โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{3, 5\}$
Formula for squares reachable by a knight with $(2, b)$ knight's move where $b \in \{3, 5\}$

ชื่อนิสิต นางสาวประพิมพรรณ ศรสิทธิ์ **เลขประจำตัว** 5933531623

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{3, 5\}$

นางสาวประพิมพรรณ ศรสิทธิ์ 5933531623

โครงงานเล่มนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

Formula for squares reachable by a knight with $(2, b)$ knight's move where $b \in \{3, 5\}$

Miss Prapimpan Sornsit

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
For the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2019

โครงงาน	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2, b)$ เมื่อ $b \in \{3, 5\}$
โดย	นางสาว ประพิมพรรณ ศรสิทธิ์ เลขประจำตัวนิสิต 5933531623
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

...............................กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ)

...............................กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์)

ประพิมพรรณ ศรสิทธิ์: สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2,b)$ เมื่อ $b \in \{3,5\}$ (Formula for squares reachable by a knight with $(2,b)$ knight's move where $b \in \{3,5\}$) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน : รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 29 หน้า

กระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ คือ กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ประกอบด้วยแถวของช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งจัดเรียงเป็น m แถวและแต่ละแถวมีอยู่ n หลัก ในกรณีที่ $m \rightarrow \infty$ และ $n \rightarrow \infty$ จะเรียกกระดานหมากรุกดังกล่าวว่ากระดานหมากรุกขนาดอนันต์ การเดินของม้าหมากรุกแบบ (a,b) เป็นการเดินบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์จากช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสช่องหนึ่งไปอีกช่องหนึ่ง โดยเดินม้าหมากรุกไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง ซึ่งโครงงานนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกเดินแบบ $(2,b)$ เมื่อ $b \in \{3,5\}$ และนำเสนอสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,b)$ เมื่อ $b \in \{3,5\}$ ไปถึงได้บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ และจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงด้วยการเดินเพียง k ครั้ง

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ประพิมพรรณ ศรสิทธิ์

สาขาวิชา ... คณิตศาสตร์ ..... ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน ....

ปีการศึกษา .... 2562 ....

5933531623 : MAJOR MATHEMATICS
KEYWORDS : (a, b)-knight's move, squares reachable

PRAPIMPAN SORNSIT : The number of squares reachable in k moves with $(2, b)$-knight's move where $b \in \{3, 5\}$. ADVISOR : Asst. Prof. Ratinan Boonklurb, Ph.D., 29 pp.

The $m \times n$ chessboard is an array with squares arranged in m rows and n columns. If $m \to \infty$ and $n \to \infty$, then it is called an infinite chessboard. An (a, b)-knight's move is a move from square to square by moving a knight passing a squares vertically or a squares horizontally and then passing b squares at 90 degrees angle. In this project, we consider the $(2, b)$-knight's move where $b \in \{3, 5\}$ and obtain formulas for the number of squares reachable by a knight with the $(2, b)$-knight's move where $b \in \{3, 5\}$ on an infinite chessboard and the cumulative number of squares that the knight can reach in k moves.

Department : . Mathematics and Computer Science. .Student's Signature Prapimpan.S
Field of Study : . . . . Mathematics . . . . Advisor's Signature R. Boonklurb
Academic Year : . . . . . . 2019 . . . .

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้สำเร็จได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาอย่างสูงจาก รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ที่กรุณาให้คำแนะนำปรึกษา ตลอดจนปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความตั้งใจ ทุ่มเทและเอาใจใส่อย่างดียิ่งตลอดระยะเวลาการทำโครงงานนี้ จนกระทั่งโครงงานนี้สำเร็จตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์ ซึ่งเป็นกรรมการคุมสอบโครงงานนี้ที่ช่วยตรวจทานและให้คำแนะนำต่าง ๆ ทำให้โครงงานนี้ถูกต้องสมบูรณ์มากขึ้น และขอขอบพระคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำโครงงานครั้งนี้ ซึ่งทำให้โครงงานลุล่วงไปได้ด้วยดี

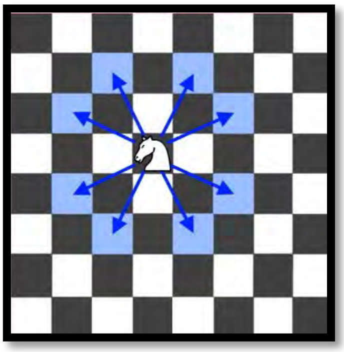
สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัวและเพื่อน ๆ ที่คอยเป็นกำลังใจและให้คำแนะนำ โดยเฉพาะนางสาวอิ่มบุญ เนียมน้อย ที่คอยสอนและให้คำแนะนำต่าง ๆ มาตลอดการทำโครงงานนี้

สารบัญ

สารบัญภาพ

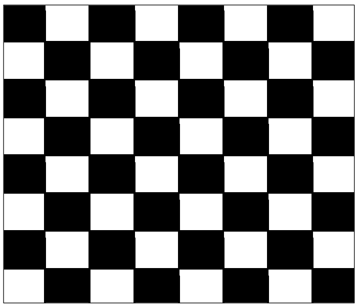
บทที่ 1
บทนำและความรู้พื้นฐาน

"ม้า" หมากตัวหนึ่งในเกมหมากรุก ซึ่งมีลักษณะการเดินที่แตกต่างไปจากหมากตัวอื่น ๆ กล่าวคือ ม้าจะเดินสองช่องในแนวนอนและเดินไปอีกหนึ่งช่องในแนวตั้ง หรือ เดินสองช่องในแนวตั้งและเดินไปอีกหนึ่งช่องในแนวนอน ซึ่งลักษณะการเดินจะเหมือนตัวอักษร "L" นั่นเอง และเรียกการเดินแบบนี้ว่าการเดินแบบปกติของม้า



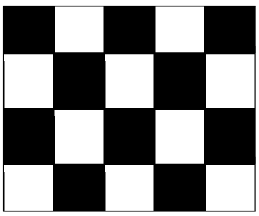
ภาพที่ 1.1 ช่องที่ม้าเดินแบบปกติไปถึงได้จากตำแหน่งของม้าที่กำหนดให้

กระดานหมากรุกมาตรฐานจะมีขนาด 8×8 ประกอบด้วย ช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถวและแปดหลัก โดยแต่ละช่องจะทาสีขาวและดำสลับกัน



ภาพที่ 1.2 กระดานหมากรุกขนาดมาตรฐาน

ต่อมาได้มีการขยายกระดานหมากรุกเป็นกระดานหมากรุกขนาด $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ ที่ประกอบด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มี m แถว และ n หลัก ทาสีขาวและดำสลับกันในแต่ละช่อง



ภาพที่ 1.3 ตัวอย่างกระดานหมากรุกขนาด 4×5

ในปี ค.ศ. 1991 Schwenk [3] สามารถหาวิธีการเดินม้าหมากรุกแบบปิดได้ สำหรับตารางหมากรุกขนาด $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ โดยที่ m น้อยกว่า n ภายใต้เงื่อนไขบางประการ ในปี ค.ศ. 2013 Miller และ Farnsworth [2] ได้พิจารณากระดานหมากรุกขนาด $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ ที่ m และ n ลู่เข้าสู่อนันต์ หรือที่เรียกว่า *กระดานหมากรุกแบบอนันต์* ซึ่งมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวนอนและช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตามแนวตั้งเป็นจำนวนอนันต์ แล้วหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เท่ากับ $1, 8, 32, 68, 96$ และ $28\mathrm{k} - 20$ ช่อง เมื่อ $\mathrm{k} = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $\mathrm{k} \geq 5$ ตามลำดับ และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินไปถึงได้ในการเดิน k ครั้ง เท่ากับ $1, 9, 41, 109$ และ $14\mathrm{k}^2 - 6\mathrm{k} + 5$ ช่อง เมื่อ $\mathrm{k} = 0, 1, 2, 3$ และ $\mathrm{k} \geq 4$ ตามลำดับ

8	9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8
9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
8	7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7
8	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8
7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7
6	7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	4	1	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	2	3	K	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	2	3	4	1	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6
7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7
6	7	6	5	6	5	4	5	4	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6
7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7
8	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8
7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7
8	7	8	7	6	7	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
8	9	8	7	8	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8

ภาพที่ 1.4 ส่วนหนึ่งของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์โดยกำหนดให้ K เป็นจุดเริ่มต้นของการเดินม้าแบบปกติ และตัวเลขต่าง ๆ ที่กำกับในช่องเป็นจำนวนครั้ง $\mathrm{k} \leq 9$ ที่น้อยที่สุดที่ม้าเดินแบบปกติไปถึงช่องเหล่านั้นได้

ทั้งนี้การนับจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้จากจุดเริ่มต้นที่กำหนดให้นั้น จะพิจารณาการเดิน k ครั้งที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ที่ม้าจะไปถึงช่องดังกล่าว ในบทความฉบับนี้จึงใช้คำว่า "จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง" และหากช่องใดม้าเคยเดินไปถึงแล้วภายในการเดินเพียง k ครั้ง จะไม่นับช่องดังกล่าวซ้ำอีกในการเดินครั้งต่อไปที่มากกว่า k

ในปี ค.ศ. 2003 Chia และOng [1] ได้ปรับเปลี่ยนการเดินแบบปกติของม้าไปเป็น การเดินแบบ (a, b) ของม้า นั่นคือ การเดินม้าไป a ช่องตามแนวตั้งหรือแนวนอนแล้วเดินเลี้ยวทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง นอกจากนี้ยังสามารถพิจารณาได้โดยง่ายว่าการเดินแบบ (a, b) ของม้า จะเหมือนกับการเดินแบบ (b, a) ของม้า ดังนั้นในโครงงานฉบับนี้จึงพิจารณาการเดินแบบ (a, b) ของม้า เมื่อ

กำหนดให้ $a \leq b$ นอกจากนี้ยังได้ด้วยว่าการเดินแบบปกติของม้า คือ การเดินแบบ $(1,2)$ ของม้า สังเกตว่าถ้าให้ (i,j) เป็นช่องบนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เป็นจุดเริ่มต้น แล้วม้าจะสามารถเดินแบบ (a,b) ไปได้จำนวน 8 ช่อง กล่าวคือ $(i \pm a, j \pm b)$ และ $(i \pm b, j \pm a)$ (หรือ 4 ช่อง ในกรณีที่ $a = b$) นอกจากนี้ยังสังเกตได้อีกว่า ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ม้าจะสามารถเดินไปได้ทุกช่องบนกระดานขนาดอนันต์ แต่ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนเต็มคู่ ม้าจะสามารถเดินช่องสีดำไปช่องสีดำ หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีขาวเท่านั้น

ในปี ค.ศ. 2018 Theprod [4] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] เพื่อหาสูตรจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1,b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $b \in \{3,4,5,7\}$

ต่อมาในปี พ.ศ. 2562 รตินันท์ และ คณะ [5] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] และ Theprod [4] มาเป็นการหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2,b)$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็ม $b \in \{2,4,6,8\}$ ซึ่งได้ผลดังนี้

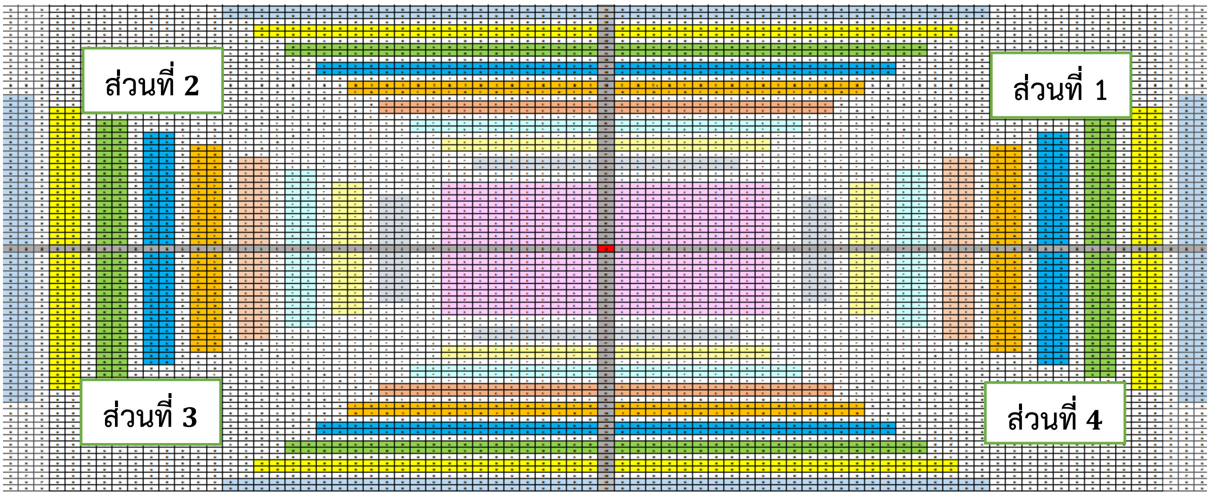
b	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2,b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง
2	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง และ $k \geq 1$ เดินได้ $4k$ ช่อง
4 และ 6	$k = 0,1,2,3,4$ เดินได้ $1,8,32,68,96$ ช่อง ตามลำดับ และ $k \geq 5$ เดินได้ $28k - 20$ ช่อง
8	$k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ เดินได้ $1,8,32,88,192,324,448,548,620$ ช่อง ตามลำดับและ $k \geq 9$ เดินได้ $92k - 132$ ช่อง

ในโครงงานฉบับนี้จะขยายแนวคิดของทั้ง Miller และ Farnsworth [2], Theprod [4] และรตินันท์และคณะ [5] เพื่อหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2,b)$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $b \geq 3$

บทที่ 2
ทฤษฎีบทหลัก

2.1 การเดินของม้าแบบ $(2,3)$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2,3)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังภาพ



ภาพที่ 2.1 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ออกเป็น 4 ส่วน

จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ 1, 8, 32, 88, 188, 304, 376, 416 และ 472 ช่อง ตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 9$ เนื่องจากการเดินของม้าแบบ $(2,3)$ ม้าจะสามารถเดินไปได้ทุกช่องบนกระดานขนาดอนันต์ และจากจุดเริ่มต้นม้าจะเดินไปได้เพียง 8 ช่อง อย่างไรก็ดีการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k

ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้นดังภาพที่ 2.2

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์และเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \geq 4$ เท่ากับ $34t - 1$ ช่อง และเมื่อ $k = 2t$ และ $t \geq 5$ เท่ากับ $34t - 18$ ช่อง

บทพิสูจน์

กรณี 1 k เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $k = 2t + 1$ และ $t \geq 4$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 9 ปรากฏ 27 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) + (4+4+4+4+4) + (5+5+5) + 8 + 11 + 11 + 10 + 10 + 9 + 5 = 135$ **ช่อง**

ช่องที่กำกับด้วยเลข 11 ปรากฏ 33 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) + (4+4+4+4+4) + (5+5+5+5+5) + 9 + 13 + 13 + 12 + 12 + 11 + 6 = 169$ **ช่อง**

ช่องที่กำกับด้วยเลข 13 ปรากฏ 39 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) + (4+4+4+4+4) + (5+5+5+5+5+5+5) + 10 + 15 + 15 + 14 + 14 + 13 + 7 = 203$ **ช่อง**

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏเมื่อ $k = 2t + 1$ และ $t \geq 4$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4t-4 \text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5 \text{ ตัว}} + \underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2t-5 \text{ ตัว}} + (t+4) + (2t+3) + (2t+3) + (2t+2) + (2t+2) + (2t+1) + (t+1) = 34t - 1$ **ช่อง**

กรณี 2 k เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $k = 2t$ และ $t \geq 5$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 10 ปรากฏ 30 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) + (4+4+4+4+4) + (5+5+5+5) + 8 + 12 + 12 + 11 + 11 + 10 + 6 = 152$ **ช่อง**

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 36 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) + (4+4+4+4+4) + (5+5+5+5+5+5) + 9 + 14 + 14 + 13 + 13 + 12 + 7 = 186$ **ช่อง**

ช่องที่กำกับด้วยเลข 14 ปรากฏ 39 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3+3) + (4+4+4+4+4) + (5+5+5+5+5+5+5+5) + 10 + 16 + 16 + 15 + 15 + 14 + 8 = 220$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏเมื่อ $\mathrm{k} = 2\mathrm{t}$ และ $\mathrm{t} \geq 5$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{\big(3+3+3+\cdots+3\big)}_{4\mathrm{t}-6\text{ ตัว}} + \underbrace{\big(4+4+4+4+4\big)}_{5\text{ ตัว}} + \underbrace{\big(5+5+5+\cdots+5\big)}_{2\mathrm{t}-6\text{ ตัว}} + \big(\mathrm{t}+3\big) + \big(2\mathrm{t}+2\big) + \big(2\mathrm{t}+2\big) + \big(2\mathrm{t}+1\big) + \big(2\mathrm{t}+1\big) + \big(2\mathrm{t}\big) + \big(\mathrm{t}+1\big) = 34\mathrm{t} - 18$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความข้างต้น เราจะใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 9$ สมมติว่าถ้า $\mathrm{k} = 2\mathrm{t}+1$ และ $\mathrm{t} \geq 4$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $6\mathrm{t}+3$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4\mathrm{t}-4\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5\text{ ตัว}} + \underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2\mathrm{t}-5\text{ ตัว}} + (\mathrm{t}+4) + (2\mathrm{t}+3) + (2\mathrm{t}+3) + (2\mathrm{t}+2) + (2\mathrm{t}+2) + (2\mathrm{t}+1) + (\mathrm{t}+1)$ ช่อง

และถ้า $\mathrm{k} = 2\mathrm{t}$ และ $\mathrm{t} \geq 5$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $6\mathrm{t}$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4\mathrm{t}-6\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5\text{ ตัว}} + \underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2\mathrm{t}-6\text{ ตัว}} + (\mathrm{t}+3) + (2\mathrm{t}+2) + (2\mathrm{t}+2) + (2\mathrm{t}+1) + (2\mathrm{t}+1) + (2\mathrm{t}) + (\mathrm{t}+1)$ ช่อง

กรณี $\mathrm{k} = 2\mathrm{t}+1$ และ $\mathrm{t} \geq 4$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่งที่ห่างกันสองหลักเท่านั้น ยกเว้นในสองหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $4\mathrm{t}-4$ ในแต่ละหลัก จะเดินม้าไปทางขวาสองครั้งสลับซ้ายอีกสองครั้งไปเรื่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นสองหลักสุดท้าย เดินไปได้ทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4\mathrm{t}-2\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4\mathrm{t}-3$ ถึงหลักที่ $4\mathrm{t}+1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4\mathrm{t}+2$ ถึงหลักที่ $6\mathrm{t}-4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2\mathrm{t}-5\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $6\mathrm{t}-3$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 5 ช่องบน จะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 5 ช่อง

ในหลักที่ $6\mathrm{t}-2$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ 5 จะเดินลงไปทางขวาได้ 1 ช่อง ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ 6 จะเดินขึ้นไปทางขวาได้ 1 ช่อง นอกจากนี้ม้าที่อยู่ตำแหน่ง 2 ตัวสุดท้ายในหลักจะไม่สามรถเดินต่อได้ ส่วนม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ 7 จนถึงตัวสุดท้าย นั่นคือตัวที่ $2\mathrm{t}+3$ ม้าจะเดินลงทางขวาได้ตัวเว้นตัวจะเริ่มจากตัวแรก

โดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\left\lceil\frac{2t-5}{2}\right\rceil = t-2$ ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $4+1+1+(t-2) = t+4$ ช่อง

ในหลักที่ $6t-1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สามนับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+4$ ช่อง

ในหลักที่ $6t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นสองตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+4$ ช่อง

ในหลักที่ $6t+1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สามนับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+3$ ช่อง

ในหลักที่ $6t+2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นสองตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+3$ และม้าในหลักนี้ที่ตำแหน่งรองสุดท้าย ยังเดินไปยังสามหลักถัดมาลงมาทางขวาได้อีก 1 ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $2t+4$ ช่อง

ในหลักที่ $6t+3$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 2 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้เพียง 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+1$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+2$ ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $3t+3$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4t-2\text{ ตัว}} + \underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5\text{ ตัว}} + \underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2t-5\text{ ตัว}} + 5 + (t+4) + (2t+4) + (2t+4) + (2t+3) + (2t+4) + (3t+3) = 34t+16 = 34(t+1) - 18$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 5$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่งที่ห่างกันสองหลักเท่านั้น ยกเว้นในหลักสุดท้าย

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $4t-6$ ในแต่ละหลัก จะเดินม้าไปทางขวาไปเรื่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่สามและหลักที่สี่นับจากหลักแรก เดินไปได้ทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4t-4\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t-5$ ถึงหลักที่ $4t-1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ถึงหลักที่ $6t-7$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2t-6\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $6t-6$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 5 ช่องบน จะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้เพียง 5 ช่อง

ในหลักที่ $6t-5$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 4 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 4 ช่อง ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ 5 จนถึงตัวสุดท้าย นั่นคือตัวที่ $2t+2$ ม้าจะเดินลงทางขวาได้ตัวเว้นตัวจะเริ่มจากตัวแรกโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{2t-2}{2}=t-1$ ช่อง ยกเว้นช่องสุดท้ายเดินลงทางขวาได้อีก 1 ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $4+(t-1)+1=t+4$ ช่อง

ในหลักที่ $6t-4$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สามนับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+3$ ช่อง

ในหลักที่ $6t-3$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นสองตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+3$ ช่อง

ในหลักที่ $6t-2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สามนับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+2$ ช่อง

ในหลักที่ $6t-1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นสองตัวรองสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+2$ ช่อง

ในหลักที่ $6t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 2 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้เพียง 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+1$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t+1$ ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $3t+2$ ช่อง

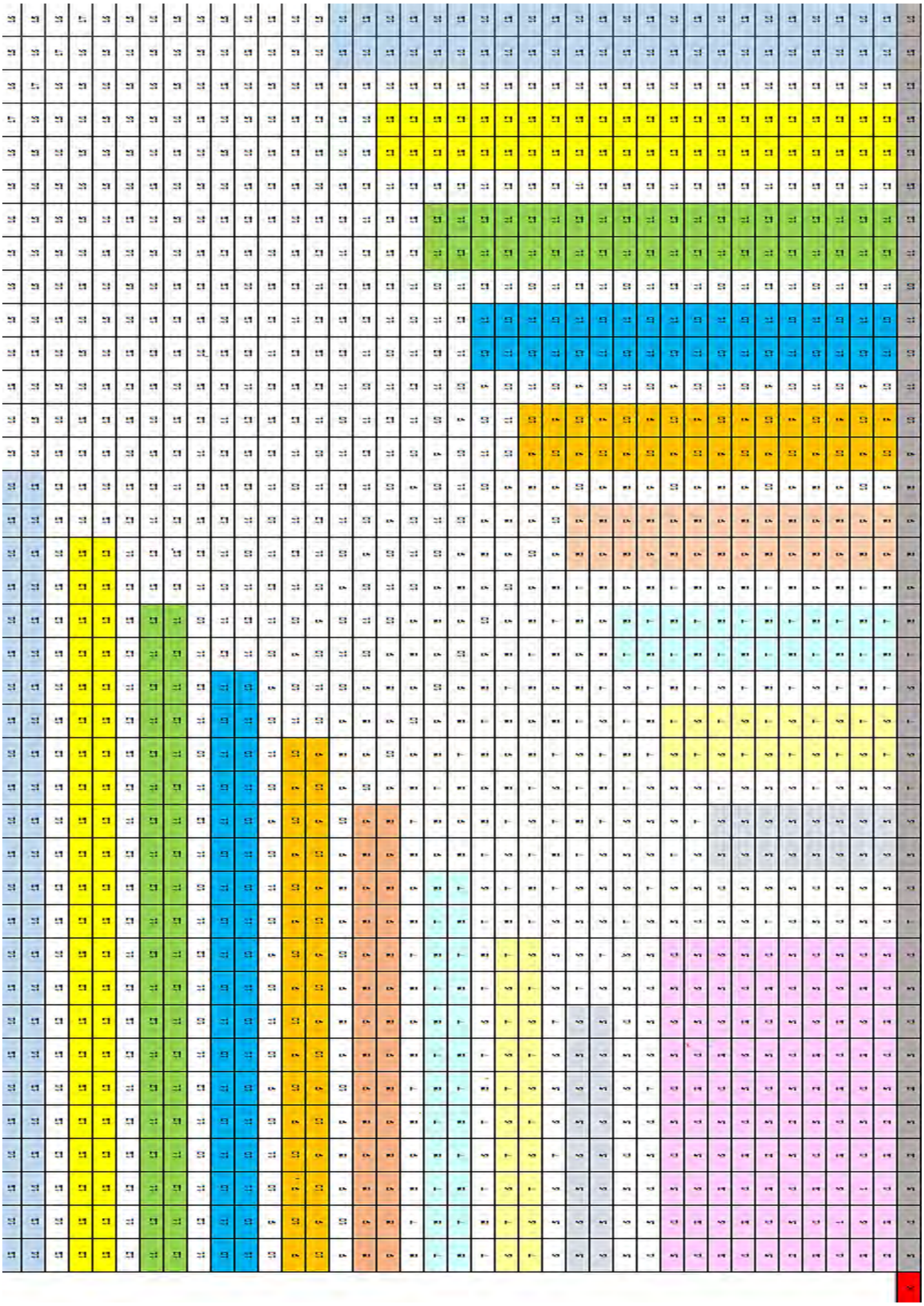
ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k+1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(3+3+3+\cdots+3)}_{4t-4\text{ ตัว}}+\underbrace{(4+4+4+4+4)}_{5\text{ ตัว}}+\underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{2t-6\text{ ตัว}}+5+(t+4)+(2t+3)+(2t+3)+(2t+2)+(2t+2)+(3t+2)=34t-1$ ช่อง □

ทฤษฎีบท 2.1 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 เท่ากับ 1, 8, 32, 88, 188, 304, 376, 416 และ 472 ช่อง ตามลำดับ และ เมื่อ $k=2t+1$ ที่ $t\geq 4$ เท่ากับ $136t-4=68k-72$ ช่อง และเมื่อ $k=2t$ และ $t\geq 5$ เท่ากับ $136t-72=68k-72$ ช่อง

บทพิสูจน์ เมื่อ $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 8 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.1 และ เมื่อ $k=2t+1$ ที่ $t\geq 4$ และ $k=2t$ ที่ $t\geq 5$ สามารถสรุปผลได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.2 และการที่แต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K □

บทแทรก 2.1 จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 เท่ากับ $1, 9, 41, 129, 317, 612, 997, 1413$ และ 1885 ช่อง ตามลำดับ เมื่อ $k \geq 9$ เท่ากับ $34k^2 - 38k + 13$ ช่อง

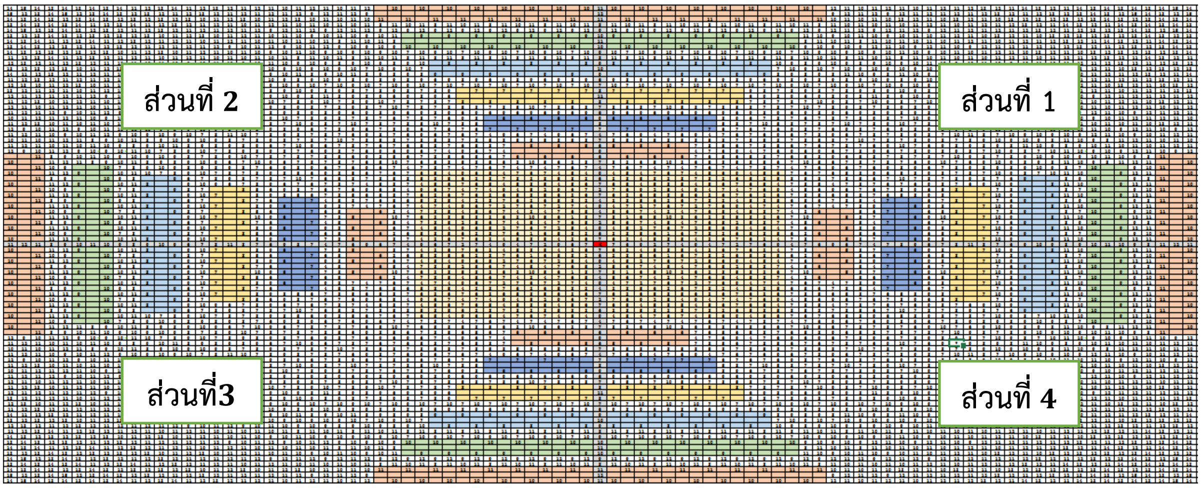
บทพิสูจน์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ และ 8 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากส่วนแรกของทฤษฎีบท 2.1 และ เมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \geq 4$ และ $k = 2t$ ที่ $t \geq 5$ สามารถสรุปจากส่วนหลังของทฤษฎีบท 2.1 ได้ว่าจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง เมื่อ $k \geq 9$ จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เท่ากับ $1885 + \sum_{i=9}^{k}(68i - 72) = 34k^2 - 38k + 13$ ช่อง $\square$



ภาพที่ 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,3)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 14$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

2.2 การเดินของม้าแบบ $(2,5)$

พิจารณาการเดินของม้าแบบ $(2,5)$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ จากจุดเริ่มต้นที่กำหนด เราจะแบ่งกระดานหมากรุกออกเป็น 4 ส่วน ด้วยหลักแนวตั้งและแถวแนวนอนที่ผ่านจุดกำเนิดดังภาพ



ภาพที่ 2.3 การแบ่งกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,5)$ ออกเป็น 4 ส่วน

จากการพิจารณาด้วยการนับโดยตรงจะได้จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,5)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ด้วยการนับโดยตรง เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ และ 11 ดังทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.3 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,5)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ และ 11 เท่ากับ 1, 8, 32, 88, 192, 360, 608, 856, 1068, 1256, 1388 และ 1500 ช่อง ตามลำดับ

ในกรณีที่ $k \geq 12$ เนื่องจากการเดินของม้าแบบ $(2,5)$ ม้าจะสามารถเดินไปได้ทุกช่องบนกระดานขนาดอนันต์ และจากจุดเริ่มต้นม้าจะเดินไปได้เพียง 8 ช่อง อย่างไรก็ดีการเดินไปในแต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K อีกด้วย ดังนั้นในการนับจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จึงเพียงพอที่จะแยกพิจารณาจำนวนช่องที่ม้าเดินไปถึงได้ด้วยการเดินเพียง k ครั้ง จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K เท่านั้นดังภาพที่ 2.4

ทฤษฎีบทประกอบ 2.4 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,5)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง บนส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์และเมื่อ $k = 2t$ และ $t \geq 6$ เท่ากับ $82t - 82$ ช่อง และเมื่อ $k = 2t + 1$ ที่ $t \geq 6$ เท่ากับ $82t - 41$ ช่อง

บทพิสูจน์

กรณี 1 k เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $k = 2t$ และ $t \geq 6$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 12 ปรากฏ 54 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5) + (7+5+5) + (7+5+5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + (5+6+10) + (5+6+10) + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + 21 + 5 + 6 + 20 + 6 + 6 + 18 + 14 + 6 + 17 + 9 + 15 + 12 + 14 + 12 + 7 = 410$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 14 ปรากฏ 64 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5) + (7+5+5) + (7+5+5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + 23 + 5 + 6 + 22 + 6 + 6 + 20 + 16 + 6 + 19 + 10 + 17 + 14 + 16 + 14 + 8 = 492$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 16 ปรากฏ 74 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5) + (7+5+5) + (7+5+5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + 25 + 5 + 6 + 24 + 6 + 6 + 22 + 18 + 6 + 21 + 11 + 19 + 16 + 18 + 16 + 9 = 574$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏเมื่อ $k = 2t$ และ $t \geq 6$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{4t-8\text{ ตัว}} + (7+5+5) + (7+5+5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + \underbrace{((5+6+10)+\cdots+(5+6+10))}_{2t-10\text{ ตัว}} + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + (2t+9) + 5 + 6 + (2t+8) + 6 + 6 + (2t+6) + (2t+2) + 6 + (2t+5) + (t+3) + (2t+3) + (2t) + (2t+2) + (2t) + (t+1) = 82t - 82$ ช่อง

กรณี 2 k เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $k = 2t + 1$ และ $t \geq 6$ จากส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K จะเห็นว่า

ช่องที่กำกับด้วยเลข 13 ปรากฏ 59 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5) + (7+5+5) + (7+5+5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + (5+6+10) + (5+6+10) + (5+6+10) + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + 22 + 5 + 6 + 21 + 6 + 6 + 19 + 15 + 6 + 18 + 10 + 16 + 13 + 15 + 13 + 7 = 451$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 15 ปรากฏ 69 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5) + (7+5+5) + (7+5+5) + 6+7+5+6+9+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+5+6+11+5+6+24+5+6+23+6+6+21+17+6+20+11+18+15+17+15+8 = 533$ ช่อง

ช่องที่กำกับด้วยเลข 17 ปรากฏ 79 หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $(5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5)+(7+5+5)+(7+5+5)+6+7+5+6+9+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+(5+6+10)+5+6+11+5+6+26+5+6+25+6+6+23+19+6+22+12+20+17+19+17+9 = 615$ ช่อง

ด้วยวิธีการนับแบบนี้จะได้ว่าช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏเมื่อ $k = 2t+1$ และ $t \geq 6$ ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{\left(5+5+5+\cdots+5\right)}_{4t-6\text{ ตัว}} + (7+5+5)+(7+5+5)+6+7+5+6+9+\underbrace{\left((5+6+10)+\cdots+(5+6+10)\right)}_{2t-9\text{ ตัว}} + 5+6+11+5+6+\left(2t+10\right)+5+6+\left(2t+9\right)+6+6+\left(2t+7\right)+\left(2t+3\right)+6+\left(2t+6\right)+\left(t+4\right)+\left(2t+4\right)+\left(2t+1\right)+\left(2t+3\right)+\left(2t+1\right)+\left(t+1\right) = 82t-41$ ช่อง

เพื่อพิสูจน์ข้อความข้างต้น เราจะใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 12$ สมมติว่าถ้า $k = 2t$ และ $t \geq 6$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $10t-6$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน $\underbrace{\left(5+5+5+\cdots+5\right)}_{4t-8\text{ ตัว}} + (7+5+5)+(7+5+5)+6+7+5+6+9+\underbrace{\left((5+6+10)+\cdots+(5+6+10)\right)}_{2t-10\text{ ตัว}} + 5+6+11+5+6+\left(2t+9\right)+5+6+\left(2t+8\right)+6+6+\left(2t+6\right)+\left(2t+2\right)+6+\left(2t+5\right)+\left(t+3\right)+\left(2t+3\right)+\left(2t\right)+\left(2t+2\right)+\left(2t\right)+\left(t+1\right)$ ช่อง

และถ้า $k = 2t+1$ และ $t \geq 6$ แล้วช่องที่กำกับด้วยเลข k ปรากฏ $10t-1$ หลัก ในหลักเหล่านั้นมีอยู่จำนวน$\underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{4t-6\text{ ตัว}}+(7+5+5)+(7+5+5)+6+7+5+6+9+\underbrace{((5+6+10)+\cdots+(5+6+10))}_{2t-9\text{ ตัว}}+5+6+11+5+6+(2t+10)+5+6+(2t+9)+6+6+(2t+7)+(2t+3)+6+(2t+6)+(t+4)+(2t+4)+(2t+1)+(2t+3)+(2t+1)+(t+1)$ ช่อง

กรณี $k = 2t$ และ $t \geq 6$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่งที่ห่างกันสองหลักเท่านั้น ยกเว้นในบางหลักซึ่งจะอธิบายเพิ่มเติมในการนับครั้งนั้น ๆ

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $4t-8$ ในแต่ละหลัก จะเดินม้าไปทางขวาสองครั้งซ้ายสองครั้งสลับไปเรื่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นหลักที่สาม และหลักที่สี่ นับจากหลักแรก เดินไปได้ทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(5+5+5+\cdots+5)}_{4t-6\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t-7$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 7 ช่อง

ในหลักที่ $4t-6$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t-5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t-4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 7 ช่อง

ในหลักที่ $4t-3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t-2$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t-1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 7 ช่อง

ในหลักที่ $4t+1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t+2$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $4t+3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 9 ช่อง

ในหลักที่ $4t+4$ ถึงหลักที่ $10t-27$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(5+6+10)+\cdots+(5+6+10)}_{2t-10\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-26$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $10t-25$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-24$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่ไม่สามารถเดินได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 10 ช่อง

ในหลักที่ $10t-23$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $10t-22$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-21$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 9 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 9 ช่อง นอกจากนั้นม้าที่อยู่ตำแหน่งที่สิบเอ็ดและตำแหน่งที่สิบสาม จะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด 11 ช่อง

ในหลักที่ $10t-20$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $10t-19$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-18$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สี่และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+10$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-17$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่ไม่สามารถเดินได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง และตัวที่สามจากบนสุดยังเดินขึ้นบนไปทางขวายังช่องถัด ๆ ไปได้อีก 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้รวม 6 ช่อง

ในหลักที่$10t-16$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-15$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สาม สี่ และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+9$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-14$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 3 ช่อง นอกจากนั้นม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ห้าและตำแหน่งที่เจ็ด จะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ดังนั้นจึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด 5 ช่อง นอกจากนี้ม้าในหลักนี้ทุกตัวยังเดินขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินลงไปทางขวาได้ด้วย ดังนั้นจึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $2t+3$ ช่อง ทำให้ได้ช่องที่ม้าเดินถัดไปได้ทั้งหมด $2t+8$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-13$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-12$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สี่และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+7$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-11$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t-10$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 6 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง และตำแหน่งที่ 3 จากด้านบนจะเดินขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปได้อีก 1 ช่อง ทำให้ได้ช่องที่ม้าเดินถัดไปได้ทั้งหมด 7 ช่อง

ในหลักที่ $10t-9$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สาม สี่ และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+6$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-8$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t-7$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 2 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 2 ช่อง ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ 3 จนถึงตัวสุดท้าย นั่นคือตัวที่ $2t$ ม้าจะเดินขึ้นทางขวาได้ตัวเว้นตัวจะเริ่มจากตัวแรกโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{2t-2}{2}=t-1$ ช่อง นอกจากนี้ ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่สามและห้านับจากตัวสุดท้ายเดินลงทางขวาได้อีก 1 ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $2+(t-1)+2=t+3$ ช่อง นอกจากนี้ม้าทุกตัวในหลักนี้ ยังเดินขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินได้ 2 ช่อง ทำให้เดินได้อีก $2t+1$ ช่อง ทำให้ได้ช่องที่ม้าเดินถัดไปได้ทั้งหมด $3t+4$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 6$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สี่และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 5$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t - 4$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t - 3$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สาม สี่ และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง นอกจากนี้ม้าที่อยู่ตำแหน่งตัวรองสุดท้ายยังสามารถเดินลงขวาไปหลักถัด ๆ ไปโดยซ้ำกันได้อีก 1 ช่อง ดังนั้นจึงนับช่องที่ม้าสามารถเดินต่อไปได้ทั้งหมด $2t + 4$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 2$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t - 1$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 2 ช่อง ยกเว้นสองตัวสุดท้ายที่เดินไปได้เพียง 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 1$ ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $3t + 1$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(5 + 5 + 5 + \cdots + 5)}_{4t-6\text{ ตัว}} + (7 + 5 + 5) + (7 + 5 + 5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + \underbrace{((5 + 6 + 10) + \cdots + (5 + 6 + 10))}_{2t-10\text{ ตัว}} + 5 + 6 + 10 + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + (2t + 10) + 6 + 6 + (2t + 9) + (2t + 8) + 6 + (2t + 7) + 7 + (2t + 6) + (3t + 4) + (2t + 4) + (2t + 4) + (3t + 1) = 82t - 41$ ช่อง

กรณี $k = 2t + 1$ และ $t \geq 6$ เพื่อให้สะดวกในการนับ จะนับเฉพาะการเดินม้าจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่งที่ห่างกันสองหลักเท่านั้น ยกเว้นในบางหลักซึ่งจะอธิบายเพิ่มเติมในการนับครั้งนั้น ๆ

ในหลักที่ 1 ถึงหลักที่ $4t - 6$ ในแต่ละหลัก จะเดินม้าไปทางขวาสองครั้งสลับซ้ายอีกสองครั้งไปเรื่อย ๆ โดยไม่ซ้ำกันได้อีกเพียงตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นสองหลักสุดท้าย เดินไปได้ทั้งทางซ้ายและขวา จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(5 + 5 + 5 + \cdots + 5)}_{4t-4\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $4t - 5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 7 ช่อง

ในหลักที่ $4t - 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t - 3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t - 2$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 7 ช่อง

ในหลักที่ $4t - 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t + 1$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $4t + 2$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 7 ช่อง

ในหลักที่ $4t + 3$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $4t + 4$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $4t+5$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 9 ช่อง

ในหลักที่ $4t+6$ ถึงหลักที่ $10t-22$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\underbrace{(5+6+10)+\cdots+(5+6+10)}_{2t-9\text{ ตัว}}$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-21$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $10t-20$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-19$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่ไม่สามารถเดินได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 10 ช่อง

ในหลักที่ $10t-18$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $10t-17$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-16$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 9 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 9 ช่อง นอกจากนั้นม้าที่อยู่ตำแหน่งที่สิบเอ็ดและตำแหน่งที่สิบสาม จะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด 11 ช่อง

ในหลักที่ $10t-15$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง

ในหลักที่ $10t-14$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-13$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สี่และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+11$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-12$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่ไม่สามารถเดินได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 5 ช่อง และม้าตัวที่สามจากบนสุดเดินขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปได้อีก 1 ช่อง ดังนั้นจึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-11$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t-10$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สาม สี่ และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t+10$ ช่อง

ในหลักที่ $10t-9$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกัน จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 3 ช่อง นอกจากนั้นม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ห้าและตำแหน่งที่เจ็ด จะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด 5 ช่อง นอกจากนี้ม้าในหลักนี้ทุกตัว ยังเดิน

ขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินลงไปทางขวาได้ด้วย ดังนั้นจึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $2t + 4$ ช่อง ทำให้ได้ช่องที่ม้าเดินถัดไปได้ทั้งหมด $2t + 9$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 8$ ม้าจะเดินต่อไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง

ในหลักที่ $10t - 7$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สี่และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t + 8$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 6$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t - 5$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 6 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 6 ช่อง และตำแหน่งที่ 3 จากด้านบนจะเดินขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปได้อีก 1 ช่อง ทำให้ได้ช่องที่ม้าเดินถัดไปได้ทั้งหมด 7 ช่อง

ในหลักที่ $10t - 4$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สาม สี่ และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t + 7$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 3$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t - 2$ ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง 3 ช่องบน จะเดินขึ้นไปทางขวาถึงหลักถัดไปโดยไม่ซ้ำกันได้ จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ 3 ช่อง ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่ 4 จนถึงตัวสุดท้าย นั่นคือตัวที่ $2t + 1$ ม้าจะเดินขึ้นทางขวาได้ตัวเว้นตัวจะเริ่มจากตัวแรกโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง นอกจากนี้ ม้าที่อยู่ตำแหน่งที่สี่นับจากตัวสุดท้ายเดินลงทางขวาได้อีก 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $\frac{2t-2}{2} = t - 1$ ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $3 + (t - 1) + 1 = t + 3$ ช่อง นอกจากนี้ม้าทุกตัวในหลักนี้ ยังเดินขึ้นไปทางขวายังหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำกันได้อีกตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวรองสุดท้ายที่เดินได้ 2 ช่อง ทำให้เดินได้อีก $2t + 2$ ช่อง ทำให้ได้ช่องที่ม้าเดินถัดไปได้ทั้งหมด $3t + 5$ ช่อง

ในหลักที่ $10t - 1$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สี่และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t + 5$ ช่อง

ในหลักที่ $10t$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t + 1$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t + 2$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวที่สาม สี่ และห้านับจากตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง นอกจากนี้ม้าที่อยู่ตำแหน่งตัวที่สามนับจากตัวสุดท้ายยังสามารถเดินลงขวาไปหลักถัด ๆ ไปโดยซ้ำกันได้อีก 1 ช่อง ดังนั้นจึงนับช่องที่ม้าสามารถเดินต่อไปได้ทั้งหมด $2t + 5$ ช่อง

ในหลักที่ $10t + 3$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t + 4$ ไม่มีเลข k ปรากฏ

ในหลักที่ $10t + 5$ ม้าจะเดินไปทางขวาโดยไม่ซ้ำกันได้ตัวละ 2 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้เพียง 1 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $2t + 1$ ช่อง และม้าในหลักนี้ ยังเดินไปหลักเดินไปหลักถัด ๆ ไปโดยไม่ซ้ำ

กันได้ตัวละ 1 ช่อง ยกเว้นตัวสุดท้ายที่เดินไปได้ 2 ช่อง จึงนับช่องที่เดินต่อไปได้ $t + 2$ ช่อง ดังนี้จึงนับช่องที่ม้าเดินต่อไปได้ทั้งหมด $3t + 3$ ช่อง

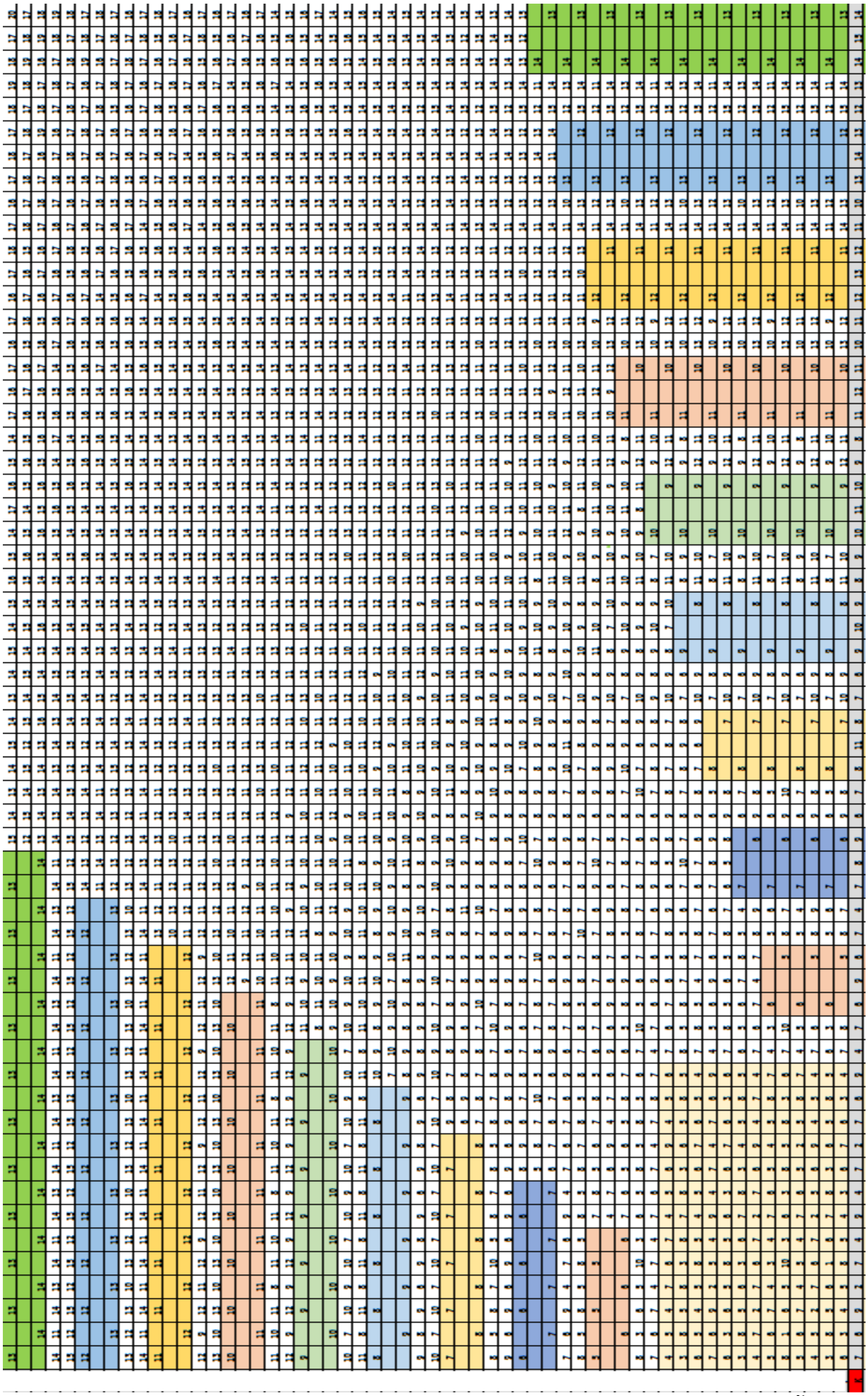
ดังนั้นผลรวมของช่องที่จะปรากฏเลข $k + 1$ จึงมีทั้งหมด $\underbrace{(5 + 5 + 5 + \cdots + 5)}_{4t-4 \text{ ตัว}} + (7 + 5 + 5) + (7 + 5 + 5) + 6 + 7 + 5 + 6 + 9 + \underbrace{((5 + 6 + 10) + \cdots + (5 + 6 + 10))}_{2t-9 \text{ ตัว}} + 5 + 6 + 10 + 5 + 6 + 11 + 5 + 6 + (2t + 11) + 6 + 6 + (2t + 10) + (2t + 9) + 6 + (2t + 8) + 7 + (2t + 7) + (3t + 5) + (2t + 5) + (2t + 5) + (3t + 3) = 82t$ ช่อง □

ทฤษฎีบท 2.2 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 5)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ และ 11 เท่ากับ $1, 8, 32, 88, 192, 360, 608, 856, 1068, 1256, 1388$ และ 1500 ช่อง ตามลำดับ และ เมื่อ $k = 2t$ และ $t \geq 6$ เท่ากับ $328t - 328 = 168k - 328$ ช่อง และเมื่อ $k = 2t + 1$ และ $t \geq 6$ เท่ากับ $328t - 164 = 168k - 328$ ช่อง

บทพิสูจน์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ และ 11 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.3 และ เมื่อ $k = 2t$ และ $t \geq 6$ และ $k = 2t + 1$ และ $t \geq 6$ สามารถสรุปผลได้จากทฤษฎีบทประกอบ 2.4 และการที่แต่ละส่วนของกระดานนั้นมีความสมมาตรกันทั้ง 4 ส่วน และมีสมมาตรกันตามหลักแนวตั้งและแถวแนวนอน ในทิศทางขึ้น ลง ซ้าย และขวา จากจุดเริ่มต้น K □

บทแทรก 2.2 จำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 5)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ และ 11 เท่ากับ $1, 9, 41, 129, 321, 681, 1289, 2145, 3213, 4469, 5857$ และ 7357 ช่อง ตามลำดับ เมื่อ $k \geq 12$ เท่ากับ $84k^2 - 244k - 123$

บทพิสูจน์ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ และ 11 สามารถสรุปผลโดยตรงได้จากส่วนแรกของทฤษฎีบท 2.2 และ เมื่อ $k = 2t$ ที่ $t \geq 6$ และ $k = 2t + 1$ และ $t \geq 6$ สามารถสรุปจากส่วนหลังของทฤษฎีบท 2.2 ได้ว่าจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 5)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง เมื่อ $k \geq 12$ จากจุดเริ่มต้น K บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ เท่ากับ $7357 + \sum_{i=12}^{k}(168i - 328) = 84k^2 - 244k - 123$ ช่อง □



ภาพที่ 2.4 จำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, 5)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง เมื่อ $1 \leq k \leq 14$ ในส่วนที่ 1 และแถวแนวนอนในทิศทางขวาจากจุดเริ่มต้น K

บทที่ 3
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

3.1 ข้อสรุป

โครงงานฉบับนี้พิจารณาการเดินของม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$ บนกระดานหมากรุกขนานอนันต์ โดยสามารถหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง ดังต่อไปนี้

b	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง	สูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง
3	$\mathrm{k} = 0$ เดินได้ 1 ช่อง $\mathrm{k} = 1$ เดินได้ 8 ช่อง $\mathrm{k} = 2$ เดินได้ 32 ช่อง $\mathrm{k} = 3$ เดินได้ 88 ช่อง $\mathrm{k} = 4$ เดินได้ 188 ช่อง $\mathrm{k} = 5$ เดินได้ 304 ช่อง $\mathrm{k} = 6$ เดินได้ 376 ช่อง $\mathrm{k} = 7$ เดินได้ 416 ช่อง $\mathrm{k} = 8$ เดินได้ 472 ช่อง $\mathrm{k} \geq 9$ เดินได้ $68\mathrm{k} - 72$ ช่อง	$\mathrm{k} = 0$ เดินสะสมได้ 1 ช่อง $\mathrm{k} = 1$ เดินสะสมได้ 9 ช่อง $\mathrm{k} = 2$ เดินสะสมได้ 41 ช่อง $\mathrm{k} = 3$ เดินสะสมได้ 129 ช่อง $\mathrm{k} = 4$ เดินสะสมได้ 317 ช่อง $\mathrm{k} = 5$ เดินสะสมได้ 612 ช่อง $\mathrm{k} = 6$ เดินสะสมได้ 997 ช่อง $\mathrm{k} = 7$ เดินสะสมได้ 1413 ช่อง $\mathrm{k} = 8$ เดินสะสมได้ 1885 ช่อง $\mathrm{k} \geq 9$ เดินสะสมได้ $34\mathrm{k}^2 - 38\mathrm{k} + 13$ ช่อง

b	สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง	สูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ในการเดินเพียง k ครั้งหรือน้อยกว่า k ครั้ง
5	$k = 0$ เดินได้ 1 ช่อง $k = 1$ เดินได้ 8 ช่อง $k = 2$ เดินได้ 32 ช่อง $k = 3$ เดินได้ 88 ช่อง $k = 4$ เดินได้ 188 ช่อง $k = 5$ เดินได้ 360 ช่อง $k = 6$ เดินได้ 608 ช่อง $k = 7$ เดินได้ 856 ช่อง $k = 8$ เดินได้ 1068 ช่อง $k = 9$ เดินได้ 1256 ช่อง $k = 10$ เดินได้ 1388 ช่อง $k = 11$ เดินได้ 1500 ช่อง $k \geq 12$ เดินได้ $168k - 328$ ช่อง	$k = 0$ เดินสะสมได้ 1 ช่อง $k = 1$ เดินสะสมได้ 9 ช่อง $k = 2$ เดินสะสมได้ 41 ช่อง $k = 3$ เดินสะสมได้ 129 ช่อง $k = 4$ เดินสะสมได้ 317 ช่อง $k = 5$ เดินสะสมได้ 681 ช่อง $k = 6$ เดินสะสมได้ 1289 ช่อง $k = 7$ เดินสะสมได้ 2145 ช่อง $k = 8$ เดินสะสมได้ 3213 ช่อง $k = 9$ เดินสะสมได้ 4469 ช่อง $k = 10$ เดินสะสมได้ 5857 ช่อง $k = 11$ เดินสะสมได้ 7357 ช่อง $k \geq 12$ เดินสะสมได้ $84k^2 - 244k - 123$ ช่อง

3.2 ข้อเสนอแนะ

โครงงานฉบับนี้สามารถศึกษาต่อไปได้ โดยสามารถหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ $(2, b)$ ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็มคี่ b ที่ $b \geq 3$ ที่เป็นจำนวนคี่ทั้งหมด หรือ สามารถขยายไปหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกสามารถเดินแบบ (n, b) ไปถึงได้ภายในการเดินเพียง k ครั้ง โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 3$ ได้ แต่ในกรณีดังกล่าวการเดินหนึ่งครั้งของม้าหมากรุกจะออกไปจากจุดเริ่มต้นที่กำหนดไกลมากทำให้ต้องสร้างกระดานหมากรุกขนาดใหญ่ และสูตรทั่วไปของจำนวนช่องที่ได้จะเริ่มหาได้เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามาก ๆ

เอกสารอ้างอิง

[1] Chia, G. L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's Tours on Rectangular Chessboard. Discrete Applied Math, 150, p. 80 - 89.

[2] Miller, A. M. and Farnsworth, D. L. (2013). Counting The Number of Squares Reachable in K Knight's Move. Open J. of Discrete Math, 3, p. 151 - 154.

[3] Schwenk A.L. (1991). Which rectangular chessboards have a knight's tour, Math. Magazine, 64, 325-332.

[4] Theprod, R. (2018). Formula for Number of Squares Reachable by A Knight. (Master's Thesis, Ramkhamhaeng University).

[5] รตินันท์ บุญเคลือบ อิ่มบุญ เนียมน้อย และ ราตรี เทพรอด. (2019). สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2,b)$ เมื่อ $b \in \{2,4,6,8\}$. วารสารคณิตศาสตร์ ปริมา 64 เล่มที่ 698 พฤษภาคม - สิงหาคม 2562.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย)	**สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ $(2, \mathrm{b})$ สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$**
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	**Formula for squares reachable by a knight with $(2, \mathrm{b})$ - knight's move for some odd integer b such that $\mathrm{b} \geq 3$**
อาจารย์ที่ปรึกษา	**รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ**
ผู้ดำเนินการ	**นางสาว ประพิมพรรณ ศรสิทธิ์ เลขประจำตัวนิสิต. 5933531623 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

หลักการและเหตุผล

“ ม้า ” หมากตัวหนึ่งในเกมหมากรุก ซึ่งมีลักษณะการเดินที่แตกต่างไปจากหมากตัวอื่น ๆ กล่าวคือ ม้าจะเดินสองช่องในแนวนอนและเดินไปอีกหนึ่งช่องในแนวตั้ง หรือ เดินสองช่องในแนวตั้งและเดินไปอีกหนึ่งช่องในแนวนอน ซึ่งลักษณะการเดินจะเหมือนตัวอักษร “ L ” นั่นเอง และเรียกการเดินแบบนี้ว่าการเดินแบบปกติของม้า กระดานหมากรุกมาตรฐานจะมีขนาด 8 x 8 ประกอบด้วย ช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจำนวนแปดแถวและแปดหลัก โดยแต่ละช่องจะทาสีขาวและดำสลับกัน ต่อมาได้มีการขยายกระดานหมากรุกเป็นกระดานหมากรุกขนาด m x n ที่ประกอบด้วยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มี m แถว และ n หลัก ทาสีขาวและดำสลับกันในแต่ละช่อง

ในปี ค.ศ. 1991 Schwenk [3] สามารถหาวิธีการเดินม้าหมากรุกแบบปิดได้ สำหรับตารางหมากรุกขนาด m × n โดยที่ m น้อยกว่า n ภายใต้เงื่อนไขบางประการ ในปี ค.ศ. 2003 Chia และคณะ [1] ได้เปลี่ยนรูปแบบการเดินม้าเป็นการเดินของม้าแบบ (a, b) กล่าวคือ ม้าจะเดินไปตามแนวตั้งหรือแนวนอน a ช่องแล้วเดินทำมุม 90 องศากับแนวเดิมไปอีก b ช่อง และเนื่องจากการเดินม้าแบบ (a, b) จะเหมือนกับการเดินม้าแบบ (b, a) ดังนั้นโดยไม่เสียนัยทั่วไปจะกำหนดให้ $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ และในปี ค.ศ. 2013 Miller และ Farnsworth [2] ได้พิจารณากระดานหมากรุกขนาดอนันต์ กล่าวคือ เป็นกระดานหมากรุกขนาด m x n โดยที่ m และ n ลู่เข้าสู่อนันต์ และได้หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบปกติหรือแบบ $(1, 2)$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(1, 2)$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น ในปี ค.ศ. 2018 Theprod [4] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] เพื่อหาสูตรจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(1, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดิน

เพียง k ครั้ง จากจุดเริ่มต้น K ของกระดานหมากรุกขนาดอนันต์เมื่อ $\mathrm{b} \in \{3, 4, 5, 7\}$ ต่อมาในปี พ.ศ. 2562 รตินันท์และคณะ[5] ได้ขยายแนวคิดของ Miller และ Farnsworth [2] และ Theprod [4] มาเป็นการหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็ม $\mathrm{b} \in \{2, 4, 6, 8\}$

ในโครงงานฉบับนี้จะขยายแนวคิดของทั้ง Miller และ Farnsworth [2], Theprod [4] และรตินันท์และคณะ [5] เพื่อหาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$

วัตถุประสงค์

เพื่อหาสูตรจำนวนช่องของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$

ขอบเขตของโครงงาน

ศึกษากระดานหมากรุกขนาดอนันต์ โดยจะพิจารณาเฉพาะกรณีการเดินม้าแบบ $(2, \mathrm{b})$ และหาสูตรจำนวนช่องของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์ และหาสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าหมากรุกแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาการเดินของม้าแบบปกติบนกระดาษหมากรุกขนาดมาตรฐาน
2. ศึกษาการเดินของม้าแบบ $(2, \mathrm{b})$ สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$ บนกระดานหมากรุกขนาดอนันต์
3. หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$
4. หาสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2, \mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$

ระยะเวลาที่จะศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินงาน	เดือน/ปีการศึกษา 2562								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและนำเสนอหัวข้อโครงงาน	■	■							
2. ดำเนินโครงงาน - ศึกษาการเดินของม้าแบบปกติ - ศึกษาการเดินม้าแบบ $(2,\mathrm{b})$ - หาสูตรจำนวนช่องของการเดิน. ม้าแบบ $(2,\mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$ - หาสูตรจำนวนช่องสะสมของการเดินม้าแบบ $(2,\mathrm{b})$ ไปถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$			■	■	■	■			
3. เขียนรายงานและนำเสนอ							■	■	■

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้หาสูตรของจำนวนช่องที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,\mathrm{b})$ ไปถึงได้ภายในการเดินไม่เกินจำนวน k ครั้ง และสูตรของจำนวนช่องสะสมที่ม้าสามารถเดินแบบ $(2,\mathrm{b})$ ถึงได้ในการเดิน k ครั้งเท่านั้น สำหรับจำนวนเต็มคี่ b บางจำนวนที่ $\mathrm{b} \geq 3$
2. ได้ฝึกฝนการคิด วิเคราะห์ ตั้งคำถาม และขยายปัญหา

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

Microsoft Word Microsoft Powerpoint Microsoft Excel กระดาษ A4 และ Flash drive

งบประมาณ

1. กระดาษ A4 1500 บาท

2. ค่าถ่ายเอกสาร 1500 บาท
3. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล 2000 บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] Chia, G. L. and Ong, S.-H. (2005). Generalized Knight's Tours on Rectangular Chessboard. Discrete Applied Math, 150, p. 80 - 89.

[2] Miller, A. M. and Farnsworth, D. L. (2013). Counting The Number of Squares Reachable in K Knight's Move. Open J. of Discrete Math, 3, p. 151 - 154.

[3] Schwenk A.L. (1991). Which rectangular chessboards have a knight's tour, Math. Magazine, 64, 325-332.

[4] Theprod, R. (2018). Formula for Number of Squares Reachable by A Knight. (Master's Thesis, Ramkhamhaeng University).

[5] รตินันท์ บุญเคลือบ อิ่มบุญ เนียมน้อย และ ราตรี เทพรอด. (2019). สูตรของจำนวนช่องที่ม้าหมากรุกเดินถึงได้แบบ (2, b) เมื่อ b ∈ {2, 4, 6, 8}. วรสารคณิตศาสตร์ ปริมา 64 เล่มที่ 698 พฤษภาคม - สิงหาคม 2562.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวประพิมพรรณ ศรสิทธิ์

ID 593 35316 23

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย