + Oe^{-ik_1L_2} = Ae^{ikL_2} + Be^{-ikL_2}$$

$$\chi N + \frac{O}{\chi} = \phi A + \frac{B}{\phi} \tag{5.2.3}$$

$$k_1 N e^{ik_1 L_2} - k_1 O e^{-ik_1 L_2} = kG e^{ikL_2} - kH e^{-ikL_2}$$

$$k_1 N \chi - k_1 \frac{O}{\chi} = k\phi A - k\frac{B}{\phi} \tag{5.2.4}$$

โดยที่ $\chi = e^{ik_1 L_2}$ และ $\phi = e^{ikL_2}$

$$Ae^{ikL_3} + Be^{-ikL_3} = Ce^{ik_2 L_3} + De^{-ik_2 L_3}$$

$$\alpha A + \frac{B}{\alpha} = \beta C + \frac{D}{\beta} \tag{5.2.5}$$

$$kAe^{ikL_3} + kBe^{-ikL_3} = k_2 Ce^{ik_2 L_3} - k_2 De^{-ik_2 L_3}$$

$$k\alpha A - k\frac{B}{\alpha} = k_2 \beta C - k_2 \frac{D}{\beta} \tag{5.2.6}$$

โดยที่ $\alpha = e^{ikL_3}$ และ $\beta = e^{ik_2 L_3}$

$$Ce^{ik_2 L_4} + De^{-ik_2 L_4} = Fe^{ikL_4} + Ge^{-ikL_4}$$

$$\gamma C + \frac{D}{\gamma} = \delta F + \frac{G}{\delta} \tag{5.2.7}$$

$$k_2 Ce^{ik_2 L_4} - k_2 De^{-ik_2 L_4} = kFe^{ikL_4} - kGe^{-ikL_4}$$

$$k_2 \gamma C - k_2 \frac{D}{\gamma} = k\delta F - k\frac{G}{\delta} \tag{5.2.8}$$

โดยที่ $\gamma = e^{ik_2 L_4}$ และ $\delta = e^{ikL_4}$

$$Fe^{ikL_5} + Ge^{-ikL_5} = He^{ik_3 L_5} + Ie^{-ik_3 L_5}$$

$$\eta F + \frac{G}{\eta} = \mu H + \frac{I}{\mu} \tag{5.2.9}$$

$$ikFe^{ikL_5} - ikGe^{-ikL_5} = ik_3 He^{ik_3 L_5} - ik_3 Ie^{-ik_3 L_5}$$

$$k\eta F - k\frac{G}{\eta} = k_3\mu H - k_3\frac{I}{\mu} \tag{5.2.10}$$

โดยที่ $\eta = e^{ikL_5}$ และ $\mu = e^{ik_3L_5}$

$$He^{ik_3L_6} + Ie^{-ik_3L_6} = Je^{ikL_6}$$

$$\lambda H + \frac{I}{\lambda} = \rho J \tag{5.2.11}$$

$$ik_3He^{ik_3L_6} - ik_3Ie^{-ik_3L_6} = ikJe^{ikL_6}$$

$$ik_3\lambda H - ik_3\frac{I}{\lambda} = ik\rho J \tag{5.2.12}$$

โดยที่ $\lambda = e^{ik_3L_6}$ และ $\rho = e^{ikL_6}$

จากอัตราส่วนการส่งผ่านของแอมปลิจูดของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในสมการ (4.1.30)

$$\frac{J}{A} = \frac{16k^2k_1k_2}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k)}$$

จะได้ว่าอัตราส่วนการส่งผ่านของแอมปลิจูดของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

นั่นคือ $$\frac{J}{L} = \frac{J}{A}.\frac{A}{L}$$

ดังนั้น $$\frac{J}{L} = \frac{64k^3k_1k_2k_3}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6,k)} \tag{5.2.13}$$

โดยที่ $k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{2mV_1}{\hbar^2}}$ และ $k_2 = \sqrt{k^2 - \frac{2mV_1}{\hbar^2}}$ และ $k_3 = \sqrt{k^3 - \frac{2mV_3}{\hbar^2}}$

จากสมการ (4.2.13) จะได้ว่า ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน (Transmission probability) คือ

$$T = \left|\frac{J}{A}.\frac{A}{L}\right|^2 = \left|\frac{64k^3k_1k_2k_3}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6,k)}\right|^2$$

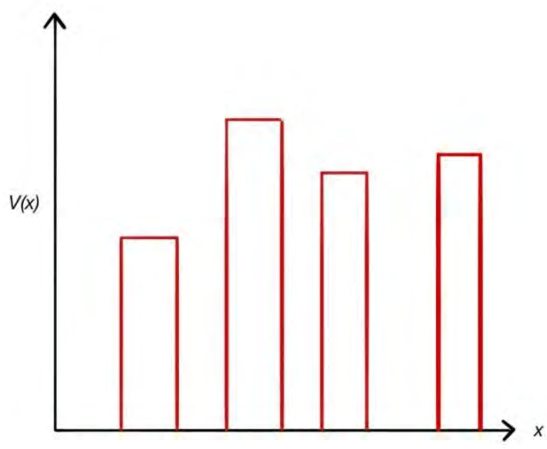
ดังนั้น เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล (The quasi-normal frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน

ซึ่งกำหนดโดย k_{QNF} โดยที่ $\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, k_{\mathrm{QNF}}) = 0$

และ $$E_{\mathrm{QNF}} = \frac{\hbar^2 k_{\mathrm{QNF}}^2}{2m}$$

5.3 ควอซีนอร์มอลของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ V_1, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 \le x \le L_3 \\ V_2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & L_4 \le x \le L_5 \\ V_3, & L_5 \le x \le L_6 \\ \vdots & \vdots \\ V_n, & L_{2n-1} \le x \le L_{2n} \\ 0, & x > L_{2n} \end{cases}$$



รูปภาพที่ 5.4 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

กรณี $E > V_{\mathrm{i}}$ โดยที่ i = 1, 2, 3, ... , n

จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี คือ

$$F_1(x) = A_1 e^{\int k\mathrm{d}\mathrm{x}} + A_2 e^{-i\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_2(x) = A_3 e^{i\int k_1\mathrm{d}x} + A_4 e^{-i\int k_1\mathrm{d}x}$$

$$F_3(x) = A_5 e^{i\int k\mathrm{d}x} + A_6 e^{-i\int k\mathrm{d}x}$$

$$F_4(x) = A_7 e^{i\int k_2\mathrm{d}x} + A_8 e^{-\int k_2\mathrm{d}x}$$

$$\vdots$$

$$F_{\mathrm{n}}(x) = A_{2\mathrm{n}-1}(x) e^{\int kdx}$$

โดยที่ $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ และ $k_{\mathrm{n}} = \sqrt{k^2 - \dfrac{2mV_{\mathrm{i}}}{\hbar^2}}$; i=1, 2, 3, ... ,n

จากการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน (Transmission probability) จะเห็นว่าคลื่นจะถูกส่งผ่านจากศักย์ V_1 ไปยังศักย์ V_2 ของพลังงานแบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าและไปยังศักย์ V_3 ของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้นในกรณีของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปคลื่นจะถูกส่งผ่านไปจนถึงศักย์ V_{n} ดังนั้นอัตราส่วนในการส่งผ่านของแอมปลิจูดของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปคือ

$$\frac{A_{2\mathrm{n}-1}}{A_1} = \left[\frac{(4k)^{\mathrm{n}} k_1 k_2 k_3 \ldots k_n}{\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots, L_{2\mathrm{n}}, k)}\right]$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

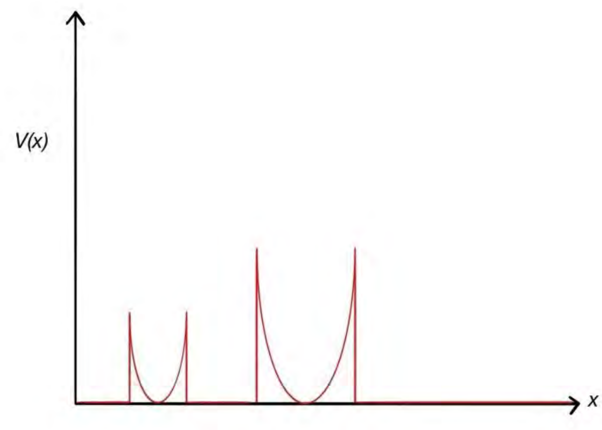
$$T = \left|\frac{A_{2\mathrm{n}-1}}{A_1}\right|^2 = \left|\frac{(4k)^{\mathrm{n}} k_1 k_2 k_3 \ldots k_n}{\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, \ldots, L_{2\mathrm{n}}, k)}\right|^2$$

โดยที่ $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ และ $k_{\mathrm{i}} = \sqrt{\dfrac{2m(E - V_{\mathrm{i}})}{\hbar^2}}$; i = 1, 2, 3, ... , n

ดังนั้น เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล (The quasi-normal frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน ซึ่งกำหนดโดย k_{QNF} โดยที่ $\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, ..., L_{2n}, k) = 0$

5.4 ควอซีนอร์มอลสำหรับพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ \dfrac{1}{2}ab^2(x - x_1)^2, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 \le x \le L_3 \\ \dfrac{1}{2}ab^2(x - x_2)^2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & x > L_4 \end{cases}$$



รูปภาพที่ 5.5 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

ในกรณีที่ $E > 0$ และ $E > V$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีดับเบิลยูเคบี คือ

$$F_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

$$F_2(x) = \alpha(x)C + \frac{1}{\alpha(x)p(x)}D$$

$$F_3(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$$

$$F_4(x) = \alpha(x)H + \frac{1}{\alpha(x)p(x)}I$$

$$F_5(x) = Je^{ikx}$$

โดยที่ $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}$ และ $p(x) = \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}ab^2(x-k)^2\right)}$

และ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\} + \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{p(x)}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\left(\frac{i}{h}p(x)\right) - \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\frac{p'(x)}{\sqrt[3]{\left(p(x)\right)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\left[-\frac{1}{2}\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{i}{h}p(x)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha(x) = \alpha(x)\left[-\frac{1}{2}\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{i}{h}p(x)\right]$$

และ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\alpha(x)p(x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\} + \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{p(x)}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\alpha(x)p(x)}\right) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\left(-\frac{i}{\hbar}p(x)\right) - \frac{p'(x)}{2\sqrt[3]{\left(p(x)\right)^2}}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\alpha(x)p(x)}\right) = -\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int^x p(x)\mathrm{d}x\right\}\left[\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{i}{\hbar}p(x)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\alpha(x)p(x)}\right) = -\frac{1}{\alpha(x)p(x)}\left[\frac{p'(x)}{p(x)} + \frac{i}{\hbar}p(x)\right]$$

และ $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$Ae^{ikL_1} + Be^{-ikL_1} = \beta_1 C + \beta_2 D \tag{5.4.1}$$

โดยที่ $\beta_1 = \alpha(L_1)$ และ $\beta_2 = \dfrac{1}{\alpha(L_1)p(L_1)}$

$$ikAe^{ikL_1} - ikBe^{-ikL_1} = \beta_3 C - \beta_4 D \tag{5.4.2}$$

โดยที่ $\beta_3 = \left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{p'(L_1)}{p(L_1)} + \dfrac{i}{h}p(L_1)\right)\alpha(L_1)$ และ $\beta_4 = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{p'(L_1)}{p(L_1)} + \dfrac{i}{\hbar}p(L_1)\right)\dfrac{1}{\alpha(L_1)p(L_1)}$

$$\beta_5 C + \beta_6 D = Fe^{ikL_2} + Ge^{-ikL_2} \tag{5.4.3}$$

โดยที่ $\beta_5 = \alpha(L_2)$ และ $\beta_6 = \dfrac{1}{\alpha(L_2)p(L_2)}$

$$\beta_7 C - \beta_8 D = ikFe^{ikL_2} - ikGe^{-ikL_2} \tag{5.4.4}$$

โดยที่ $\beta_7 = \left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{p'(L_2)}{p(L_2)} + \dfrac{i}{h}p(L_2)\right)\alpha(L_2)$ และ $\beta_8 = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{p'(L_2)}{p(L_2)} + \dfrac{i}{\hbar}p(L_2)\right)\dfrac{1}{\alpha(L_2)p(L_2)}$

$$Fe^{ikL_3} + Ge^{-ikL_3} = \beta_9 H + \beta_{10} I \tag{5.4.5}$$

โดยที่ $\beta_9 = \alpha(L_3)$ และ $\beta_{10} = \dfrac{1}{\alpha(L_3)p(L_3)}$

$$ikFe^{ikL_3} - ikGe^{-ikL_3} = \beta_{11} H - \beta_{12} I \tag{5.4.6}$$

โดยที่ $\beta_{11} = \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{p'(L_3)}{p(L_3)} + \dfrac{i}{\hbar}p(L_3)\right]\alpha(L_3)$ และ $\beta_{12} = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{p'(L_3)}{p(L_3)} + \dfrac{i}{\hbar}p(L_3)\right]\dfrac{1}{\alpha(L_3)p(L_3)}$

$$\beta_{13} H + \beta_{14} I = Je^{ikL_4} \tag{5.4.7}$$

โดยที่ $\beta_{13} = \alpha(L_4)$ และ $\beta_{14} = \dfrac{1}{\alpha(L_4)p(L_4)}$

$$\beta_{15} H - \beta_{16} I = ikJe^{ikL_4} \tag{5.4.8}$$

โดยที่ $\beta_{15}=\left[-\frac{1}{2}\frac{p'(L_4)}{p(L_4)}+\frac{i}{\hbar}p(L_4)\right]\alpha(L_4)$ และ $\beta_{16}=\left[\frac{1}{2}\frac{p'(L_4)}{p(L_4)}+\frac{i}{\hbar}p(L_4)\right]\frac{1}{\alpha(L_4)p(L_4)}$

จะได้ว่า อัตราส่วนการส่งผ่านของแอมปลิจูดของพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

นั่นคือ
$$\frac{J}{A}=\frac{\gamma(L_1,L_2,L_3,L_4,k)}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k)} \tag{5.4.9}$$

จากสมการ (5.4.9) จะได้ว่า ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน (Transmission probability) คือ

$$T=\left|\frac{J}{A}\right|^2=\left|\frac{\gamma(L_1,L_2,L_3,L_4,k)}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k)}\right|^2$$

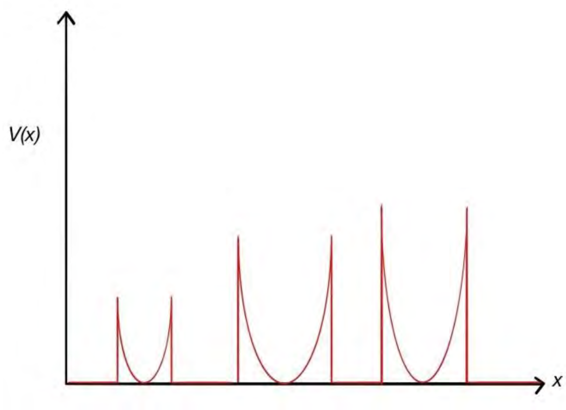
ดังนั้น เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล (The quasi-normal frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน

ซึ่งกำหนดโดย k_{QNF} โดยที่ $\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,k_{\mathrm{QNF}})=0$

และ
$$E_{\mathrm{QNF}}=\frac{\hbar^2k_{\mathrm{QNF}}^2}{2m}$$

5.5 ค่าความถี่ควอซีนอร์มอลสำหรับพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ \frac{1}{2}ab^2(x-c)^2, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2\le x\le L_3\\ \frac{1}{2}ab^2(x-d)^2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & L_4\le x\le L_5\\ \frac{1}{2}ab^2(x-f)^2, & L_5\le x\le L_6\\ 0, & x>L_6\end{cases}$$



รูปภาพที่ 5.6 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

ในกรณีที่ $E>0$ และ $E>V$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีดับเบิลยูเคบี คือ

$$F_1(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

$$F_2(x)=\alpha(x)C+\frac{1}{\alpha(x)p(x)}D$$

$$F_3(x)=Fe^{ikx}+Ge^{-ikx}$$

$$F_4(x)=\alpha(x)H+\frac{1}{\alpha(x)p(x)}I$$

$$F_5(x)=Je^{ikx}+Ke^{-ikx}$$

$$F_6(x)=\alpha(x)L+\frac{1}{\alpha(x)p(x)}M$$

$$F_7(x)=Oe^{ikx}$$

จะได้ว่าอัตราส่วนการส่งผ่านของแอมปลิจูดของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

นั่นคือ
$$\frac{O}{A}=\frac{\gamma(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6,k)}{\varphi(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6,k)}$$

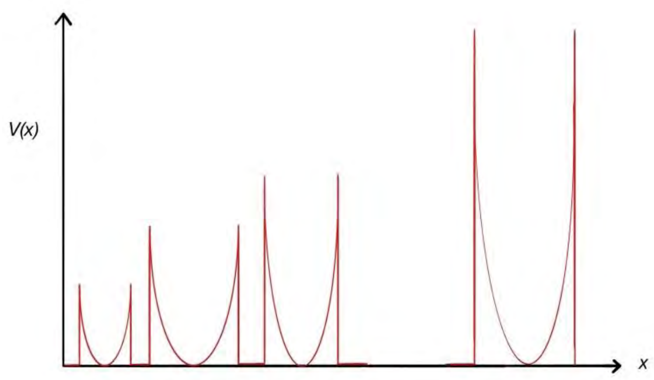
ดังนั้น ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน (Transmission probability) คือ

$$T = \left|\frac{O}{A}\right|^2 = \left|\frac{\gamma(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, k)}{\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, k)}\right|^2$$

ดังนั้น เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล (The quasi-normal frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน ซึ่งกำหนดโดย k_{QNF} โดยที่ $\varphi(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, k) = 0$

5.6 ควอซีนอร์มอลสำหรับพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < L_1 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-a_1)^2, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 \le x \le L_3 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-a_2)^2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & L_4 \le x \le L_5 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-a_3)^2, & L_5 \le x \le L_6 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}ab^2(x-a_n)^2, & L_{2n-1} \le x \le L_{2n} \\ 0, & x > L_{2n} \end{cases}$$



รูปภาพที่ 5.7 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

ในกรณีที่ $E > 0$ และ $E > V$ จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์โดยวิธีดับเบิลยูเคบี คือ

$$F_1(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$$

$$F_2(x) = \alpha(x) A_3 + \frac{1}{\alpha(x) p(x)} A_4$$

$$F_3(x) = A_5 e^{ikx} + A_6 e^{-ikx}$$

$$F_4(x) = \alpha(x) A_7 + \frac{1}{\alpha(x) p(x)} A_8$$

$$\vdots$$

$$F_{\mathrm{n}}(x) = A_{2\mathrm{n}\text{-}1} e^{ikx}$$

จากการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน (Transmission probability) จะเห็นว่าคลื่นจะถูกส่งผ่านจากศักย์ที่ 1 ไปยังพลังงานศักย์ที่ 2 ของพลังงานแบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิกและไปยังที่ 3 ของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก ดังนั้นในกรณีของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป คลื่นจะถูกส่งผ่านไปจนถึงศักย์ที่ n ดังนั้นอัตราส่วนในการส่งผ่านของแอมปลิจูดของพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไปคือ

$$\frac{A_{2\mathrm{n}\text{-}1}}{A_1} = \left[\frac{\gamma(L_1, L_2, L_3, ..., L_{2\mathrm{n}}, k)}{\varphi(L_1, L_2, L_3, ..., L_{2\mathrm{n}}, k)} \right]$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นแบบส่งผ่านของพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป คือ

$$T = \left| \frac{A_{2\mathrm{n}\text{-}1}}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{\gamma(L_1, L_2, L_3, ..., L_{2\mathrm{n}}, k)}{\varphi(L_1, L_2, L_3, ..., L_{2\mathrm{n}}, k)} \right|^2$$

ดังนั้น เงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอล (The quasi-normal frequencies) ของความน่าจะเป็นแบบส่งผ่าน ซึ่งกำหนดโดย k_{QNF} โดยที่ $\varphi(L_1, L_2, L_3, ..., L_{2\mathrm{n}}, k) = 0$

บทที่ 6

ข้อสรุปจากการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงข้อสรุปจากการวิจัยในบทที่ 3 บทที่ 4 และบทที่ 5 รวมถึงข้อเสนอแนะอื่น ๆ ในการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ การหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ โดยสูตรการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

6.1 ข้อสรุป

จากบทที่ 3 ได้ทำการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ความสัมพันธ์ระหว่างผลเฉลยโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีกับปัญหาการขุดอุโมงค์ และสูตรการหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนไปตามพลังงานศักย์ที่ใช้

จากบทที่ 4 การหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนโดยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สำหรับกรณีของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์ดังกล่าวจะมีศักย์เป็นค่าคงที่ซึ่งในการคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนสามารถใช้วิธีผลเฉลยแม่นตรง หรือวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีได้ แต่ในทางการคำนวณจะพบมีความยุ่งยากเป็นอย่างมาก เช่นเดียวกับพลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไปซึ่งถ้าเลือกใช้วิธีการคำนวณค่าแบบดับเบิลยูเคบีจะพบว่ามีความยุ่งยากมาก ถึงแม้ว่าสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีอาจไม่มีความแม่นยำเทียบเท่าวิธีผลเฉลยแม่นตรงหรือวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีแต่ก็ช่วยลดความซับซ้อนและความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นได้จากการคำนวณ

จากบทที่ 5 ได้ทำการศึกษาความหมายของโหมดกึ่งปกติและหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดซึ่งมีความสัมพันธ์กับความน่าจะเป็นในการส่งผ่านที่หาได้จากอัตราส่วนของแอมปลิจูดของคลื่นโดยเงื่อนไขของเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดนั้น ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านต้องมีค่าเป็นอนันต์ นั่นคือ

ฟังก์ชันของตัวส่วนของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านต้องมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน ได้ใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี สำหรับในกรณีของพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า การหาความน่าจะเป็นในการส่งผ่านโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีอาจไม่มีความยุ่งยากมากนักทำให้ทราบความน่าจะเป็นที่เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้อย่างชัดเจน สำหรับในกรณีของพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป ในเบื้องต้นเราทราบเพียงความน่าจะเป็นที่เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นกับตำแหน่งเท่านั้น เนื่องจากการหาผลเฉลยมีความซับซ้อนเป็นอย่างมาก แต่ก็เพียงพอที่จะทำให้ทราบเงื่อนไขการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด

6.2 ข้อเสนอแนะ

- หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์ที่มีความซับซ้อน
- เปรียบเทียบผลของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนที่ได้จากการคำนวณด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีกับวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีหรือวิธีผลเฉลยแม่นตรง

รายการอ้างอิง

[1]. พรชัย สาตรวาหา. (2550). สมการเชิงอนุพันธ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : พิทักษ์การพิมพ์.

[2]. นรา จิรภัทรพิมล. (2553). กลศาสตร์ควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : แอคทีฟ พริ้นท์ จำกัด.

[3]. ธิติ บวรรัตนารักษ์ และ นคร ไพศาลกิตติสกุล. (2557) กลศาสตร์ควอนตัมพื้นฐาน. พิมพ์ครั้งที่ 1 กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[4]. วีระศักดิ์ ซอมขุนทด. (2559). ฟิสิกส์ยุคใหม่. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[5]. วิรุฬห์ สายคณิต. (2552). ทฤษฎีควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[6]. อุษณีย์. (2557). สมการคลื่น. แหล่งที่มา : https://usanee1.files.wordpress.com/2014/04/wave3.pdf [20 มิถุนายน 2562]

[7]. เพชรอาภา บุญเสริม. (2553). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี. วารสารวิทยาศาสตร์ มข., 41(1), 101-111.

[8]. Boonserm, P. (2009). Rigorous Bounds on Transmission, Reflection, and Bogoliubov Coefficients, Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington [arxiv:0907.0045 [math-ph]]. 23-30.

[9]. Ngampitipan, T. and Boonserm, P. (2012), Reflection and Transmission Resonances and Accuracy of the WKB Method, In: Proceedings of 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics, University Malaysia Perlis 30-31 May (2012). 116-213.

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และการหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Mathematical Method for Schrödinger Equation and Finding Condition of Quasi-normal mode Frequencies for various potentials
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. เพชรอาภา บุญเสริม
ผู้ดำเนินการ	นายเจริญศักดิ์ ยินดีเทศ เลขประจำตัวนิสิต 5933507623 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

สมการชเรอดิงเงอร์มีความสำคัญและมีบทบาทเป็นอย่างมากในการศึกษาทำความเข้าใจและพัฒนากลศาสตร์แบบควอนตัม สมการชเรอดิงเงอร์ถูกค้นพบโดย แอร์วิน ชเรอดิงเงอร์ (Erwin Schrödinger) นักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย ในปี ค.ศ. 1925 สมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองหรือสมการคลื่นสามารถใช้อธิบายพฤติกรรมของคลื่นได้ ซึ่งสมการเขียนอยู่ในรูปพลังงานรวมของอนุภาค เกิดจากผลรวมของพลังงานศักย์ (potential- Energy) และ พลังงานจลน์ (kinetic Energy) และสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Time-independent Schrödinger Equation)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2}+V(x)F(x)=EF(x)$$

โดยที่ $\hbar$ คือ ค่าคงตัวขอพลังค์แบบลดค่า, $F(x)$ คือ ฟังก์ชันคลื่น และ $V(x)$ คือ พลังงานศักย์

2. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา (Time-dependent Schrödinger Equation)

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)$$

เนื่องจากสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการคลื่นดังที่ได้กล่าวมาข้างต้น ดังนั้นผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์จึงเป็นฟังก์ชันคลื่นสามารถใช้ทำนายพฤติกรรมของคลื่นหรืออนุภาคบางชนิดได้เช่น การทำนายสมบัติของอะตอมไฮโดรเจน เป็นต้น

ในโครงงานนี้จะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา โดยใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและหาค่าควอซีนอร์มอลโหมดรวมถึงการหาค่าความถี่ของควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบดับเบิ้ลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

1. วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB Approximation)

วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี (WKB Approximation) เป็นวิธีในการหาค่าประมาณของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เส้นตรง (Linear differential equation) คิดค้นโดย Wentzal, Kramers และ Brillouin ในปี ค.ศ. 1926 การใช้วิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีเหมาะสำหรับในระบบที่พลังงานศักย์เปลี่ยนอย่างช้า ๆ จนเกือบจะคงที่โดยคำตอบที่ได้จากวิธีการนี้เป็นคำตอบแบบประมาณแต่ในบางกรณีก็มีความแม่นยำมาก (เพชรอาภา, 2556)

พิจารณาสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2}+V(x)F(x)=EF(x)$$

เขียนสมการใหม่ได้เป็น $$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]F(x)$$

สามารถเขียนผลเฉลยได้เป็น $$F(x) = A(x)e^{\frac{iB(x)}{\hbar}}$$

เมื่อ $$A(x) = \frac{C}{\sqrt{|B'(x)|}}$$

โดยที่ C คือค่าคงตัว, $A(x) = \dfrac{C}{\sqrt{|B'(x)|}}$, $B(x) = \pm\int p(x)dx$

และ $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$

เราสามารถทำการประมาณให้ $$\frac{A''(x)}{A(x)} \ll \frac{\left(B'(x)\right)^2}{\hbar^2}$$

จาก $$(B'(x))^2 = 2m\left[E - V(x)\right]$$

ดังนั้น $$B(x) = \pm\int p(x)dx$$

จะได้ว่าผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติโดยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีคือ

$$F(x) \approx \frac{C}{\sqrt{\hbar q(x)}}e^{\pm\frac{i}{\hbar}\int \hbar q(x)dx} = \frac{C}{\sqrt{\hbar q(x)}}e^{\pm i\int q(x)dx}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัวและ $q(x) = \dfrac{|B'(x)|}{\hbar}$

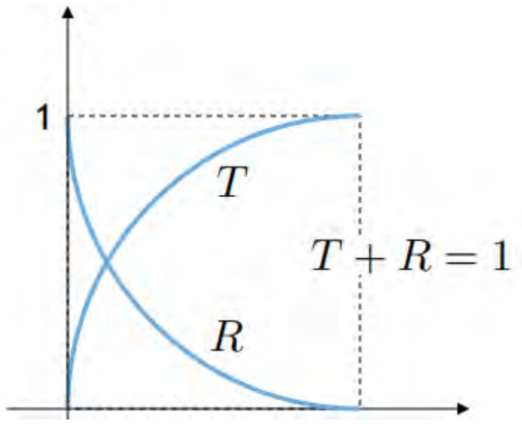
ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาสามารถใช้ในการหาค่าความน่าจะเป็นในการสะท้อน (Reflection probability) และความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน (Transmission probability) โดยพลังงานศักย์ที่จะศึกษาในโครงงานนี้เพื่อหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์เป็นพลังงานศักย์ที่มีความยากและซับซ้อนได้แก่ พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

2. โหมดกึ่งปกติ (Quasi-normal mode)

จากการศึกษาพบว่าสมการชเรอดิงเงอร์เป็นสมการคลื่นที่สามารถเขียนอยู่ในรูปพลังงานรวมของอนุภาคระหว่างพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ ซึ่งในทางฟิสิกส์แบบดั้งเดิมพลังงานศักย์ของอนุภาคย่อมต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับผลรวมของอนุภาคอย่างแน่นอน กล่าวคือ ในฟิสิกส์แบบดั้งเดิมอนุภาคจะทะลุผ่านทั้งหมด ไม่ปรากฏอนุภาคตัวใดสะท้อนกลับมาเลย แต่ปรากฏการณ์ของฟิสิกส์ควอนตัม อนุภาคบางส่วนสามารถสะท้อนกลับมาได้หรือบางส่วนจะทะลุผ่านได้ เรียกปรากฏการณ์ที่อนุภาคบางส่วนทะลุผ่านได้ว่า ปรากฏการณ์ขุดอุโมงค์ ในการศึกษาหรือการทำความเข้าใจกับปรากฏการณ์ทางควอนตัมล้วนเกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นการส่งผ่านและความน่าจะเป็นของการสะท้อน ซึ่งผลลัพธ์จะเป็นไปตามกฎอนุรักษ์ความน่าจะเป็น

$$R+T=1$$

โดยที่ R คือความน่าจะเป็นในการสะท้อนและ T คือความน่าจะเป็นในการส่งผ่าน



รูปภาพที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน [https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-007-electromagnetic-energy-from-motors-to-lasers-spring-2011/lecture-notes/MIT6_007S11_lec41.pdf]

ในปัญหาการกระเจิงทางควอนตัมใน 1 มิติ พลังงานศักย์จะมีค่าความแตกต่างกันไปในแต่ละระบบ โดยในบางระบบพลังงานศักย์มีรูปแบบไม่ซับซ้อนซึ่งสามารถคำนวณหาผลเฉลยแม่นตรงของความน่าจะเป็นของการส่งผ่านได้ อย่างไรก็ตามในบางระบบพลังงานศักย์มีรูปแบบซับซ้อนมากจนกระทั่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงของความน่าจะเป็นในการส่งผ่านได้

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษากรณีพิเศษที่เรียกว่าควอซีนอร์มอลหรือโหมดกึ่งปกติ (Quasi-normal mode) ซึ่งเกิดจากเมื่อมีการรบกวนวัตถุในระบบ เช่น สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้า เป็นต้น นอกจากนั้นยังมีตัวอย่างของการรบกวนระบบที่น่าสนใจเช่น การใช้ปลายมีดเคาะไปที่แก้วไวน์แล้วเกิดคลื่นเสียง ความถี่ของคลื่นเสียงที่เกิดขึ้นจะทับซ้อนกับความถี่ธรรมชาติของแก้วไวน์โดยเกิดการหักล้างหรือการเสริมกัน ซึ่งหากไม่มีการเพิ่มความหน่วง (Damping force) แก้วไวน์ก็จะมีการสั่นตลอดไปเรียกระบบแบบนี้ว่า **โหมดปกติ(Normal-mode)** แต่ในกรณีที่มีความหน่วงเกิดขึ้นค่าแอมปลิจูดของการแกว่งไปมาจะลดลงไปจนหมดที่ระยะอนันต์ ซึ่งเรียกระบบแบบนี้ว่า **โหมดกึ่งปกติ (Quasi-normal mode)**

อนึ่ง การสั่นหรือความกังวานของควอซีนอร์มอลโหมดสามารถประมาณโดย

$$\psi(t) \approx \exp(-\omega'' t)\cos(\omega' t)$$

โดยที่ $\psi(t)$ คือค่าแอมปลิจูดของการสั่น, ω' คือความถี่ และ ω'' คืออัตราการสลาย

เราสามารถเขียน**ความถี่ควอซีนอร์มอล** (Quasi-normal frequency) ในรูปของจำนวนเชิงซ้อน

นั่นคือ $$\omega = (\omega', \omega'') = \omega' + i\omega''$$

ให้ $$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{i\omega t\})$$

$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{i(\omega' + i\omega'')t\})$$

$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{-\omega'' t\}.\exp\{i\omega t\}$$

$$\psi(t) = \mathrm{Re}(\exp\{-\omega'' t\}.(\cos\omega' t + i\sin t))$$

$$\psi(t) = \exp\{-\omega'' t\}.\cos\omega' t$$

ทำการประมาณให้ $$\psi(t) \approx \exp\{-\omega'' t\}$$

โดยที่ ω คือความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดและส่วนจริงของ ω หมายถึงการแกว่งชั่วขณะหนึ่ง

วัตถุประสงค์

ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์ หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ และหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นและหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

ขอบเขตของโครงงาน

หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาใน 1 มิติ และคำนวณค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนของคลื่นและหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาที่มาของกลศาสตร์ควอนตัม
2. ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์
3. หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและหาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน
4. หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ เช่น พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป
5. หาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ
6. จัดทำสรุป
7. จัดทำเอกสารเพื่อนำเสนอโครงงานเป็นรูปเล่ม
8. เตรียมส่งโครงงานฉบับสมบูรณ์

ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการศึกษา	ปี 2562							ปี 2563			
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาที่มาของกลศาสตร์ควอนตัม											
2. ศึกษาสมการชเรอดิงเงอร์											
3. หาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี หาความสัมพันธ์ระหว่างความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อน											
4. หาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ											
5. หาค่าควอซีนอร์มอลโหมดและค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมด											
6. จัดทำสรุป											
7. จัดทำเอกสารเพื่อนำเสนอโครงงานเป็นรูปเล่ม											
8. เตรียมส่งเล่มโครงงานฉบับสมบูรณ์											

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อตัวนิสิตที่ทำโครงงาน

- สามารถหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี ความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยสูตรวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีสำหรับพลังงานศักย์ที่มีความซับซ้อนเช่น พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

ประโยชน์ที่ได้จากโครงงานที่พัฒนาขึ้น

- สามารถนำเทคนิคการหาค่าความน่าจะเป็นในการส่งผ่านและการสะท้อนด้วยวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบีและหาเงื่อนไขของการเกิดค่าความถี่ควอซีนอร์มอลโหมดสำหรับพลังงานศักย์แบบต่าง ๆ

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. คอมพิวเตอร์
2. เครื่องพิมพ์
3. โปรแกรมเอกสาร Microsoft Office Word
4. โปรแกรมนำเสนอ Microsoft Office PowerPoint
5. โปรแกรม Mathematica

งบประมาณ

1. ค่าปริ้นท์งาน 200 บาท
2. ค่าถ่ายเอกสาร 200 บาท
3. กระดาษ A4 500 บาท
4. ค่าหนังสือ 1000 บาท
5. ค่า External hard disk 2,190 บาท
6. ค่าเย็บรูปเล่ม 200 บาท

เอกสารอ้างอิง

[1]. พรชัย สาตรวาหา. (2550). สมการเชิงอนุพันธ์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : พิทักษ์การพิมพ์.

[2]. นรา จิรภัทรพิมล. (2553). กลศาสตร์ควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : แอคทีฟ พริ้นท์ จำกัด.

[3]. ธิติ บวรรัตนารักษ์ และ นคร ไพศาลกิตติสกุล. (2557) กลศาสตร์ควอนตัมพื้นฐาน. พิมพ์ครั้งที่ 1 กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[4]. วีระศักดิ์ ซอมขุนทด. (2559). ฟิสิกส์ยุคใหม่. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[5]. วิรุฬห์ สายคณิต. (2552). ทฤษฎีควอนตัม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[6]. อุษณีย์. (2557). สมการคลื่น. แหล่งที่มา : https://usanee1.files.wordpress.com/2014/04/wave3.pdf [20 มิถุนายน 2562]

[7]. เพชรอาภา บุญเสริม. (2553). วิธีการทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการชเรอดิงเงอร์และวิธีการประมาณค่าแบบดับเบิลยูเคบี. วารสารวิทยาศาสตร์ มข., 41(1), 101-111.

[8]. Boonserm, P. (2009). Transfer matrix representation. Rigorous Bounds on Transmission, Reflection, and Bogoliubov Coefficients, Ph. D. Thesis, Victoria University of Wellington [arxiv:0907.0045 [math-ph]]. 23-30.

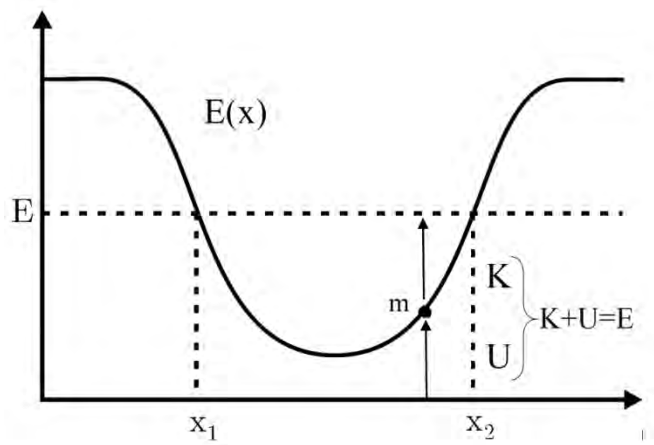
[9]. Ngampitipan, T. and Boonserm, P. (2012), Reflection and Transmission Resonances and Accuracy of the WKB Method, In: Proceedings of 2nd Regional Conference on Applied and Engineering Mathematics, University Malaysia Perlis 30-31 May (2012). 116-213.

ภาคผนวก

1. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

พลังงานรวมของอนุภาคอยู่ในรูปของพลังงานจลน์ (Kinetic Energy) และ พลังงานศักย์ (Potential Energy)

$$E = K + V$$



รูปภาพที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Potential_and_kinetic_energy.png)

โดยที่ K คือพลังงานงานจลน์ และ V คือพลังงานศักย์

ดังนั้น
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \tag{1}$$

และจากความสัมพันธ์ของโมเมนตัมเชิงเส้น

$$p = mv \tag{2}$$

โดยที่ m คือ มวลของอนุภาคและ v คือ ความเร็วของอนุภาค

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

ดังนั้น $$p = \sqrt{2m(E - V(x))} \tag{3}$$

สมมติฐานของ หลุยส์ เดอ บรอย (Louis de Broglie) นักฟิสิกส์ชาวฝรั่งเศส ได้เสนอไว้ว่า คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าหรือคลื่นแสงสามารถประพฤติตัวได้เป็นทั้งอนุภาคและคลื่น ภายหลังสมมติฐานดังกล่าวได้ถูกพิสูจน์และรับรองว่าเป็นจริง

จากทฤษฎีของไอน์สไตน์

$$E = mc^2 \tag{4}$$

โดยที่ m คือ มวลของอนุภาค c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

และจากสูตรของพลังค์

$$E = hf \tag{5}$$

โดยที่ h คือ มวลของอนุภาค f คือ ความถี่ของอนุภาค

จาก (4) และ (5) จะได้ว่า

$$hf = mc^2 \tag{6}$$

จาก (2) แทนค่า $v = c$ เมื่อ c คือ อัตราเร็วของแสงในสุญญากาศ

ดังนั้น $$p = mc \tag{7}$$

จาก (4) และ (7) จะได้ว่า

$$p = \frac{E}{c}$$

ดังนั้น $$E = pc \qquad (8)$$

จาก (5) และ (8) จะได้ว่า

$$pc = hf \qquad (9)$$

จาก $$v = f\lambda \qquad (10)$$

แทนค่า $v = c$ ใน (10) จะได้ว่า

$$c = f\lambda$$

ดังนั้น $$f = \frac{c}{\lambda} \qquad (11)$$

จาก (9) และ (11) จะได้ว่า

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

เรียกสมการนี้ว่า ความยาวคลื่นเดอบรอย

ดังนั้น $$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (12)$$

จาก (3) และ (12) จะได้ว่า

$$\frac{h}{\lambda} = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

ดังนั้น
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-V(x))}} \tag{13}$$

จะได้ว่า
$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{(2\pi f)^2}{(f\lambda)^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 2m\left(E-V(x)\right)}{h^2} = \frac{4\pi^2 2m\left(E-V(x)\right)}{4\pi^2\hbar^2}$$

ดังนั้น
$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{2m\left[E-V(x)\right]}{\hbar^2} \tag{14}$$

จาก
$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \tag{15}$$

จากสมการ (14) และ (15) จะได้ว่า

$$\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{-2m\left[E-V(x)\right]}{\hbar^2}F(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2} = EF(x) - V(x)F(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2F(x)}{dx^2} + V(x)F(x) = EF(x) \tag{16}$$

เรียก สมการ (16) ว่า **สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ**

2. สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา

พิจารณาคลื่นในระนาบ (Plane wave) ที่เคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็วที่ไปในทิศเดียวกัน

มีเฟสต่างกัน $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน และมีความถี่และแอมพลิจูดเท่ากัน สามารถเขียนฟังก์ชันคลื่นได้ในรูป

ฟังก์ชันไซน์ได้ดังนี้ (กุลภัทร, 2561)

$$\psi(x,t)=\left\{\psi_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(x-vt\right)+\frac{\pi}{2}\right],\psi_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)\right\}$$

ดังนั้น $$\psi(x,t)=\left\{\psi_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right),\psi_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)\right\} \tag{1}$$

โดยที่ ψ_0 คือแอมพลิจูดและ v คืออัตราเร็วของคลื่น

ฉะนั้น เราสามารถเขียนสมการ (1) ให้อยู่ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนได้

ดังนั้น $$\psi(x,t)=\psi_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)+i\psi_0 \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)$$

$$\psi(x,t)=\psi_0\left(\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)+i\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-vt\right)\right)$$

นั่นคือ $$\psi(x,t)=\psi_0 \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right\} \tag{2}$$

จาก $$v = f\lambda \tag{3}$$

โดยที่ v คือ อัตราเร็วและ λ คือ ความยาวคลื่น

แทนค่าสมการ (3) ลงในสมการ (2) จะได้ว่า

$$\psi(x,t)=\psi_0 \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}(x-f\lambda t)\right\}$$

$$\psi(x,t)=\psi_0 \exp\left\{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-ft\right)\right\} \tag{4}$$

โดยที่ ψ_0 คือแอมพลิจูด f คือความถี่ และ λ คือความยาวคลื่น

จากสมการ (4) $$\psi(x,t)=\psi_0 \exp\left\{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-ft\right)\right\}$$

จากทฤษฎีของพลังค์และความยาวคลื่นเดอบรอย เราสามารถเขียนสมการ (2.2.4) ได้เป็น

$$\psi(x,t)=\psi_0 \exp\left\{i2\pi\left(\frac{xp}{h}-\frac{E}{h}t\right)\right\} \quad (5)$$

จาก $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ โดยที่ $\boldsymbol{k}$ คือ เลขคลื่นหรือค่าคงตัวของการแผ่ (กุลภัทร, 2561)

จากความยาวคลื่นเดอบรอย จะได้ว่า $k=\dfrac{2\pi p}{h}$

ดังนั้น $$k=\frac{p}{\hbar} \quad (6)$$

โดยที่ $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า

เราอาจกล่าวได้ว่า ค่าคงตัวของพลังค์แบบลดค่า (reduced Plank’s constant) คือ ควอนไทเซชัน (Quantization) โมเมนตัมเชิงมุม ตัวอย่างเช่น โมเมนตัมเชิงมุมของอิเล็กตรอนที่โคจรรอบนิวเคลียสของอะตอม

จาก $\omega=2\pi f$ โดยที่ ω คือ อัตราเร็วเชิงมุม และ $E=hf$

ดังนั้น $$\omega=\frac{2\pi E}{h} \quad (7)$$

$$\omega=\frac{E}{\hbar}$$

หรือ $$\boldsymbol{E}=\hbar\omega \quad (8)$$

แทนค่า ω และ $\boldsymbol{k}$ ที่หาได้จากข้างต้นลงในสมการ (5)

จะได้ว่า $$\psi(x,t)=\psi_0 \exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\} \quad (9)$$

จากสมการ (5) จะเห็นว่าฟังก์ชันคลื่น $\psi(x,t)$ มีคุณสมบัติต่าง ๆ ขึ้นกับค่าโมเมนตัม (p) และพลังงาน (E) ซึ่งอยู่ในรูปของเลขคลื่น (k) และอัตราเร็วเชิงมุม (ω) สอดคล้องกับพอสซูเลตข้อที่ 1 ของกลศาสตร์ควอนตัมซึ่งมีใจความว่า ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ของอนุภาคคือฟังก์ชันคลื่น โดยที่คุณสมบัติ ต่าง ๆ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคเช่น ค่าโมเมนตัมและค่าพลังงานนั้น (นรา, 2553)

พิจารณาหาอนุพันธ์ย่อยเทียบ t จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (-i\omega)\psi_0 \exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\} \tag{10}$$

คูณ $i\hbar$ ตลอดสมการ (10) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (i\hbar)(-i\omega)\psi_0 \exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = (\hbar\omega)\psi_0 \exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\}$$

จากสมการ (9) จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = E\psi_0 \exp\left\{i\left(kx-\omega t\right)\right\} \tag{11}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = E\psi(x,t) \tag{12}$$

จากผลรวมของพลังงานอนุภาค $E = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$ จะได้ว่า

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\right]\psi(x,t) \tag{13}$$

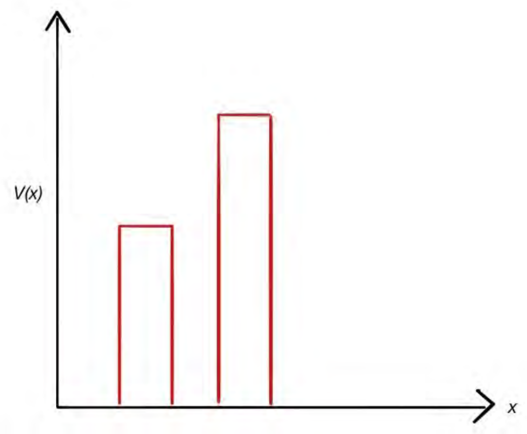
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t) \tag{14}$$

เรียก สมการ (14) ว่า **สมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลาในหนึ่งมิติ**

3.พลังงานศักย์ที่ใช้

3.1 พลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

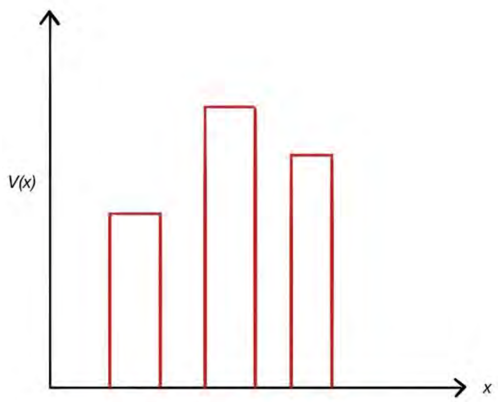
$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2\le x\le L_3\\ V_2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & x>L_4\end{cases}$$



รูปภาพที่ 3 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

3.2 พลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

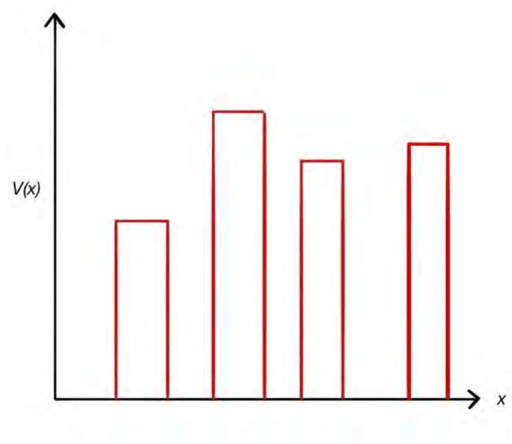
$$V(x)=\begin{cases}0, & x<L_1\\ V_1, & L_1\le x\le L_2\\ 0, & L_2\le x\le L_3\\ V_2, & L_3\le x\le L_4\\ 0, & L_4\le x\le L_5\\ V_3, & L_5\le x\le L_6\\ 0, & x>L_6\end{cases}$$



รูปภาพที่ 4 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

3.3 พลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

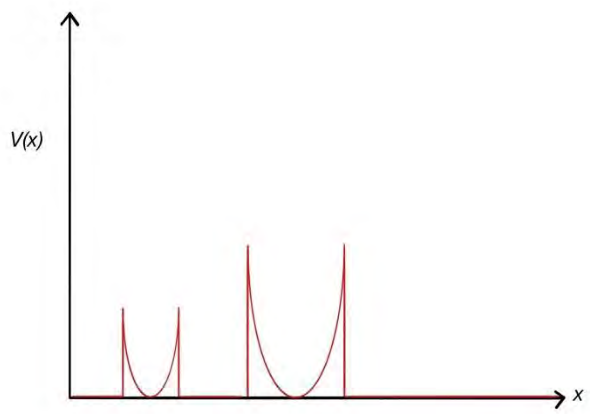
$$V(x)=\begin{cases} 0, & x<L_1 \\ V_1, & L_1 \le x \le L_2 \\ 0, & L_2 \le x \le L_3 \\ V_2, & L_3 \le x \le L_4 \\ 0, & L_4 \le x \le L_5 \\ V_3, & L_5 \le x \le L_6 \\ 0, & x>L_6 \\ \vdots & \vdots \\ V_n, & L_{k-1} \le x \le L_k \\ 0, & x>L_k \end{cases}$$



รูปภาพที่ 6 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าในกรณีทั่วไป

3.4 พลังงานศักย์แบบดับเบิลกำแพงพาราโบลิก

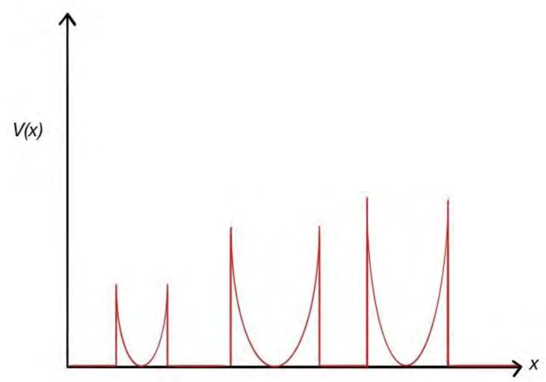
$$V(x)=\begin{cases} 0, & x<L_1 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2, & L_1\le x\le L_2 \\ 0, & L_2\le x\le L_3 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2, & L_3\le x\le L_4 \\ 0, & x>L_4 \end{cases}$$



รูปภาพที่ 7 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบดับเบิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

3.5 พลังงานศักย์แบบทริปเปิลกำแพงพาราโบลิก

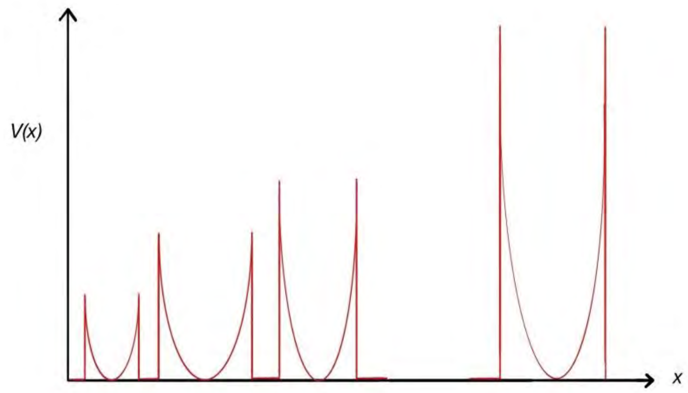
$$V(x)=\begin{cases} 0, & x<L_1 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2, & L_1\le x\le L_2 \\ 0, & L_2\le x\le L_3 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2, & L_3\le x\le L_4 \\ 0, & L_4\le x\le L_5 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_3)^2, & L_5\le x\le L_6 \\ 0, & x>L_6 \end{cases}$$



รูปภาพที่ 8 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบทริปเปิลสี่เหลี่ยมผืนผ้า

3.6 พลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

$$V(x)=\begin{cases} 0, & x<L_1 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_1)^2, & L_1\le x\le L_2 \\ 0, & L_2\le x\le L_3 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_2)^2, & L_3\le x\le L_4 \\ 0, & L_4\le x\le L_5 \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_3)^2, & L_5\le x\le L_6 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}ab^2(x-x_n)^2, & L_{k-1}\le x\le L_k \\ 0, & x>L_k \end{cases}$$



รูปภาพที่ 9 แสดงภาพพลังงานศักย์แบบกำแพงพาราโบลิกในกรณีทั่วไป

ประวัติผู้เขียน

นายเจริญศักดิ์ ยินดีเทศ

นิสิตภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ระดับการศึกษา

-จบการศึกษาระดับประถมศึกษาจากโรงเรียนเทศบาล 1 (บ้านชุมแสง)

-จบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนชุมแสงชนูทิศ