# โครงการ

# การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ขอบของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่ซ้อนทับกัน
Boundaries of Overlapping Isosceles Right Triangle

ชื่อนิสิต นายสิทธิพงศ์ พิทักษ์วัฒนานนท์ 6033543623

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2563

**คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

ขอบของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่ซ้อนทับกัน

นายสิทธิพงศ์  พิทักษ์วัฒนานนท์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์  จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

# Boundaries of Overlapping Isosceles Right Triangle

Mr. Sitthipong Phitakwattananon

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2020

| | |
|---|---|
| หัวข้อโครงงาน | ขอบของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่ซ้อนทับกัน |
| โดย | นายสิทธิพงศ์ พิทักษ์วัฒนานนท์ |
| สาขาวิชา | คณิตศาสตร์ |
| อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก | ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร |

---

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.................................................. หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

กีรติ ศรีอมร
.................................................. อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร)

.................................................. กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา)

พงษ์เดช มนทกานติรัตน์
.................................................. กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์เดช มนทกานติรัตน์)

สิทธิพงศ์ พิทักษ์วัฒนานนท์ : ขอบของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่ซ้อนทับกัน.

(Boundaries of Overlapping Isosceles Right Triangle)

อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร, 28 หน้า.

โครงงานนี้ศึกษาอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ ให้เป็น $T_1$และ $T_2$ โดยให้ $a$ เป็นความยาวของขอบของ $T_1$ ที่อยู่ใน $T_2$ และ $b$ เป็นความยาวของขอบของ $T_2$ ที่อยู่ใน $T_1$ โดยเราต้องการหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดของอัตราส่วน $\frac{a}{b}$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต สิทธิพงศ์ พิทักษ์วัฒนานนท์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ. ที่ปรึกษาโครงงานหลัก กีรติ ศรีอมร

ปีการศึกษา 2563

# # 6033543623 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : Intersecting Isosceles Right Triangles

SITTHIPONG PHITAKWATTANANON : Boundaries of Overlapping Isosceles Right Triangle ADVISOR : ASST PROF. Kirati Sriamorn, Ph.D., 28 pp.

The aim of this project is to study two congruent Isosceles Right Triangles $T_1$ and $T_2$ that intersect in at least one point. Let $a$ be the length of part of the boundary of $T_1$ that lies inside $T_2$ and $b$ be the length of part of the boundary of $T_2$ that lies inside $T_1$. We want to the find the supremum of ratio $\frac{a}{b}$.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature สิทธิพงษ์ พิทักษ์วัฒนานนท์

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature กีรติ ศรีอมร

Academic Year : 2020

# กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง ขอบของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่ซ้อนทับกันได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินการโครงงานจึงขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานและคอยให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ชี้แนะให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานมาตลอด ตั้งแต่เริ่มต้นทำงานจนโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ

ตลอดจนขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชิรมาลา และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พงษ์เดช มนทกานติรัตน์ ที่ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบโครงงาน และได้ให้ข้อเสนอแนะข้อคิด รวมถึงชี้ให้เห็นช้อผิดพลาดต่าง ๆ ซึ่งทำให้โครงงานนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านและรุ่นพี่ทุกคนที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และตลอดระยะเวลาที่ได้ทำโครงงานนี้มา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการทำโครงงานครั้งนี้

# สารบัญ

# สารบัญภาพ

# บทที่ 1
# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและเหตุผลการวิจัย

ในปี ค.ศ. 1980 J. W. Fickett ได้ศึกษาอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการ นั่นคือศึกษาช่วงของอัตราส่วน

$$\frac{lenght(\partial R_1 \cap Int(R_2))}{lenght(\partial R_2 \cap Int(R_1))},$$

เมื่อ $R_1$ และ $R_2$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการซึ่ง $Int(R_1) \cap Int(R_2) \neq \emptyset$ โดยกำหนดให้ $\partial R_i$ และ $Int(R_i)$ เป็นขอบเขตและภายในของ $R_i$ ตามลำดับ J. W. Fickett ได้ตั้งข้อคาดการว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าไม่เกิน $3$ (หรือในทางกลับกันมีค่าอย่างต่ำเป็น $1/3$) นอกจากนี้เขาได้คาดเดาว่าถ้าแทนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยรูปสามเหลี่ยม แล้วจะได้ว่าอัตราส่วนที่เราสนใจจะมีค่าไม่เกิน $csc(\theta/2)$ เมื่อ $\theta$ เป็นมุมที่เล็กที่สุดในสามเหลี่ยมรูปนั้น

ในปี ค.ศ. 2013 C. Nielsen และ C. Powers ได้ศึกษาอัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งพวกเขาได้ข้อสรุปว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าไม่เกิน $2$

ในปี ค.ศ. 2019 J. Donnelly ได้ศึกษาอัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งเขาได้ข้อสรุปว่ามีสามเหลี่ยมบางรูปที่ให้ค่าของอัตราส่วนดังกล่าวมากกว่า $csc(\theta/2)$ ทำให้สรุปได้ว่าข้อคาดเดาของ J. W. Fickett นั้นเป็นเท็จ

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

โครงงานนี้สนใจรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ ให้เป็น $T_1$และ $T_2$ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาอัตราส่วนของ

$$\frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))},$$

เมื่อ $T_1$และ $T_2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการซึ่ง $Int(T_1) \cap Int(T_2) \neq \emptyset$ โดยกำหนดให้ $\partial T_i$ และ $Int(T_i)$ เป็นขอบเขตและภายในของ $T_i$ ตามลำดับ

## 1.3 ขอบเขตการวิจัย

ในโครงงานนี้จะศึกษาเฉพาะความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการสองรูปเท่านั้น

## 1.4 ขั้นตอนการวิจัย

1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเกี่ยวกับการวิจัยและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. หาขอบเขตเบื้องต้นของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของ $T_1$ และ $T_2$ โดยใช้โปรแกรม Geogebra
3. สร้างข้อความคาดการณ์จากการใช้โปรแกรม Geogebra และทำการพิสูจน์

4. ตรวจสอบความถูกต้องของการดำเนินงาน
5. สรุปและจัดทำรูปเล่ม

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ช่วงของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก

## 1.6 โครงสร้างของรายงาน

บทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
บทที่ 3 จะกล่าวถึงวิธีการวิจัย
บทที่ 4 จะกล่าวถึงผลการวิจัย
บทที่ 5 จะกล่าวถึงข้อสรุป และข้อเสนอแนะ

# บทที่ 2
# ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 ความรู้พื้นฐาน

กำหนด $K \subseteq \mathbb{R}^2$ โดยที่ $\partial K$ และ $Int(K)$ เป็นขอบและภายในของ $K$ ตามลำดับ

$R_1$ และ $R_2$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการ

$T_1$ และ $T_2$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ

$d_{12} = min\{r : r$ เป็นระยะทางระหว่างจุดยอดของ $T_1$ กับด้านของ $T_2\}$

$d_{21} = min\{r : r$ เป็นระยะทางระหว่างจุดยอดของ $T_2$ กับด้านของ $T_1\}$

$d = min\{d_{12},\ d_{21}\}$

$V = \{x :\ x$ เป็นจุดยอดของ $T_1, T_2\ \}$

$V_{12} = \{$ จุดยอดของ $T_1$ ที่อยู่บนด้านของ $T_2\}$

$V_{21} = \{$ จุดยอดของ $T_2$ ที่อยู่บนด้านของ $T_1\}$

## 2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 1980 J. W. Fickett ได้ศึกษาอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการ นั่นคือศึกษาช่วงของอัตราส่วน

$$\frac{lenght(\partial R_1 \cap Int(R_2))}{lenght(\partial R_2 \cap Int(R_1))},$$

เมื่อ $Int(R_1) \cap Int(R_2) \neq \emptyset$. J. W. Fickett ได้ตั้งข้อคาดการว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าไม่เกิน $3$ (หรือในทางกลับกันมีค่าอย่างต่ำเป็น $1/3$) นอกจากนี้เขาได้คาดเดาว่าถ้าแทนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยรูปสามเหลี่ยม แล้วจะได้ว่าอัตราส่วนที่เราสนใจจะมีค่าไม่เกิน $csc(\theta/2)$ เมื่อ $\theta$ เป็นมุมที่เล็กที่สุดในสามเหลี่ยมรูปนั้น

ในปี ค.ศ. 2013 C. Nielsen และ C. Powers [1] ได้ศึกษาอัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งพวกเขาได้ข้อสรุปว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าไม่เกิน $2$

ในปี ค.ศ. 2019 J. Donnelly [2] ได้ศึกษาอัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งเขาได้ข้อสรุปว่ามีสามเหลี่ยมบางรูปที่ให้ค่าของอัตราส่วนดังกล่าวมากกว่า $csc(\theta/2)$ ทำให้สรุปได้ว่าข้อคาดเดาของ J. W. Fickett นั้นเป็นเท็จ

# บทที่ 3
# วิธีการวิจัย

**บทตั้ง 3.1** ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ และ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f(t) = \frac{a + k_1 t}{b + k_2 t}$$

เมื่อ $A = \{t : a + k_1 t > 0 \text{ และ } b + k_2 t > 0\}$ จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียว
**พิสูจน์** ให้ $t_1,\ t_2 \in A$ โดยที่ $t_1 > t_2$ พิจารณา $f(t_1) - f(t_2)$ จะได้ว่า

$$f(t_1) - f(t_2) = \frac{a + k_1 t_1}{b + k_2 t_1} - \frac{a + k_1 t_2}{b + k_2 t_2}$$

$$= \frac{(a + k_1 t_1)(b + k_2 t_2) - (a + k_1 t_2)(b + k_2 t_1)}{(b + k_2 t_1)(b + k_2 t_2)}$$

$$= \frac{(t_1 - t_2)(bk_1 - ak_2)}{(b + k_2 t_1)(b + k_2 t_2)}$$

$\because t_1 - t_2 > 0$ และ $t_1,\ t_2 \in A$ $\therefore \dfrac{(t_1 - t_2)}{(b + k_2 t_1)(b + k_2 t_2)} > 0$

$\because bk_1,\ ak_2 \in \mathbb{R}$ โดยกฎไตรวิภาคจะได้ว่า $(bk_1 \geq ak_2)$ หรือ $(bk_1 \leq ak_2)$

$\therefore\ bk_1 - ak_2 \geq 0$ หรือ $bk_1 - ak_2 \leq 0$

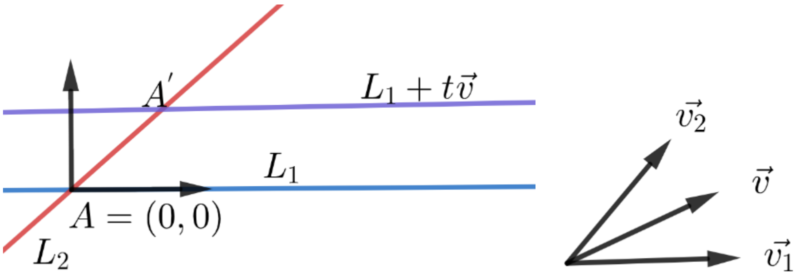
$\therefore\ f(t_1) - f(t_2) \geq 0$ ก็ต่อเมื่อ $bk_1 - ak_2 \geq 0$

$\therefore\ f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียว

$\therefore\ f(t_1) - f(t_2) \leq 0$ ก็ต่อเมื่อ $bk_1 - ak_2 \leq 0$

$\therefore\ f$ เป็นฟังก์ชันทางเดียว ■

**บทตั้ง 3.2** ให้เส้นตรง $L_1 \nparallel L_2$ โดยที่เส้นตรง $L_1$ ตัดกับเส้นตรง $L_2$ ที่จุด $A$ เมื่อเลื่อน $L_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$ เป็นขนาด $t$ หน่วย โดย $|\vec{v}| = 1$ ซึ่งตัดเส้นตรง $L_2$ ที่จุด $A'$ จะได้ว่า $|\overline{AA'}| = kt$ เมื่อ $k$ เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นอยู่กับ $t$
**พิสูจน์** ใส่แกนอ้างอิง $XY$ ให้ $A$ เป็นจุดกำเนิด




ภาพที่ 3.1 เส้นตรง $L_1$ ตัดเส้นตรง $L_2$

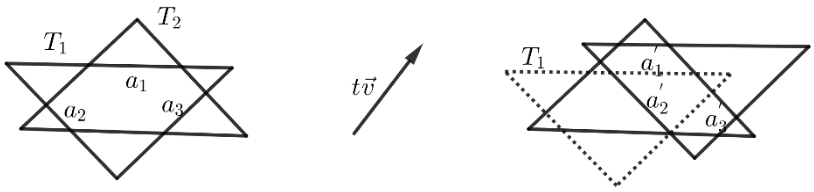
จากรูป ให้ $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ โดยที่ $\vec{v_1} \in span\{ L_1\}$ และ $\vec{v_2} \in span\{ L_2\}$
เลื่อน $L_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$ เป็นขนาด $t$ หน่วย จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L_1 + t\vec{v} &= L_1 + t(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \\ &= L_1 + t\vec{v_1} + t\vec{v_2} \\ &= L_1 + t\vec{v_2} \end{aligned}$$

$\therefore\ |\overline{AA'}| = |\vec{v_2}|t = kt$ เมื่อ $|\vec{v_2}| = k$ ■

**บทตั้ง 3.3** ให้ $T_1$ ตัด $T_2$ โดยที่ $Int(T_1) \cap Int(T_2) \neq \emptyset$ และ $\dfrac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} = \dfrac{a}{b}$ แล้วเมื่อเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$ เป็นขนาด $t$ หน่วย เมื่อ $|\vec{v}| = 1$ และ $|V_{1'2}| = |V_{12}|$ และ $|V_{2'1}| = |V_{21}|$ จะได้ว่าอัตราส่วนข้างต้นจะอยู่ในรูป $\dfrac{a+k_1t}{b+k_2t}$ เมื่อ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

**พิสูจน์** ให้ $T_1$ ตัด $T_2$ โดยที่ $Int(T_1) \cap Int(T_2) \neq \emptyset$ และ $\dfrac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} = \dfrac{a}{b}$
เมื่อเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$ เป็นขนาด $t$ หน่วย ดังรูป




ภาพที่ 3.2 การเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$

จากรูปให้ $a = a_1 + a_2 + a_3$ ($a_i$ สามารถเป็น 0 ได้ในกรณีที่ด้านนั้นไม่อยู่บนส่วนที่ซ้อนทับกัน)
จากบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า $a_1' = a_1 + m_1t,\ a_2' = a_2 + m_2t$ และ $a_3' = a_3 + m_3t$ เมื่อ $m_i \in \mathbb{R}, \forall i$
$\therefore\ lenght(\partial T_1\ \cap\ Int(T_2)) = a + k_1t$ เมื่อ $k_1 = m_1 + m_2 + m_3$
ในทำนองเดียวกันจะได้ $lenght(\partial T_2\ \cap\ Int(T_1)) = b + k_2t$

$\therefore\ \dfrac{lenght(\partial T_1\ \cap\ Int(T_2))}{lenght(\partial T_2\ \cap\ Int(T_1))} = \dfrac{a + k_1t}{b + k_2t}$ ■

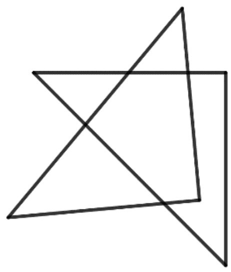
**บทตั้ง 3.4** ถ้า $|V_{12} \cup V_{21}| \leq 1$ แล้วจะมีทิศทางเลื่อน $T_1$ ซึ่งทำให้ $\dfrac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))}$ ไม่ลดลง

**พิสูจน์** ให้ $|V_{12} \cup V_{21}| \leq 1$

ให้ $V = \{x : x$ เป็นจุดยอดของ $T_1, T_2\}$

ให้ $d = min\,\{d_{12},\ d_{21}\}$

**กรณีที่ 1** $|V_{12} \cup V_{21}| = 0$



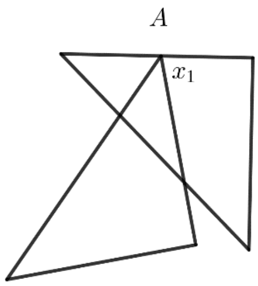
ภาพที่ 3.3 $|V_{12} \cup V_{21}| = 0$

จากบทตั้ง 3.1 และ 3.3 เราได้ว่าอัตราส่วนของการเลื่อน $f(t) = \frac{a+k_1t}{b+k_2t}$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวบน $[-d, d]$ $\therefore$ $f(d) \geq f(0)$ หรือ $f(-d) \geq f(0)$

ถ้า $f(d) \geq f(0)$ แล้วเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$ เป็นขนาด $d$ หน่วย

ถ้า $f(-d) \geq f(0)$ แล้วเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $-\vec{v}$ เป็นขนาด $d$ หน่วย

**กรณีที่ 2** $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$




ภาพที่ 3.4 $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$

จากรูป ให้ $x_1$ เป็นจุดยอดที่อยู่บนด้าน $A$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับด้าน $A$

จากบทตั้ง 3.1 และ 3.3 เราได้ว่าอัตราส่วนของการเลื่อน $f(t) = \frac{a+k_1t}{b+k_2t}$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวบน $[-d, d]$ $\therefore$ $f(d) \geq f(0)$ หรือ $f(-d) \geq f(0)$

ถ้า $f(d) \geq f(0)$ แล้วเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $\vec{v}$ เป็นขนาด $d$ หน่วย

ถ้า $f(-d) \geq f(0)$ แล้วเลื่อน $T_1$ ในทิศทาง $-\vec{v}$ เป็นขนาด $d$ หน่วย

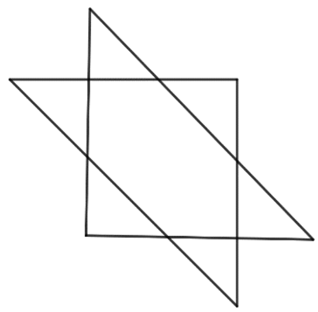
จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า มีทิศทางเลื่อน $T_1$ ซึ่งทำให้ $\dfrac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))}$ ไม่ลดลง ■

# บทที่ 4
# ผลการวิจัย

**ทฤษฎีบท 4.1** ให้ $T_1$ ตัด $T_2$

ถ้า $Int(T_1) \cap Int(T_2) \neq \emptyset$ แล้ว $\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \leq \frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} \leq \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

**พิสูจน์** **กรณีที่ 1** รูปรอยตัดเป็นหกเหลี่ยม



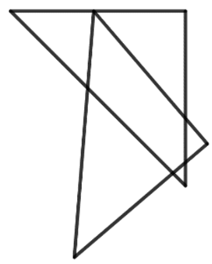
ภาพที่ 4.1 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นหกเหลี่ยม

จากบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ว่าจะมีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและรูปรอยตัดของ $T_1$ และ $T_2$ จะเปลี่ยนเป็นรูปที่มีเหลี่ยมน้อยกว่าหรือเท่ากับห้าเหลี่ยม

$\therefore$ อัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่รอยตัดเป็นรูปหกเหลี่ยมจะน้อยกว่าหรือเท่ากับอัตราส่วนในกรณีที่รอยตัดเป็นรูปที่มีเหลี่ยมน้อยกว่าหรือเท่ากับห้าเหลี่ยม

**กรณีที่ 2** รูปรอยตัดเป็นห้าเหลี่ยม

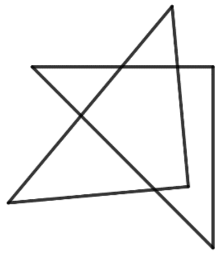
**กรณีที่ 2.1** $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$



ภาพที่ 4.2 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นห้าเหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$

จากบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ว่าจะมีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและรูปรอยตัดของ $T_1$ และ $T_2$ จะเปลี่ยนเป็นรูปที่มีเหลี่ยมน้อยกว่าหรือเท่ากับสี่เหลี่ยม

**กรณีที่ 2.2** $|V_{12} \cup V_{21}| = 0$



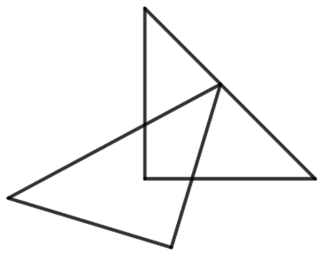
ภาพที่ 4.3 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นห้าเหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 0$

จากบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ว่าจะมีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและส่งผลให้ $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$ นั่นคือ มีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและรูปรอยตัดของ $T_1$ และ $T_2$ จะเปลี่ยนเป็นรูปที่มีเหลี่ยมน้อยกว่าหรือเท่ากับสี่เหลี่ยม

∴ อัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่รอยตัดเป็นรูปห้าเหลี่ยมจะน้อยกว่าหรือเท่ากับอัตราส่วนในกรณีที่รอยตัดเป็นรูปที่มีเหลี่ยมน้อยกว่าหรือเท่ากับสี่เหลี่ยม

**กรณีที่ 3** รูปรอยตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| \leq 1$

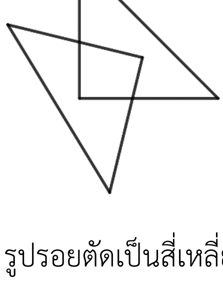
**กรณีที่ 3.1** $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$



ภาพที่ 4.4 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$

จากบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ว่าจะมีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและส่งผลให้ $|V_{12} \cup V_{21}| = 2$ โดยที่จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ไม่ทับกัน

**กรณีที่ 3.2** $|V_{12} \cup V_{21}| = 0$



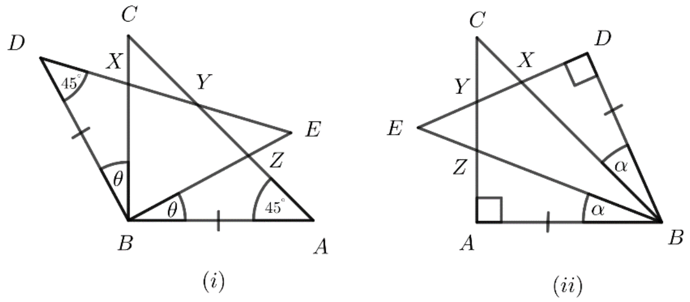
ภาพที่ 4.5 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 0$

จากบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ว่าจะมีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและส่งผลให้ $|V_{12} \cup V_{21}| = 1$ ซึ่งรูปรอยตัดเป็นรูปเหลี่ยมที่น้อยกว่าหรือเท่ากับสี่เหลี่ยมและโดยบทตั้ง 3.4 ทำให้ได้ว่าจะมีทิศทางเลื่อนที่ทำให้อัตราส่วนดังกล่าวไม่ลดลงและส่งผลให้ $|V_{12} \cup V_{21}| = 2$ โดยที่จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ไม่ทับกัน ซึ่งรูปรอยตัดเป็นรูปเหลี่ยมที่น้อยกว่าหรือเท่ากับสี่เหลี่ยม

$\therefore$ อัตราส่วนดังกล่าวของรอยตัดสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| \leq 1$ จะน้อยกว่าหรือเท่ากับรูปเหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 2$ โดยที่จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ไม่ทับกัน

**กรณีที่** 4 รูปรอยตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 2$

**กรณีที่ 4.1** จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ทับกัน




ภาพที่ 4.6 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 2$ โดยที่จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ทับกัน

พิจารณา $(i)$ ให้ $A\hat{B}E = \theta, \because A\hat{B}C = D\hat{B}E = 90° \therefore D\hat{B}C = \theta$

$\because B\hat{A}C = B\hat{D}E = 45°$ และ $\overline{AB} = \overline{BD}$

$\therefore \triangle ABZ \equiv \triangle DBX$ (มุม-ด้าน-มุม)

$\therefore B\hat{X}D = A\hat{Z}B$ และ $\overline{BX} = \overline{BZ}$ ส่งผลให้ $\overline{CX} = \overline{EZ}$

$\because C\hat{X}Y = B\hat{X}D = A\hat{Z}B = E\hat{Z}Y, X\hat{C}Y = Y\hat{E}Z = 45°$ และ $\overline{CX} = \overline{EZ}$

$\therefore \triangle CXY \equiv \triangle EZY$ (มุม-ด้าน-มุม) $\therefore \overline{XY} = \overline{YZ}$

$$\therefore \frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} = \frac{\overline{BZ} + \overline{XY}}{\overline{BX} + \overline{YZ}} = 1$$

พิจารณา $(ii)$ ให้ $A\hat{B}E = \alpha, \because A\hat{B}C = D\hat{B}E = 45° \therefore D\hat{B}C = \alpha$

$\because B\hat{A}C = B\hat{D}E = 90°$ และ $\overline{AB} = \overline{BD}$

$\therefore \triangle ABZ \equiv \triangle DBX$ (มุม-ด้าน-มุม)

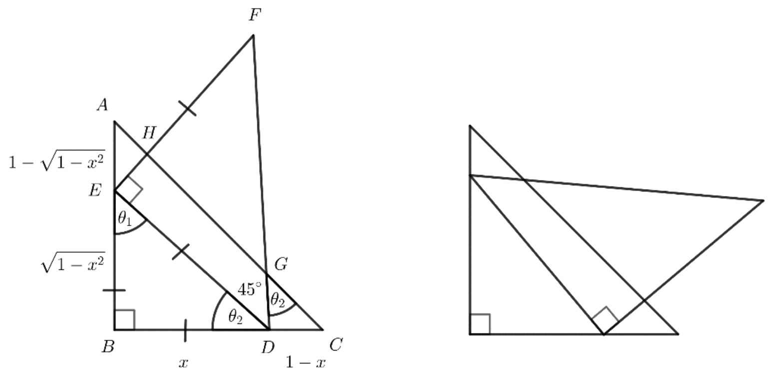
$\therefore B\hat{X}D = A\hat{Z}B$ และ $\overline{BX} = \overline{BZ}$ ส่งผลให้ $\overline{CX} = \overline{EZ}$

$\because C\hat{X}Y = B\hat{X}D = A\hat{Z}B = E\hat{Z}Y, X\hat{C}Y = Y\hat{E}Z = 45°$ และ $\overline{CX} = \overline{EZ}$

$\therefore \triangle CXY \equiv \triangle EZY$ (มุม-ด้าน-มุม) $\therefore \overline{XY} = \overline{YZ}$

$$\therefore \frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} = \frac{\overline{BZ} + \overline{XY}}{\overline{BX} + \overline{YZ}} = 1$$

**กรณีที่ 4.2** จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ไม่ทับกัน




ภาพที่ 4.7 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นสี่เหลี่ยมที่ $|V_{12} \cup V_{21}| = 2$ โดยที่จุดยอดใน $V_{12}$ และ $V_{21}$ ไม่ทับกัน

จากรูป ให้ $\overline{BD} = x \therefore \overline{CD} = 1-x, \overline{BE} = \sqrt{1-x^2}$ และ $\overline{AE} = 1-\sqrt{1-x^2}$

จากรูป ให้ $B\hat{E}D = \theta_1$ และ $A\hat{D}E = \theta_2 \therefore \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \therefore A\hat{E}H = \theta_2 = C\hat{G}D$

พิจารณา $\triangle AEH$ จะได้ $\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+\theta_1)} = \dfrac{\overline{HE}}{1-\sqrt{1-x^2}}$

$$\therefore \overline{HE} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

พิจารณา $\triangle CDG$ จะได้ $\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\theta_2} = \dfrac{\overline{DG}}{1-x}$

$$\therefore \overline{DG} = \frac{1-x}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}$$

พิจารณา $\triangle FGH$ จะได้ $\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin\theta_2} = \dfrac{\overline{HG}}{1-\overline{HE}}$

$$\therefore \overline{HG} = \frac{x-1+2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})}$$

$$\therefore \frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} = \frac{1+\overline{HE}+\overline{DG}}{\overline{HG}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{2}(x+1)+1-x)-x(x-1)}{x-1+2\sqrt{1-x^2}}$$

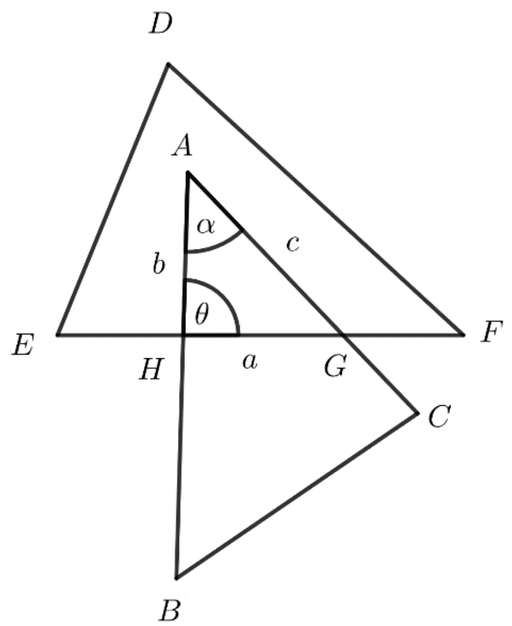
ให้ $f:(0,1) \to \mathbb{R}^+$ นิยามโดย

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{2}(x+1)+1-x)-x(x-1)}{x-1+2\sqrt{1-x^2}}$$

จะได้ว่า $\displaystyle \sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1+\sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{2}-1 \leq \frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))} \leq 1+\sqrt{2}$$

**กรณีที่ 5** รูปรอยตัดเป็นสามเหลี่ยม




ภาพที่ 4.8 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นสามเหลี่ยม

จากรูป ให้ $\overline{HG} = a, \overline{AG} = b, \overline{HA} = c, H\hat{A}G = \alpha$ และ $A\hat{H}G = \theta$

พิจารณา $\triangle\, AHG$ จะได้ $\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$ และ $\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ \dfrac{lenght(\partial T_1\ \cap\ Int(T_2))}{lenght(\partial T_2\ \cap\ Int(T_1))} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{2cos(\alpha/2)}{\sin\alpha} \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\theta\right)$

ให้ $f : [0,\ \pi] \to \mathbb{R}^{+}$ นิยามโดย

$$f(\theta) = \frac{2cos(\alpha)}{\sin\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\theta\right)$$

หาจุดวิกฤตของ $f$ บน $[0,\ \pi]$ จะได้

$f'(\theta) = \dfrac{2cos(\alpha)}{\sin\alpha} \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\theta\right)$

$\therefore$ จุดวิกฤตคือ $\theta = \frac{\pi-\alpha}{2}$

$\therefore f\left(\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right) = \dfrac{2cos(\alpha)}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sin\alpha}$

เมื่อ $\alpha = \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่า $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

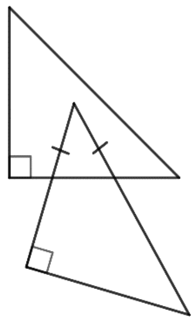
เมื่อ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

พิจารณาจุดขอบ $\theta = 0$ และ $\theta = \pi$ จะได้ $f(0) = 1$ และ $f(\pi) = -1$

$\therefore\ f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f$ บน $[0,\ \pi]$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \le \dfrac{lenght\big(\partial T_1\ \cap\ Int(T_2)\big)}{lenght\big(\partial T_2\ \cap\ Int(T_1)\big)} \le \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

∴ จากทั้ง 5 กรณีจะได้ว่า



ภาพที่ 4.9 $T_1$ ตัด $T_2$ รูปรอยตัดเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \leq \frac{lenght\big(\partial T_1 \ \cap \ Int(T_2)\big)}{lenght\big(\partial T_2 \ \cap \ Int(T_1)\big)} \leq \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$ ■

# บทที่ 5
# ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานนี้ ศึกษาอัตราส่วนของ

$$\frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))}$$

เมื่อ $T_1$ และ $T_2$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ ได้ผลดังนี้

$$\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \leq \frac{lenght(\partial T_1 \ \cap \ Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \ \cap \ Int(T_1))} \leq \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

สังเกตว่าโครงงานฉบับนี้ศึกษาเฉพาะอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก ด้วยแนวคิดเดียวกันนี้ ผู้ที่สนใจอาจพยายามสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุมที่จุดยอดเป็นมุมอื่น ๆ หรือสามเหลี่ยมใด ๆ ต่อไปได้

# รายการอ้างอิง

[1] Nielsen, C., & Powers, C. (2013). Intersecting equilateral triangles. In *Forum Geometricorum* (Vol. 13, pp. 219-225).

[2] Donnelly, John. "On a Conjecture of Fickett." *The American Mathematical Monthly* 126.1 (2019): 78-80.

# ภาคผนวก

# ภาคผนวก ก
# แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
# ปีการศึกษา 2563

| | |
|---|---|
| ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) | ขอบของสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่ซ้อนทับกัน |
| ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) | Boundaries of Overlapping Isosceles Right Triangle |
| อาจารย์ที่ปรึกษา | ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กีรติ ศรีอมร |
| ผู้ดำเนินการ | นายสิทธิพงศ์ พิทักษ์วัฒนานนท์ เลขประจำตัวนิสิต 6033543623<br>สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์<br>คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |

---

**หลักการและเหตุผล**

ในปี ค.ศ. 1980 J. W. Fickett ได้ศึกษาอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการ นั่นคือศึกษาช่วงของอัตราส่วน

$$\frac{lenght(\partial R_1 \cap Int(R_2))}{lenght(\partial R_2 \cap Int(R_1))},$$

เมื่อ $R_1$ และ $R_2$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการซึ่ง $Int(R_1) \cap Int(R_2) \neq \emptyset$ โดยกำหนดให้ $\partial R_i$ และ $Int(R_i)$ เป็นขอบเขตและภายในของ $R_i$ ตามลำดับ J. W. Fickett ได้ตั้งข้อคาดการว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าไม่เกิน $3$ (หรือในทางกลับกันมีค่าอย่างต่ำเป็น $1/3$) นอกจากนี้เขาได้คาดเดาว่าถ้าแทนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยรูปสามเหลี่ยม แล้วจะได้ว่าอัตราส่วนที่เราสนใจจะมีค่าไม่เกิน $csc(\theta/2)$ เมื่อ $\theta$ เป็นมุมที่เล็กที่สุดในสามเหลี่ยมรูปนั้น

ในปี ค.ศ. 2013 C. Nielsen และ C. Powers ได้ศึกษาอัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งพวกเขาได้ข้อสรุปว่าอัตราส่วนดังกล่าวมีค่าไม่เกิน $2$

ในปี ค.ศ. 2019 J. Donnelly ได้ศึกษาอัตราส่วนดังกล่าวในกรณีที่เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งเขาได้ข้อสรุปว่ามีสามเหลี่ยมบางรูปที่ให้ค่าของอัตราส่วนดังกล่าวมากกว่า $csc(\theta/2)$ ทำให้สรุปได้ว่าข้อคาดเดาของ J. W. Fickett นั้นเป็นเท็จ

**วัตถุประสงค์**

โครงงานนี้สนใจรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ ให้เป็น $T_1$และ $T_2$ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาอัตราส่วนของ

$$\frac{lenght(\partial T_1 \cap Int(T_2))}{lenght(\partial T_2 \cap Int(T_1))},$$

เมื่อ $T_1$และ $T_2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการซึ่ง $Int(T_1) \cap Int(T_2) \neq \emptyset$ โดยกำหนดให้ $\partial T_i$ และ $Int(T_i)$ เป็นขอบเขตและภายในของ $T_i$ ตามลำดับ

## ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษาเฉพาะความสัมพันธ์ของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่เท่ากันทุกประการสองรูปเท่านั้น

## วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเกี่ยวกับการวิจัยและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. หาขอบเขตเบื้องต้นของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของ $T_1$ และ $T_2$ โดยใช้โปรแกรม Geogebra
3. สร้างข้อความคาดการณ์จากการใช้โปรแกรม Geogebra และทำการพิสูจน์
4. ตรวจสอบความถูกต้องของการดำเนินงาน
5. สรุปและจัดทำรูปเล่ม

| วิธีการดำเนินงาน | สิงหาคม 2563 – เมษายน 2564 | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ส.ค. | ก.ย. | ต.ค. | พ.ย. | ธ.ค. | ม.ค. | ก.พ. | มี.ค. | เม.ย. |
| 1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเกี่ยวกับการวิจัยและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา | | | | | | | | | |
| 2. หาขอบเขตเบื้องต้นของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของ $T_1$ และ $T_2$ โดยใช้โปรแกรม Geogebra | | | | | | | | | |
| 3. สร้างข้อความคาดการณ์จากการใช้โปรแกรม Geogebra และทำการพิสูจน์ | | | | | | | | | |
| 4. ตรวจสอบความถูกต้องของการดำเนินงาน | | | | | | | | | |
| 5. สรุปและจัดทำรูปเล่ม | | | | | | | | | |

## ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ช่วงของอัตราส่วนของขอบที่ซ้อนทับกันของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก

## อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Word
4. โปรแกรม Geogebra

## งบประมาณ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Lightning Digital AV Adapter | 1,790 | บาท |
| 2. | USB Adapter Wi-Fi | 220 | บาท |
| 3. | EarPods with Lightning Connector | 690 | บาท |
| 4. | หนังสือประกอบการทำวิจัย | 615 | บาท |

## เอกสารอ้างอิง

[1] Nielsen, C., & Powers, C. (2013). Intersecting equilateral triangles. In *Forum Geometricorum* (Vol. 13, pp. 219-225).

[2] Donnelly, John. "On a Conjecture of Fickett." *The American Mathematical Monthly* 126.1 (2019): 78-80.

# ประวัติผู้เขียน

นายสิทธิพงศ์  พิทักษ์วัฒนานนท์
รหัสประจำตัวนิสิต 6033543623
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย