โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การวางนัยทั่วไปของปัญหาวันเกิด
A Generalization of Birthday Problem

ชื่อนิสิต นางสาวเพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์ 593 35380 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การวางนัยทั่วไปของปัญหาวันเกิด

นางสาวเพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2562

A Generalization of Birthday Problem

Miss Penpicha Settapong

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	การวางนัยทั่วไปของปัญหาวันเกิด
โดย	นางสาวเพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

. . . . หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

. . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี)

. . . . กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ยุวรีย์ พันธ์กล้า)

. . . . กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล)

เพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์: การวางนัยทั่วไปของปัญหาวันเกิด. (A GENERALIZATION OF BIRTHDAY PROBLEM) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก: รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี, 33 หน้า.

ในปี ค.ศ. 1939 Richard von Mises ได้ตั้งคำถามที่น่าสนใจว่า "จะต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อยกี่คนจึงจะมีโอกาสที่มีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 50%" จนทำให้เกิดคำถามทั่วไปที่ว่า "ในกลุ่มคน n คน ความน่าจะเป็น ที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันเป็นเท่าไร" ซึ่งคำถามดังกล่าวเรียกว่า "ปัญหาวันเกิด" จากนั้น ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านขยายปัญหาดังกล่าว โดยหาความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย m คนจากกลุ่มคน n คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $2 \leq m \leq 5$

ในโครงงานนี้ เราจะขยายปัญหาวันเกิด โดยหาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq m \leq n$ และประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ได้ด้วยการแจกแจงปัวซง

ภาควิชา . คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ . ลายมือชื่อนิสิต . . . . เพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์ . . . . .
สาขาวิชา . . คณิตศาสตร์ . . ลายมือชื่อ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน . . . .
ปีการศึกษา . . . . 2562 . . . .

5933538023 : MAJOR MATHEMATICS.

KEYWORDS: BIRTHDAY PROBLEM / BINOMIAL DISTRIBUTION / POISSON APPROXIMATION

PENPICHA SETTAPONG: A GENERALIZATION OF BIRTHDAY PROBLEM. ADVISOR: ASSOC. PROF.NATTAKARN CHAIDEE, Ph.D., 33 pp.

In 1939, Richard von Mises raised the interested question "how many people must be gathered before the probability of two people sharing a birthday exceeds 50 %" which leads to a general question "the probability that at least two people in a group of n people will have the same birthday". The question is called the "Birthday Problem". Then, many mathematicians generalized the problem to the case of at least m out of n people having the same birthday where $2 \leq m \leq 5$.

In this project, we will investigate the probability of at least m out of n people sharing a birthday where $2 \leq m \leq n$, and will approximate the probability by Poisson distribution.

Department . . Mathematics and Computer Science . . Student's Signature . . Penpicha Settapong . . .

Field of Study . . . Mathematics . . . Advisor's Signature . . . . . . N. Chaidee. . . . . .

Academic Year . . . . . . 2562 . . . . . .

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีด้วยความอนุเคราะห์และการช่วยเหลือของ รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ที่ได้นำหัวข้อเรื่องปัญหาวันเกิดนี้มาเป็นโครงงาน ตลอดจนให้คำปรึกษา ถ่ายทอดความรู้และประสบการณ์ ชี้แนะแนวทางการทำงาน เข้มงวดกวดขัน และเอาใจใส่มาโดยตลอด จนโครงงานนี้บรรลุตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ยุวรีย์ พันธ์กล้า และรองศาสตราจารย์ ดร.ศจี เพียรสกุล กรรมการสอบโครงงาน ผู้ให้คำแนะนำ แก้ไขปรับปรุงโครงงานจนมีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

เพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ในงานวิจัยของ Anirban DasGupta ([4]) ได้กล่าวไว้ว่า ในปี ค.ศ. 1932 Richard von Mises นักคณิตศาสตร์ชาวออสโตร-ฮังกาเรียน ได้ตั้งคำถามที่น่าสนใจว่า “จะต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อยกี่คนจึงจะมีโอกาสที่มีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 50%” โดยคำถามนี้ทำให้เกิดคำถามทั่วไปที่ว่า “ในกลุ่มคน n คน ความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันเป็นเท่าไร” ซึ่งคำถามดังกล่าวเรียกว่า “ปัญหาวันเกิด (Birthday Problem)”

จากปัญหาวันเกิดข้างต้น ได้มีนักคณิตศาสตร์คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งได้เท่ากับ

$$1 - \frac{365!}{(365-n)!(365)^n}$$

จากนั้นในปี ค.ศ. 2005 Anirban DasGupta ([4]) ได้ขยายปัญหานี้ โดยหาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คนจะมีคนอย่างน้อย 3 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นได้เท่ากับ

$$1 - \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!(n-2a_1)!(365-n+a_1)!(2!)^{a_1}(365)^n}$$

เมื่อ $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริง x

ในโครงงานนี้ กำหนดให้ $(-l)! = \infty$ เมื่อ l เป็นจำนวนนับใด ๆ

ต่อมาในปี พ.ศ. 2558 พีรวัส วีระวรรณและณัฐกาญจน์ ใจดี ([2]) ได้ขยายปัญหาดังกล่าวไปสู่กรณีที่ในกลุ่มคน n คนจะมีคนอย่างน้อย 4 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นได้เท่ากับ

$$1 - \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-3a_1}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!a_2!(n-3a_1-2a_2)!(365-n+2a_1+a_2)!(2!)^{a_2}(3!)^{a_1}(365)^n}$$

ในปี พ.ศ. 2561 อัญชิสา ซุ่นสั้นและณัฐกาญจน์ ใจดี ([3]) ได้ขยายปัญหานี้ไปสู่กรณีที่ในกลุ่มคน n คนจะมีคนอย่างน้อย 5 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นได้เท่ากับ

$$1-\left[\sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n}{4}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-4a_1}{3}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-4a_1-3a_2}{2}\rfloor}\frac{365!n!}{a_1!a_2!a_3!(n-4a_1-3a_2-2a_3)!(365-n+3a_1+2a_2+a_3)!(4!)^{a_1}(3!)^{a_2}(2!)^{a_3}(365)^n}\right]$$

ในโครงงานนี้จะขยายปัญหาวันเกิดไปสู่กรณีที่ในกลุ่มคน n คนจะมีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $3 \le m \le n$ ซึ่งคำนวณค่าความน่าจะเป็นได้เท่ากับ

$$1-\left[\sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n}{m-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-(m-1)a_1}{m-2}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2}{m-3}\rfloor}\cdots\sum_{a_{m-2}=0}^{\lfloor\frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2-\cdots-(m-(m-3))a_{m-3}}{2}\rfloor}\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{m-2}[(m-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{m-2}a_i!\left[n-\sum_{i=1}^{m-2}(m-i)a_i\right]!\left[365-n+\sum_{i=1}^{m-2}a_i(m-i-1)\right]!(365)^n}\right]$$

ซึ่งจะพิสูจน์ไว้ในบทที่ 3

สังเกตว่าค่าความน่าจะเป็นที่ได้ข้างต้นค่อนข้างยุ่งยากในการคำนวณจึงได้มีการประมาณค่าความน่าจะเป็นดังกล่าว ด้วยการแจกแจงปัวซง ซึ่งจะกล่าวไว้ในบทที่ 4

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้ เราจะกล่าวถึงคณิตศาสตร์เชิงการจัด และทฤษฎีความน่าจะเป็นพื้นฐาน ซึ่งใช้ในการทำโครงงานนี้

2.1 คณิตศาสตร์เชิงการจัด

คณิตศาสตร์เชิงการจัดกล่าวถึงการศึกษาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วยเซตนับได้ (coutable set) โดยศึกษาในแง่ต่าง ๆ เช่น การแจงนับ (enumeration) การจัดหมู่ (combination) การเรียงสับเปลี่ยน (permutation)

2.1.1 กฎการนับเบื้องต้น (Principle of Counting)

กฎการนับเบื้องต้นที่จะกล่าวถึงมีด้วยกัน 2 แบบคือ กฎการบวกและกฎการคูณ

กฎการบวก (Addition Principle)

ถ้าต้องการทำงานอย่างหนึ่ง สามารถแบ่งได้เป็น k กรณี ซึ่งแต่ละกรณีจะไม่สามารถทำงานพร้อมกันได้ ถ้ากรณีที่ 1 สามารถเลือกทำงานได้ n_1 วิธี กรณีที่ 2 สามารถเลือกทำงานได้ n_2 วิธี เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกรณีที่ k สามารถเลือกทำงานได้ n_k วิธี จะมีวิธีในการทำงานจนเสร็จทั้งหมดเท่ากับ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

ตัวอย่าง 2.1 หนังสือกองหนึ่งมีหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 5 เล่ม หนังสือเคมีที่แตกต่างกัน 4 เล่ม และหนังสือภาษาไทยที่แตกต่างกัน 3 เล่ม จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบหนังสือ 1 เล่มจากหนังสือกองนี้
วิธีทำ เนื่องจากมีหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 5 เล่ม หนังสือเคมีที่แตกต่างกัน 4 เล่ม และหนังสือภาษาไทยที่แตกต่างกัน 3 เล่ม ดังนั้น จำนวนวิธีการหยิบหนังสือ 1 เล่มจากหนังสือกองนี้ เท่ากับ $5 + 4 + 3 = 12$ วิธี

กฎการคูณ (Multiplication Principle)

ถ้างานหนึ่งกระทำได้ใน k ขั้นตอนติดกันโดย
ขั้นตอนที่ 1 สามารถกระทำได้ใน n_1 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 สามารถกระทำได้ใน n_2 วิธี
$\vdots$ $\vdots$
ขั้นตอนที่ k สามารถกระทำได้ใน n_k วิธี

แล้ว จำนวนวิธีทั้งหมดที่ต่างกันที่งานสามารถกระทำได้คือ $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ วิธี

ตัวอย่าง 2.2 บริษัทผลิตเสื้อผ้าสำเร็จรูปแห่งหนึ่งผลิตเสื้อ 6 แบบ กางเกง 5 แบบ และเนคไท 4 แบบ ถ้าจะจัดแต่งตัวให้กับหุ่นเพื่อนำไปโชว์หน้าร้าน จะแต่งเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ทั้งหมดกี่ชุด
วิธีทำ เนื่องจากเราสามารถเลือกใส่เสื้อได้ 6 แบบ กางเกง 5 แบบ และเนคไท 4 แบบ ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะแต่งตัวให้กับหุ่นเป็นชุดต่าง ๆ กันได้ทั้งหมด $6 \times 5 \times 4 = 120$ วิธี

2.1.2 การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

บทนิยาม 2.1 *การเรียงสับเปลี่ยน (permutation)* คือการนำสิ่งของที่มีลักษณะที่แตกต่างกันทั้งหมดมาจัดเรียงสับเปลี่ยนโดยถือตำแหน่งหรือลำดับก่อนหลังเป็นสำคัญ

ทฤษฎีบท 2.1 ให้ $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $n \geq r$ กำหนดให้ $P(n,r)$ คือ จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยนำมาจัดครั้งละ r สิ่ง จะได้ว่า

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 4 ตัวจากคำว่า PRODUCT โดยไม่คำนึงถึงความหมาย
วิธีทำ เนื่องจากคำว่า PRODUCT มีตัวอักษรทั้งหมด 7 ตัวที่แตกต่างกันทั้งหมด ทำให้ได้ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร 4 ตัว จากคำว่า PRODUCT เท่ากับ

$$P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840 \text{ วิธี}$$

2.1.3 การจัดหมู่ (Combination)

บทนิยาม 2.2 *การจัดหมู่ (combination)* คือ วิธีการจัดสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมดออกเป็นกลุ่มหรือหมู่ โดยไม่คำนึงถึงลำดับ

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $n \geq r$ กำหนดให้ $C(n,r)$ คือ จำนวนวิธีการจัดหมู่ของสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยเลือกออกมา r สิ่ง จะได้ว่า

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 2.4 นาย ก มีหนังสือที่แตกต่างกันอยู่ 10 เล่ม นาย ข ต้องการยืมไปอ่าน 3 เล่ม นาย ข สามารถเลือกยืมได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ เพราะว่าการยืมหนังสือ 3 เล่มจากหนังสือ 10 เล่ม คือการเลือกของ 3 สิ่งจากทั้งหมด 10 สิ่ง โดยไม่คำนึงถึงลำดับ ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกเท่ากับ

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ วิธี}$$

2.2 ทฤษฎีความน่าจะเป็น

ในทฤษฎีความน่าจะเป็น เราสนใจการทดลองที่ไม่สามารถทราบได้ว่าผลการทดลองเป็นอย่างไรจนกว่าจะทดลองเสร็จสิ้น เช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ซึ่งเราทราบเพียงว่าผลลัพธ์ที่เป็นไปได้คือลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต่เราจะทราบว่าขึ้น แต้มเท่าไหร่เมื่อทอดลูกเต๋าเสร็จสิ้นแล้วเท่านั้น เราจะเรียกการทดลองลักษณะนี้ว่า *การทดลองแบบสุ่ม (random experimen)* และเราจะเรียกเซตของผลการทดลองสุ่มทั้งหมดที่เป็นไปได้ว่า *ปริภูมิตัวอย่าง (sample space)*

2.2.1 ความน่าจะเป็น (Probability)

บทนิยาม 2.3 ให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง เราจะเรียกเซตย่อยของ Ω ว่า *เหตุการณ์ (event)*

บทนิยาม 2.4 ให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่างและ $P : \wp(\Omega) \to [0,1]$ โดยที่

1. $P(\Omega) = 1$
2. ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเหตุการณ์ โดยที่ $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$ แล้ว

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

เราจะเรียก P ว่า *เมเชอร์ความน่าจะเป็น (probability measure)*

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่างและ P เป็นเมเชอร์ความน่าจะเป็น จะได้ว่า

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A) = 1 - P(A^c)$ เมื่อ A คือเหตุการณ์ใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.4 สำหรับ $N \in \mathbb{N}$ ให้ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างและฟังก์ชัน $P : \wp(\Omega) \to [0,1]$ ซึ่งกำหนดโดย

$$P(A) = \frac{|A|}{N} \quad \text{เมื่อ } A \subseteq \Omega$$

โดยที่ $|A|$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A จะได้ว่า P เป็นเมเชอร์ความน่าจะเป็น

บทนิยาม 2.5 เหตุการณ์ A และ B จะเป็น *อิสระต่อกัน (independent)* ก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

2.2.2 ตัวแปรสุ่ม (Random Variable)

บทนิยาม 2.6 ให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง ถ้า X เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $X : \Omega \to \mathbb{R}$ แล้วเราจะกล่าวว่า X *เป็นตัวแปรสุ่ม (random variable)*

เราจะเขียน $P(X = x)$ แทน $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\})$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวแปรสุ่มแบ่งเป็น 2 ชนิดคือ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง และตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งเราจะศึกษาเพียงตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่ใช้ในโครงงานนี้เท่านั้น ซึ่งได้แก่ ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี ตัวแปรสุ่มทวินาม และตัวแปรสุ่มปัวซง

บทนิยาม 2.7 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่ง

$$P(X = 0) = 1 - p \text{ และ } P(X = 1) = p$$

เมื่อ p เป็นค่าคงตัวโดยที่ $0 < p < 1$ เราจะเรียก X ว่า *ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี (Bernoulli random variable)* ที่มีพารามิเตอร์ p โดยเขียนแทนด้วย $X \sim Ber(p)$

ตัวอย่าง 2.5 ในการทดลองทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 2
วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนครั้งที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 2 ดังนั้น X มีค่าได้เพียง 2 ค่า คือ 0 และ 1 และในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม 2 หนึ่งครั้งมีค่าเท่ากับ $P(X = 1) = \frac{1}{6}$ ดังนั้น $X \sim Ber(\frac{1}{6})$

บทนิยาม 2.8 ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่มีพารามิเตอร์ p และเป็นอิสระต่อกัน เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ว่า *ตัวแปรสุ่มทวินาม (binomial random variable)* ที่มีพารามิเตอร์ n และ p โดยเขียนแทนด้วย $X \sim B(n, p)$ และ

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ เมื่อ } x = 0, 1, \ldots, n$$

ตัวอย่าง 2.6 ทำการทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัว 2 ครั้ง
วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนครั้งที่เหรียญจะขึ้นหัว ดังนั้น $X \sim B(3, \frac{1}{2})$ ทำให้ได้ว่า ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัว 2 ครั้งเท่ากับ $P(X = 2) = \binom{3}{2}(\frac{1}{2})^2(1 - \frac{1}{2})^{3-2} = \frac{3}{8}$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงตัวแปรสุ่มปัวซง ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่แสดงจำนวนครั้งของความสำเร็จในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่งที่กำหนดหรือในอาณาบริเวณใดบริเวณหนึ่ง ยกตัวอย่างเช่น จำนวนลูกค้าที่มาใช้บริการที่ธนาคารแห่งหนึ่งใน ช่วง 10:00 - 12:00 น. จำนวนครั้งที่เกิดอุบัติเหตุ ณ สี่แยกแห่งหนึ่งใน 1 สัปดาห์ นอกจากนี้ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มปัวซงก็คือพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มปัวซงนั่นเอง

บทนิยาม 2.9 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่ง

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad \text{เมื่อ } x = 0, 1, 2, \ldots$$

โดยที่ λ คือค่าคงตัวที่แสดงค่าเฉลี่ยของจำนวนครั้งของความสำเร็จในขอบเขตที่กำหนดซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ เราจะเรียก X ว่า *ตัวแปรสุ่มปัวซง (Poisson random variable)* ที่มีพารามิเตอร์ λ โดยเขียนแทนด้วย $X \sim Poi(\lambda)$

ตัวอย่าง 2.7 จากการสำรวจอุบัติเหตุที่เกิดขึ้นบนถนนแห่งหนึ่งพบว่า จะมีอุบัติเหตุโดยเฉลี่ย 4 ครั้งในหนึ่งสัปดาห์ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุบนถนนสายนี้ 6 ครั้ง ในหนึ่งสัปดาห์
วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนครั้งที่เกิดอุบัติเหตุบนถนนสายนี้ในสัปดาห์หนึ่ง ดังนั้น $X \sim Poi(4)$ จะได้ว่า
ความน่าจะเป็นที่จะเกิดอุบัติเหตุบนถนนสายนี้ 6 ครั้ง เท่ากับ $P(X = 6) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = 0.1042$

ข้อสังเกต 2.1 การแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ np เมื่อ $n \to \infty$ และ $p \to 0$

ตัวอย่าง 2.8 สมมติให้ความน่าจะเป็นที่คนไทยจะติดเชื้อ Covid-19 เท่ากับ 0.0008 และการติดเชื้อ Covid-19 ของคนไทยเป็นอิสระต่อกัน ถ้าสุ่มคนไทยมา 10,000 คน จงประมาณค่าความน่าจะเป็นที่จะตรวจพบคนที่ติดเชื้อ Covid-19 มากกว่า 4 คนแต่ไม่เกิน 8 คน
วิธีทำ ให้ X แทนจำนวนคนที่ตรวจพบเชื้อ Covid-19 จากคนไทยที่สุ่มมา 10,000 คน ดังนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ $n = 10,000$ และ $p = 0.0008$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} P(\text{ตรวจพบคนที่ติดเชื้อ Covid-19 มากกว่า 4 คนแต่ไม่เกิน 8 คน}) &= P(4 < X \leq 8) \\ &= \sum_{x=5}^{8} \binom{10000}{x} (0.0008)^x (0.9992)^{10000-x} \\ &\approx 0.4930 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า การคำนวณค่าโดยตรงทำได้ไม่สะดวกนัก เราจึงสามารถประมาณค่าการแจกแจงของ X ด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = np = (10000)(0.0008) = 8$ นั่นคือ
สำหรับ $x = 0, 1, \ldots$

$$P(X = x) \approx \frac{e^{-8}8^x}{x!}$$

ดังนั้น

$$P(4 < X \leq 8) \approx \sum_{x=5}^{8} \frac{e^{-8}8^x}{x!} = 0.4929$$

บทที่ 3

ปัญหาวันเกิด

ในปี ค.ศ. 1939 Richard von Mises นักคณิตศาสตร์ชาวออสโตร-ฮังกาเรียน ได้ตั้งคำถามที่น่าสนใจว่า “จะต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อยกี่คนจึงจะมีโอกาสที่มีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 50%” โดยคำถามนี้ทำให้เกิดคำถามทั่วไปที่ว่า “ในกลุ่มคน n คน ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันเป็นเท่าไร” ซึ่งคำถามดังกล่าวเรียกว่า “ปัญหาวันเกิด (Birthday Problem)”

ในบทนี้ เราจะขยายปัญหาวันเกิดข้างต้น โดยหาความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกันโดยที่ $2 \leq m \leq n$

3.1 ปัญหาวันเกิดกรณีที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $m = 2, 3, 4, 5$

สำหรับจำนวนนับ n และ m ใด ๆ กำหนดให้ $A_{m,n}$ แทนเหตุการณ์ที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน โดยที่ $2 \leq m \leq n$

จากปัญหาวันเกิดข้างต้น ได้มีนักคณิตศาสตร์คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ n แทนจำนวนนับซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน เท่ากับ

$$P(A_{2,n}) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!(365)^n}$$

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าของ $P(A_{2,n})$ เมื่อ n มีค่าต่าง ๆ

n	10	23	50	100	366
$P(A_{2,n})$	0.117	0.507	0.970	0.999	1

จากตารางเห็นได้ว่า ต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อย 23 คน จึงจะมีโอกาสที่จะมีคนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 2 คนมากกว่า 50%

ในปี ค.ศ. 2005 Anirban DasGupta ([4]) ได้มีการขยายปัญหานี้โดยหาความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย 3 คนเกิดวัน และเดือนเดียวกัน ได้ผลลัพธ์ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.2 ([4]) ให้ n แทนจำนวนนับซึ่ง $n \geq 3$ จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย 3 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน เท่ากับ

$$P(A_{3,n}) = 1 - \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!(n-2a_1)!(365-n+2a_1+a_2)!(2!)^{a_1}(365)^n}$$

เมื่อ $\lfloor x \rfloor$ แทนจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนจริง x

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าของ $P(A_{3,n})$ เมื่อ n มีค่าต่าง ๆ

n	20	60	88	200	731
$P(A_{3,n})$	0.008	0.207	0.551	0.999	1

จากตารางเห็นได้ว่า ต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อย 88 คน จึงจะมีโอกาสที่จะมีคนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 3 คน มากกว่า 50%

ต่อมาในปี พ.ศ. 2548 พีรวัส วีระวรรณและณัฐกาญจน์ ใจดี ([2]) ได้ขยายปัญหานี้ไปสู่กรณีที่มีคนอย่างน้อย 4 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3 ([2]) ให้ n แทนจำนวนนับซึ่ง $n \geq 4$ จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย 4 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน เท่ากับ

$$P(A_{4,n}) = 1 - \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-3a_1}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!a_2!(n-3a_1-2a_2)!(365-n+a_1)!(2!)^{a_2}(3!)^{a_1}(365)^n}$$

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าของ $P(A_{4,n})$ เมื่อ n มีค่าต่าง ๆ

n	50	100	187	350	1096
$P(A_{4,n})$	0.004	0.064	0.503	0.999	1

จากตารางเห็นได้ว่า ต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อย 187 คน จึงจะมีโอกาสที่จะมีคนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 4 คน มากกว่า 50%

ในปี พ.ศ. 2561 อัญชิสา ซุ่นสั้นและณัฐกาญจน์ ใจดี ([3]) ได้ขยายปัญหานี้ไปสู่กรณีที่มีคนอย่างน้อย 5 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4 ([3]) ให้ n แทนจำนวนนับซึ่ง $n \geq 5$ จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย 5 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน เท่ากับ

$$P(A_{5,n}) = 1 - \left[\sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-4a_1}{3} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-4a_1-3a_2}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!a_2!a_3!(n-4a_1-3a_2-2a_3)!(365-n+3a_1+2a_2+a_3)!(4!)^{a_1}(3!)^{a_2}(2!)^{a_3}(365)^n} \right]$$

ตารางต่อไปนี้แสดงค่าของ $P(A_{5,n})$ เมื่อ n มีค่าต่าง ๆ

n	80	312	313	550	1461
$P(A_{5,n})$	0.008	0.499	0.511	0.999	1

จากตารางเห็นได้ว่า เราต้องใช้กลุ่มคนอย่างน้อย 313 คน จึงจะมีโอกาสที่จะมีคนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 5 คน มากกว่า 50%

3.2 ปัญหาวันเกิดกรณีที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $3 \leq m \leq n$

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้มีการศึกษาปัญหาหาความน่าจะเป็นกรณีที่มีคนอย่างน้อย 2, 3, 4 และ 5 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน ในหัวข้อนี้เราจะขยายปัญหาดังกล่าวไปสู่กรณีที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน โดยที่ $3 \leq m \leq n$

ในการหาความน่าจะเป็นดังกล่าว เราจะเริ่มจากการหา $P(X_{m,n} = 0)$ เมื่อ $X_{m,n}$ แทนจำนวนกลุ่มคนที่มีคน m คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับใด ๆ และ $3 \leq m \leq n$ ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ n แทนจำนวนนับซึ่ง $n \geq 3$ จะได้ว่า ความน่าจะเป็นที่ไม่มีกลุ่มคน m คนใด ๆ เกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน เมื่อ $3 \leq m \leq n$ เท่ากับ

$$P(X_{m,n}=0) = \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1}{m-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2}{m-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{m-2}=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2-\cdots-(m-(m-3))a_{m-3}}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{m-2}[(m-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{m-2} a_i! \left[n - \sum_{i=1}^{m-2}(m-i)a_i\right]! \left[365-n+\sum_{i=1}^{m-2} a_i(m-i-1)\right]! (365)^n}$$

พิสูจน์

เราจะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ $Q_n(m)$ แทนข้อความ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \geq 3$ จะได้ว่า

$$P(X_{m,n}=0) = \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1}{m-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2}{m-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{m-2}=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2-\cdots-(m-(m-3))a_{m-3}}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{m-2}[(m-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{m-2} a_i! \left[n - \sum_{i=1}^{m-2}(m-i)a_i\right]! \left[365-n+\sum_{i=1}^{m-2} a_i(m-i-1)\right]! (365)^n}$$

เมื่อ m คือจำนวนนับซึ่ง $3 \leq m \leq n$

ขั้นฐาน

เนื่องจาก $X_{3,n}$ แทนจำนวนกลุ่มคนที่มีคน 3 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(X_{3,n}=0) &= P(\text{ ไม่มีกลุ่มคนที่มีคน 3 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด } n \text{ คน }) \\ &= 1 - P(\text{ มีกลุ่มคนที่มีคนอย่างน้อย 3 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด } n \text{ คน}) \\ &= 1 - P(A_{3,n}) \\ &= 1 - \left[1 - \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!(n-2a_1)!(365-n+a_1)(2!)^{a_1}(365)^n}\right] \\ &= \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{a_1!(n-2a_1)!(365-n+a_1)(2!)^{a_1}(365)^n} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $Q_n(3)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย

ให้ k เป็นจำนวนนับซึ่ง $k \geq 3$ สมมติ $Q_n(k)$ เป็นจริง จะแสดงว่า $Q_n(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก $X_{k+1,n} = 0$ คือเหตุการณ์ที่ไม่มี $k+1$ คนใด ๆ ในกลุ่มคน n คนที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน ดังนั้น

$$P(X_{k+1,n} = 0) = P(X_{k,n} = 0) + P(X_{k,n} = 1) + \cdots + P\left(X_{k,n} = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right) \tag{3.1}$$

พิจารณาเหตุการณ์ $X_{k,n} = 0$ โดยสมมติฐานขั้นอุปนัย จะได้ว่า

$$P(X_{k,n} = 0) = \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-(k-1)a_1}{k-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor \frac{n-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{k-2} a_i! \left[n - \sum_{i=1}^{k-2}(m-i)a_i\right]! \left[365 - n + \sum_{i=1}^{k-2} a_i(k-i-1)\right]! (365)^n}$$

พิจารณาเหตุการณ์ $X_{k,n} = 1$ ซึ่งคือเหตุการณ์ที่มีกลุ่มคนที่มีคน k คนเกิดวันและเดือนเดียวกันเพียง 1 กลุ่ม ดังนั้นจะไม่มีคน k คนใด ๆ ใน $n-k$ คนที่เหลือที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน เราจึงเลือกคนมา k คนจาก n คน และเลือกวันมา 1 วันจาก 365 วัน ซึ่งเป็นวันที่คน k คนนี้เกิด จากสมมติฐานขั้นอุปนัย ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
&P(X_{k,n} = 1) \\
&= \binom{n}{k}\binom{365}{1}\frac{1}{(365)^k} \cdot P(X_{k,n-k} = 0) \\
&= \binom{n}{k}\binom{365}{1}\frac{1}{(365)^k} \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n-k}{k-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-k-(k-1)a_1}{k-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-k-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor \frac{n-k-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2} \rfloor} \\
&\frac{364!(n-k)!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{k-2} a_i! \left[n-k - \sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\right]! \left[364 - (n-k) + \sum_{i=1}^{k-2} a_i(k-i-1)\right]! (365)^{n-k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{365!}{364!1!} \cdot \frac{1}{365^k} \sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n-k}{k-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-k-(k-1)a_1}{k-2} \rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor \frac{n-k-(k-1)a_1-(k-1)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2} \rfloor} \\
&\frac{364!(n-k)!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{k-2} a_i! \left[n-k - \sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\right]! \left[364 - (n-k) + \sum_{i=1}^{k-2} a_i(k-i-1)\right]! (365)^{n-k}}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-k}{k-1}\rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-k-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-k-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3}\rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-k-(k-1)a_1-(k-1)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor}$$
$$\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\Big[n-k-\sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\Big]!\Big[364-(n-k)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\Big]!(365)^n k!1!}$$

พิจารณาเหตุการณ์ $X_{k,n} = 2$ ซึ่งคือเหตุการณ์ที่มีกลุ่มคนที่มีคน k คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน 2 กลุ่ม ดังนั้นจะไม่มีคน k คนใด ๆ ใน $n-2k$ คนที่เหลือที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน เราจึงเลือกคนมา k คนจาก n คน และเลือกวันมา 1 วันจาก 365 วัน ซึ่งเป็นวันที่คน k คนนี้เกิด จากนั้นเลือกคนมาอีก k คนจาก $n-k$ คน พร้อมเลือกวันที่ k คนนี้เกิดมา 1 วันจาก 364 วันที่เหลือ จากสมมติฐานขั้นอุปนัย ทำให้ได้ว่า

$$P(X_{k,n} = 2)$$
$$= \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{365}{2}\frac{1}{(365)^{2k}}\cdot P(X_{k,n-2k}=0)$$
$$= \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{365}{2}\frac{1}{(365)^{2k}} \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-2k}{k-1}\rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor}$$
$$\frac{363!(n-2k)!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\Big[n-2k-\sum_{i=1}^{k-2}(z-i)a_i\Big]!\Big[363-(n-2k)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\Big]!(365)^{n-2k}}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-2k)!k!}\cdot\frac{365!}{363!2!}\cdot\frac{1}{(365)^{2k}} \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-2k}{k-1}\rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1-(k-1)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor}$$
$$\frac{363!(n-2k)!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\Big[n-2k-\sum_{i=1}^{k-2}(z-i)a_i\Big]!\Big[363-(n-2k)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\Big]!(365)^{n-2k}}$$

$$= \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-2k}{k-1}\rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3}\rfloor} \cdots \sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor}$$
$$\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\Big[n-2k-\sum_{i=1}^{k-2}(z-i)a_i\Big]!\Big[363-(n-2k)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\Big]!(365)^n(k!)^2 2!}$$

พิจารณาเหตุการณ์ $X_{k,n} = s$ ซึ่งคือเหตุการณ์ที่มีกลุ่มคนที่มีคน k คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน s กลุ่ม ดังนั้นจะไม่มีคน k คนใด ๆ ใน $n-sk$ คนที่เหลือที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน เราจึงเลือกคนมา k คนจาก n คน และเลือกวันมา 1 วันจาก 365 วัน ซึ่งเป็นวันที่คน k คนนี้เกิด จากนั้นเลือกคนมาอีก k คนจาก $n-k$ คน พร้อมเลือกวันที่ k คนนี้เกิดมา 1 วันจาก 364 วันที่เหลือ เลือกทำนองเดียวกันไปจนถึง เลือกคนมา k คนจาก $n-(s-1)k$ คน พร้อมเลือกวันมา 1 วันจาก $365-s$ วันที่เหลือ จากสมมติฐานขั้นอุปนัย ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&P(X_{k,n} = s) \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots\binom{n-(s-1)k}{k}\binom{365}{s}\cdot\frac{1}{(365)^{sk}}\cdot P(X_{k,n-sk}=0) \\
&= \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots\binom{n-(s-1)k}{k}\binom{365}{s}\cdot\frac{1}{(365)^{sk}} \\
&\times \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-sk}{k-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor} \\
&\frac{(365-s)!(n-sk)!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\left[n-sk-\sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\right]!\left[(365-s)-(n-sk)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\right]!(365)^{n-sk}} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-2k)!k!}\cdots\frac{(n-(s-1)k)!}{(n-sk)!k!}\cdot\frac{365!}{(365-s)!s!} \\
&\times \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-sk}{k-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-2k-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor} \\
&\frac{(365-s)!(n-sk)!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\left[n-sk-\sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\right]!\left[(365-s)-(n-sk)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\right]!(365)^{n}} \\
&= \sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-sk}{k-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1-(k-2)a_2}{k-3}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-sk-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor} \\
&\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\left[n-sk-\sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\right]!\left[(365-s)-(n-sk)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\right]!(365)^{n}(k!)^s s!}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

โดย (3.1) และ (3.2) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&P(X_{k+1,n}=0)\\
&=P(X_{k,n}=0)+P(X_{k,n}=1)+\cdots+P\left(X_{k,n}=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)\\
&=\sum_{a_0=0}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}P(X_{k,n}=a_0)
\end{aligned}
$$

$$
=\sum_{a_0=0}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-ka_0}{k-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-ka_0-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-ka_0-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor}\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-2}a_i!\left[n-ka_0-\sum_{i=1}^{k-2}(k-i)a_i\right]!\left[(365-a_0)-(n-ka_0)+\sum_{i=1}^{k-2}a_i(k-i-1)\right]!(365)^n(k!)^{a_0}a_0!}
$$

$$
=\sum_{a_0\;=\;0}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n-ka_0}{k-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-a_0k-(k-1)a_1}{k-2}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-2}=0}^{\lfloor\frac{n-ka_0-(k-1)a_1-(k-2)a_2-\cdots-(k-(k-3))a_{k-3}}{2}\rfloor}\frac{365!n!}{\prod_{i=0}^{k-2}[(k-i)!]^{a_i}\prod_{i=0}^{k-2}a_i!\left[n-\sum_{i=0}^{k-2}(k-i)a_i\right]!\left[365-n+\sum_{i=0}^{k-2}a_i(k-i-1)\right]!(365)^n}
$$

$$
=\sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-ka_1}{k-1}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-ka_1-(k-1)a_2}{k-2}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-1}=0}^{\lfloor\frac{n-ka_1-(k-1)a_2-(k-2)a_3-\cdots-(k-(k-3))a_{k-2}}{2}\rfloor}\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k-1}[(k-(i-1))!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k-1}a_i!\left[n-\sum_{i=1}^{k-1}(k-(i-1))a_i\right]!\left[365-n+\sum_{i=1}^{k-1}a_i(k-(i-1)-1)\right]!(365)^n}
$$

$$
=\sum_{a_1=0}^{\lfloor\frac{n}{k+1-1}\rfloor}\sum_{a_2=0}^{\lfloor\frac{n-(k+1-1)a_1}{k+1-2}\rfloor}\sum_{a_3=0}^{\lfloor\frac{n-a_1(k+1-1)-(k+1-2)a_2}{k+1-3}\rfloor}\cdots\sum_{a_{k-1}=0}^{\lfloor\frac{n-(k+1-1)a_1-(k+1-2)a_2-\cdots-((k+1)-(k+1-3))a_{k+1-3}}{2}\rfloor}\frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{k+1-2}[(k+1-i)!]^{a_i}\prod_{i=1}^{k+1-2}a_i!\left[n-\sum_{i=1}^{k+1-2}(k+1-i)a_i\right]!\left[365-n+\sum_{i=1}^{k-1}a_i(k+1-i-1)\right]!(365)^n}
$$

นั่นคือ $Q_n(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริง □

ในทฤษฎีบทก่อนหน้าเราได้หาความน่าจะเป็นที่ไม่มีกลุ่มคน m คนใด ๆ เกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน โดยทฤษฎีบทดังกล่าวช่วยในการหาค่าความความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ซึ่งเป็นทฤษฎีบทหลักของโครงงาน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6 ความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน จากกลุ่มคน n คน เมื่อ n และ m คือ จำนวนนับใด ๆ และ $3 \leq m \leq n$ จะได้ว่า

$$P(A_{m,n}) = 1 - \left[\sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1}{m-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2}{m-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{m-2}=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2-\cdots-(m-(m-3))a_{m-3}}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{m-2} [(m-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{m-2} a_i! \left[n - \sum_{i=1}^{m-2}(m-i)a_i\right]! \left[365 - n + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(m-i-1)\right]! (365)^n} \right]$$

พิสูจน์

เนื่องจาก $A_{m,n}$ แทนเหตุการณ์ที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน ดังนั้น $A^c_{m,n}$ คือเหตุการณ์ที่มีคนในกลุ่มอย่างมาก $m-1$ คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน นั่นคือไม่มีกลุ่มคน m คนใด ๆ จากคนทั้งหมด n คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน หรือเท่ากับเหตุการณ์ $X_{m,n} = 0$ กล่าวคือ

$$P(A^c_{m,n}) = P(X_{m,n} = 0)$$

โดยทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(A_{m,n}) &= 1 - P(A^c_{m,n}) \\ &= 1 - P(X_{m,n} = 0) \\ &= 1 - \left[\sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-a_1(m-1)}{m-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-a_1(m-1)-(m-2)a_2}{m-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{m-2}=0}^{\lfloor \frac{n-a_1(m-1)-(m-2)a_2-(m-3)a_3-\cdots-((m-1)-(m-4))a_{m-3}}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{m-2} [(m-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{m-2} a_i! \left[n - \sum_{i=1}^{m-2}(m-i)a_i\right]! \left[365 - n + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(m-i-1)\right]! (365)^n} \right] \end{aligned}$$

□

บทที่ 4

การประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยการแจกแจงปัวซง

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาการหาค่าความน่าจะเป็นของปัญหาวันเกิดกรณีมีคนอย่างน้อย 2, 3, 4 และ 5 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน และได้ขยายปัญหาไปสู่กรณีที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $3 \leq m \leq n$ ซึ่งได้ความน่าจะเป็นคือ

$$P(A_{m,n}) = 1 - \left[\sum_{a_1=0}^{\lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor} \sum_{a_2=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1}{m-2} \rfloor} \sum_{a_3=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2}{m-3} \rfloor} \cdots \sum_{a_{m-2}=0}^{\lfloor \frac{n-(m-1)a_1-(m-2)a_2-\cdots-(m-(m-3))a_{m-3}}{2} \rfloor} \frac{365!n!}{\prod_{i=1}^{m-2} [(m-i)!]^{a_i} \prod_{i=1}^{m-2} a_i! \left[n - \sum_{i=1}^{m-2} (m-i)a_i\right]! \left[365 - n + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(m-i-1)\right]! (365)^n} \right]$$

จากความน่าจะเป็นข้างต้น จะเห็นได้ว่าการคำนวณนั้นค่อนข้างซับซ้อน ดังนั้นเราจะประมาณค่าความน่าจะเป็นดังกล่าวเพื่อให้สะดวกต่อการหาค่า ซึ่งเราจะใช้การประมาณค่าด้วยการแจกแจงปัวซง

4.1 การประมาณค่าความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $m = 2, 3, 4, 5$

ในปี ค.ศ. 2001 Byron Schmuland ([5]) ได้ให้แนวคิดในการประมาณค่าความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันด้วยการแจกแจงปัวซง ดังนี้

สำหรับกลุ่มคน n คน ทำการสุ่มเลือกคนมา 2 คน โดยจะมีวิธีการสุ่มทั้งหมด $\binom{n}{2}$ วิธี

ให้ Y_i เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่ง

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อคน 2 คนที่สุ่มได้ในครั้งที่ } i \text{ เกิดวันและเดือนเดียวกัน} \\ 0 & \text{เมื่อคน 2 คนที่สุ่มได้ในครั้งที่ } i \text{ ไม่ได้เกิดวันและเดือนเดียวกัน} \end{cases}$$

เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$

พิจารณาเหตุการณ์ที่ $Y_i = 1$ นั่นคือ คน 2 ที่สุ่มเลือกมาเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยคนแรกจะเลือกเกิดได้ 365 วัน และคนที่ 2 เลือกได้เพียง 1 วัน ซึ่งเป็นวันเดียวกับคนแรก ทำให้ได้ว่า

$$P(Y_i = 1) = \frac{365 \times 1}{365 \times 365} = \frac{1}{365}$$

ดังนั้น Y_i เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่มีพารามิเตอร์ $p_2 = \frac{1}{365}$

กำหนดให้ $N_2 = \binom{n}{2}$ และ $S_{N_2} = \sum_{i=1}^{N_2} Y_i$
ดังนั้น S_{N_2} เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ $n = N_2$ และ $p_2 = \frac{1}{365}$

จากที่เราทราบว่าการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p สามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = np$ เมื่อ $n \longrightarrow \infty$ และ $p \longrightarrow 0$

เนื่องจากตัวแปรสุ่ม S_{N_2} เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ $N_2 = \binom{n}{2}$ และ $p_2 = \frac{1}{365}$ ดังนั้นเราจะประมาณค่าการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม S_{N_2} ด้วยการแจกแจงปัวซงซึ่งมีพารามิเตอร์คือ

$$\lambda_2 = N_2 \cdot p_2 = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{365} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot \frac{1}{365} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!} \cdot \frac{1}{365} = \frac{n(n-1)}{730}$$

เนื่องจาก $A_{2,n}^c$ คือเหตุการณ์ที่มีคนในกลุ่มอย่างมาก 1 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คน นั่นคือ ไม่มี 2 คนใด ๆ เกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคนทั้งหมด n คนและ $S_{N_2} = 0$ หมายถึงในทุก ๆ การสุ่มคน 2 คนจากกลุ่มคน n คน ไม่มี 2 คนใด ๆ เกิดวันและเดือนเดียวกัน ทำให้เราได้ว่า

$$P(A_{2,n}^c) \approx P(S_{N_2} = 0)$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณความน่าจะเป็นที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันจากกลุ่มคน n คน เมื่อ n คือ จำนวนนับใด ๆ และ $n \geq 2$ ได้ดังนี้

$$P(A_{2,n}) = 1 - P(A_{2,n}^c) \approx 1 - P(S_{N_2} = 0) = 1 - \frac{e^{-\lambda_2} \cdot (\lambda_2)^0}{0!} = 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}$$

ต่อมาได้มีการประมาณค่าดังกล่าวไปสู่กรณีที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $m = 3, 4, 5$ ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

กรณี $m = 3$

จะได้ว่า $N_3 = \binom{n}{3}$ และ $p_3 = \frac{365\times1\times1}{(365)^3} = \frac{1}{(365)^2}$

ดังนั้น เราสามารถประมาณค่า $P(A^c_{3,n})$ ได้ด้วยการแจกแจงปัวซงซึ่งมีพารามิเตอร์คือ

$$\lambda_3 = N_3 \cdot p_3 = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{(365)^2} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \cdot \frac{1}{(365)^2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!(365)^2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$P(A_{3,n}) = 1 - P(A^c_{3,n}) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!(365)^2}}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$P(A_{4,n}) = 1 - P(A^c_{4,n}) \approx -e^{-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!(365)^3}}$$

และ

$$P(A_{5,n}) = 1 - P(A^c_{5,n}) \approx 1 - e^{-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!(365)^4}}$$

4.2 การประมาณค่าความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน โดยที่ $2 \leq m \leq n$

ในหัวข้อนี้ เราจะประมาณค่าความน่าจะเป็นในกรณีที่มีคนในกลุ่มอย่างน้อย m คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq m \leq n$ โดยใช้แนวคิดเดียวกันกับกรณี $m = 2, 3, 4, 5$

กำหนดให้

$$N_m = \binom{n}{m} \text{ และ } p_m = \frac{365}{365} \times \underbrace{\frac{1}{365} \times \cdots \times \frac{1}{365}}_{m-1 \text{ พจน์}} = \frac{1}{(365)^{m-1}}$$

ดังนั้น เราสามารถประมาณค่าความน่าจะเป็นได้ด้วยการแจกแจงปัวซงที่มีพารามิเตอร์ λ_m เท่ากับ

$$\lambda_m = N_m \cdot p_m = \binom{n}{m} \cdot \frac{1}{(365)^{m-1}} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \frac{1}{(365)^{m-1}} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!(365)^{m-1}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$P(A_{m,n}) = 1 - P(A^c_{m,n}) \approx 1 - \exp\left(-\frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!(365)^{m-1}}\right) \tag{4.1}$$

ตารางต่อไปนี้ แสดงค่าจริงและค่าประมาณจากการแทนค่า m และ n ในทฤษฎีบท 3.6 และสมการ (4.1) ตามลำดับ

กรณี $m = 4$

n	50	186	187	350	1096
ค่าจริง	0.004	0.496	0.503	0.999	1
ค่าประมาณ	0.005	0.629	0.637	1	1

กรณี $m = 5$

n	80	312	313	550	1461
ค่าจริง	0.001	0.496	0.501	0.999	1
ค่าประมาณ	0.001	0.739	0.745	1	1

กรณี $m = 6$

n	150	450	460	700	1826
ค่าจริง	0.002	0.456	0.502	0.999	1
ค่าประมาณ	0.002	0.821	0.859	1	1

บรรณานุกรม

1. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. ความน่าจะเป็นและสถิติ. พิมพ์ครั้งที่ 9. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2544.

2. พีรวัส วีระวรรณ และณัฐกาญจน์ ใจดี. ปัญหาวันเกิด. โครงงานวิทยาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2558.

3. อัญชิสา ซุ่นสั้น และณัฐกาญจน์ ใจดี. ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 5 คนจาก n คนมีวันเกิดวันเดียวกัน. โครงงานวิทยาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2561.

4. DasGupta, A., “The Matching, Birthday and the Strong Birthday Problem: A Contemporary Review”, *Journal of Statistical Plaining and Inference*, 130, pp.377–389, 2005.

5. Schmuland, B., Shark attacks and the Poisson approximation, π *in the Sky*, 4, pp.12–14, 2001.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การวางนัยทั่วไปของปัญหาวันเกิด
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	A Generalization of Birthday Problem
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี
ผู้ดำเนินการ	นางสาวเพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์ เลขประจำตัวนิสิต 5933538023 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในปี ค.ศ. 1939 Richard von Mises นักคณิตศาสตร์ชาวออสโตร-ฮังกาเรียน ได้ตั้งคำถามที่น่าสนใจว่า “จะต้องมีกลุ่มคนอย่างน้อยกี่คนจึงจะมีโอกาสที่มีคนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกันอย่างน้อย 50%” โดยคำถามนี้ทำให้เกิดคำถามทั่วไปที่ว่า “ในกลุ่มคน n คน ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เกิดวันและเดือนเดียวกันเป็นเท่าไร” ซึ่งคำถามดังกล่าวเรียกว่า “ปัญหาวันเกิด (Birthday Problem)”

จากคำถามข้างต้น ได้มีนักคณิตศาสตร์คำนวณหาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีอย่างน้อย 2 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน จากนั้นในปี ค.ศ. 2005 Anirban DasGupta ได้มีการขยายปัญหานี้โดยการหาค่าความน่าจะเป็นที่มีคนอย่างน้อย 3 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน ต่อมาในปี ค.ศ. 2015 พีรวัส วีระวรรณและณัฐกาญจน์ ใจดี ได้ขยายปัญหาดังกล่าวไปสู่กรณีที่มีคนอย่างน้อย 4 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน และในปี ค.ศ. 2018 อัญชิสา ซุ่นสั้นและณัฐกาญจน์ ใจดี ได้ขยายปัญหานี้ไปสู่กรณีที่มีคนอย่างน้อย 5 คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน นอกจากนี้ยังประมาณความน่าจะเป็นที่ได้ด้วยการแจกแจงปัวซงเพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ

ในโครงงานนี้ เราจะขยายปัญหาวันเกิด โดยหาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีอย่างน้อย l คน เกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq l \leq n$ รวมถึงประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ได้ ด้วยการแจกแจงปัวซง

วัตถุประสงค์

หาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีอย่างน้อย l คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq l \leq n$ และประมาณค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่ได้ด้วยการแจกแจงค่าปัวซง

ขอบเขตโครงงาน

หาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีอย่างน้อย l คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq l \leq n$ และประมาณค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่ได้ด้วยการแจกแจงค่าปัวซง โดยกำหนดให้ 1 ปีมี 365 วัน

วิธีการดำเนินงาน

1. กำหนดหัวข้อโครงงาน
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปัญหาวันเกิดในกรณีที่มีคนอย่างน้อย l คน ที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $l = 2, 3, 4, 5$
3. หาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีอย่างน้อย l คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq l \leq n$
4. สรุปและเขียนรูปเล่มโครงงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	พ.ศ. 2562					พ.ศ. 2563			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. กำหนดหัวข้อโครงงาน									
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับปัญหาวันเกิดในกรณีที่มีคนอย่างน้อย l คน ที่เกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $l = 2, 3, 4, 5$									
3. หาความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คน จะมีอย่างน้อย l คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq l \leq n$									
4. สรุปและเขียนรูปเล่มโครงงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้รับความรู้เกี่ยวกับปัญหาวันเกิด
2. ได้ความน่าจะเป็นที่ในกลุ่มคน n คนจะมีอย่างน้อย l คนเกิดวันและเดือนเดียวกัน เมื่อ $2 \leq l \leq n$
3. ได้ประมาณค่าความน่าจะเป็นที่ได้ในข้อ 2. ด้วยการแจกแจงปัวซง

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษและเครื่องเขียน
2. คอมพิวเตอร์
3. เครื่องพิมพ์
4. Microsoft Word
5. Latex

งบประมาณ

1. ค่ากระดาษ	500 บาท
2. ค่าอุปกรณ์เครื่องเขียน	1,000 บาท
3. ค่าถ่ายเอกสาร	900 บาท
4. ค่าที่ใส่เอกสาร	900 บาท
5. ค่าหนังสือ	1,700 บาท

เอกสารอ้างอิง

1. พีรวัส วีระวรรณ และณัฐกาญจน์ ใจดี. ปัญหาวันเกิด. โครงงานวิทยาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2558.

2. อัญชิสา ซุ่นสั้น และณัฐกาญจน์ ใจดี. ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อย 5 คนจาก n คนมีวันเกิดวันเดียวกัน. โครงงานวิทยาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2561.

3. A. DasGupta, “The Matching, Birthday and the Strong Birthday Problem: A Contemporary Review”, Journal of Statistical Plaining and Inference, 130, pp.377–389, 2005.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวเพ็ญพิชชา เศรษฐพงษ์

สำเร็จการศึกษาในระดับประถมศึกษาที่โรงเรียนพระหฤทัยคอนแวนต์ ในปี พ.ศ. 2551 และสำเร็จการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาจากโรงเรียนราชวินิตบางแก้ว ในปี พ.ศ. 2557 ปัจจุบันกำลังศึกษาในสาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย